FLAT*landia*

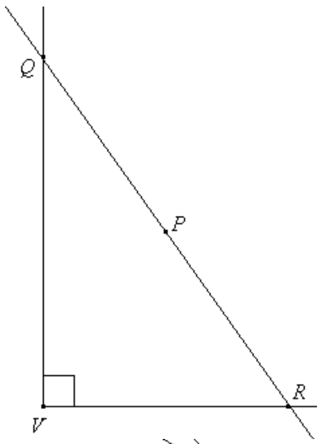
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* *(Edwin A. Abbott)

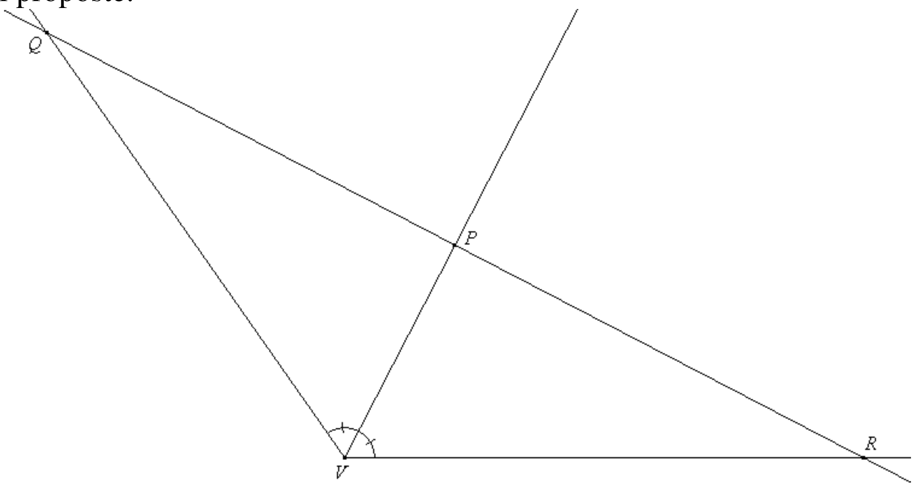
Flatlandia 7-21 Novembre 2011 - Commento e soluzioni ricevute

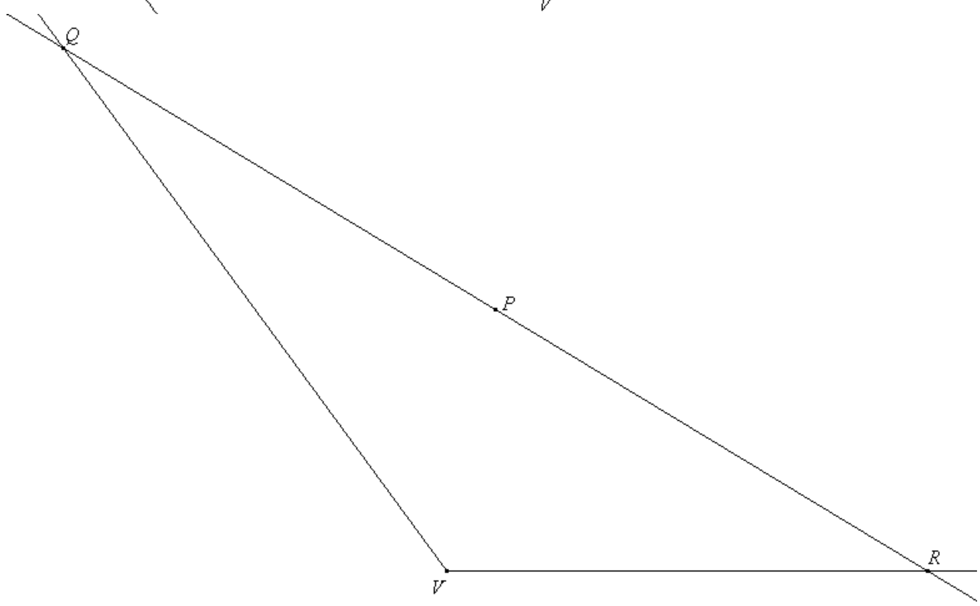
Il testo del problema:

1) Dato un angolo retto di vertice V e un punto P interno ad esso, costruire la retta r passante per P tale che, detti Q e R i punti di intersezione di r con i lati dell'angolo, risulti $\overline{PQ} = \overline{PR}$.
2) Dato un angolo di vertice V e minore di un angolo piatto, sia P un punto interno ad esso ed appartenente alla sua bisettrice. Costruire la retta r passante per P tale che, detti Q e R i punti di intersezione di r con i lati dell'angolo, risulti $\overline{PQ} = \overline{PR}$.
3) Dato un angolo di vertice V e minore di un angolo piatto, sia P un punto interno ad esso. Costruire la retta r passante per P tale che, detti Q e R i punti di intersezione di r con i lati dell'angolo, risulti $\overline{PQ} = \overline{PR}$.

Motivare tutte le costruzioni proposte.







Commento

Sono giunte otto risposte tutte da classi di Liceo Scientifico: cinque da una classe prima di un Liceo di Zurigo (Svizzera), due da due classi seconde di due diversi Licei e infine una da una classe terza.
Il problema poneva tre quesiti, di tipo costruttivo, con relativa motivazione. Nel primo quesito si chiedeva di costruire una retta passante per un punto generico interno a un angolo retto e soggetta a determinate condizioni; nel secondo di costruire una retta passante per un punto generico appartenente alla bisettrice di un dato angolo di ampiezza minore di un angolo piatto e di nuovo soggetta alla stessa condizione; nel terzo di costruire ancora una volta una retta passante per un punto generico interno a un angolo di ampiezza minore di un angolo piatto e sempre soggetta alla stessa condizione.
Rispondono correttamente ai quesiti gli studenti di seconda e terza Liceo, mentre non sono accettabili le risposte inviate dagli allievi della classe prima, perché spesso in esse vengono scambiate ipotesi e tesi, anzi a volte la dimostrazione si basa su una figura dove la tesi viene già utilizzata. Questo modo di procedere è abbastanza diffuso tra gli studenti che si cimentano per la prima volta nella dimostrazione di proprietà geometriche. È comunque apprezzabile il tentativo di arrivare alla proprietà richiesta attraverso "un ragionamento".

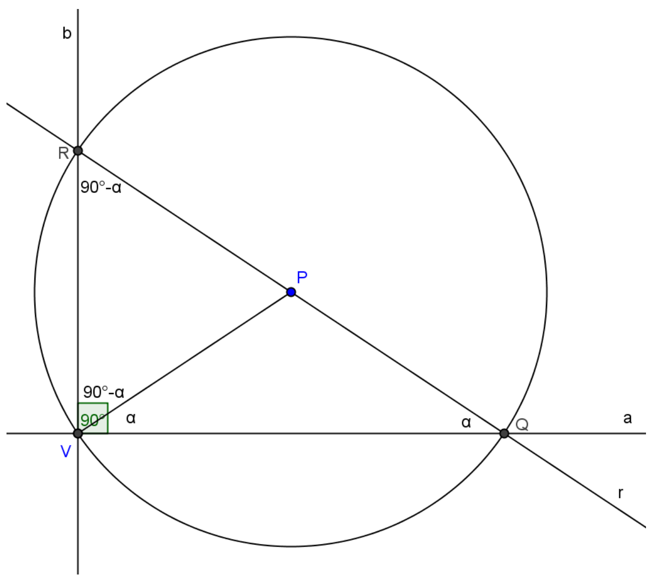
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
LS "L. Cremona", Milano
LS "P.M. Vermigli", Zurigo (Svizzera)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

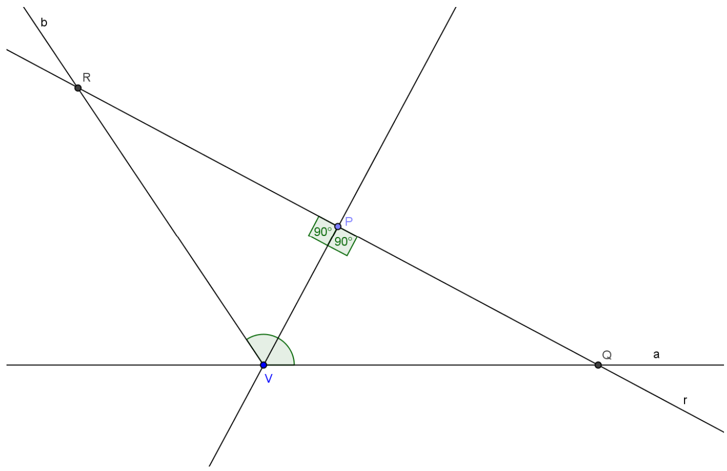
1)



Traccio la circonferenza di centro P e raggio $\overline{PV}$. Essa interseca il lato a dell'angolo in Q. Traccio la retta r passante per Q e P. Essa interseca il lato b dell'angolo in R. Sia $P\hat{Q}V = \alpha$. Allora

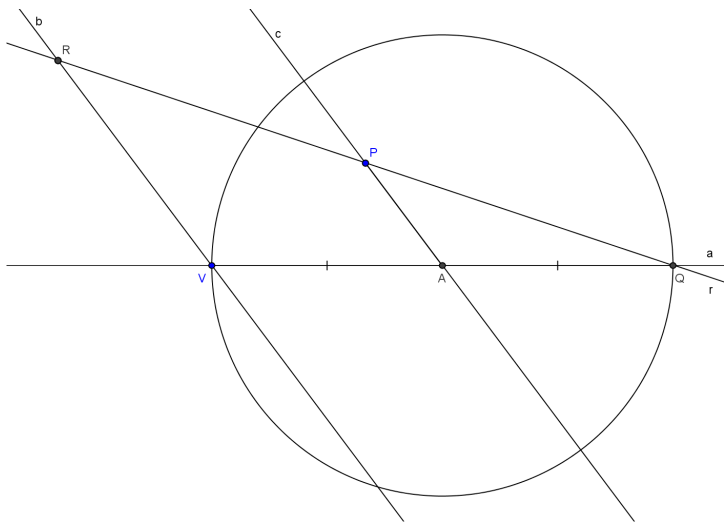
$V\hat{R}Q = 90° - \alpha$ e $P\hat{V}Q = \alpha$ poiché il triangolo PVQ è isoscele essendo $PV \cong PQ$ raggi di una stessa circonferenza. Quindi $R\hat{V}P = 90° - \alpha$ e il triangolo RVP è isoscele cioè $PR \cong PV$. Allora, per proprietà transitiva, $PR \cong PQ$.

2)



Traccio la retta r passante per P e perpendicolare alla bisettrice. Essa interseca il lato a dell'angolo in Q e il lato b dell'angolo in R. I triangoli RPV e QPV sono congruenti per il secondo criterio poiché hanno: il lato VP in comune, $R\hat{P}V \cong Q\hat{P}V$ perché entrambi retti e $R\hat{V}P \cong Q\hat{V}P$ perché VP è bisettrice di $R\hat{V}Q$ per ipotesi. Allora $RP \cong PQ$.

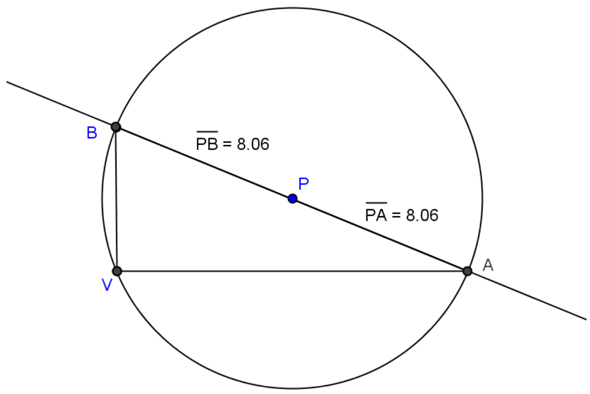
3)



Traccio la retta $c // b$ e passante per P. Essa interseca il lato a dell'angolo in A. Traccio la circonferenza di centro A e raggio $\overline{AV}$. Essa interseca a in Q. Traccio la retta r passante per Q e P. Essa interseca b in R. Per il teorema di Talete, dato che $VA \cong AQ$ perché raggi di una stessa circonferenza, $PR \cong PQ$.
C.V.D.

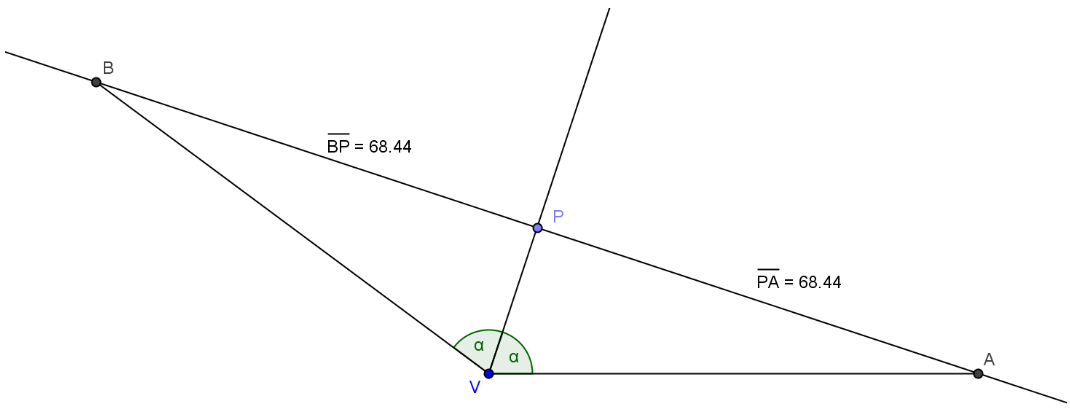
Kevin Palmerini, Classe 2A
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

1)



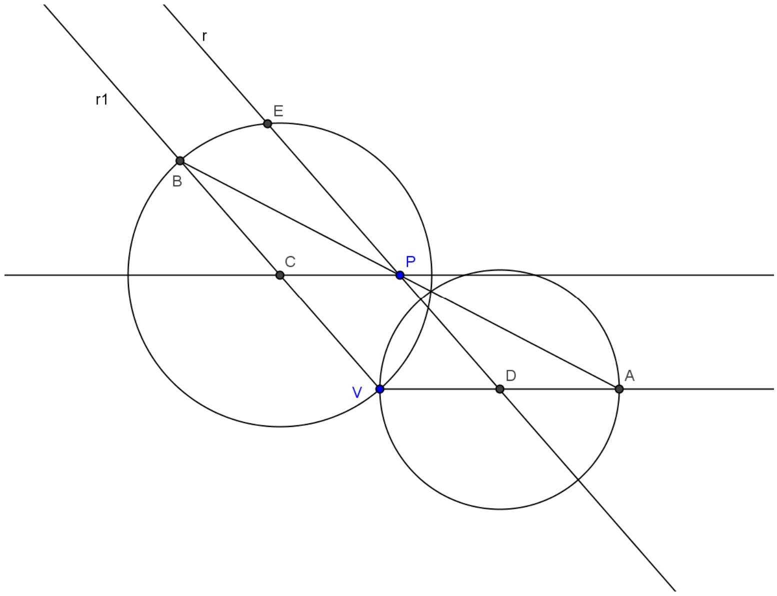
Conoscendo che l'ampiezza di $B\hat{V}A$ è 90° e prendendo un punto P all'interno di esso, poiché tale punto deve essere il punto medio del segmento con i vertici sui due lati dell'angolo, che otterremo con una costruzione, il triangolo che si formerà (triangolo rettangolo) deve essere inscrivibile in una circonferenza. Come nel disegno sopra riportato, otteniamo che i vertici del segmento AB (ipotenusa del triangolo) sono l'intersezione tra [una] la circonferenza di centro P con raggio $\overline{PV}$ e i lati dell'angolo. P è il punto medio poiché essendo il triangolo BVA rettangolo e inscritto nella circonferenza, ciò significa che l'ipotenusa è il diametro, ossia $\overline{BA}$ da ciò ne deriva che $\overline{PB} \cong \overline{PA}$ [di lunghezza] = raggio.

2)



Nella seconda parte della dimostrazione sappiamo che P$\in$ [appartiene] alla bisettrice dell'angolo $B\hat{V}A$ [la cui ampiezza è minore di 180°] e per trovare i punti B ed A basta tracciare [una] la retta s perpendicolare alla bisettrice nota passante per P. L'intersezione tra la retta s ed i lati dell'angolo, cioè i punti A e B, sono [fornisce] i punti cercati. Infatti per dimostrare la congruenza di $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ si utilizzano i criteri di congruenza dei triangoli e considero i triangoli BPV e PVA. Essi hanno $\overline{PV}$ in comune, $B\hat{V}P \cong P\hat{V}A$ per ipotesi e $B\hat{P}V \cong V\hat{P}A = 90°$ per costruzione. Essi sono congruenti per il 2° criterio dei congruenza dei triangoli e $\overline{PB} \cong \overline{PA}$.

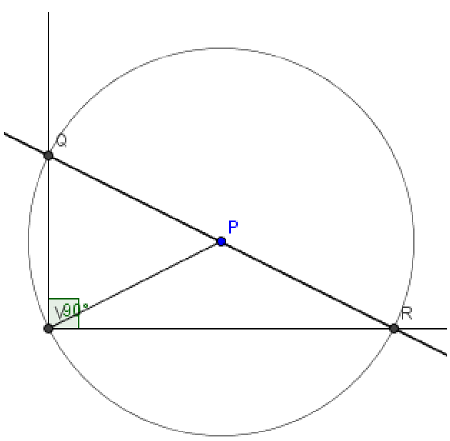
3)



In questa terza parte della dimostrazione P è un punto all'interno di $B\hat{V}A <$ [di ampiezza minore di] 180°. Per trovare i punti A e B determiniamo [prendiamo] P all'interno dell'angolo e tracciamo le rette parallele ai lati dell'angolo passanti per P. Le intersezioni di tali rette con i lati dell'angolo determinano i punti D e C; dopodiché disegniamo due circonferenze: una con centro in D e raggio $\overline{VD}$, l'altra con centro in C e raggio CV. I punti di intersezione tra i lati dell'angolo e le circonferenze li chiamiamo B ed A e questi sono i punti cercati. Infatti il quadrilatero CVDP è un parallelogramma. Allora $\overline{CP} \cong \overline{VD}$, ma $\overline{VD} \cong \overline{DA}$ e per la proprietà transitiva $\overline{CP} \cong \overline{DA}$, lo stesso ragionamento vale per $\overline{CB} \cong \overline{PD}$. Inoltre $D\hat{P}A \cong B\hat{P}E$ perché opposti al vertice; [per] l'angolo esterno [$P\hat{C}V$] del triangolo CPB [risulta] $P\hat{C}V \cong P\hat{D}V$ [perché angoli opposti di un parallelogramma di ampiezza comune α] [e $P\hat{D}V$ è] angolo esterno del triangolo PDA $\rightarrow$ $P\hat{D}A \cong P\hat{C}B$ [entrambi di ampiezza pari a $180° - \alpha$]; si ottiene così che i triangoli PDA e PCB sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli avendo due lati congruenti ed un angolo compreso tra di essi, quindi $\overline{PB} \cong \overline{PA}$.

Davide Toschi, Classe 2G
Liceo Scientifico "L. Cremona", Milano (MI)

1)



Costruisco la circonferenza di raggio PV e centro P. Siano Q e R le intersezioni delle circonferenza con i lati dell'angolo retto dato. Dimostro che Q, P e R sono allineati ossia che gli angoli $Q\hat{P}V$ e $V\hat{P}R$ sono supplementari.
Per costruzione:

QP ≅ VP, quindi per l'angolo esterno in P del triangolo isoscele VPQ vale $R\hat{P}V \cong 2\, Q\hat{V}P$

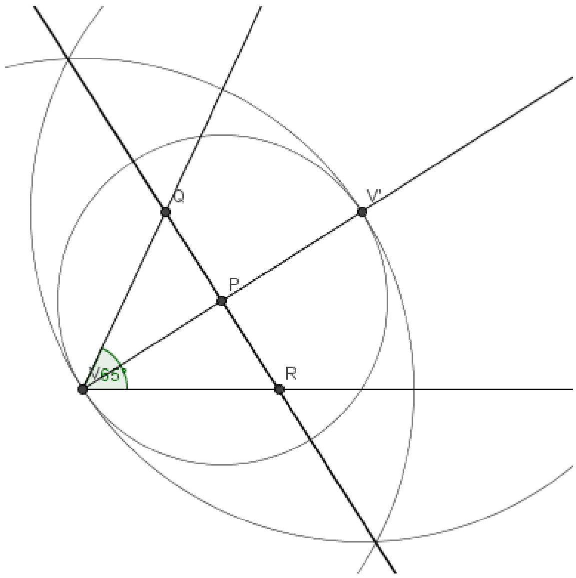
VP ≅ RP, quindi per l'angolo esterno in P del triangolo isoscele VPR vale $Q\hat{P}V \cong 2\, R\hat{V}P$

Ne segue che

$R\hat{P}V + Q\hat{P}V \cong 2\, Q\hat{V}P + 2\, R\hat{V}P \cong 2\, (Q\hat{V}P + R\hat{V}P) \cong 2\, Q\hat{V}R$

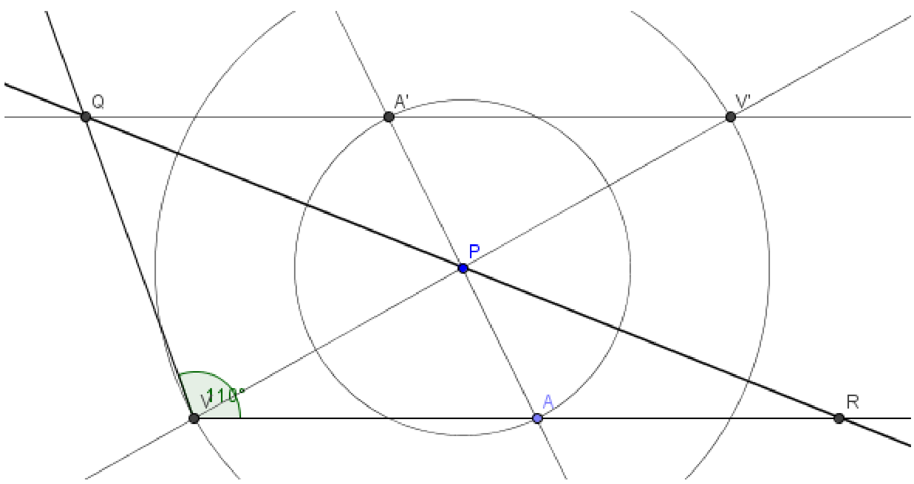
quindi $Q\hat{P}V$ e $V\hat{P}R$ sono supplementari.
Ne segue che la retta che passa per Q,P e R è la retta r cercata.

2)



Costruisco la circonferenza di raggio PV e centro P. Sia V' l'intersezione della circonferenza con la bisettrice. Costruisco quindi l'asse del segmento VV', congiungendo le intersezioni di due circonferenze di centro V e V' e aventi raggio VV'. Siano Q e R le intersezioni dell'asse con i lati dell'angolo dato.
Osservo che i triangoli VPQ e VPR sono congruenti per il secondo criterio di congruenza essendo VP in comune e $Q\hat{V}P \cong R\hat{V}P$ e gli angoli $Q\hat{P}V$ e $R\hat{P}V$ retti.
Ne segue che QP ≅ PR, quindi la perpendicolare per P è la retta r cercata.

3)



Costruisco la circonferenza di raggio PV e centro P. Sia V' l'intersezione della circonferenza con la retta passante per V e P. Preso un punto A su un lato dell'angolo, costruisco la circonferenza di raggio PA e centro P. Sia A' l'intersezione della circonferenza con la retta passante per P e A.
Per costruzione i due triangoli VPA e V'PA' sono congruenti per il primo criterio di congruenza essendo V$\hat{P}A$ ≅ V'$\hat{P}A$' (opposti al vertice), VP ≅ V'P, AP ≅ A'P.
Ne segue che la retta c passante per A' e V' è parallela al lato dell'angolo sul quale abbiamo preso il punto A, avendo gli angoli alterni interni congruenti.
Sia Q l'intersezione della retta c con il lato dell'angolo non parallelo e sia R l'intersezione della retta per Q e P con il lato parallelo a c.
Per il secondo criterio i due triangoli VPR e V'PQ sono congruenti, essendo V$\hat{P}R$ ≅ V'$\hat{P}Q$ (opposti al vertice), Q$\widehat{V'}P$ ≅ R$\hat{V}$P (alterni interni) e VP ≅ V'P per costruzione.
Ne segue che QP ≅ PR, quindi la retta per Q e P costruita come descritto è la retta r cercata.