FLATlandia

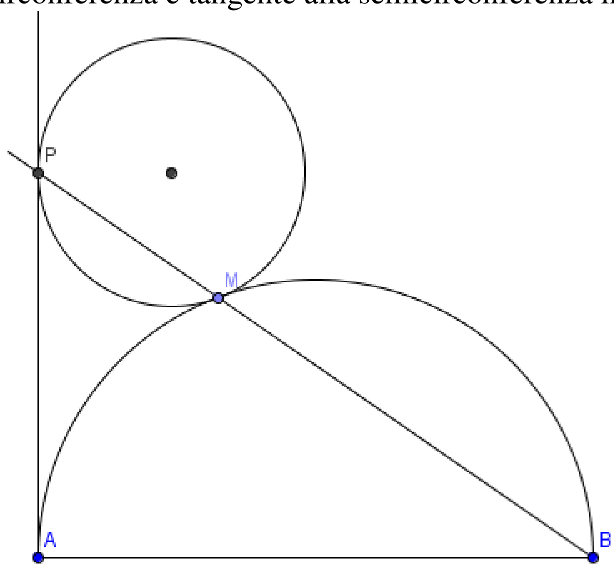
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***(Edwin A. Abbott)***

Flatlandia 12-26 Marzo 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sono date la semicirconferenza di diametro *AB* e la semiretta ad essa tangente in *A*. Preso un punto *M* sulla semicirconferenza si tracci la semiretta *BM* e sia *P* la sua intersezione con la tangente.

1) Provare che $\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$.
2) Costruire la circonferenza tangente in *P* alla semiretta *AP* e passante per *M*.
3) Provare che tale circonferenza è tangente alla semicirconferenza iniziale.



Commento

Abbiamo ricevuto ventisette risposte così suddivise: una da una classe prima di Liceo Scientifico, diciotto da classi seconde e tre da classi terze, sempre di Scuole Superiori (con decisa prevalenza del Liceo Scientifico come tipologia di scuola); sono inoltre arrivate cinque risposte da classi di Scuola Media (più precisamente di Scuola Secondaria di I grado), facenti parte di due Istituti Comprensivi, tre da Classe seconda e due di Classi terze.

Il problema poneva tre domande (tra loro collegate) e riguardava inizialmente una figura geometrica costituita da una semicirconferenza e da due semirette, una tangente e l'altra secante, aventi come origine gli estremi del diametro della semicirconferenza: nel primo quesito si chiedeva di dimostrare l'esistenza di una data relazione tra le lunghezze di alcuni segmenti presenti nella figura iniziale; nel secondo si chiedeva di costruire una circonferenza con determinate caratteristiche e nel terzo quesito si chiedeva di dimostrare la tangenza tra la circonferenza costruita e la semicirconferenza iniziale.

Quasi tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto alle prime due domande (anche se non mancano le imprecisioni), mentre, per quanto riguarda la terza domanda, pochissimi si mostrano in grado di effettuare correttamente la dimostrazione, probabilmente fuorviati da certe relazioni (come l'allineamento di certi punti o la concorrenza di certe rette) che la figura (costruita con un software di geometria dinamica) fa apparire come "evidenti" e che, invece, devono essere dimostrate.

È sempre presente l'abitudine a confondere un segmento con la sua lunghezza e un angolo con la sua ampiezza, con la conseguenza di utilizzare la stessa notazione per indicare due concetti diversi.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- LS “G. Galilei”, Adria (RO)
- LS “Alfano da Termoli”, Termoli (CB)
- LS “Don Milani”, Montichiari (BS)
- LS Scienze Applicate “B. Russell”, Cles (TN)
- LS “Archimede”, sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)
- LS “XXV Aprile”, Portogruaro (VE)
- LS Linguistico “G. Ferraris”, Taranto (TA)
- LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
- Istituto Comprensivo “G. Deledda”, Ginosa (TA)
- Istituto Comprensivo “G. Deledda”, Pattada (SS).

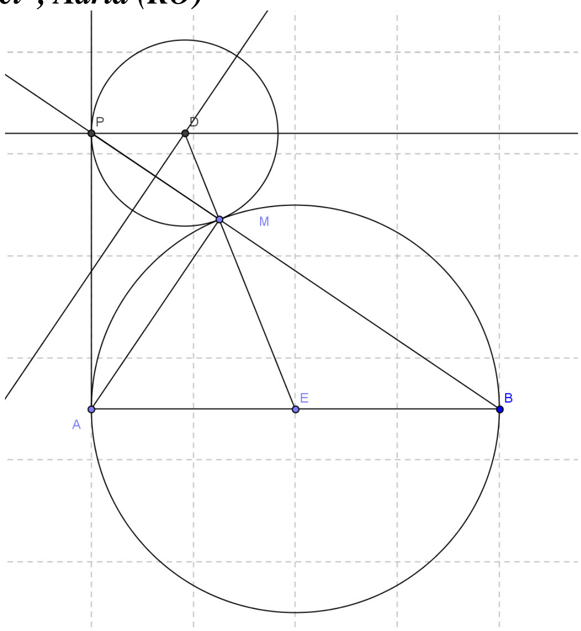
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Il gruppo di lavoro che gestisce FLAT*landia* è composto da:

- Ercole CASTAGNOLA - NRD Università di Napoli “Federico II”
- Giuliano MAZZANTI - Docente di Geometria, Università di Ferrara
- Valter ROSELLI - Ricercatore, Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
- Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica, LS "Galileo Galilei", Adria (RO)

Soluzioni

Giorgia Doni, Nicola Pivaro, Classe 3C
Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (RO)



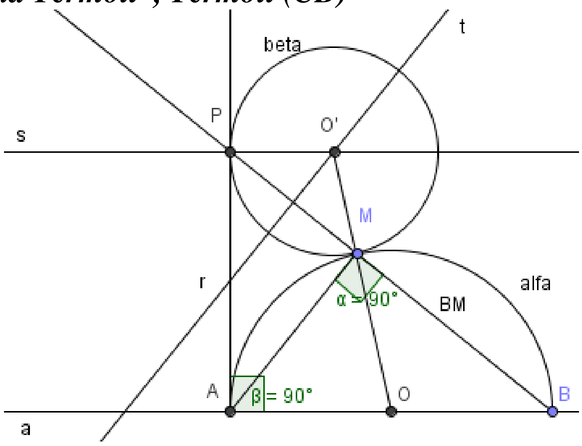
1)
La tesi da dimostrare è che: BM*BP=AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$]
Sostituendo AB^2 [$\overline{AB}^2$] con BM^2 + AM^2 [$\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2$] [perché?] e BP [$\overline{BP}$] con BM + MP [$\overline{BM} + \overline{MP}$] risulta: BM*(BM + MP) = BM^2 + AM^2 [$\overline{BM} \cdot (\overline{BM} + \overline{MP}) = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2$]
Quindi proseguendo con [svolgendo] i calcoli: BM^2 + BM*MP = BM^2 + AM^2 [$\overline{BM}^2 + \overline{BM} \cdot \overline{MP} = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2$] → BM*MP = AM^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{MP} = \overline{AM}^2$] e ciò risulta già dimostrato per [è quanto afferma] il secondo teorema di Euclide che dice che [il quadrato dell'] l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo [[al quadrato]] è uguale al prodotto [delle proiezioni dei due cateti] [[tra le porzioni di questa]] sull'ipotenusa.

2)
[[…]]

3)
Per dimostrare che la circonferenza per M e per P tangente alla semiretta AP è tangente alla circonferenza per A,B,M basta verificare che la somma dei due raggi, ovvero ME + DM [$\overline{ME} + \overline{DM}$] è uguale alla distanza tra i due centri ovvero DE [$\overline{DE}$] e quindi verificare che D appartiene alla retta EM.
Considero l'angolo APD che è retto ed è [ha ampiezza] uguale a ∠APM + ∠MPD [intesa come somma delle ampiezze]. Poiché anche PMA è retto allora ∠APM + ∠MAP risulterà essere [di ampiezza pari a] un angolo retto. Quindi si può scrivere ∠APM + ∠MPD = ∠APM + ∠MAP → ∠MPD = ∠MAP.
Considerando i triangoli rettangoli PMA e AMB poiché ∠MPA + ∠PAM = ∠PAM + ∠MAB = ∠MAB + ∠ABM risulta che ∠PAM = ∠ABM ed essendo il triangolo EMB isoscele su [sulla] base MB poiché avente come lati i raggi della circonferenza si può dedurre che ∠EMB = ∠EBM e riconducendoci alla dimostrazione precedente risulta che ∠EMB = ∠DMP. Ora poiché BP è [ha come sostegno] una retta e M le appartiene per ipotesi, essendo EMB e DMP angoli uguali e

opposti allora anche DE dovrà essere tale [avere come sostegno una retta con la proprietà che] [[e]] a DE dovrà appartenere il punto M.

Lorenzo Colombo, Classe 3C
Liceo Scientifico "Alfano da Termoli", Termoli (CB)



1)
[Indichiamo con:]Alfa [la] semicirconferenza di diametro AB e centro O, r [la] semiretta tangente in A ad alfa, M [il punto che] appartiene ad alfa, BM [la] semiretta con origine in B, P [[è]] il punto di intersezione tra la semiretta BM e la retta r
<u>TH:</u>
$BM*BP=AB^2$ (intendendo con il semplice nome dei segmenti le [[loro]] misure delle [loro] lunghezze)
DIMOSTRAZIONE:
Poiché la semiretta r è tangente in A per HP [ipotesi] ad Alfa, l'angolo BAP è un angolo retto. Traccio il segmento AM.
Il triangolo AMB, poiché risulta essere inscritto in una semicirconferenza, è un triangolo rettangolo

- AMB è un angolo retto

I triangoli AMB e ABP sono simili per il 1 criterio si similitudine poiché:

- BAP e AMB sono due angoli retti e quindi tra loro congruenti
- PBA è un angolo comune ad entrambi

⇨ BP : AB = AB:BM ; (intendendo con il semplice nome il segmento) poiché lati omologhi
BP : AB = AB : BM ; (intendendo da ora con il semplice nome la misura della lunghezza del segmento) per il teorema del rapporto
$BP * BM = AB^2$ per la proprietà fondamentale delle proporzioni

2)
La circonferenza da costruire è la circonferenza [che chiameremo] Beta di centro O' [per la costruzione di O' vedi oltre].
Se la circonferenza Beta è tangente in P alla semiretta AP, il raggio O'P di tale circonferenza è perpendicolare in P alla semiretta AP.

⇨ La retta s è perpendicolare alla semiretta r in P e ad essa appartiene O' (centro della circonferenza Beta)

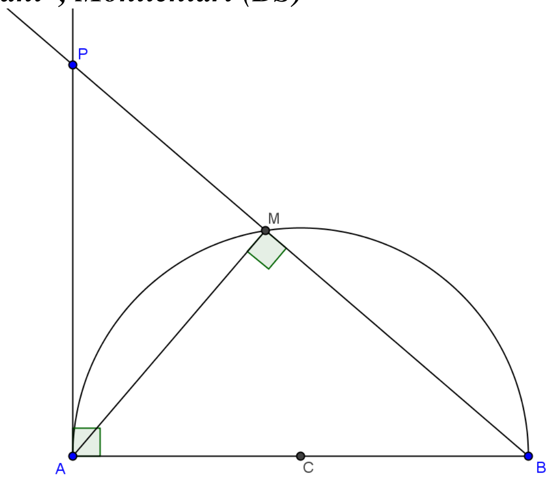
Tuttavia anche il punto M appartiene a Beta, quindi il segmento O'M è un raggio della circonferenza beta.

⇨ O'M e O'P sono entrambi raggi di Beta
⇨ O' appartiene alla retta s ed è equidistante da M e P

Disegniamo l'asse del segmento PM, la retta t, che per definizione è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento stesso
Il punto di intersezione tra l'asse t e la retta s è il proprio il punto O', centro della circonferenza Beta!

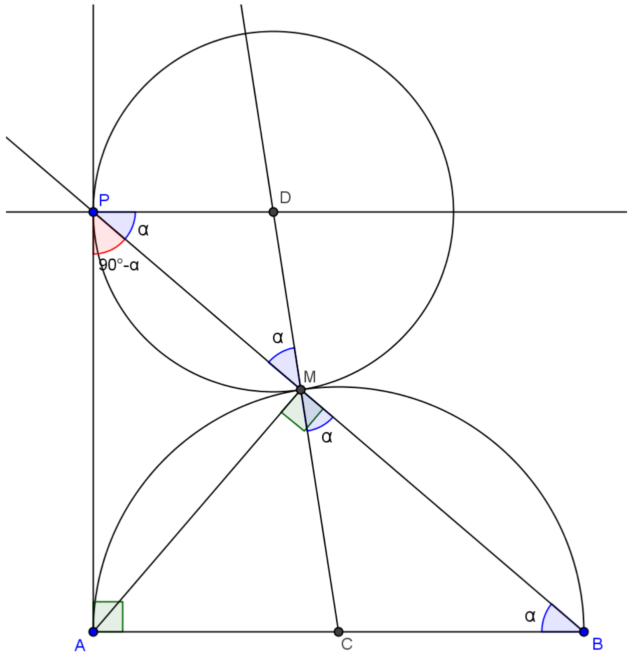
3)
[[…]]

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)



1)
Traccio AM. $A\hat{M}B = 90°$ perché il triangolo ABC [ABM] è inscritto in una semicirconferenza. Quindi AM è un'altezza del triangolo ABP. $P\hat{A}B = 90°$ perché angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza. Allora il triangolo ABP è rettangolo e AM è la sua altezza relativa all'ipotenusa. Quindi, per il 1° teorema di Euclide, $\overline{BM} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BP} \rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BP}$.

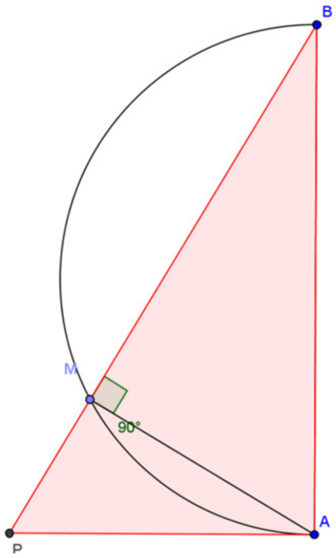
2)
Traccio la retta perpendicolare a PA passante per P. Traccio la semiretta CM e sia D il suo punto di intersezione con tale retta. AB//PD perché entrambe perpendicolari a AP. Allora, detto $M\hat{B}A = \alpha$, $D\hat{P}M = M\hat{B}A = \alpha$ perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele AB e PD con la trasversale PB. Il triangolo MCB è isoscele perché ha $MC \cong BC$ perché raggi della stessa semicirconferenza. Allora $C\hat{M}B = M\hat{B}C = \alpha$. Ma, poiché anche $D\hat{M}P = C\hat{M}B = \alpha$ perché angoli opposti al vertice, il triangolo PDM è isoscele, cioè $PD \cong DM$. Allora esiste la circonferenza di centro D passante per P e per M. Traccio tale circonferenza. Essa è tangente alla retta PA poiché il suo raggio PD ha un estremo su tale retta ed è perpendicolare ad essa.



3)

Il segmento DC è la distanza tra il centro della semicirconferenza e quello della circonferenza. Ma, poiché DM è il raggio della circonferenza, MC è il raggio della semicirconferenza e $\overline{DC} = \overline{DM} + \overline{MC}$, la distanza tra i centri è uguale alla somma dei raggi. Quindi la circonferenza e la semicirconferenza sono tangenti.

Stefano Baratelli, Elen Bergamo, Elia Cattani, Eleonora Cortelletti, Eleonora Forcone
Classe 2C, Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

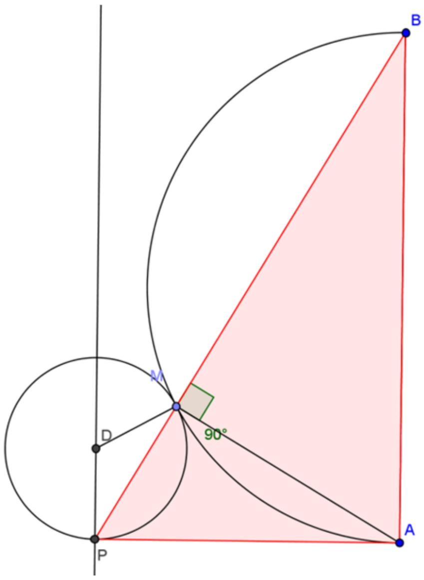


1)

BM*BP = AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$] perché:

- AP, la tangente ad [alla semicirconferenza nel punto] A è perpendicolare ad AB: per questo APB è un triangolo rettangolo.
- M è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa perché il triangolo AMB è rettangolo in M essendo inscritto in una semicirconferenza.
- per il 1° teorema di Euclide AB^2 [$\overline{AB}^2$] è uguale alla sua proiezione (BM [$\overline{BM}$]) sull'ipotenusa moltiplicato [moltiplicata] per l'ipotenusa stessa (BP [$\overline{BP}$]).

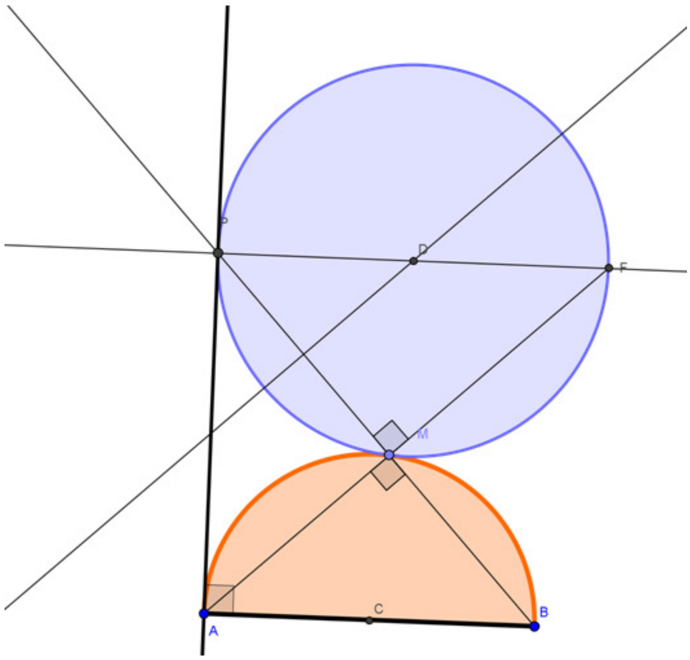
2)



per essere [Per costruire] una circonferenza tangente in P alla semiretta AP, il raggio PD deve essere perpendicolare ad AP. Il punto D è stato preso come intersezione dell'asse del segmento MP e la perpendicolare a [ad] AP chiamata [indicata con] DP.

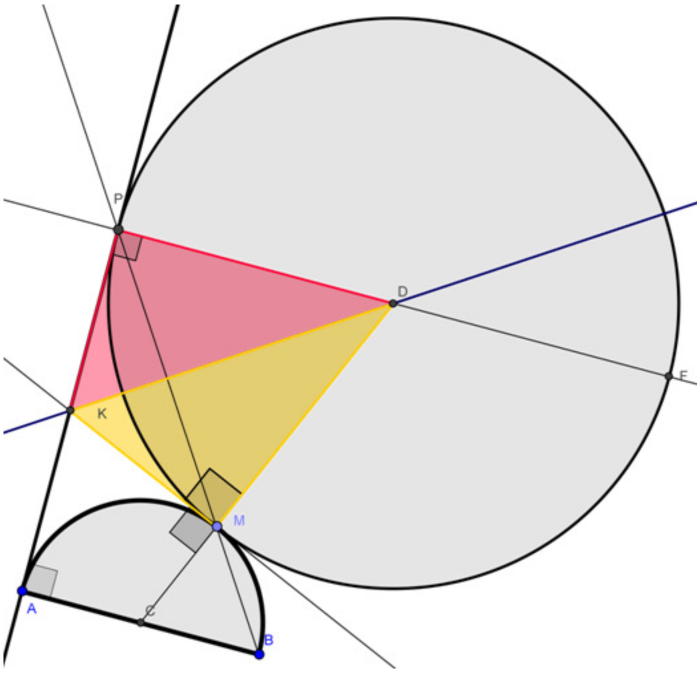
3)
[[…]]

Gianluca Bergamo,Federica Pedri, Classe 2C
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



1)
Considero il triangolo ABP. L'angolo [con vertice] in A è di [ha ampiezza pari a] 90° essendo il segmento [la semicirconferenza di diametro] AB tangente alla retta AP e l'angolo BMA è anch'esso si [di ampiezza pari a] 90° perché M punto sulla semicirconferenza e sottende il segmento AB, quindi risulta l'altezza del triangolo "grande" ABP rispetto ad [relativa all'ipotenusa] BP. Il segmento BM venutosi a formare è la proiezione del segmento AB su BP.

Per il primo teorema di Euclide: BM*BP = AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$]



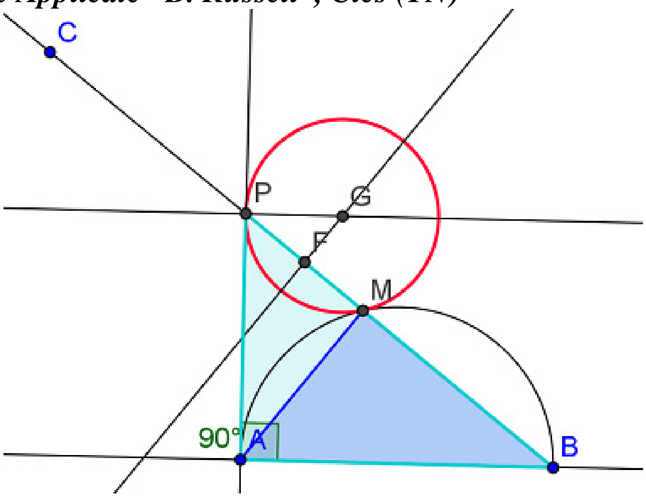
2)

Per costruire la circonferenza tangente in P alla retta AP e passante per M, ho tracciato la perpendicolare alla retta AP per il punto P affinché risulti tangente, e l'asse al segmento PM per trovare il centro D che cade sulla perpendicolare per P alla retta AP. Il raggio è DP, ho quindi tracciato la circonferenza.

3)

[[…]]

Davide Dicaro, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



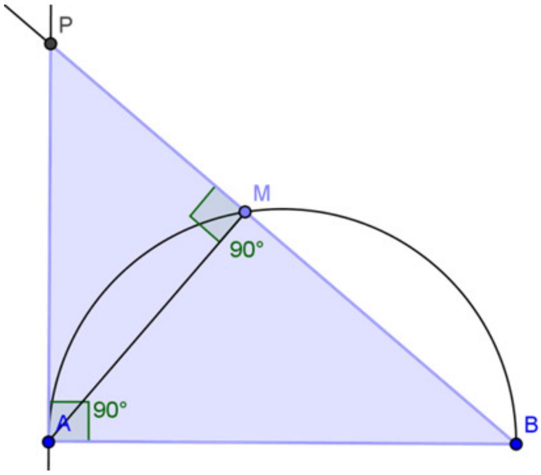
1)

Per rispondere al primo quesito ho usato il primo teorema di Euclide (AB^2 = BM*MP [$\overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{MP}$]) visto che il triangolo ABP è rettangolo, l'angolo in A è retto, perché dato dall'intersezione della retta AP [AB] con la retta perpendicolare ad AB.

2)
Per rispondere al secondo quesito ho preso il punto medio F del segmento PM, dal punto F ho fatto passare la perpendicolare alla semiretta BC, dal punto P ho fatto partire la perpendicolare alla retta AP e ho chiamato G il punto di intersezione tra la retta r e la retta s; poi ho preso il punto G come centro della circonferenza tangente in P e passante per M [motivare queste costruzioni].

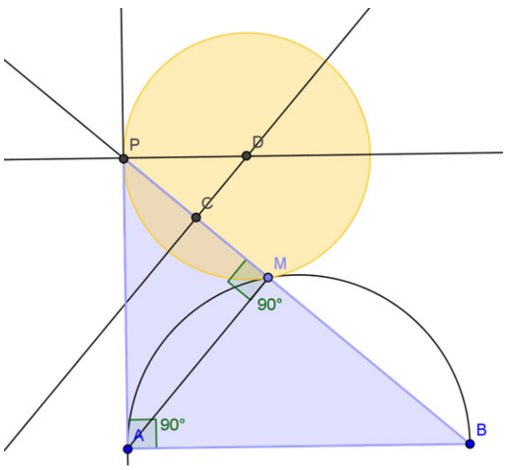
3)
[[…]]

Chiara Galeaz, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



1)
Il triangolo ABP ha un lato tangente alla circonferenza perciò è un triangolo rettangolo.
AM è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo ABP perché il triangolo AMB è inscritto in una semicirconferenza perciò l'angolo AMB misura 90°. BM è la proiezione del lato AB sull'ipotenusa BP.
Perciò per il primo teorema di Euclide (che dice che l'area del quadrato costruito su uno dei cateti è equivalente a quella di un rettangolo che ha per dimensioni la proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa) vale BM*BP=AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$].

2)

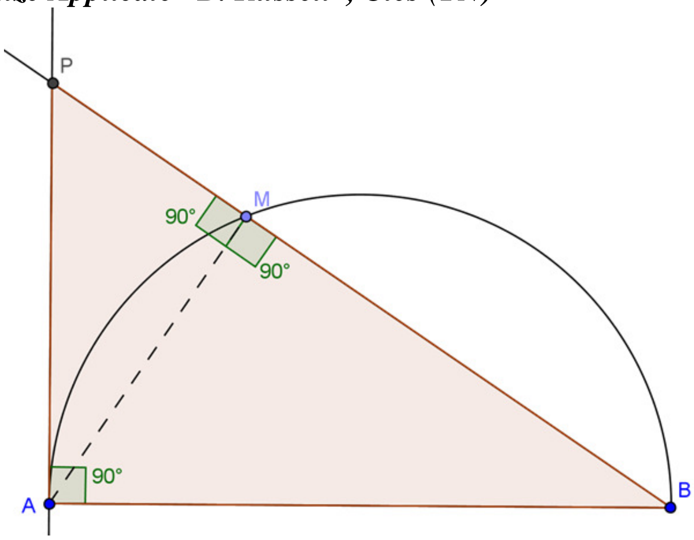


Traccio l'asse del segmento MP.
Traccio la perpendicolare ad AP passante per P.

Il punto di intersezione fra le due rette è il centro della circonferenza passante per P e tangente alla semiretta AP e passante per M [perché ?].

3)
[[…]]

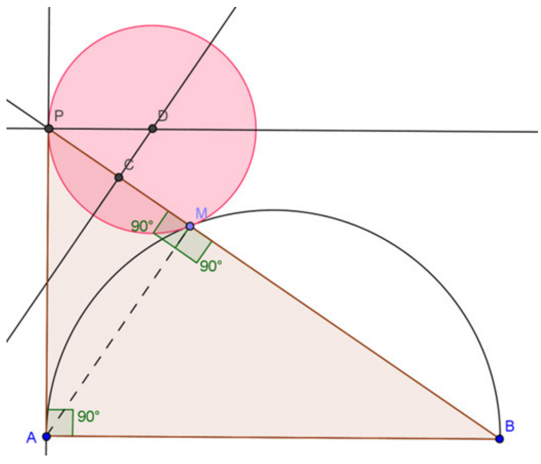
Arianna Ianes, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



1)
La semiretta tangente in A alla semicirconferenza forma un angolo di 90° con AB. Il triangolo ABP è quindi rettangolo.
Per definizione [Come è noto] il triangolo costruito in una semicirconferenza, con il diametro per ipotenusa e il vertice opposto ad essa appartenente alla semicirconferenza, è rettangolo.
AM nel triangolo rettangolo ABP sarà quindi l'altezza relativa all'ipotenusa, con M piede della altezza stessa. Si può quindi utilizzare il primo teorema di Euclide che dice: "In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su uno dei cateti è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa."

Ovvero: $AB^2 = BM*BP$ [$\overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{MP}$].

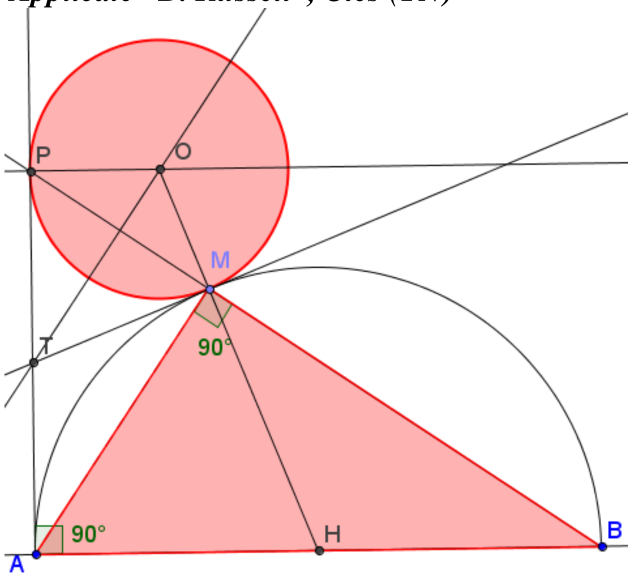
2)



Per costruire la circonferenza passante per M e tangente in P alla semiretta AP prendo il punto medio C del segmento PM. Traccio poi la perpendicolare passante per C allo stesso segmento, e la perpendicolare della retta AP passante per P. Fisso poi il punto di intersezione D delle due rette, che sarà il centro della circonferenza passante per M e tangente in P alla semiretta AP [perché ?].

3)
[[…]]

Andrea Pancheri, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

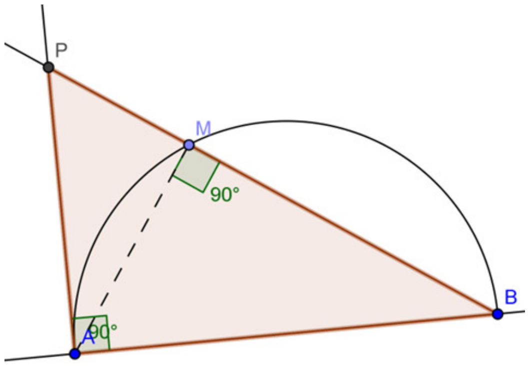


1)
Essendo il triangolo AMB inscritto in una semicirconferenza, l'angolo AMB misura 90°. Quindi MB è la proiezione di AB su BP. AP è perpendicolare ad AB per costruzione e PB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABP.
Per il primo teorema di Euclide: l'area del quadrato costruito su un cateto di un triangolo rettangolo è uguale a quella del rettangolo che ha per base l'ipotenusa e per altezza la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.
Quindi AB^2 = PB*BM [$\overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BP}$].

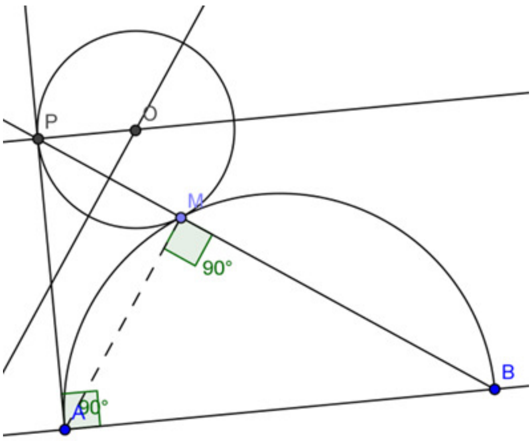
2)
[[…]]

3)
[[…]]

Alberto Piffer, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



1)
Essendo il triangolo AMB inscritto in una semicirconferenza, l'angolo AMB misura esattamente 90°.
MB è dunque la proiezione di AB su BP.
Essendo AP perpendicolare ad AB per costruzione, PB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABP.
Per il primo teorema di Euclide l'area del quadrato costruito su un cateto di un triangolo rettangolo è uguale a quella del rettangolo che ha per base l'ipotenusa e per altezza la proiezione di tale cateto sull'ipotenusa.Dunque PB*BM = AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$].
2)



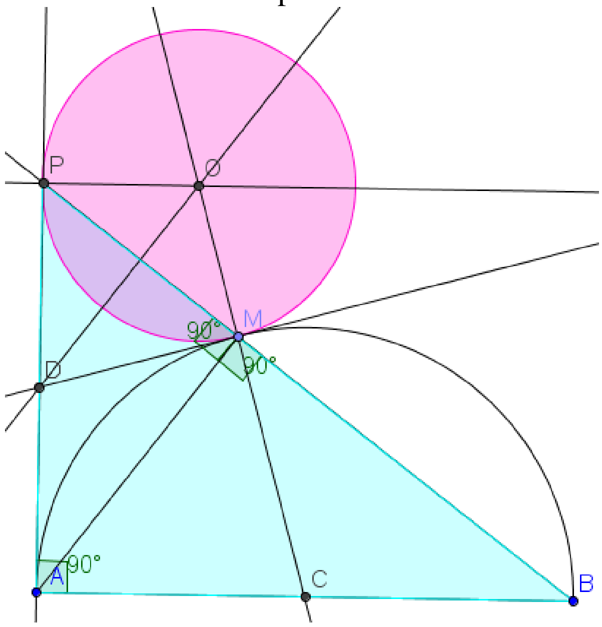
Disegno l'asse del segmento PM. Ogni punto della retta ottenuta è dunque equidistante da P ed M.
Disegno poi la retta perpendicolare al segmento AP passante per P.
Il centro della circonferenza O sarà dunque situato nell'intersezione di tali due rette, dando alla circonferenza raggio OP = OM, in quanto essendo situato sull'asse di PM sarà equidistante sia da P che da M ed, essendo il raggio congruente a PO ed OM, toccherà [la circonferenza passerà per] entrambi i punti, P ed M. Essendo infine il centro O situato sulla retta perpendicolare a PA, sarà la circonferenza tangente in P alla semiretta AP.

3)
[[…]]

Alexandra Nistor, Alexandru Nistor, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

1)
Provare che BM*BP=AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$]:

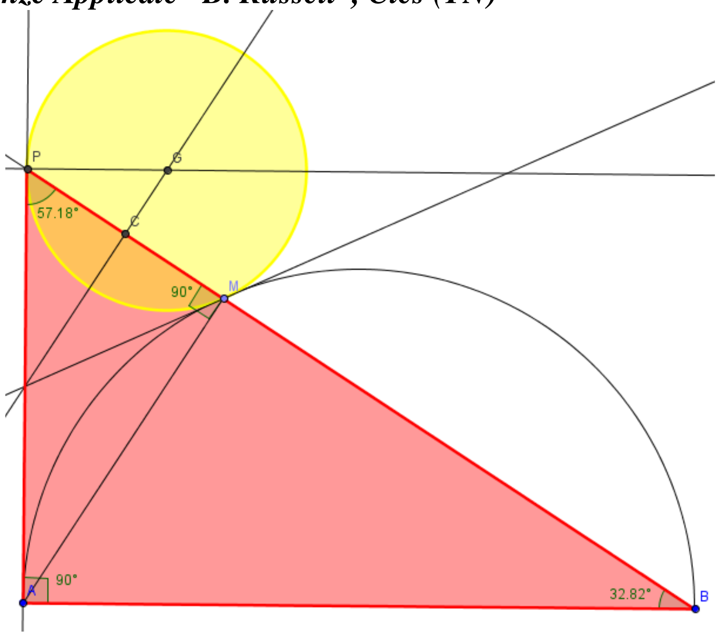
Il triangolo ABP è un triangolo rettangolo perché AP è perpendicolare ad AB quindi è BM*BP = AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$] [prima occorre dimostrare che AM è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo ABP] per la formula del 1' [per il primo] Teorema di Euclide che dice: In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.



2)
[[…]]

3)
[[…]]

Davide Schmidt, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



1)
Provare che BM * BP = AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$] :

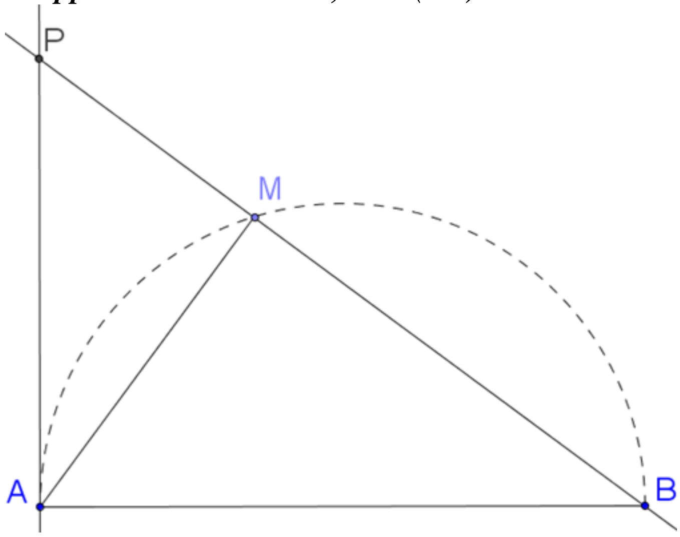
Abbiamo l'angolo PAC = 90° [PAB di ampiezza pari a 90°] per costruzione di retta perpendicolare ad AB; AMB = 90° [di ampiezza pari a 90°] perché triangolo inscritto in una semicirconferenza (AMP) [nella semicirconferenza AMB], quindi ABP è [un] triangolo rettangolo e BM*BP = AB^2 [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$] per il primo teorema di Euclide.

2)
Costruire la circonferenza tangente in P alla semiretta AP e passante per M.

Per prima cosa ho tracciato l'asse del segmento PM; traccio in seguito la retta parallela ad AB passante per P e trovo il punto G, il punto di intersezione tra essa e l'asse del segmento PM; traccio la circonferenza da quel punto [con centro nel punto G e raggio GM] che sarà tangente in P alla semiretta AP e passante per M.

3)
[[…]]

Munir Vauall, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

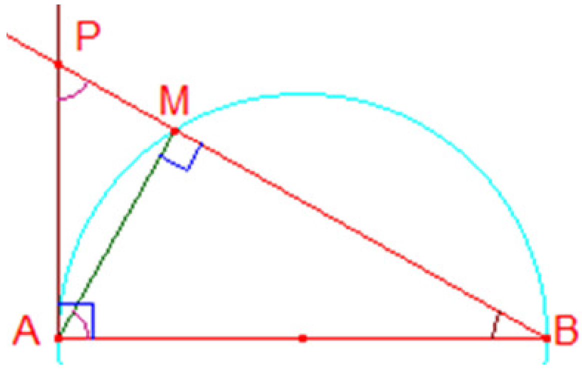


1)
1. A [PAB] angolo retto perché la tangente è perpendicolare alla [al diametro AB della] semicirconferenza e quindi forma angoli retti.
2. AM cade perpendicolare a PB perché ABM triangolo inscritto in una semicirconferenza.
3. Quindi MB è la proiezione di AB su BP.
4. AB^2=BM*BP [$\overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BP}$] [Primo] ..TEOREMA DI EUCLIDE (Il quadrate [quadrato] costruito su un cateto ha l'area equivalente al quadrato [rettangolo] che ha per dimensioni la proiezione del cateto stesso e l'ipotenusa).

2)
[[…]]

3)
[[…]]

K. Arifoglio, M. Coco, R. Coco, E. Giuffrida, G. Rapisarda, Classe 2AA
Liceo Scientifico"Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)



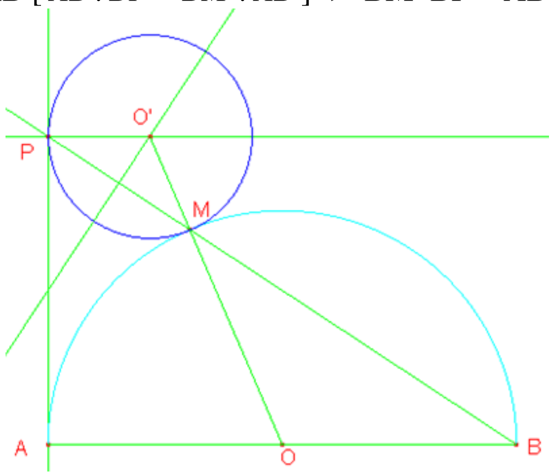
1)

Consideriamo [i triangoli] APB e AMB, questi hanno: [gli angoli] AMB e AMP retti perché formati da AM e PB che sono perpendicolari fra loro. L'angolo ABP [la cui ampiezza indichiamo con α] è in comune ai due triangoli perciò gli angoli APM e MAB sono congruenti perché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è 180° e se sottraiamo la somma [delle ampiezze] dei due angoli congruenti trovati otterremo lo stesso angolo [la stessa ampiezza che indichiamo con β]:

180°- (∠AMB - α) = β

180°- (∠PAM - α) = β => I due triangoli sono simili e perciò avranno i lati in proporzione.

AB : BP = BM : AB [$\overline{AB} : \overline{BP} = \overline{BM} : \overline{AB}$] -> BM*BP = AB² [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$]



2)

Se tracciamo la perpendicolare ad AP passante per P e l'asse di PM questi si incontreranno in un punto O' che sarà il centro della circonferenza tangente in P e passante per M.

3)

[[…]]

A. Gallina, F. Giuffrida, L. Mauro, F. Monaco, Classe 2AA
Liceo Scientifico"Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)

1)

L'angolo $\widehat{AMB}$ è retto perché insiste sul diametro AB.

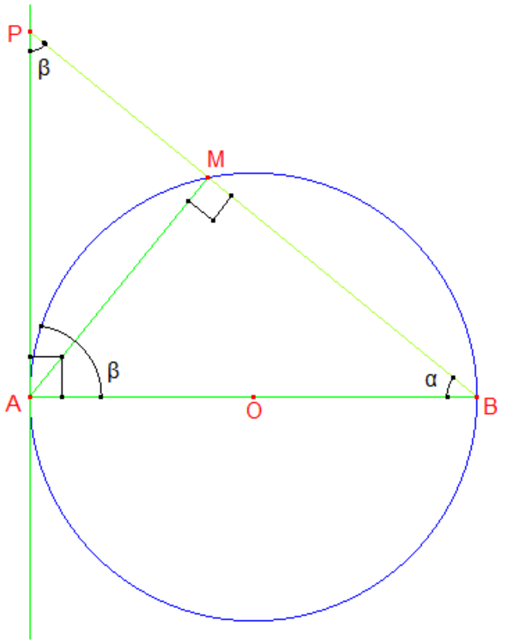
L'angolo $\widehat{PAB}$ è retto perché PA perpendicolare AB. ($\widehat{AMB} = \widehat{PAB}$ [stessa ampiezza])

L'angolo $\widehat{ABP}$ è in comune tra i due triangoli ABM e ABP.

$\widehat{APB} = \widehat{MAB}$ perché supplementari [complementari] degli stessi angoli.

Il triangolo APB è simile a MAB perché hanno gli angoli [corrispondenti] congruenti.

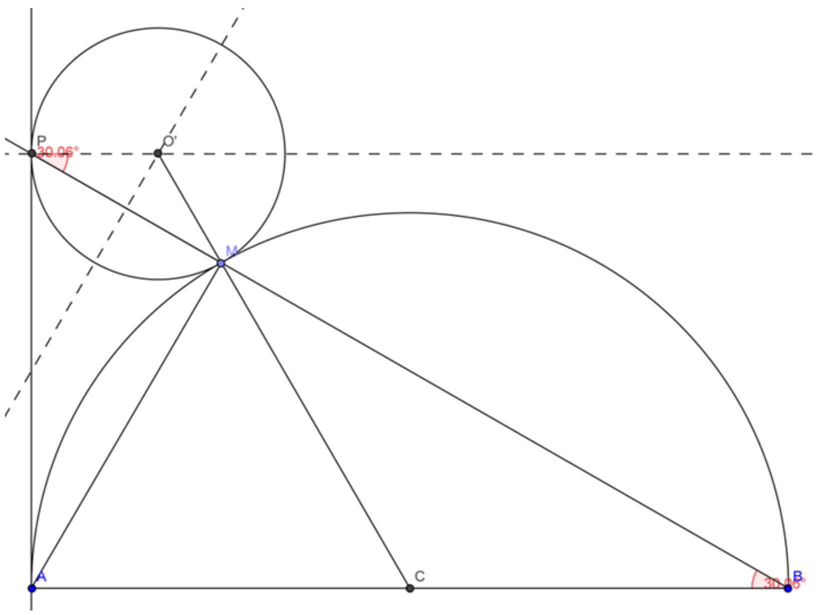
$$\overline{AB} : \overline{BP} = \overline{BM} : \overline{AB} \rightarrow \overline{BP} * \overline{BM} = \overline{AB}^2$$



2)
Per avere una circonferenza tangente in P e passante per M, bisogna che il centro della circonferenza che dobbiamo costruire sia sulla retta perpendicolare alla semiretta PA passante per P e sull'asse del segmento PM. Il punto di intersezione di queste due costruzioni sarà il centro della circonferenza. [Sarebbe stata opportuna anche una figura]

3)
[[…]]

R. Bello, M. Borzì, E. Giunta, L. Giustolisi, M. Mazzaglia, M. Morello, G. Moschetti, S. Petrone
Classe 2BA, Liceo Scientifico"Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)



1)

Consideriamo l'angolo $A\hat{M}B$, questo è retto poiché angolo alla circonferenza sotteso da un diametro (AB).
Consideriamo i triangoli PAB e AMB, essi hanno :

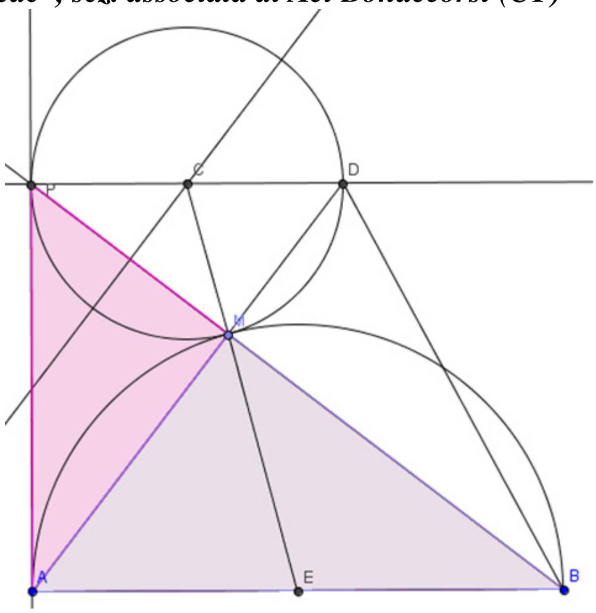
- $P\hat{A}B = A\hat{M}B$ (perché angoli retti);
- $A\hat{B}M = A\hat{B}P$ (perché in comune);

ne segue che il triangolo PAB è simile al triangolo AMB
MB:AB = AB:BP [$\overline{MB}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BP}$]
$AB^2 = MB \times BP$ [$\overline{AB}^2=\overline{BM}\cdot\overline{BP}$]

2)
La circonferenza passante per M e tangente ad AP in P avrà il centro nel punto di intersezione tra l'asse di MP (in quanto OP ed OM saranno i raggi e quindi saranno congruenti) e la perpendicolare ad AP in P (in quanto il raggio OP è perpendicolare alla tangente).

3)
Sia chiamato O il centro della circonferenza tangente in P e O' il centro della semicirconferenza. [Queste lettere <u>non</u> corrispondono a quelle della figura iniziale, quindi sarebbe stato opportuno fare una seconda figura.]
Per ottenere la tesi bisogna dimostrare che i punti O, M, O' sono allineati perché i raggi OM ed O'M devono essere perpendicolari alla stessa retta tangente.
Gli angoli $O\hat{P}M = M\hat{B}O'$ (poiché alterni interni rispetto alle parallele PO // AB tagliate dalla trasversale PM)
Il triangolo OPM è isoscele sulla base PM, quindi: $O\hat{P}M = O\hat{M}P$
Il triangolo MBO' è isoscele sulla base MB, quindi: $O'\hat{B}M = O'\hat{M}B$
Ne consegue per la proprietà transitiva che $O\hat{M}P = O'\hat{M}B$, quindi, poiché P, M, B sono allineati e sul vertice M si formano angoli congruenti opposti al vertice, anche i punti O, M, O' sono allineati.

Deborah Catania, Elody Catania, Giuliana Rizzo, Classe 2BA
Liceo Scientifico"Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)



1)

L'angolo P,*A*.B [∠PAB] è retto perché formato dalla retta tangente PA con il diametro AB;

l'angolo A,*M*.B [∠AMB] è retto perché insiste sul diametro AB.

Consideriamo i triangoli AMB e APB, essi hanno:

P,*A*.B = A,*M*.B [∠PAB = ∠AMB] (perché angoli retti)

A,*B*.P = A,*B*.M [∠ABP = ∠ABM] (Angolo in comune)

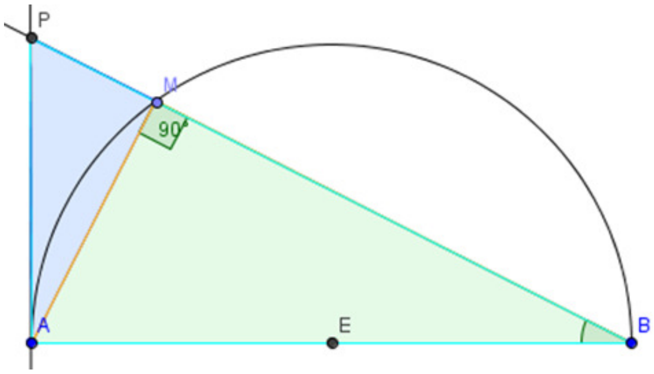
A,*P*.B = M,*A*.B [∠APB = ∠MAB] (differenza di angoli congruenti).

Quindi i triangoli saranno simili e avranno i lati in proporzione:
BM : AB = AB : BP [$\overline{BM} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BP}$], ne segue che BM x BP = AB x AB [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$]

2)
Abbiamo costruito la circonferenza tangente in P alla semiretta AP e passante per M prendendo come centro di tale circonferenza il punto C di intersezione fra l'asse della tg AP [la retta perpendicolare alla semiretta AP nel punto P e tangente] alla semicirconferenza iniziale e l'asse del segmento PM. Infatti, tale centro dovrà essere equidistante dai punti P ed M appartenenti alla circonferenza e il raggio CP deve formare con la tg [tangente] un angolo retto.

3)
[[…]]

Melania Di Bella, Chantal Santangelo, Classe 2BA
Liceo Scientifico"Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)



1)

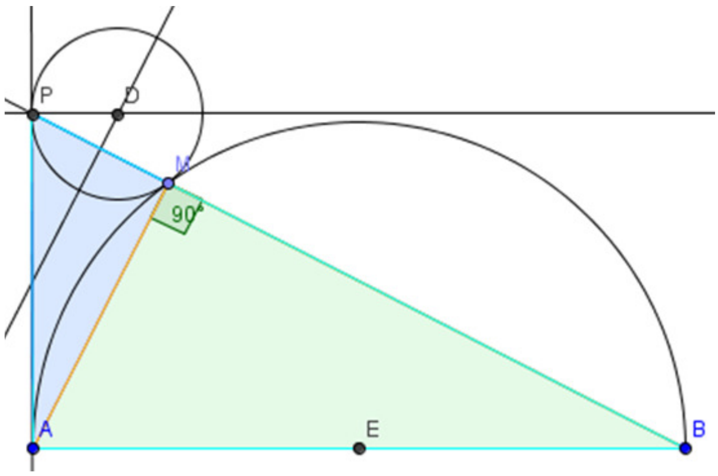
L'angolo ∠PAB è retto perché formato dalla retta tangente PA con il diametro AB; l'angolo ∠AMB è retto perché insiste sul diametro AB.
Si considerino i triangoli ABP e AMB.
Essi hanno:
∠PAB = ∠AMB (perché angoli retti)
∠ABP = ∠ABM (perché angolo in comune)
∠APB = ∠MAB (perché supplementari [complementari] di angoli congruenti).
Poiché i due triangoli hanno gli [[stessi]] angoli [corrispondenti congruenti], sono simili → hanno i lati in proporzione:

BM : AB = AB : PB [$\overline{BM} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BP}$]

Per la proprietà fondamentale delle proporzioni:

BM x PB = AB x AB → BM x PB = $(AB)^2$ [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$].

2)

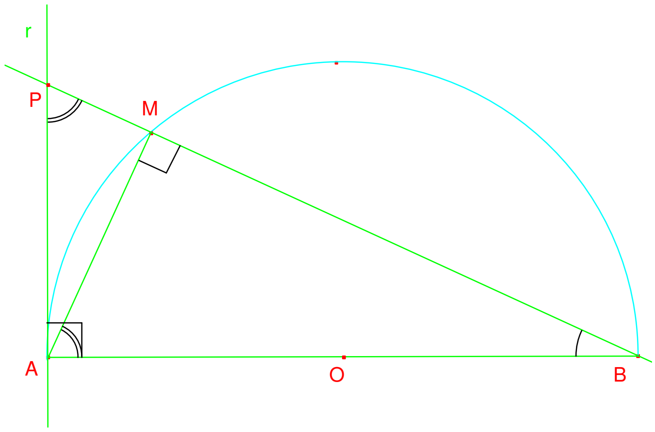


La circonferenza tangente in P alla semiretta AP e passante per M, avrà il centro sulla perpendicolare alla semiretta AP passante per P (perché con essa il raggio OP dovrà formare un angolo retto) e sull'asse del segmento PM (perché dovrà essere equidistante dai punti M e P). [Quindi…]

3)

[[…]]

Federica Di Salvo, Classe 2BA
Liceo Scientifico"Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)



1)

Per provare che $BM \cdot BP = AB^2$ [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$] si deve prima dire che:

$\angle$AMB = 90° perché angolo alla circonferenza che insiste sul diametro AB;

$\angle$PAB = 90° perché formato dalla tangente alla circonferenza nell'estremo di un diametro;

se indico con α [l'ampiezza del] l'angolo $\angle$MBA,

[l'ampiezza del] l'angolo $\angle$MAB = 90° − α = β

ed anche [l'ampiezza dell'angolo] $\angle$APB = 90° − α = β

Consideriamo i due triangoli PAB e BMA, essi sono simili perché hanno gli angoli [corrispondenti] congruenti.

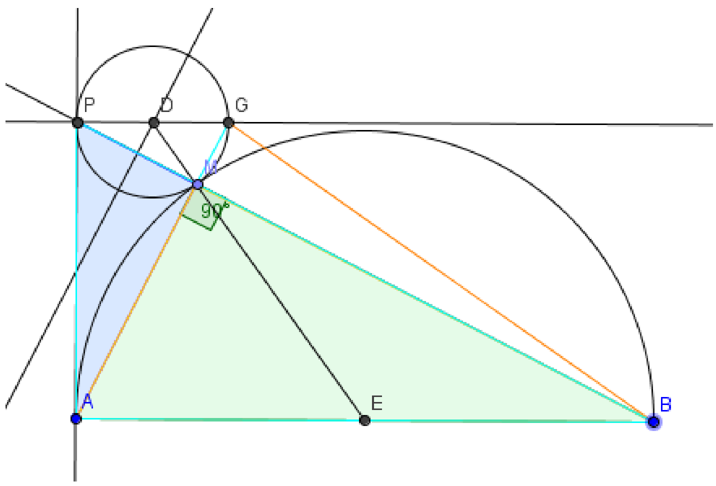
Il segmento PB, del triangolo PAB, opposto all'angolo retto è proporzionale al lato AB, del triangolo BMA, opposto all'angolo retto. Inoltre il lato AB, del triangolo PAB, opposto all'angolo [di ampiezza] β è proporzionale al lato BM, del triangolo BMA, opposto all'angolo [di ampiezza] β dell'altro triangolo. Quindi facendo la proporzione si ha:

BM : AB = AB : BP [$\overline{BM} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BP}$]

Per la proprietà fondamentale delle proporzioni:

$AB^2 = BM \cdot BP$ [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$]

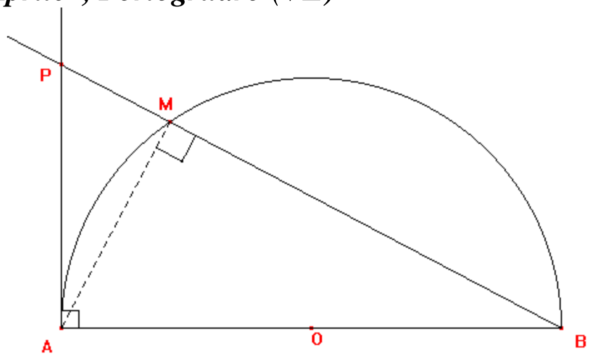
2)



La seconda richiesta si può soddisfare osservando la figura, perché tracciando l'asse del segmento PM e la perpendicolare alla tangente nel punto P si trova il centro della circonferenza tangente in P alla semiretta AP e passante per il punto M.

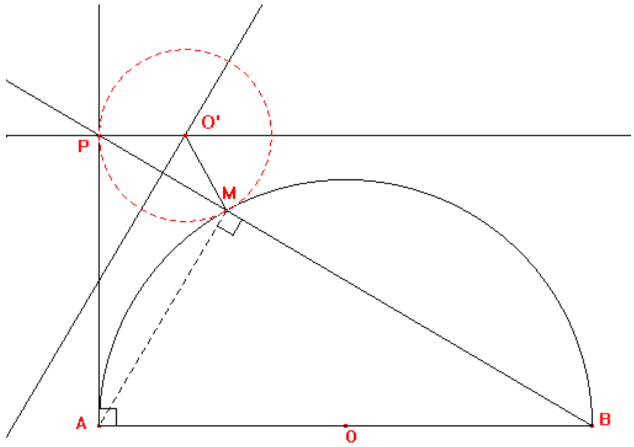
3)
[[…]]

Eleonora Mariuzzo, Classe 2D
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portogruaro (VE)



1)
Tracciando il segmento *AM*, si consideri il triangolo *ABM*. Questo è rettangolo in *M* perché inscritto in una semicirconferenza e quindi, *M* è la proiezione di *A* sul lato *BP* del triangolo *ABP*, rettangolo poiché la semiretta passante per *A* è tangente alla circonferenza [semicirconferenza]. Per il primo teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo *ABP*, possiamo quindi scrivere: $\overline{BP} \cdot \overline{BM} = \overline{AB}^2$.

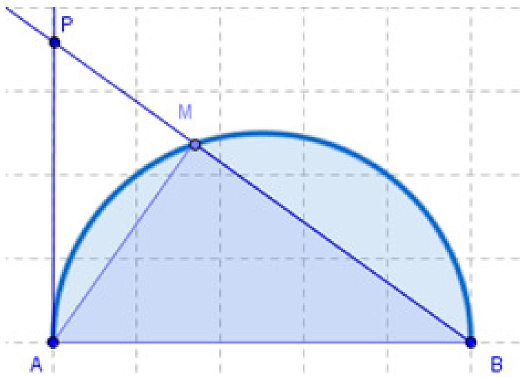
2)



La circonferenza deve essere tangente in *P* alla semiretta *AP*, quindi il suo centro *O'* appartiene alla retta *r* passante per *P* e perpendicolare alla semiretta stessa. I punti *P* e *M* appartengono entrambi alla circonferenza e quindi per individuare *O'* basta trovare il punto equidistante sia da *P* che da *M* che appartiene alla retta *r*. Questo punto si trova pertanto intersecando l'asse del segmento *PM* con la retta *r*.

3)
[[…]]

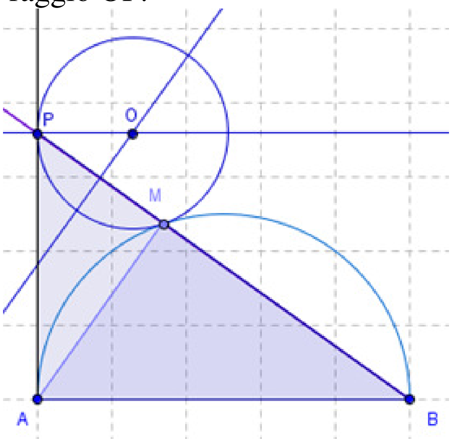
Classe 2B
Liceo Scientifico Linguistico "G. Ferraris", Taranto (TA)



1)
Il triangolo ABP è rettangolo in A in quanto i lati AP e AB sono perpendicolari, perché la semiretta AP è tangente in A alla semicirconferenza (la tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio passante per il punto di contatto).
Considerando il triangolo ABM sappiamo che è rettangolo in M perché inscritto in una semicirconferenza. Quindi AM è l'altezza del triangolo ABP rispetto all'ipotenusa BP, BM e MP sono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
Possiamo dunque affermare per il primo teorema di Euclide che $AB^2 = BP \cdot BM$ [$\overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BP}$].

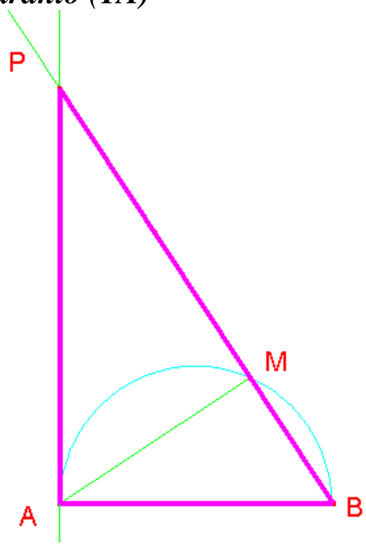
2)
Conducendo la perpendicolare alla semiretta AP per il punto P (punto di tangenza) si ottiene la retta a cui appartiene il [un] raggio della circonferenza da costruire. Tracciando poi l'asse del segmento PM otteniamo il punto O [dato dall'intersezione dell'asse del segmento PM (l'asse di una corda

passa per il centro della circonferenza) e della perpendicolare precedentemente tracciata], centro della circonferenza di centro O e raggio OP.



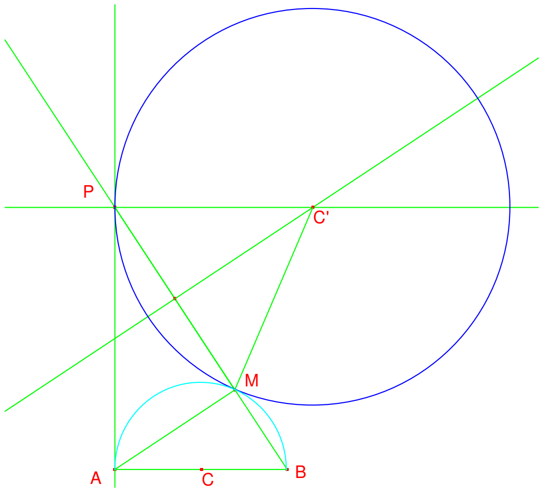
3)
[[…]]

Classe 1H
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



1)
Il triangolo *BAP* è rettangolo per la costruzione effettuata ed il triangolo *AMB* è rettangolo in *M*, essendo inscritto in una semicirconferenza. Se ne deduce che *AM* è l'altezza relativa all'ipotenusa *BP* nel triangolo *ABP* e che il cateto *AB* del triangolo *BAP*, per il I teorema di Euclide , è medio proporzionale tra l'ipotenusa *BP* e la sua proiezione *BM* su di essa.

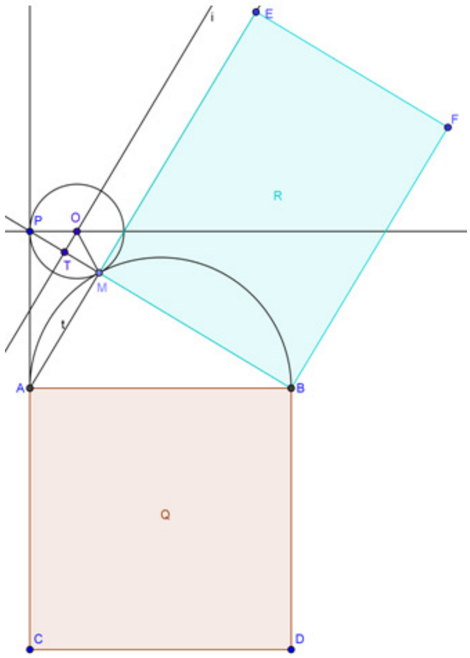
Dalla proporzione *BP:AB =AB:BM* [$\overline{BP}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BM}$]si ha: $BM \cdot BP = AB^2$ [$\overline{BM}\cdot\overline{BP}=\overline{AB}^2$].



2)
Per costruire la circonferenza tangente in *P* alla semiretta *AP* e passante per *M* , osserviamo che il centro di questa circonferenza è il punto (C') di intersezione della retta passante per *P* e perpendicolare ad *AP* (la tangente è la perpendicolare al raggio in *P*) con l'asse della corda *MP* (l'asse di una corda passa per il centro). Il raggio di tale circonferenza è *C'M=C'P*.

3)
[[…]]

Classe 2A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

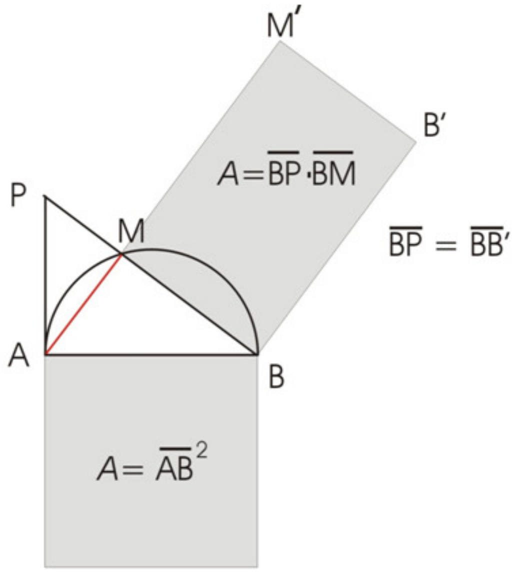


1)
Il triangolo PAB è retto in A per costruzione. Tracciato il segmento AM cioè l'altezza relativa all'ipotenusa BP [perché?] e applicando il primo teorema di Euclide possiamo affermare che: il quadrato costruito sul cateto AB è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa cioè il segmento BM. Abbiamo perciò dimostrato che è vera l'equivalenza [l'uguaglianza] BM * BP = AB² [$\overline{BM} \cdot \overline{BP} = \overline{AB}^2$].

2)
Perché la circonferenza passi per il punto P e per il punto M deve essere tracciata a destra della semiretta AP [questo dipende dal disegno!].
Tracciamo l'asse del segmento PM: sia T il punto medio di detto segmento e t la retta perpendicolare nel punto T al segmento PM [a che serve la figura se le lettere non corrispondono?].
Sia O il punto di intersezione tra la retta t e la retta a parallela al segmento AB. con [Con] apertura di compasso uguale al segmento PO = raggio [[, così]] si traccia la circonferenza passante per P e per M.

3)
[[…]]

Classe 2B dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

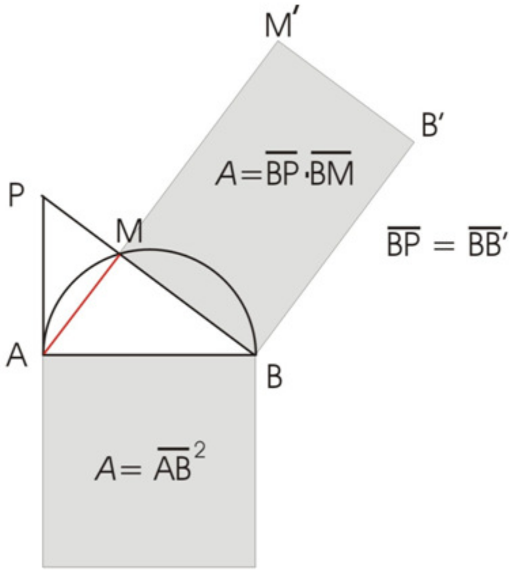


1)
[Verificare la validità di una certa uguaglianza attraverso misure necessariamente approssimate è completamente diverso dal dimostrare la stessa uguaglianza utilizzando proprietà geometriche conosciute].

2)
[[…]]

3)
[[…]]

Classe 2D dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

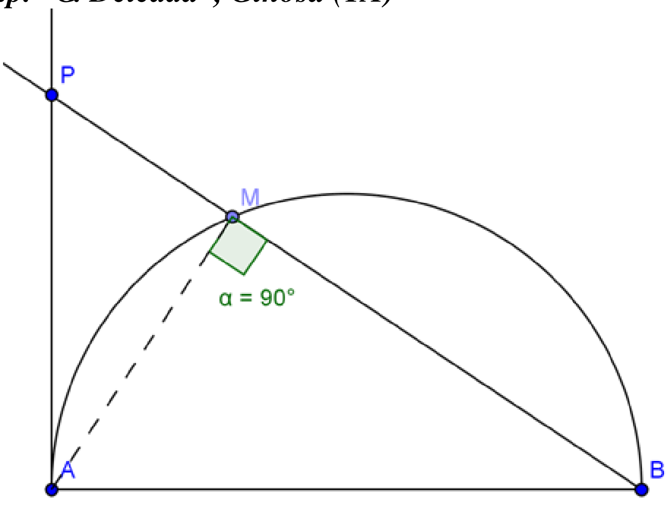


1)
[Verificare la validità di una certa uguaglianza attraverso misure necessariamente approssimate è completamente diverso dal dimostrare la stessa uguaglianza utilizzando proprietà geometriche conosciute].

2)
[[…]]

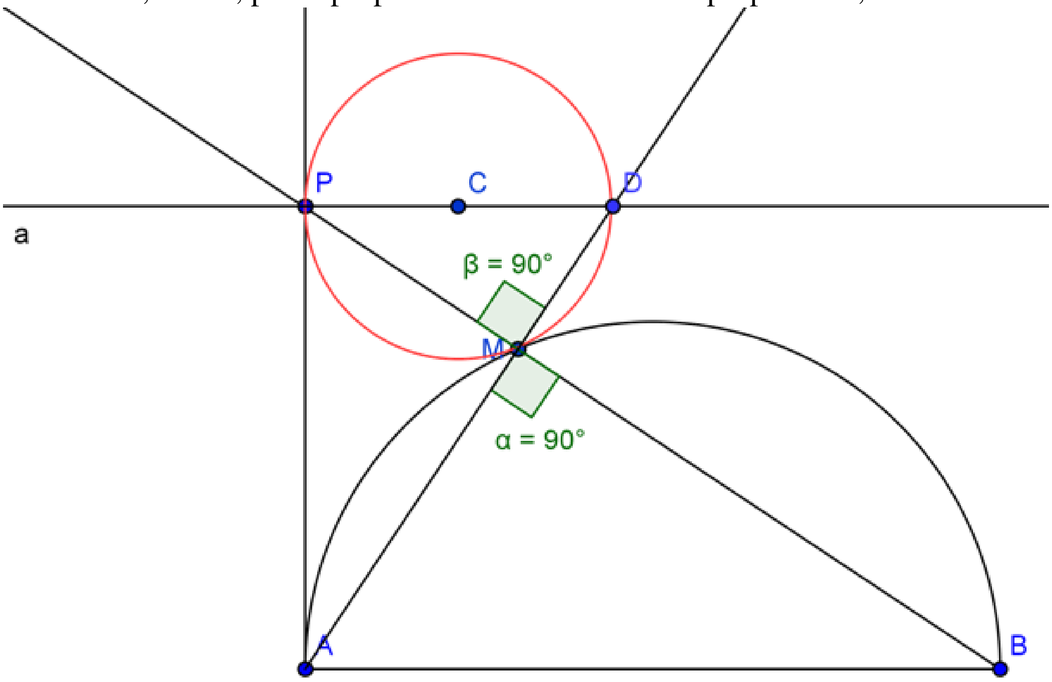
3)
[[…]]

Classe 3C dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



1)
Consideriamo il triangolo APB, retto in A per costruzione, essendo la semiretta AP tangente alla semicirconferenza data (la tangente ad una circonferenza e il diametro passante per il punto di tangenza sono sempre perpendicolari). Congiungendo il punto A con M si ottiene un triangolo rettangolo AMB retto in M in quanto inscritto in una semicirconferenza. AM, quindi, risulta altezza relativa all'ipotenusa PB del triangolo rettangolo APB.

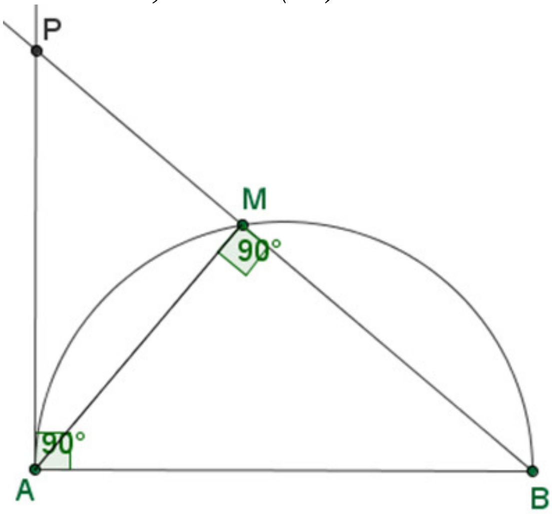
Per il 1° teorema di Euclide il [un] cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa; se consideriamo il triangolo rettangolo APB, possiamo affermare che $\overline{PB}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{MB}$, da cui, per la proprietà fondamentale delle proporzioni, $\overline{AB}^2=\overline{PB}\times\overline{MB}$ c.v.d.



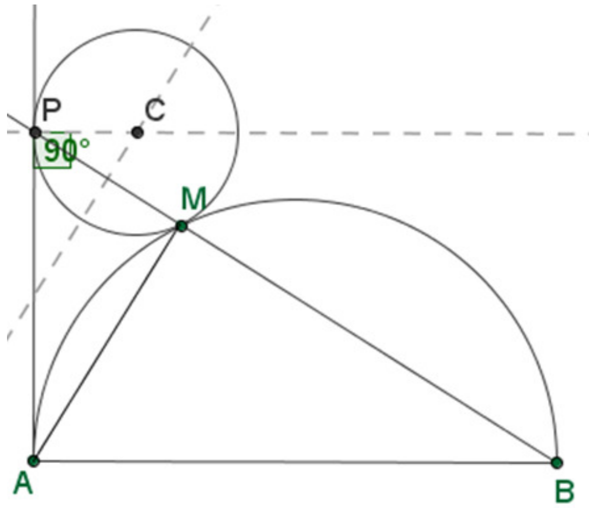
2)
Mandiamo la retta *a* perpendicolare alla semiretta AP e passante per il punto P (condizione di tangenza). Prolunghiamo il segmento $\overline{AM}$ dalla parte di M e chiamiamo D il punto di incontro con la retta *a*. Il triangolo PDM è rettangolo in quanto l'angolo $P\hat{M}D$ è retto perché opposto al vertice rispetto all'angolo $A\hat{M}B$. Possiamo inscrivere il triangolo PDM in una circonferenza il cui diametro sarà l'ipotenusa $\overline{PD}$. Di conseguenza il punto medio del segmento $\overline{PD}$ sarà il centro della circonferenza richiesta.

3)
[[…]]

Classe 3A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Pattada (SS)



1)
Il triangolo BAP è retto in A poiché il raggio [congiungente il centro e il punto di tangenza] di un cerchio (in questo caso della semicirconferenza di diametro AB) è sempre perpendicolare alla tangente.
Traccio il segmento AM, che è perpendicolare all'ipotenusa BP in quanto il triangolo AMB è inscritto in una semicirconferenza. MB è quindi la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa.
Secondo [Per] il 1° Teorema di Euclide, in un triangolo rettangolo (BAP in figura) un cateto (di lunghezza $\overline{AB}$) è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa (BM) e l'ipotenusa stessa.
Quindi dalla proporzione: $\overline{BM} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BP}$ si ha $\overline{BM} * \overline{BP} = \overline{AB}^2$



2)
Affinché la circonferenza sia tangente in P alla semiretta AP e passi per M, il centro di essa deve essere equidistante dai due punti. Quindi traccio l'asse del segmento PM (i cui punti sono equidistanti dagli estremi del segmento).
Se la circonferenza deve essere tangente in P alla semiretta AP, il [[suo]] raggio per P deve essere perpendicolare in P alla tangente. Per cui il punto di intersezione C, tra la perpendicolare alla semiretta AP passante per P e l'asse del segmento PM sarà il centro della circonferenza richiesta.

3)
[[…]]