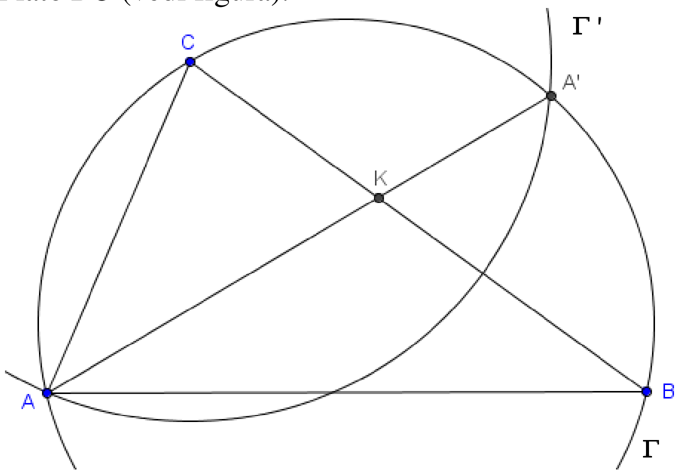
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" [(Edwin A. Abbott)]

Flatlandia 10-24 Maggio 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo nel quale l'angolo in A sia maggiore dell'angolo in B e siano Γ la circonferenza circoscritta al triangolo ABC e Γ' la circonferenza di centro C e passante per A.
Indichiamo con A' l'ulteriore punto di intersezione (diverso da A) tra Γ e Γ' e con K l'intersezione del segmento AA' con il lato BC (vedi figura).



a) Quale relazione sussiste tra i triangoli ABC e AKC ?
b) Quale relazione sussiste fra le aree del quadrato di lato AC e del rettangolo di lati KC e BC ?
c) Se l'angolo in A è retto, la relazione trovata in b) cosa diventa ?

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Abbiamo ricevuto otto risposte così suddivise: sei risposte da classi seconde di diversi Licei Scientifici e due da classi terze di Scuola Secondaria di I grado, entrambe facenti parte dello stesso Istituto Comprensivo.
Il problema, partendo da un dato triangolo ABC con una data relazione tra gli angoli in A e in B, prevedeva anche la costruzione di due circonferenze, una circoscritta al triangolo e l'altra avente il centro nel vertice C e passante per il vertice A. Si chiedeva poi di tracciare il segmento congiungente i due punti di intersezione A e A' delle due circonferenze, individuando in tal modo il punto di intersezione K tra tale segmento e il lato BC del triangolo. Il punto K diventava in tal modo il vertice di due triangoli AKC e AKB. Si chiedeva poi di dimostrare tre diverse proprietà geometriche, in parte tra loro collegate. Precisamente: *a*) individuare una relazione esistente tra il triangolo iniziale ABC e il triangolo AKC; *b*) individuare la relazione tra l'area del quadrato avente come lato il lato AC del triangolo ABC e l'area del rettangolo avente come dimensioni i segmenti KC e BC; *c*) dedurre a cosa si riduce la precedente relazione nel caso particolare in cui l'angolo in A del triangolo ABC sia retto.
Praticamente in tutte le risposte pervenute il problema viene risolto in ogni sua parte in modo sufficientemente corretto (salvo alcune imprecisioni nelle diverse dimostrazioni), tuttavia ci preme sottolineare due aspetti importanti della pratica geometrica da tenere presenti nei futuri elaborati: 1)

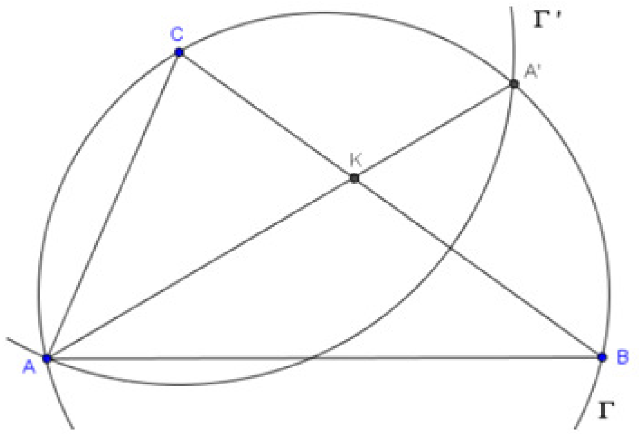
stabilito che, in generale, si indicano con una lettera latina maiuscola i punti caratteristici di una figura (vertici, punti di intersezione, ecc.) e con una terna di lettere un angolo (con il vertice al centro della terna) diventa di conseguenza improprio indicare un angolo di particolare ampiezza (nel caso specifico l'angolo retto) con la sola lettera R; 2) non è accettabile che si usino lettere per indicare punti di cui non è stata precisata in alcun modo la costruzione e che non compaiono in alcuna delle figure inserite nella soluzione. Infine, come sempre succede, vogliamo ribadire la necessità di distinguere tra un ente geometrico e la sua misura (in particolare tra un angolo e la misura della sua ampiezza e tra un segmento e la sua lunghezza).
Cogliamo infine l'occasione per augurare a tutti gli studenti e insegnanti buone vacanze, dando appuntamento al prossimo anno scolastico.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)
LS "XXV Aprile", Portogruaro (VE)
LS "Badoni", Lecco (LC)
LS Scienze Applicate, Istituto IIS "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
LS "Aristosseno", Taranto (TA)
Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Luca Loiodice, Classe 2B
Liceo Scientifico Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)



a)
Considero i triangoli ABC e AKC; essi hanno:

$A\hat{C}K \cong A\hat{C}B$ perché in comune

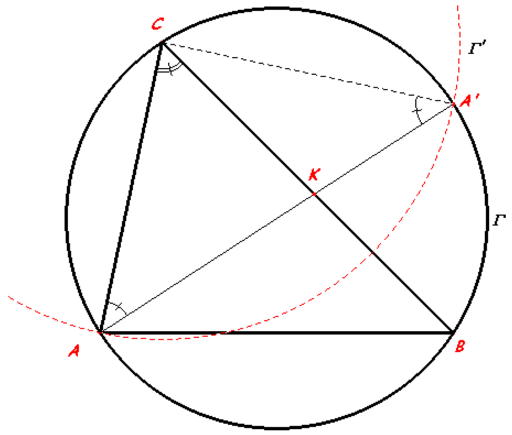
$C\hat{A}K \cong A\hat{B}C$ perché angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti (AC e A'C raggi

della [stessa] circonferenza di centro C)
$\Rightarrow$ I due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine.

b)
Ne segue: $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CK} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{CK}$.
Perciò il quadrato di lato AC e il rettangolo di lati KC e BC sono equivalenti.

c)
Se l'angolo in A è retto la relazione precedente diventa [[un'applicazione del]] [il] primo teorema di Euclide: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{CK}$ [bisogna però dimostrare che K è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa.

Chiara Caminotto, Giorgia Clementi, Anna Spagnolo, Classe 2C
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portogruaro (VE)



a)

Congiunto A con A', il triangolo $AA'C$ è isoscele per costruzione essendo A e A' equidistanti da C. Le corde AC e $A'C$ nella circonferenza Γ sono così congruenti e individuano archi congruenti che sono, rispettivamente, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{CA'}$.

Se consideriamo ora i triangoli ABC e AKC, essi sono simili per il 1° criterio di similitudine. Infatti:

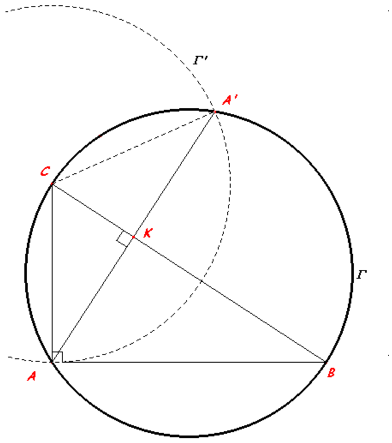
- l'angolo in C è in comune;
- $A\hat{B}C \cong C\hat{A}K$ in quanto insistono su archi congruenti.

b)

Dalla similitudine dei due triangoli potremo scrivere:

$CK : AC = AC : BC$ [$\overline{CK} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{BC}$], da cui segue $q(AC) \doteq r(CK;BC)$ [$\overline{AC}^2 = \overline{CK} \cdot \overline{BC}$]

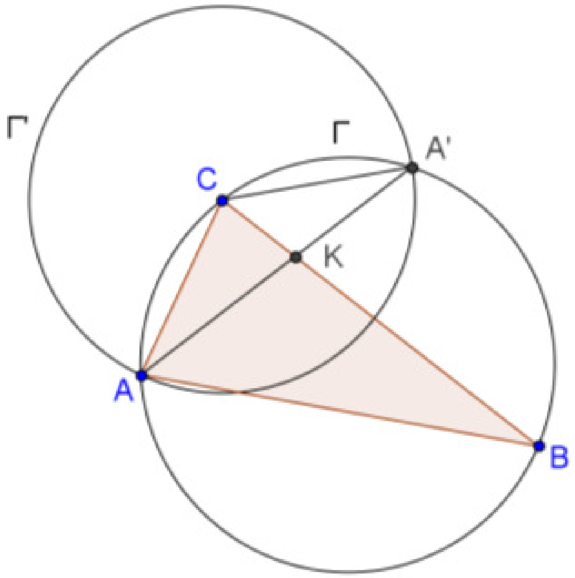
e pertanto il quadrato di lato AC è equivalente al rettangolo di lati CK e BC.



c)

Se l'angolo in A è retto il triangolo ABC è inscrivibile in una circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa BC. La relazione stabilita nel punto precedente è ancora valida e ci restituisce il [corrisponde al] 1° teorema di Euclide [bisogna dimostrare che AK è l'altezza relativa all'ipotenusa].

Matteo Beretta, Mattia Panzeri, Classe 2A
Liceo Scientifico Statale "Badoni", Lecco (LC)

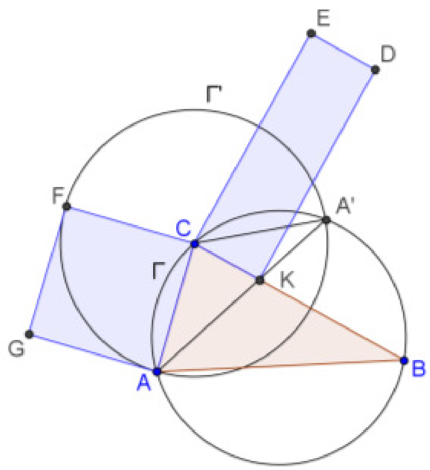


a)

1. $CA \cong CA'$ per ipotesi $\Rightarrow C\hat{A}K \cong C\widehat{A'}K$ perché ACA' triangolo isoscele
2. $C\hat{B}A \cong C\widehat{A'}K$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC
3. $C\hat{B}A \cong C\hat{A}K$ per transitività tra i punti i punti 1 e 2 [per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra angoli]
4. Considero i triangoli CAB e CAK:
    4.1. $C\hat{B}A \cong C\hat{A}K$ per 3

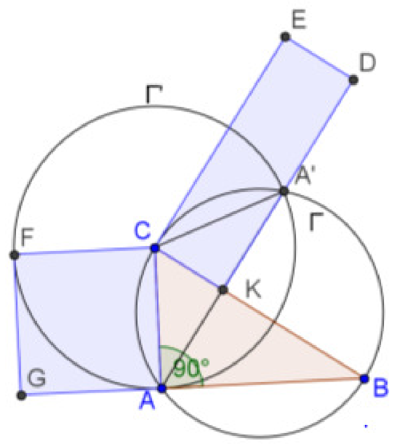
    $\Rightarrow A\hat{K}C \cong C\hat{A}B$ per somma di [perché la somma delle ampiezze degli] angoli interni in un triangolo [è cstante] $\Rightarrow$ il triangolo CAB $\sim CAK$ triangolo [e il triangolo *CAK* sono simili] per il primo criterio di similitudine

    4.2. $A\hat{C}B$ in comune



b)
[[…]]

c)



$A_{ACFG} \cong A_{CKJL}$ [J ed L cosa stanno ad indicare?] per tesi b) e $\hat{A} \cong \hat{R}$ [$\widehat{A}$ è retto] per costruzione $\Longrightarrow$ $A\hat{K}C \cong \hat{R}$ [$A\widehat{K}C$ è retto]

La relazione trovata nel punto b) in caso di angolo $\hat{A} \cong \hat{R}$ [in cui l'angolo $\widehat{A}$ sia retto] non è altro che l'enunciato del *primo teorema di Euclide* [se però si dimostra che *AK* è l'altezza relativa all'ipotenusa].

Andrea Lazzari, Classe 2T
Liceo Scientifico delle Scienze Applicate, IIS "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

a)
I triangoli ABC e AKC sono simili per il 1° criterio di similitudine in quanto hanno:
l'angolo ACB in comune e gli angoli KAC e CBA di uguale ampiezza perché il triangolo ACA' è un triangolo isoscele, perché [in quanto] i segmenti AC e A'C sono congruenti (entrambi raggi della circonferenza Γ').
Si ha perciò [che] gli angoli alla base di questo triangolo [sono] congruenti (CAA' = CA'A [∠CAA' ≅ ∠ CA'A]) ed essendo l'angolo CA'A congruente a CBA, perché entrambi insistono sullo stesso arco AC, per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza tra angoli] gli angoli KAC e CBA sono di uguale ampiezza.

b)
Per la relazione trovata nel punto a, si ha perciò la proporzione:
AC : CK = BC : AC [$\overline{AC} : \overline{CK} = \overline{BC} : \overline{AC}$]; per la [una] proprietà delle proporzioni il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi e ne consegue che: $AC^2 = BC \cdot CK$ [$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CK}$].
[[Anche tra le misure vale la stessa relazione: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CK}$]]
Siccome $\overline{AC}^2$ è la misura dell'area del quadrato di lato AC e $\overline{BC} \cdot \overline{CK}$ è la misura dell'area del rettangolo che ha per dimensioni BC e CK, questi due poligoni hanno la stessa area, cioè il quadrato di lato AC è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni BC e CK.

c)
Se l'angolo CAB fosse retto, CA e AB sarebbero i cateti e BC sarebbe l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC, la relazione trovata nel punto b diventa il 1° Teorema di Euclide ("Il cateto [nel nostro caso AC] è medio proporzionale tra l'ipotenusa [nel nostro caso BC] e la sua proiezione sull'ipotenusa [nel nostro caso CK] "), ergo vale la proporzione [relazione] trovata nel punto b: $AC^2 = BC \cdot CK$ [$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CK}$] [bisogna però dimostrare che *AK* è l'altezza relativa all'ipotenusa].

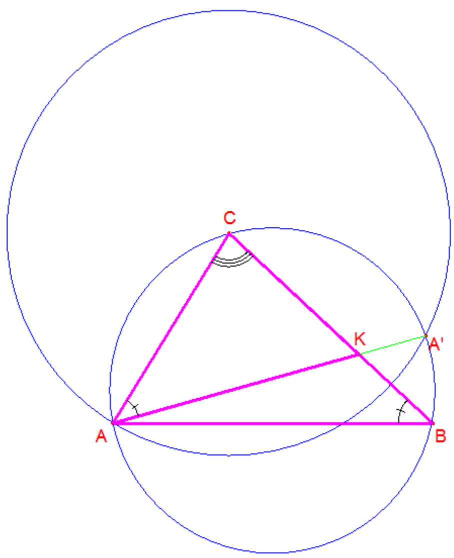
Alberto Novati, Alessandro Preti, Classe 2T
Liceo Scientifico delle Scienze Applicate, IIS "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

a)
Il triangolo BKA è simile al triangolo A'KC per il secondo criterio di similitudine: per il teorema delle corde in un cerchio vige la proporzione AK:KC=BK:KA' [$\overline{AK}:\overline{KC}=\overline{BK}:\overline{KA'}$] (tra i lati in proporzione vi sono gli angoli congruenti AKB e CKA' perché opposti al vertice). Quindi l'angolo CA'K è congruente a [all'angolo] ABC.
Considero il triangolo ACA': esso è isoscele poiché i lati CA' e CA sono entrambi raggio della circonferenza di centro C; di conseguenza gli angoli CAK e CA'K sono congruenti.
Per proprietà transitiva [della relazione di congruenza tra angoli] l'angolo ABC è congruente all'angolo CAK (angoli CAK = CA'K=ABC [$\angle CAK \cong \angle CA'K \cong \angle ABC$]). I triangoli ABC e ACK sono simili per il primo criterio: essi hanno due angoli congruenti, ossia l'angolo ACB in comune e ABC = CAK [$\angle ABC \cong \angle CAK$] per dimostrazione precedente.

b)
Poiché abbiamo dimostrato che [i triangoli] CAK e ABC sono simili allora CA:CK=BC:CA [$\overline{CA}:\overline{CK}=\overline{BC}:\overline{CA}$] (i rapporti tra i lati omologhi sono uguali). Per la [una] proprietà delle proporzioni il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, ossia CA^2 =BC*CK [$\overline{CA}^2=\overline{BC}\cdot\overline{CK}$].
Abbiamo dimostrato quindi la relazione di equivalenza tra il quadrato di lato AC e il rettangolo di dimensioni BC e CK.

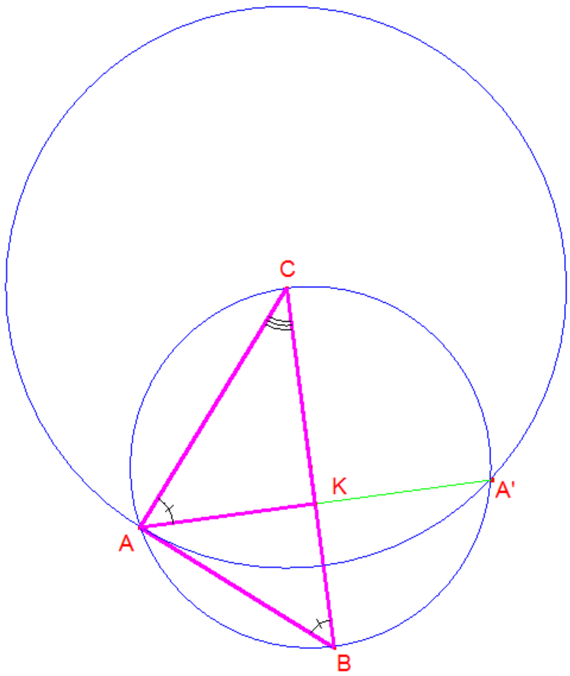
c)
Se l'angolo CAB fosse retto, CA sarebbe cateto e CB sarebbe ipotenusa del triangolo rettangolo ABC. Quindi per il primo teorema di Euclide ('Il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione'), vige la proporzione AC^2 [$\overline{AC}^2$] = BC [$\overline{BC}$] (ipotenusa) * CK [$\cdot\overline{CK}$] (proiezione di AC).
In conclusione se l'angolo CAB fosse retto, la relazione trovata in B sarebbe il [corrisponderebbe al] primo teorema di Euclide [se però *K* è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa].

Classe 2H
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



a)
I triangoli *ABC* e *AKC* sono simili per il primo criterio di similitudine. Essi hanno infatti l'angolo $A\hat{C}B$ in comune e gli angoli $C\hat{A}A'$ e $A\hat{B}C$ hanno uguale ampiezza poiché insistono sugli archi congruenti *AC* e *CA'* rispettivamente. (questi archi sono sottesi da corde congruenti perché raggi della stessa circonferenza di centro *C* e raggio *CA*).

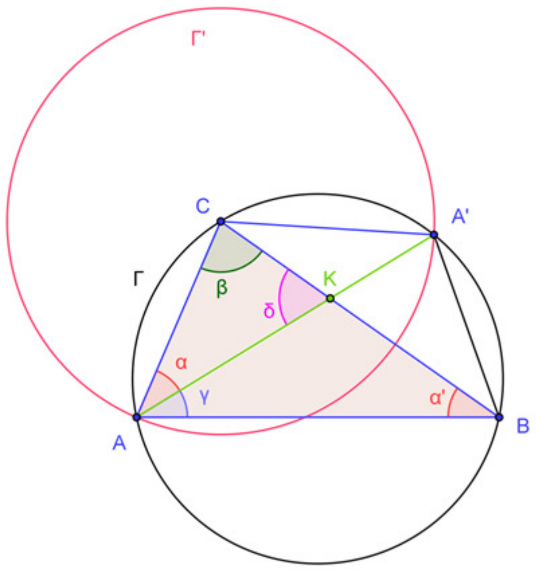
b)
Dalla similitudine dei triangoli *ABC* e *AKC* segue la proporzionalità fra lati omologhi, per cui ***BC* : *AC* = *AC* : *KC***, e, passando ai rapporti fra le misure, si ha che $AC^2 = BC \cdot KC$ [$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{KC}$]; ciò significa che il quadrato di lato *AC* è equivalente al rettangolo di dimensioni *BC* e *KC*.



c)
Nel caso in cui nel triangolo *ABC* l'angolo in *A* è retto , i triangoli *ABC* e *AKC* sono triangoli rettangoli in *A* e in *K* [perché?] rispettivamente. Il segmento *KC* è quindi la proiezione del cateto *AC* del triangolo *ABC* sulla sua ipotenusa *BC* .
La similitudine fra i triangoli *ABC* e *AKC* traduce in questo caso il I teorema di Euclide relativamente al cateto *AC* **:** ***BC* :*AC* = *AC* : *KC***
ovvero il cateto *AC* è medio proporzionale fra l'ipotenusa *BC* e la sua proiezione *KC* sull'ipotenusa; e quindi il quadrato di lato *AC* è equivalente al rettangolo di dimensioni *BC* e *KC*.

Classe 3B dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)
I segmenti A'C e AC sono congruenti in quanto raggi della circonferenza Γ'. Gli angoli α e α' hanno la stessa ampiezza perché sono angoli alla circonferenza Γ che insistono sulle corde A'C e AC [tra loro congruenti].
Nel triangolo ABC la somma degli angoli interni $\beta + \alpha' + (\alpha + \gamma) = \beta + 2\alpha + \gamma = 180°$
Nel triangolo AKC la somma degli angoli interni $\beta + \alpha + \delta = 180°$
da cui $\beta + 2\alpha + \gamma = \beta + \alpha + \delta$ e risolvendo si ottiene $\alpha + \gamma = \delta$.

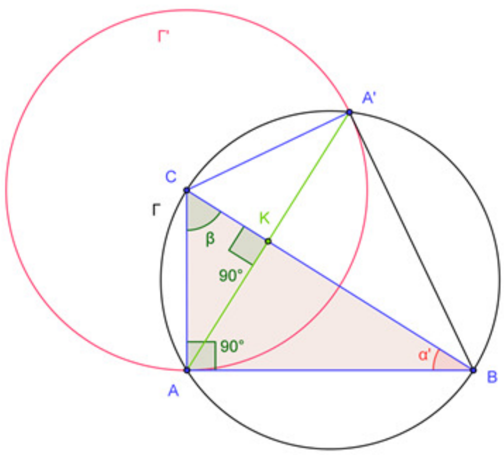


Poiché nei triangoli considerati, i tre angoli interni [corrispondenti] sono congruenti:

l'angolo β è comune ai due triangoli; α ≅ α'; δ ≅ (α+γ), possiamo affermare che **i triangoli AKC e ABC sono simili**.

b)

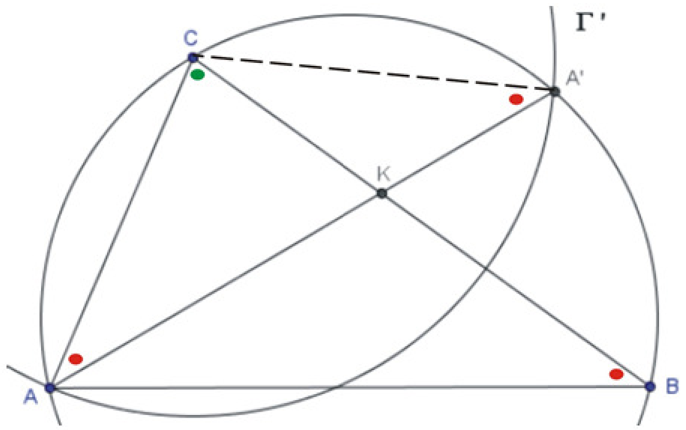
Poiché i triangoli AKC e ABC sono simili, i lati corrispondenti sono in proporzione e quindi: $\frac{AC}{BC} = \frac{KC}{AC} = \frac{AK}{AB}$ [$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}}$] e poiché AC = r [$\overline{AC} = r$] (raggio della circonferenza Γ), sostituendo si ottiene $\frac{r}{BC} = \frac{KC}{r} = \frac{AK}{AB}$ [$\frac{r}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KC}}{r} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}}$] da cui si ricava r : BC = KC : r [$r : \overline{BC} = \overline{KC} : r$] e, applicando la [una] proprietà fondamentale delle proporzioni, si ottiene r^2 = BC·KC [$r^2 = \overline{BC} \cdot \overline{KC}$]. Possiamo pertanto affermare che sussiste la seguente relazione: **l'area del quadrato di lato AC (raggio della circonferenza Γ) è equivalente [uguale] all'area del rettangolo di lati KC e BC.**



c)

Se l'angolo in A è retto, la relazione trovata in **b)** diventa il **Primo Teorema di Euclide**: nel triangolo rettangolo ABC, il quadrato costruito sul cateto AC è equivalente al rettangolo che ha per base l'ipotenusa BC e per altezza la proiezione KC del cateto stesso sull'ipotenusa [se AK è l'altezza relativa all'ipotenusa].

Classe 3D dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)

<u>I due triangoli sono simili.</u>

Siamo giunti a tale conclusione effettuando le seguenti osservazioni. Inizialmente abbiamo osservato che, poiché il segmento CA è raggio della circonferenza Γ', allora unendo i punti C e A' si ottiene un altro raggio di tale circonferenza. Pertanto il triangolo ACA' così ottenuto è isoscele.

Poiché un triangolo isoscele ha i due angoli alla base congruenti, allora $C\hat{A}A'$ e $C\hat{A}'A$ sono congruenti e conseguentemente, anche gli angoli $C\hat{A}'A$ e $C\hat{B}A$ sono congruenti poiché sono angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco (AC).

In conclusione, per il 1° criterio di similitudine, i triangoli ABC e AKC sono simili perché hanno due angoli ordinatamente congruenti, in particolare l'angolo $A\hat{C}B$ è congruente all'angolo $A\hat{C}K$ (per costruzione), e l'angolo $C\hat{B}A$ è congruente all'angolo $C\hat{A}K$ (per quanto dimostrato sopra). Poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni è sempre 180°, allora anche l'angolo $C\hat{A}B$ sarà congruente all'angolo $C\hat{K}A$.

b)

<u>La relazione è</u>: $AC^2 = KC \cdot BC$ [$\overline{AC}^2 = \overline{KC} \cdot \overline{BC}$]

Poiché i triangoli sono simili allora si può impostare la seguente proporzione:

KC : AC = AC : BC [$\overline{KC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{BC}$]

Per la [una] proprietà fondamentale delle proporzioni:

$AC \cdot AC = KC \cdot BC$ [$\overline{AC} \cdot \overline{AC} = \overline{KC} \cdot \overline{BC}$] dalla quale risulta che $AC^2 = KC \cdot BC$ [$\overline{AC}^2 = \overline{KC} \cdot \overline{BC}$]. Pertanto le due aree sono equivalenti [uguali].

c)

Se l'angolo in A è retto, allora il triangolo ABC è rettangolo e la relazione [[si traduce in un'importante applicazione della similitudine: il]] [corrisponde al] 1° teorema di Euclide [se AK è l'altezza relativa all'ipotenusa].