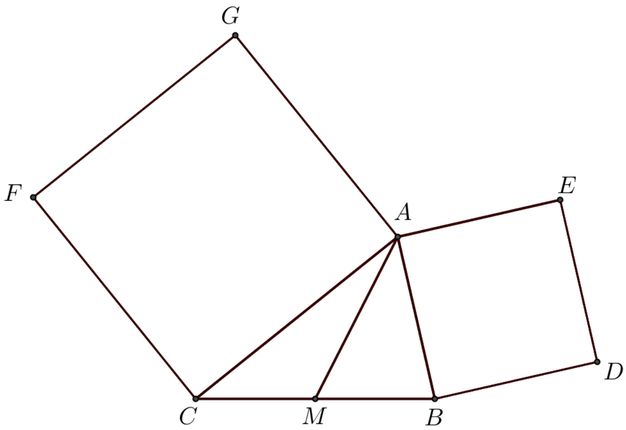
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* *(Edwin A. Abbott)

Flatlandia 11-25 Febbraio 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sui lati AB ed AC di un triangolo ABC ed esternamente ad esso, costruire i quadrati ABDE ed ACFG (vedi figura).



Dimostrare che:

a) *EG* è perpendicolare alla retta della mediana *AM* del triangolo *ABC* condotta da *A*;

b) $\overline{EG}$ è il doppio di $\overline{AM}$;

c) il quarto vertice *I* del parallelogramma i cui altri vertici sono, nell'ordine *E, A, G*, appartiene alla retta dell'altezza relativa al lato *BC* del triangolo dato.

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte due risposte: una da una classe seconda di Liceo Scientifico e una da una classe terza di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado). Dispiace nuovamente per l'esiguo numero di risposte giunte, dovuto probabilmente agli impegni scolastici e alla difficoltà che una prima lettura del testo lasciava intravedere.

Il problema poneva tre quesiti relativi a una stessa figura costituita da un triangolo su due lati del quale venivano costruiti, esternamente ad esso, due quadrati. Relativamente al terzo lato era poi tracciata la mediana. Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare che il segmento congiungente due determinati vertici dei due quadrati costruiti era perpendicolare alla retta della mediana indicata; nel secondo di dimostrare che il segmento suddetto aveva lunghezza doppia di quella della mediana e nel terzo di dimostrare che il quarto vertice del parallelogramma individuato dai lati dei due quadrati aventi in comune un vertice del triangolo apparteneva alla retta dell'altezza relativa sempre al terzo lato del triangolo.

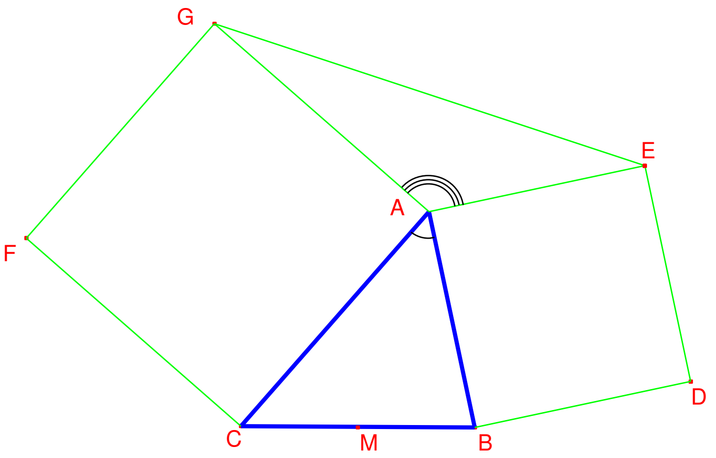
In una sola risposta vengono affrontati i tre quesiti, ma non mancano imprecisioni o affermazioni non completamente motivate. Ancora una volta si fa confusione tra una grandezza geometrica e la sua misura. Infine vogliamo sottolineare la necessità di evitare l'uso della stessa lettera per indicare punti diversi.

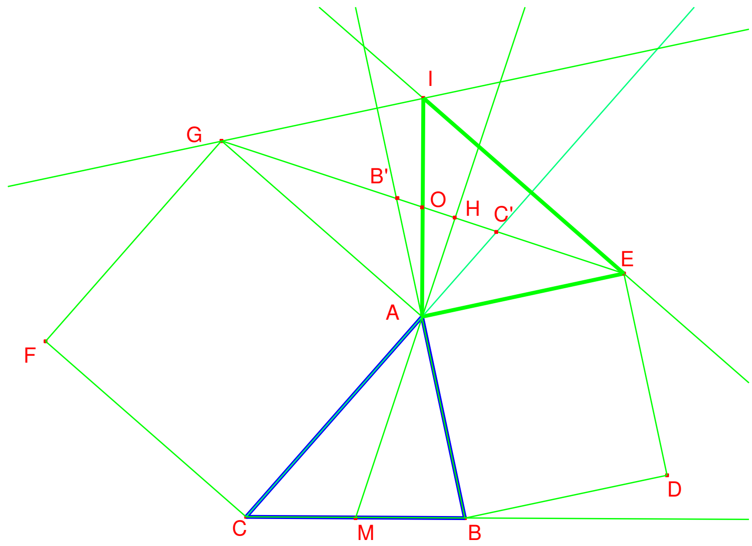
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
Ist. Comp. “G. Deledda”, Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Classe 2H, Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)





a)

Costruita la figura, osserviamo che gli angoli CAB e GAE sono supplementari, in quanto l'angolo giro in A è formato dai due angoli retti CAG e BAE e dalla somma dei due suddetti angoli.

Conduciamo poi dal punto E la parallela ad AG e dal punto G la parallela ad AE, ottenendo il parallelogramma AEIG. In esso, gli angoli GAE ed AEI sono anch'essi supplementari in quanto adiacenti al lato AE del parallelogramma e poiché GAE è supplementare di CAB, sarà CAB congruente ad AEI.

I triangoli ABC ed AEI sono perciò congruenti per il primo criterio di congruenza, essendo:

AB = AE [$\overline{AB} = \overline{AE}$] (lati del quadrato ABDE), AC = EI [$\overline{AC} = \overline{EI}$] (proprietà transitiva della [relazione di] congruenza [tra segmenti], poiché AC = AG [$\overline{AC} = \overline{AG}$] in quanto lati del quadrato ACFG e AG = EI [$\overline{AG} = \overline{EI}$] perché lati opposti del parallelogramma AEIG) e gli angoli CAB = AEI [intesi come angoli congruenti].

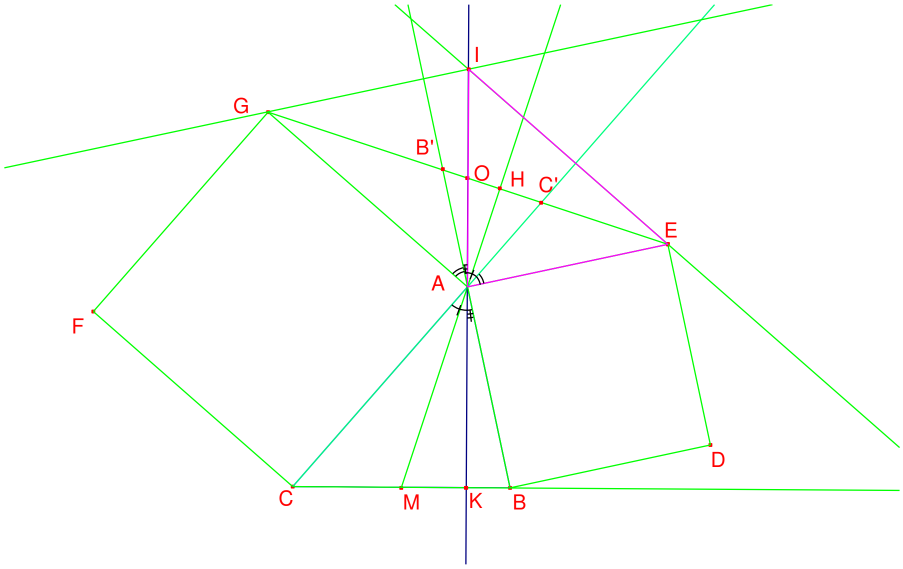
(Ovviamente anche il triangolo AGI è congruente ad ABC poiché la diagonale GE [AI] divide il parallelogramma in due triangoli congruenti).

Prolunghiamo ora la mediana AM del triangolo ABC, fino ad incontrare in H il segmento GE.

Dalla congruenza dei triangoli CAB ed AEI segue che ,essendo EO (= [congruente ad] AM) la mediana del triangolo AEI, gli angoli AOE [AEO] e BAM sono congruenti [occorre prima dimostrare la congruenza dei triangoli AOE e BMA].

E siccome anche B’AH [cos’è B’?] è congruente a BAM e B’AH è complementare dell’angolo EAH (poiché B’AM [B’AE] e [è] retto), anche AEO è complementare di EAH; quindi l’angolo EHA è retto, ovvero GE è perpendicolare alla retta di AM.

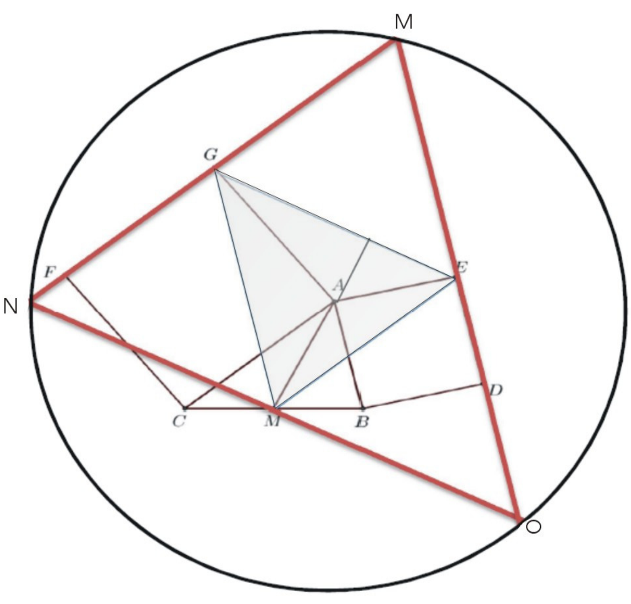
b)
È immediato osservare che GE [$\overline{GE}$] è il doppio di AM [$\overline{AM}$]. Poiché, infatti, le diagonali di un parallelogramma si incontrano nel loro punto medio, EO [$\overline{EO}$ è la metà di GE [$\overline{GE}$] ed EO = AM [$\overline{EO} = \overline{AM}$] perché, come già visto, i triangoli ABC ed AEI sono congruenti.



c)
Tracciamo la retta dell’altezza relativa alla base BC del triangolo ABC; essa incontra in K il lato CB del triangolo ed in O il segmento GE [perché?]. I punti I, A e K sono allineati in quanto gli angoli di vertice A e semirette opposte AI ed AK [occorre dimostrare che AI e AK sono semirette opposte] sono entrambi piatti (somme di angoli congruenti).

Classe 3D, Istituto Comprensivo “G. Deledda”, Ginosa (TA)

a) Dimostrare che il segmento EG è perpendicolare alla retta della mediana AM del triangolo ABC.



Osservando la costruzione proposta dal quesito, abbiamo subito unito i vertici GME, individuando un triangolo. Se il segmento EG è perpendicolare alla retta della mediana AM, allora, tale retta è l’altezza del triangolo GME (in particolare è proprio l’altezza rispetto al lato EG). Per dimostrare ciò, dopo aver costruito anche le altre altezze del triangolo GME, abbiamo tracciato nei punti G, M ed E tre rette parallele ai rispettivi lati opposti (ME, EG e GM), individuando all’intersezione delle tre rette i vertici di un nuovo triangolo MNO [ci sono due punti M nella figura]. Abbiamo osservato che i tre

punti G, M ed E diventano punti medi dei lati del triangolo MNO e le tre altezze del triangolo GME diventano assi del triangolo MNO.
I tre assi si incontrano nel punto A che, oltre a rappresentare l'ortocentro del triangolo GME, rappresenterà anche il circocentro del triangolo MNO, e quindi il centro della circonferenza ad esso circoscritta. Ma, poiché il segmento NO è parallelo a EG (per costruzione) e, per definizione, l'asse del segmento NO (che coincide con AM) è ad esso perpendicolare, allora la retta della mediana AM è perpendicolare a EG.
[Molte delle affermazioni fatte andrebbero meglio giustificate, ma abbiamo apprezzato lo sforzo, per una scuola media, di proporre comunque un ragionamento geometrico].