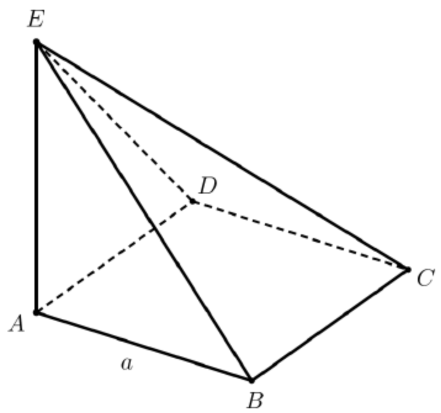
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***(Edwin A. Abbott)***

Flatlandia 10-24 Aprile 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

$ABCDE$ è una piramide a base quadrata la cui altezza AE (vedi figura) ha lunghezza a uguale a quella del lato della base.



a) Determinare le misure dei segmenti EB ed EC in funzione di a.
b) Qual è la natura del triangolo EBD?
c) Qual è la natura del triangolo EBC?
d) Qual è la relazione tra questa piramide $ABCDE$ e il cubo di spigolo a?
Giustificare tutte le risposte.

Commento

Abbiamo ricevuto dodici risposte così suddivise: tre da studenti diversi di una stessa classe prima di Liceo Scientifico, cinque da classi seconde, tutte di Licei Scientifici; una risposta proveniente da classe terza di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado) e altre tre sempre da classi terze di uno stesso Istituto Comprensivo.
Il problema poneva quattro domande (tutte relative alla stessa figura geometrica, cioè una particolare piramide a base quadrata): nel primo quesito si chiedeva di determinare la lunghezza di due spigoli di detta piramide; nel secondo e nel terzo si chiedeva di individuare la natura di due diversi triangoli; infine nel quarto si chiedeva di scoprire una relazione esistente tra la piramide iniziale e un determinato cubo.
Tutti rispondono in modo sostanzialmente coretto ai diversi quesiti, anche se non mancano alcune imprecisioni o affermazioni prive delle necessarie motivazioni. In alcune risposte si nota una confusione tra il Teorema di Pitagora (che esplicita una caratteristica fondamentale dei triangoli rettangoli) e il suo teorema inverso (che permette di stabilire se un triangolo è rettangolo). Infine alcuni confondono ancora un segmento con la sua lunghezza.

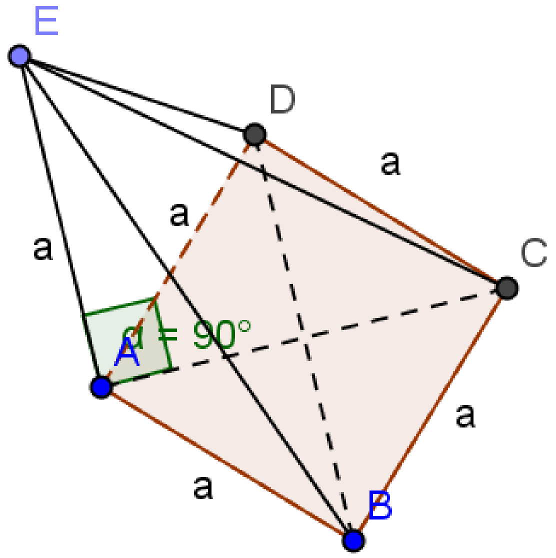
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS “C. Cafiero”, Barletta (BT)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS Scienze Applicate “A. Badoni”, Lecco (LC)

LS “XXV Aprile”, Portogruaro (VE)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
Scuola Media “G.B. Tiepolo”, Milano (MI)
Ist. Comp. “G. Deledda”, Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Oscar Abbatantuono, Falcone Giuseppe, Classe 1B
Liceo Scientifico Statale “Carlo Cafiero”, Barletta (BT)



a)

$EB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} = \sqrt{2}a$ [$\overline{EB} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} = \sqrt{2}a$]

$EC = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

[$\overline{EC} = \sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$]

[Occorrerebbe prima dimostrare che $\overline{AC} = \sqrt{2}a$]

b)

EB $= \sqrt{2}a$ [$\overline{EB} = \sqrt{2}a$]

DB [$\overline{DB}$] $= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} = \sqrt{2}$ [$\sqrt{2}a$] $\xRightarrow{implica}$ EB ≅ DB ≅ ED $\xRightarrow{per\ definizione}$ EBD triangolo equilatero

ED [$\overline{ED}$] $= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2} = \sqrt{2}a$

c)

EB [$\overline{EB}$] $= \sqrt{2}a$

EC [$\overline{EC}$] $= \sqrt{3}a$ $\xRightarrow{per\ definizione}$ EBC triangolo scaleno

BC [$\overline{BC}$] = a

Inoltre applicando il [l'inverso del] teorema di Pitagora ai lati del triangolo [[otterremo misure uguali a quelle che abbiamo]] [risulta soddisfatta la relazione pitagorica] quindi il triangolo EBC è un triangolo scaleno rettangolo. Infatti:

[[$EC = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$]]

[$\overline{EC}^2 = 3a^2 = a^2 + 2a^2 = \overline{BC}^2 + \overline{EB}^2$]

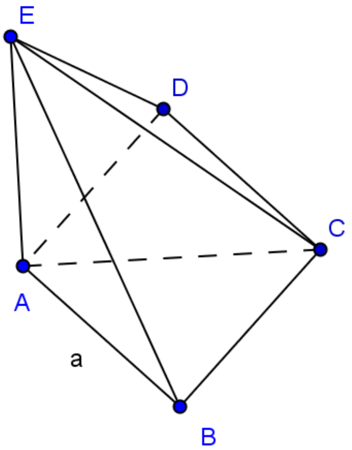
d)

$$Vpiramide = \frac{a^2 a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

$$Vcubo = a^3$$

$$R = \frac{Vpiramide}{Vcubo} = \frac{\frac{a^3}{3}}{a^3} = \frac{a^3}{3}\,\frac{1}{a^3} = \frac{1}{3}$$

Laura Marchisella, Classe 1B
Liceo Scientifico Statale "Carlo Cafiero", Barletta (BT)



a)
Consideriamo il triangolo rettangolo EAB, esso è isoscele poiché EA e AB sono congruenti.

EB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EAB, perciò [$\overline{EB}$] $EB_{(a)} = a\sqrt{2}$.

AC è la diagonale el quadrato ABCD, perciò [$\overline{AC}$] $AC_{(a)} = a\sqrt{2}$.

EB e AC sono dunque congruenti.

Consideriamo il triangolo rettangolo EAC, per calcolare l'ipotenusa EC basterà ricorrere al teorema di Pitagora.

$$EC_{(a)} = \sqrt{EA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}\,.$$

[$\overline{EC} = \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AC}^2} = \cdots$]

b)
Consideriamo il triangolo rettangolo EAD, esso è isoscele poiché EA e AD sono congruenti.

ED è quindi l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EAD, perciò [$\overline{ED}$] $ED_{(a)} = a\sqrt{2}$.

BD è la diagonale del quadrato ABCD, perciò [$\overline{BD}$] $BD_{(a)} = a\sqrt{2}$.

Essendo EB, ED e BD congruenti, il triangolo EBD è equilatero.

c)
Il triangolo EBC risulta essere congruente al triangolo EAC per il 3° criterio di congruenza.
$EA \cong BC$
$AC \cong EB$
EC in comune
Per questo motivo, anche il triangolo EBC è rettangolo e scaleno.

d)
Il volume della piramide ABCDE è dato dalla relazione:

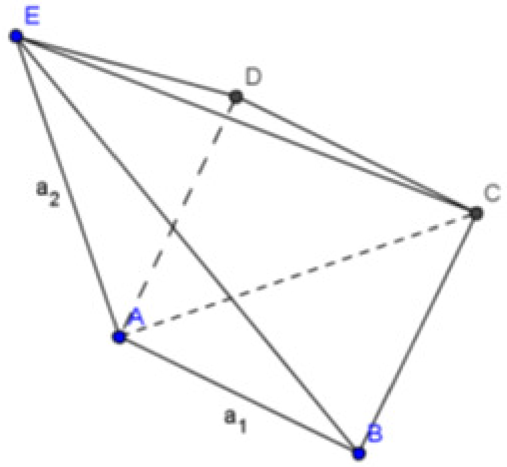
$$V = \frac{Sb \cdot h}{3} = \frac{a^2 \cdot a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Il volume del cubo di spigolo a è invece dato da:

$$V = l^3 = a^3$$

Il volume della piramide ABCDE sarà dunque $\frac{1}{3}$ del volume del cubo di spigolo a.

Vittoria Rizzitelli, Classe 1B
Liceo Scientifico Statale "Carlo Cafiero", Barletta (BT)



a)
EB [$\overline{EB}$] = $a\sqrt{2}$ perché il segmento EB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele ABE, che [la cui lunghezza] si ottiene moltiplicando il [la lunghezza del] cateto per $\sqrt{2}$.

EC [$\overline{EC}$] = $a\sqrt{3}$: consideriamo il triangolo EAC: EA[$\overline{EA}$]= a, AC[$\overline{AC}$] = $a\sqrt{2}$ (poiché [AC è] diagonale del quadrato di base); il triangolo in questione è rettangolo poiché il segmento AE è perpendicolare al piano di base, di conseguenza alla diagonale AC, pertanto si può calcolare [la lunghezza della] l'ipotenusa per mezzo del teorema di Pitagora:

EC [$\overline{EC}$] = $\sqrt{a^2} + (a\sqrt{2})^2 = \sqrt{a^2} + 2a^2 = \sqrt{3a^2} =$ $a\sqrt{3}$ [$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$]

b)
Il triangolo EBD è equilatero: consideriamo il triangolo EBD: EB=$a\sqrt{2}$; ED è la diagonale [l'ipotenusa] del triangolo rettangolo isoscele ADE, avente *a* come misura dei cateti, pertanto ED [$\overline{ED}$] = $a\sqrt{2}$. BD è la diagonale del quadrato di base, di conseguenza anch'essa misura $a\sqrt{2}$. Il triangolo EBD è equilatero poiché ha i tre lati congruenti.

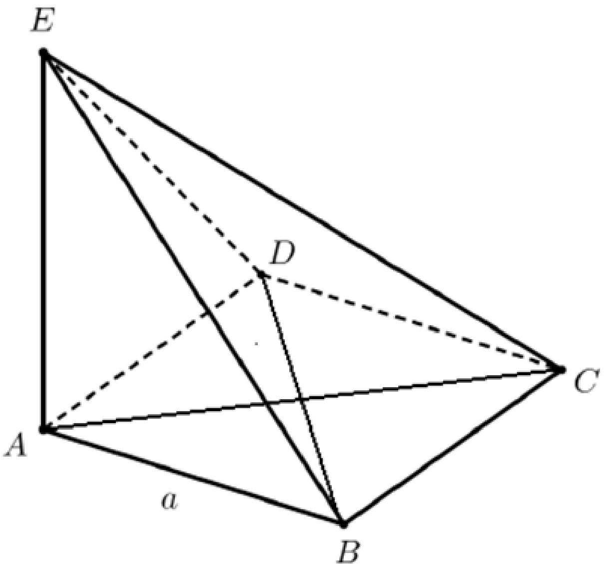
c)

Il triangolo EBC è scaleno [[acutangolo]] [rettangolo]. Del triangolo si sa che BC [$\overline{BC}$] = a, EB [$\overline{EB}$] = a$\sqrt{2}$ e BC [$\overline{BC}$] = a$\sqrt{3}$, come da dimostrazione precedente, i tre lati sono tutti diversi [di lunghezza diversa], quindi il triangolo è scaleno [inoltre…].

d)

La relazione tra [il rapporto tra i volumi di] questa piramide ABCDE e il cubo di spigolo *a* è $\frac{1}{3}$: il volume della piramide è $a^2 \cdot \frac{1}{3} a$ e il volume del cubo di spigolo *a* è a^3, perciò il loro rapporto è $\frac{a^2 \frac{a}{3}}{a^3}$= $\frac{\frac{1}{3}a^3}{a^3}$= $\frac{1}{3}$

Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)

Il triangolo EAB è isoscele perché:

- $EA \cong AB$ per ipotesi;
- Inoltre è rettangolo perché $AE \perp AB$ in quanto AE è altezza [della piramide]. Il triangolo in questione, quindi, è la metà di un quadrato di lato a.

Di conseguenza la misura dell'ipotenusa è uguale ad $a\sqrt{2}$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo EAC, rettangolo in $\hat{A}$ perché EA è altezza, si ha quindi che [e poiché] la misura di AC è uguale ad $a\sqrt{2}$ perché diagonale del quadrato $ADCB$ di lato a, allora la misura di EC è uguale a $\sqrt{EA^2 + AC^2}$ = [$\sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AC}^2}$] =

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

b)

Il triangolo EBD è equilatero in quanto:

- La misura di EB è uguale ad $a\sqrt{2}$ per dimostrazione precedente;

- La misura di DB è uguale ad $a\sqrt{2}$ perché diagonale del quadrato $ADBC$ di lato a;
- La misura di ED è uguale ad $a\sqrt{2}$ perché anche il triangolo AED è isoscele perché

  $EA \cong AD$ per ipotesi e rettangolo perché $EA \perp AD$ perché EA è altezza e quindi è la

  metà di un quadrato allora: $ED \cong EB \cong DB$

c)
I lati del triangolo EBC [[costituiscono un terna pitagorica]] [soddisfano la relazione pitagorica],

[le terne pitagoriche sono terne di numeri naturali a, b, c tali che $a^2 + b^2 = c^2$] di conseguenza il triangolo è rettangolo:

$$EC^2 = BC^2 + EB^2 \quad [\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{EB}^2]$$

$$(a\sqrt{3})^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

$$3a^2 = a^2 + 2a^2$$

$$3a^2 = 3a^2$$

Di conseguenza l'angolo $\hat{B}$[[è]] opposto [al lato EC] è retto.

d)
Il volume della piramide ABCDE si ottiene moltiplicando la superficie di base per l'altezza e dividendo per 3, cioè:

$[V_p =]\ V_p \frac{(a^2 \times a)}{3} = \frac{a^3}{3}$

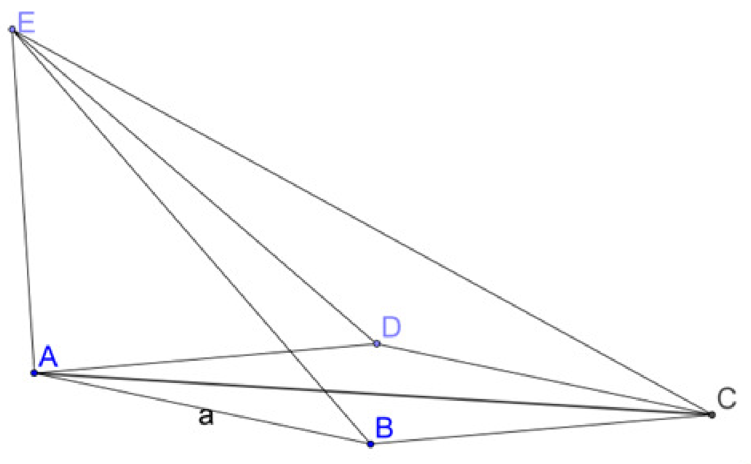
Il volume del cubo di spigolo a si ottiene elevando il lato al cubo, cioè:

$V_{c=}a^3$

Di conseguenza la relazione tra la piramide $ABCDE$ e il cubo di spigolo a è:

$V_C = 3\ V_P$

Sara Buzzi, Chiara Muzio, Laura Pelacchi, Nicolò Valsecchi, Classe 2A
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Badoni", Lecco (LC)



a)

Considero il triangolo *ABE*. Esso ha:

$$\begin{cases} \overline{AB} = a \text{ per ipotesi} \\ \overline{AE} = a \text{ per ipotesi} \\ E\hat{A}B = 90° \text{ poiché } AE \perp AB \text{ per ipotesi} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ per il teorema di Pitagora:

$$\overline{EB} = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a \; [\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2}\,]$$

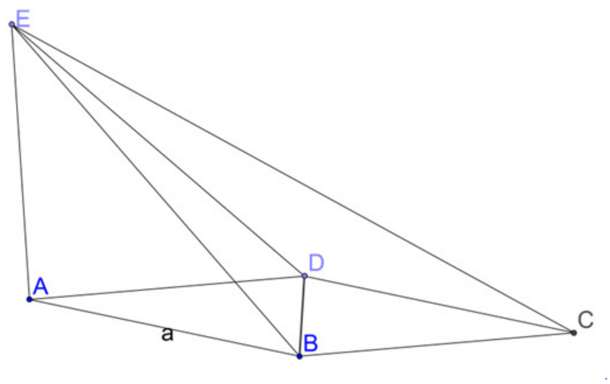
Traccio *AC*.

Considero il triangolo *EAC*. Esso ha:

$$\begin{cases} \overline{EA} = a \\ E\hat{A}C = 90° \\ \overline{AC} = \sqrt{2}a \text{ poiché diagonale del quadrato } ABCD \end{cases}$$

$\Rightarrow$ per il teorema di Pitagora:

$$\overline{EC} = \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$



b)

Traccio *BD*.

Considero il triangolo *EBD*. Esso ha:

$$\begin{cases} \overline{EB} = \sqrt{2}a \text{ per dimostrazione precedente} \\ \overline{ED} = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a \\ \overline{BD} = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a \end{cases}$$

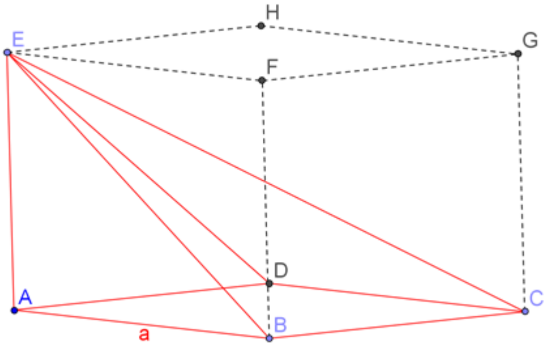
$\Longrightarrow$ $\overline{EB} = \overline{ED} = \overline{BD} = \sqrt{2}a \Longrightarrow EB \cong ED \cong BD \Rightarrow$ *EBD* equilatero

c)

Considero il triangolo *EBC*. Esso ha:

$E\hat{B}C = 90°$ per il teorema delle tre perpendicolari: dal punto *E* non appartenente al piano *ABCD* traccio la retta *EA*, perpendicolare per ipotesi al piano *ABCD*; dal piede *A* traccio la retta *AB* perpendicolare a *BC* (per ipotesi), allora la retta *EB* sarà perpendicolare a *BC*. [buona osservazione]

$\overline{EB}=\sqrt{2}a$ per dimostrazione precedente
$\overline{BC} = a$ per ipotesi
$\overline{EC}= \sqrt{3}a$ per dimostrazione precedente
$\Longrightarrow$ il triangolo EBC è scaleno e rettangolo



d)
Disegno un cubo di spigolo $\overline{AB} = a$.
Per quanto riguarda i volumi dei due solidi:

$$\begin{cases} \text{V cubo} = AB^3 = a^3 \\ \text{V piramide} = \frac{AB^2 \cdot AE}{3} = \frac{a^2 \cdot a}{3} = \frac{a^3}{3} \Longrightarrow \text{V piramide} = \frac{1}{3}\text{ V cubo} \end{cases}$$

Per quanto riguarda le aree totali dei due solidi considero i triangoli *ABE* e *ADE*. Essi hanno:

$$\begin{cases} AB \cong AD \text{ per ipotesi} \\ AE \text{ in comune} \\ EB \cong ED \text{ per dimostrazione precedente} \end{cases}$$

$\Rightarrow ABE \cong ADE$ per 3° criterio di congruenza
Considero i triangoli *BCE* e *CED*. Essi hanno:

$$\begin{cases} CE \text{ in comune} \\ EB \cong ED \text{ per dimostrazione precedente} \quad BC \cong CD \text{ per ipotesi} \end{cases}$$

$\Rightarrow BCE \cong CED$ per 3° criterio di congruenza
A tot piramide

$$= A_{ABCD} + 2A_{ABE} + 2A_{BCE} = AB \times BC + 2\frac{AB\times AE}{2} + 2\frac{BC\times BE}{2} = a^2 + 2\,\frac{a^2}{2} + 2\frac{a\times\sqrt{2}a}{2} =$$
$$a^2 + a^2 + \sqrt{2}a^2 = a^2(2+\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} \text{Atot cubo} = 6 \times \text{A base} = 6\,a^2 \\ \text{Atot piramide} = a^2(2+\sqrt{2}) \Rightarrow \frac{A_{totpiramide}}{A_{totcubo}} = \frac{a^2\,(2+\sqrt{2})}{6a^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \text{A tot piramide= A tot cubo } \frac{2+\sqrt{2}}{6} \end{cases}$$

Fabio Zoccolan, Classe 2C
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portoguaro (VE)

In base ai dati forniti dal testo del problema possiamo, innanzitutto, evidenziare che i triangoli *ABE*, *ACE* e *ADE* sono rettangoli in *A* con ipotenuse rispettivamente *BE*, *EC* e *DE* essendo *AE* perpendicolare al piano contenente la base della piramide.

a)
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ABE* abbiamo $\overline{EB} = a\sqrt{2}$.
Applicando sempre il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *ACE* con cateti *AE* e *AC* che misurano rispettivamente *a* e $a\sqrt{2}$, otteniamo $\overline{EC} = a\sqrt{3}$

b)
Il triangolo *EBD* è equilatero in quanto i suoi lati sono le ipotenuse di tre triangoli rettangoli isosceli (*ABD*, *ADE* e *ABE*) congruenti e aventi cateti di lunghezza pari ad *a*.

c)
Poiché nel triangolo *EBC* [risulta] $\overline{BC}^2 + \overline{EB}^2 = 3a = \overline{EC}^2$ [$3a^2$], il triangolo è rettangolo in *B* per l'inverso del teorema di Pitagora.

d)
Essendo il volume di un cubo di spigolo *a* pari ad a^3 e quello della piramide in questione $\frac{1}{3}a^3$ (area di base × altezza : 3) possiamo concludere che il rapporto tra il volume del cubo e [quello della] la piramide *ABCDE* è 3.

Chiara Caminotto, Classe 2C
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portoguaro (VE)

a)
Considerando che la piramide *ABCDE* è a base quadrata con lato *a*, gli angoli della base sono retti.
Avendo altezza *AE* congruente alla base *AB*, il triangolo *ABE* sarà di conseguenza isoscele su *BE*.
Secondo il teorema di Pitagora applicato a questo triangolo rettangolo, il quadrato costruito su *EB* è congruente [equivalente] alla somma di quelli costruiti sui cateti *AB* e *AE*, entrambi di lato *a,* avremo cioè $\overline{EB} = a\sqrt{2}$.
Considerando ora il triangolo rettangolo *EAC*, rettangolo in *A* per il fatto che l'altezza è perpendicolare alla base, l'ipotenusa *EC* ha lunghezza $a\sqrt{3}$ [occorreva prima dimostrare che $\overline{AC} = a\sqrt{2}$].

b)
Il triangolo *ADE* essendo *AE* perpendicolare ad *AD*, è rettangolo. Applicando sempre il teorema di Pitagora al triangolo ho che $\overline{ED} = a\sqrt{2}$.
Essendo *BD* la diagonale del quadrato *ABCD*, essa ha lunghezza $a\sqrt{2}$.
Il triangolo *EBD* avendo i tre lati di lunghezza $a\sqrt{2}$ è equilatero.

c)
Il triangolo *EBC* di lati:
- $\overline{EB} = a\sqrt{2}$
- $\overline{EC} = a\sqrt{3}$
- $\overline{BC} = a$

come calcolato in precedenza, risulta rettangolo in quanto $\overline{BC}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{EC}^2 = 3a$ [$3a^2$].

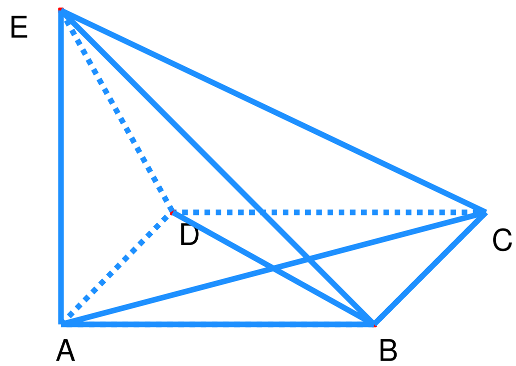
d)

Prendendo ora in esame i volumi, quello della piramide $ABCDE$ è: $\frac{1}{3}a^3$

il volume del cubo è: a^3

il loro rapporto sarà quindi: $\frac{V_{cubo}}{V_{ABCDE}} = 3$.

Classe 2H
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



a)
Essendo la retta dell'altezza EA della piramide perpendicolare al piano della base ABCD, essa è perpendicolare a tutte le rette uscenti dal suo piede A. Da ciò segue che i triangoli EAB, EAC ed EAD sono rettangoli in A. Nel triangolo EAB, rettangolo e isoscele, risulta:
$\overline{EB} = \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ (teorema di Pitagora)
Nel triangolo rettangolo EAC, il cateto AC è la diagonale del quadrato ABCD e la sua misura è $a\sqrt{2}$, mentre l'ipotenusa EC si ottiene da:
$\overline{EC} = \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ (teorema di Pitagora)

b)
Il triangolo EBD è equilatero essendo $\overline{ED} = \overline{EB} = \overline{DB} = a\sqrt{2}$

c)
Il triangolo EBC è rettangolo in B. Essendo infatti $\overline{BC} = a$, $\overline{EB} = a\sqrt{2}$ ed $\overline{EC} = a\sqrt{3}$, le misure dei suoi tre lati [[formano una terna pitagorica]] [soddisfano la relazione pitagorica]: $\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{EB}^2$, vale cioè [l'inverso del] il teorema di Pitagora.

d)
Il volume della piramide è $V = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{1}{3}a^3$; il volume del cubo è $V' = a^3$; perciò

$V = \frac{1}{3}V'$ il volume della piramide è pari ad $\frac{1}{3}$ di quello del cubo di spigolo a.
Nel cubo di spigolo *a* si possono infatti individuare tre piramidi equivalenti fra loro, avendo basi equivalenti e uguale altezza.

Alice Garbari, Classe 3I
Scuola Media Statale "G.B. Tiepolo", Milano (MI)

a)

Per ipotesi, AB $\cong$ EA e l'angolo $B\widehat{A}E$ è retto allora il triangolo EAB è metà di un quadrato in cui EB risulta essere la diagonale quindi, per il teorema di Pitagora,

$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{EA}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

EB è la diagonale di un quadrato di lato a quindi EB $\cong$ AC

Il triangolo EAC è rettangolo $\Rightarrow$ per il teorema Pitagora,

$\overline{EC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{EA}^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

b)

Il triangolo EBD è isoscele perché BD, essendo l'altra diagonale del quadrato ABCD, è congruente ad EB [ma è anche ED congruente a EB, quindi …]

c)

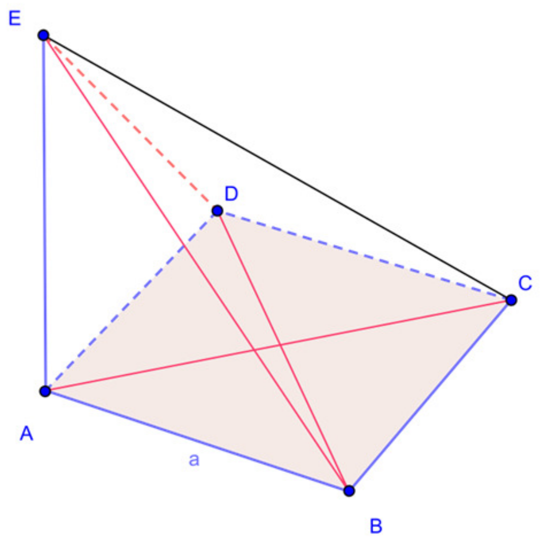
Il triangolo EBC è rettangolo perché congruente al triangolo ACE per il terzo criterio di congruenza dei triangoli, infatti EA $\cong$ BC (entrambi lunghi a), AC $\cong$ EB (entrambi lunghi $a\sqrt{2}$) ed EC in comune

d)

Il volume della piramide ABCDE è $\frac{1}{3}$ del volume del cubo di lato "a" in cui $\overline{EB} = a\sqrt{2}$ è la lunghezza della diagonale di ogni faccia ed $\overline{EC} = a\sqrt{3}$ è la lunghezza delle sue diagonali.

$\overline{V}_{piramide} = \frac{\overline{A}_b \cdot \overline{EA}}{3} = \frac{a^2 \cdot a}{3} = \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}a^3$ $\qquad$ $\overline{V}_{cubo} = \overline{A}_b \cdot \overline{EA} = a^2 \cdot a = a^3$

Michela Moretti, Classe 3A
Istituto Comprensivo "G.Deledda", Ginosa (TA)



a)
Segmenti EB ed EC

EB = [$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2}$] $\sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \times a$

EC = [$\overline{EC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{EB}^2}$]$\sqrt{BC^2 + EB^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3} \times a$ [bisogna prima vedere se il triangolo EBC è rettangolo]

b)
Triangolo EBD

DB = [$\overline{DB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2}$] $\sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \times a$

ED = [$\overline{ED} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2}$] $\sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \times a$

EB [$\overline{EB}$] = $\sqrt{2} \times a$

DB [$\overline{DB}$] = $\sqrt{2} \times a$

ED [$\overline{ED}$] = $\sqrt{2} \times a$

I lati sono tutti di lunghezza uguale perciò il triangolo sarà un triangolo equilatero.

c)
Triangolo EBC

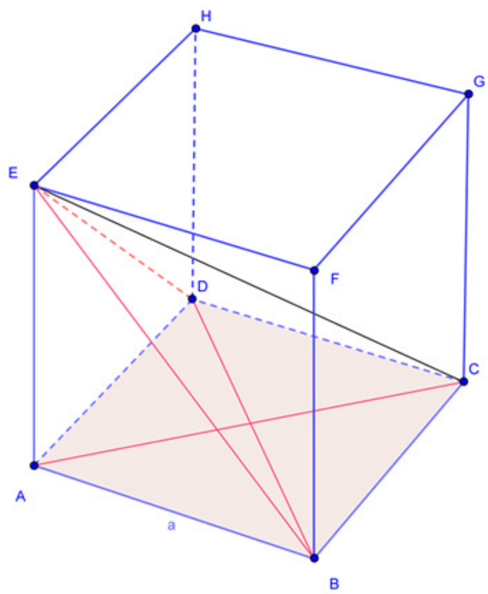
EB [$\overline{EB}$] = $\sqrt{2} \times a$

BC [$\overline{BC}$] = a

EC [$\overline{EC}$] = $\sqrt{3} \times a$

I lati sono tutti di lunghezza diversa perciò il triangolo sarà scaleno.

[Inoltre $\overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{EC}^2$, quindi …]



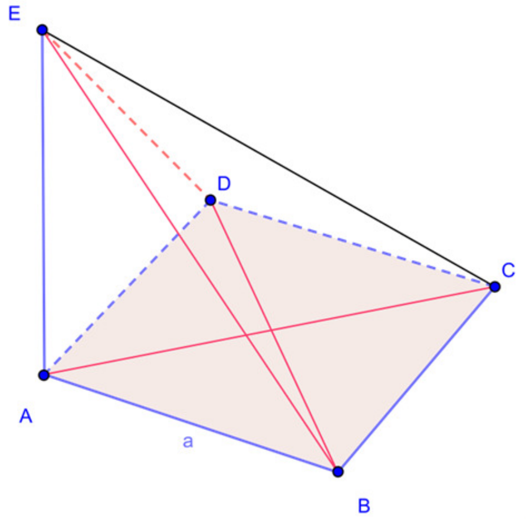
d)
Relazione tra la piramide ABCDE e il cubo di spigolo a.

Volume della piramide $= \frac{Ab \times h}{3} = \frac{a^2 \times a}{3} = \frac{a^3}{3}$

Volume del cubo di spigolo $a = l^3 = a^3$

La piramide ha il volume pari a $\frac{1}{3}$ del volume del cubo.

Classe 3B
Istituto Comprensivo "G.Deledda", Ginosa (TA)

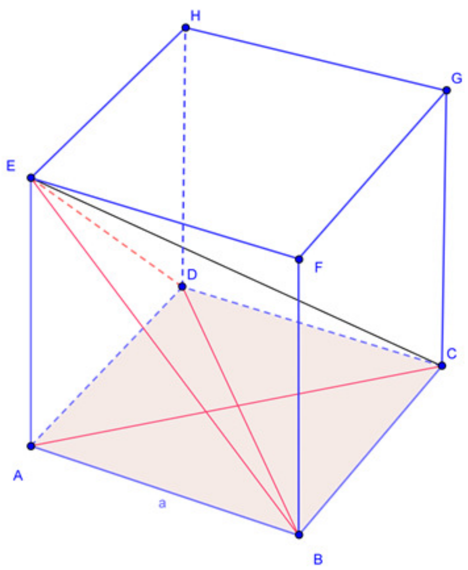


a)
Poiché $\overline{AB} = \overline{AE}$ = a ed essendo $\overline{AE}$ l'altezza della piramide, quindi perpendicolare ad $\overline{AB}$, possiamo calcolare $\overline{EB}$ in funzione di a applicando il teorema di Pitagora al triangolo isoscele rettangolo EAB, da cui $\overline{EB} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ che rappresenta inoltre la misura della diagonale del quadrato di base, pertanto $\overline{AC} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$. La misura di $\overline{EC}$ in funzione di a può essere calcolata applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo EAC, da cui $\overline{EC}$ $= \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Le misure dei segmenti EB ed EC in funzione di a sono: $\boldsymbol{\overline{EB} = a\sqrt{2}}$; $\boldsymbol{\overline{EC} = a\sqrt{3}}$.

b)
Poiché anche il segmento ED misura $a\sqrt{2}$ (è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele EAD), possiamo affermare che $\overline{EB} = \overline{BD} = \overline{DE} = a\sqrt{2}$ e concludere che **il triangolo EBD è un triangolo equilatero**.

c)
Considerato che $\overline{EB} = a\sqrt{2}$; $\overline{BC}$ = a ; $\overline{EC} = a\sqrt{3}$, verifichiamo l'uguaglianza espressa dal [teorema inverso del] Teorema di Pitagora: $\overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{EC}^2$. Sostituendo le misure dei segmenti calcolati in funzione di a risulta: $(a\sqrt{2})^2 + a^2 = (a\sqrt{3})^2$ e svolgendo i calcoli
$2a^2 + a^2 = 3a^2$ si ottiene $3a^2 = 3a^2$.
Possiamo pertanto affermare che il triangolo **EBC è un triangolo rettangolo**.

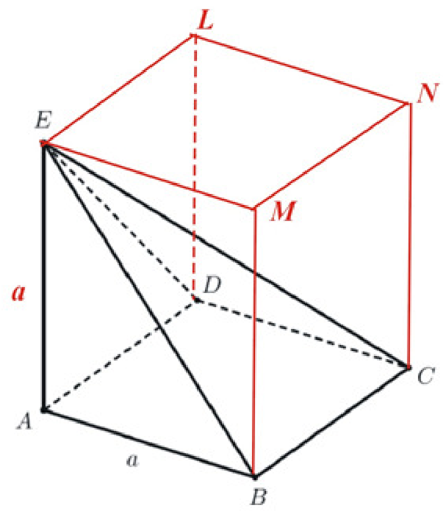


d)
Indicando con V_c il volume del cubo di spigolo a, otteniamo V_c = a.a.a = a^3. Indicando con V_p il volume della piramide ABCDE, con A_b l'area del quadrato di base della piramide e con h l'altezza della piramide, otteniamo $V_p = A_b \cdot h : 3$ e sostituendo i valori in funzione di a si ottiene

$V_p = a^2 . a : 3 = \frac{a^3}{3}$.

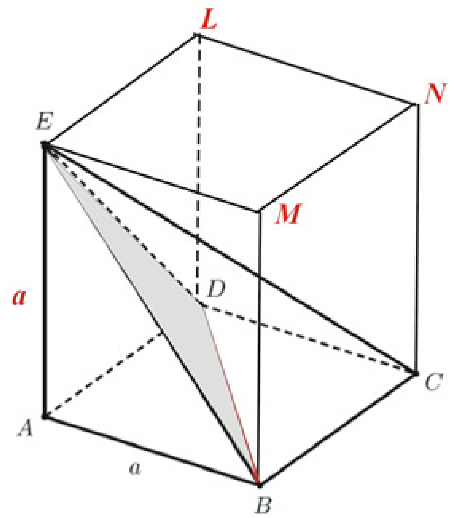
Poiché risulta $V_p = \frac{a^3}{3}$ e $V_c = a^3$, possiamo affermare che $\mathbf{V_p = \frac{1}{3} V_c}$.

Classe 3D
Istituto Comprensivo "G.Deledda", Ginosa (TA)

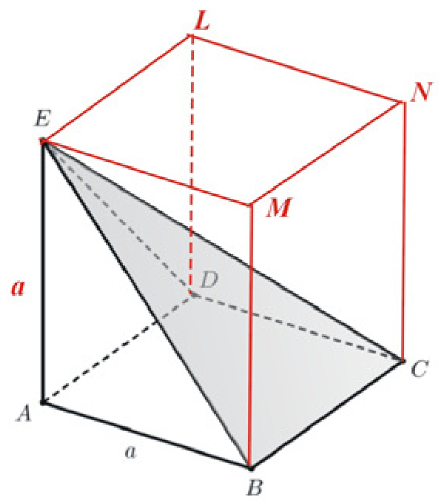


a)
Tracciando le parallele agli spigoli della piramide AB ed AE (che sono tra loro perpendicolari ed aventi la stessa lunghezza *a*), rispettivamente nei vertici E e B, abbiamo ottenuto il quadrato ABME (M è il punto d'intersezione tra le parallele tracciate) e osservato che il segmento EB rappresenta la diagonale di questo quadrato.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo EAB (che risulta anche isoscele), è stato possibile determinare la misura dell'ipotenusa EB (diagonale del quadrato ABME), che risulta: $\overline{EB} = a\sqrt{2}$.
Il segmento EC corrisponde alla diagonale del cubo, ottenuto tracciando le parallele agli altri spigoli della piramide.
Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo EAC risulta che: $\overline{EC} = a\sqrt{3}$ [occorrerebbe prima dimostrare che $\overline{AC} = a\sqrt{2}$]



b)
Il triangolo EBD è equilatero
Inizialmente abbiamo osservato che i segmenti EB, BD e DE (lati del triangolo EBD) rappresentano le diagonali di tre facce del cubo di spigolo *a* (ottenuto per costruzione).
Poiché, per definizione, un cubo è un prisma retto formato da 6 quadrati congruenti, allora anche le diagonali dei quadrati saranno congruenti.
Pertanto il triangolo EBD ha i tre lati congruenti, quindi è equilatero.
.



c)
Il triangolo EBC è rettangolo e per dimostrare ciò, abbiamo verificato la validità [dell'inverso del] Teorema di Pitagora per quel triangolo. In particolare, indicando con $\overline{EC}$ la misura dell'ipotenusa e con $\overline{EB}$ e $\overline{BC}$ la misura dei due cateti, deve risultare che:

$\overline{EC} = \sqrt{\overline{EB}^2 + \overline{BC}^2}$ sostituendo le rispettive misure

$a\sqrt{3} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}$

$a\sqrt{3} = \sqrt{2a^2 + a^2}$

$a\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

d)

[[Per definizione]] una piramide è equivalente ad un terzo di un prisma avente la base equivalente e l'altezza congruente rispettivamente alla base e all'altezza della piramide

Allora indicando con:

V_P il volume della piramide ABCDE (avente altezza lunga *a* e base congruente a quella del cubo),

V_C il volume del cubo di spigolo *a*,

la relazione tra i due poliedri è: [[$\frac{1}{3} \cdot V_P = V_C$]] [$V_P = \frac{1}{3} V_C$]