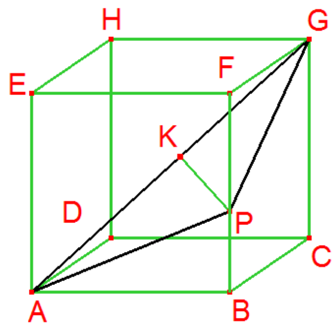
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 9 - 23 aprile 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABCDEFGH un cubo di lato unitario e sia P un punto sullo spigolo BF distante x da B (vedi figura).



1) Se P è il punto medio di BF, determinare la misura dell'altezza PK del triangolo APG.
2) Verificare che la misura dell'altezza PK del triangolo APG è data, in generale, da

$$\sqrt{\frac{2}{3}(1-x+x^2)}\ .$$

3) Determinare x in modo che la piramide GABP abbia volume 1/8 del cubo.
Giustificare tutte le risposte.

Commento

Abbiamo ricevuto due sole risposte: una da una classe seconda di una Scuola Secondaria di I grado e una da una classe seconda di Liceo Scientifico. Il problema poneva tre domande tutte riguardanti la stessa figura costituita da un cubo di lato unitario su uno spigolo del quale era fissato un punto che, con altri due vertici opposti del cubo, individuava un triangolo: nel primo quesito si chiedeva di determinare l'altezza relativa al segmento congiungente i vertici opposti nel caso particolare in cui il punto fosse il punto medio dello spigolo; nel secondo quesito si chiedeva di determinare in generale il valore di tale altezza in funzione della distanza di tale punto da uno degli estremi dello spigolo su cui giaceva; nel terzo quesito si chiedeva di determinare tale distanza nel caso particolare in cui la piramide, avente come vertici quelli del triangolo precedentemente discusso e un estremo dello spigolo sopra citato, avesse volume pari a 1/8 di quello del cubo.
In nessuna delle risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo corretto anche se è apprezzabile la soluzione inviata dalla Scuola Secondaria di I grado, che, com'era prevedibile, si è limitata a considerare il primo quesito. Vogliamo infine raccomandare una maggiore attenzione all'uso delle lettere che individuano i punti: un loro utilizzo troppo "disinvolto" può portare a risultati palesemente assurdi come l'attribuzione di tre lunghezze diverse a uno stesso segmento, mentre una attenta rilettura di quanto scritto avrebbe evitato errori di questo tipo.

Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:

LS “Pitagora”, Rende (CS)
Ist. Comp. “G. Deledda”, Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 2C
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

1)

$\overline{PB} \cong \overline{FP}$ [$\overline{PB} = \overline{FP}$]

$\overline{FB}=1$

$\overline{PB}=\frac{1}{2}$

$\overline{PB}=\sqrt{FP^2+FG^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ [$\overline{PG}=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{FG}^2}=\cdots$]

$\overline{GA}=\sqrt{AC^2+GC^2}=\sqrt{(1\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ [$\overline{GA}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{GC}^2}=\cdots$]

$\overline{PB}=\frac{\overline{GA}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ [$\overline{KG}=\frac{\overline{GA}}{2}=\cdots$]

$\overline{KB}=\sqrt{PG^2+KG^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ [$\overline{PK}=\sqrt{\overline{PG}^2-\overline{KG}^2}=\cdots$]

2)

$\overline{AP}=\sqrt{AB^2+PB^2}=\sqrt{1^2+X^2}$ [$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{PB}^2}=\sqrt{1^2+X^2}$]

$\overline{FP}=1-X$

$\overline{GA}=\sqrt{3}$

$\overline{PG}=\sqrt{FP^2+FG^2}=\sqrt{(1-X)^2+1^2}=\sqrt{X^2-2X+2}$ [$\overline{PG}=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{FG}^2}=\cdots$]

$A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-AP\right)\left(\frac{p}{2}-PG\right)\left(\frac{p}{2}-AG\right)}=$ [$Area(APG)=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-\overline{AP}\right)\left(\frac{p}{2}-\overline{PG}\right)\left(\frac{p}{2}-\overline{AG}\right)}$]

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1+X^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{X^2-2X+2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+X^2}-\sqrt{X^2-2X+2}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+X^2}+\sqrt{X^2-2X+2}-\sqrt{3}}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3X^2-6X+6}-X+2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3X^2-6X+6}+X-2}{2}\right)}=$$

$$= \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2}}$$

$$\overline{KP} = \frac{2\sqrt{\frac{X^2-X+1}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4\frac{X^2-X+1}{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}(X^2-X+1)}$$

3)

$A = \frac{PB \cdot BB}{2} = \frac{X}{2}$ $[Area(APB) = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{X}{2}]$

$V_P = \frac{A \cdot FG}{3} = \frac{\frac{X}{2} \cdot 1}{3} = \frac{X}{6}$ $[V_p = \frac{Area \cdot \overline{FG}}{3} = \cdots]$

$V_C = AB^3 = 1^3 = 1$ $[V_c = \overline{AB}^3 = \cdots]$

$$V_P = \frac{1}{8} V_C$$

$$\frac{X}{6} = \frac{1}{8} \cdot 1$$

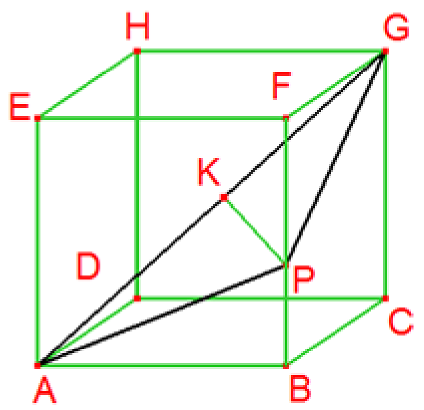
$$\frac{X}{6} = \frac{1}{8}$$

$$8X = 6$$

$$X = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Classe 2B
Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

1)



Per [[dimostrare]] [svolgere] questo punto abbiamo considerato i seguenti dati:

- Il cubo ABCDEFGH ha spigolo unitario;
- P è punto medio dello spigolo BF, quindi $\overline{BP} = \overline{PF} = \frac{1}{2}$
- Il segmento AG rappresenta la diagonale del cubo la cui lunghezza, avendo spigolo unitario, è pari a: $\overline{AG} = \sqrt{3}$.

Utilizzando questi dati di partenza, abbiamo svolto le seguenti osservazioni sul triangolo APG.

- I lati AP e PG del triangolo APG (tra loro congruenti) sono stati calcolati applicando il Teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ABP e PFG tra loro congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli ($\overline{AB} = \overline{FG}$ perché spigoli del cubo, $\overline{BP} = \overline{PF}$ perché P è punto medio del segmento BF, l'ampiezza degli angoli $A\hat{B}P = P\hat{F}G = 90°$);
- In particolare AP è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABP, mentre PG è l'ipotenusa del triangolo rettangolo PFG;

- Pertanto, $\overline{AP} = \overline{PG} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{PB}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Il segmento PK, quindi, rappresenta l'altezza del triangolo isoscele APG dove:

- i due lati obliqui congruenti $\overline{AP} = \overline{PG} = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
- la base $\overline{AG} = \sqrt{3}$.

Applicando nuovamente il Teorema di Pitagora al triangolo isoscele APG , perché suddiviso dall'altezza PK in due triangoli rettangoli congruenti, ciascuno dei quali ha per ipotenusa il lato obliquo (AP e PG) e per cateti l'altezza (proprio il segmento PK) e metà della base (KA e KG).

Pertanto, $\overline{PK} = \sqrt{\overline{PG}^2 - \overline{KG}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $[\cdots = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}} = \cdots]$

In conclusione, l'altezza $\overline{PK} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2)
[[…]]

3)
[[…]]