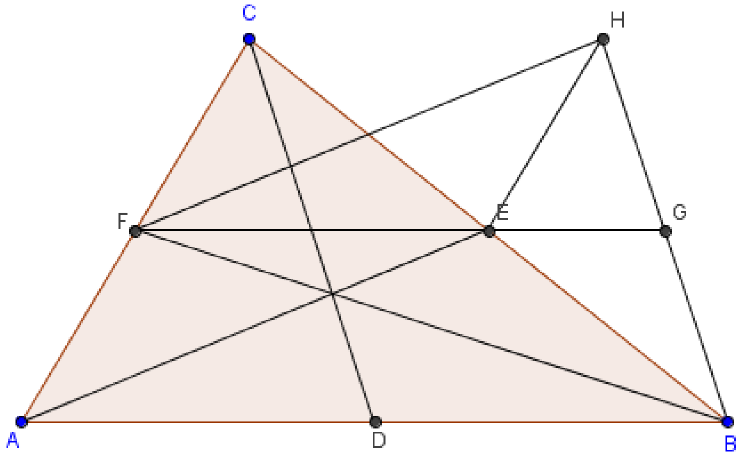
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***[(Edwin A. Abbott)]***

Flatlandia 8 - 22 Maggio 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

È dato un triangolo *ABC* avente per mediane i segmenti *AE, BF* e *CD*. Tracciare il segmento *FH* parallelo alla mediana *AE* e ad essa congruente. Tracciare poi il segmento *FE* e prolungarlo fino ad incontrare nel punto *G* il segmento *BH* (vedi figura).



Dimostrare che:

a) il quadrilatero *AEHF* ê un parallelogrammo;

b) $\overline{BH} = \overline{DC}$;

c) *FG* è una mediana del triangolo *BFH*;

d) $\overline{FG} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

Commento

Abbiamo ricevuto dodici risposte così suddivise: una risposta da una classe prima di Liceo Scientifico, quattro da classi seconde e una da una classe terza, sempre di Scuole Superiori (con decisa prevalenza del Liceo Scientifico come tipologia di Scuola); sono inoltre arrivate sei risposte da classi di Scuola Media (più precisamente di Scuola Secondaria di I grado) di cui cinque facenti parte di un Istituto Comprensivo, tutte di classi seconde e una di classe terza.

Il problema chiedeva innanzi tutto di tracciare, partendo da un dato triangolo con relative mediane, alcuni segmenti soddisfacenti certe proprietà specificate. Si chiedeva poi di dimostrare quattro diverse proprietà geometriche. Precisamente: *a*) che un quadrilatero, risultante dalla figura così ottenuta, fosse un parallelogramma; *b*) l'uguaglianza delle lunghezze, e quindi la congruenza, di due segmenti; *c*) che un segmento risultante dalla costruzione effettuata fosse una mediana di un triangolo facente parte della figura; *d*) la verifica di una particolare relazione tra le lunghezze di due segmenti.

In un buon numero di risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo sufficientemente corretto (salvo alcune imprecisioni nelle diverse dimostrazioni), mentre in alcune risposte non si fornisce un'adeguata motivazione della costruzione effettuata. Dobbiamo ancora una volta ribadire la necessità di distinguere tra un ente geometrico e la sua misura (in particolare tra un angolo e la misura della sua ampiezza e tra un segmento e la sua lunghezza).

Ci preme inoltre segnalare che alcuni studenti danno per scontata l'esistenza di certe relazioni (come l'allineamento di certi punti o il parallelismo di certe rette) che la figura (costruita con un software di geometria dinamica) fa apparire come "evidenti" e che, invece, devono essere dimostrate.
Infine è importante che gli studenti sappiano distinguere tra la definizione di parallelogramma, cioè di un quadrilatero che soddisfa determinate caratteristiche, e le condizioni sufficienti (o necessarie e sufficienti) che assicurano che un certo quadrilatero sia un parallelogramma.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
LS "XXV Aprile", Portogruaro (VE)
LS Linguistico "G. Ferraris", Taranto
LS Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)
Ist. Sc. Stat. "A. Guarasci", Soverato (CZ)
LS "Aristosseno", Taranto
Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)
Ist. Comp. "G. Deledda", Pattada (SS)
SM "G.B. Tiepolo", Milano

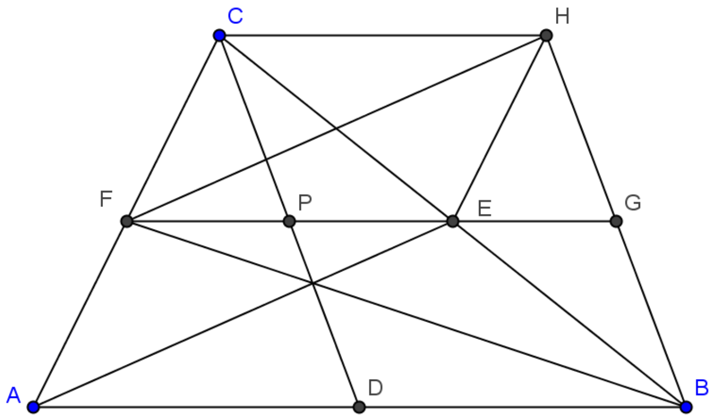
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Il gruppo di lavoro che gestisce FLAT*landia* è composto da:

- Ercole CASTAGNOLA - NRD Università di Napoli "Federico II"
- Giuliano MAZZANTI - Docente di Geometria, Università di Ferrara
- Valter ROSELLI - Ricercatore, Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
- Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica, LS "Galileo Galilei", Adria (RO)

Soluzioni

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)



a)
Il quadrilatero AEHF è un parallelogramma perché ha due lati opposti (AE e FH) paralleli e congruenti per ipotesi (questo è condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia un parallelogramma).

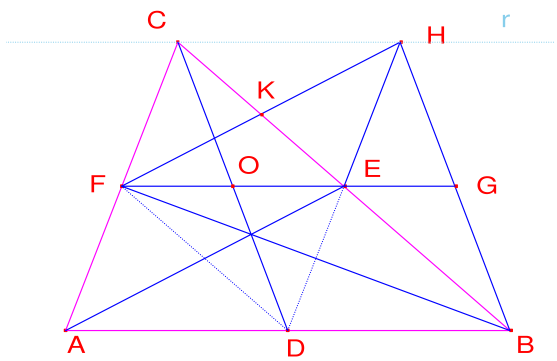
b)
Per il corollario del teorema di Talete, in un triangolo il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà. Allora $FE \parallel AB$ e $\overline{FE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AD} = \overline{DB}$.
Essendo AEHF un parallelogramma, $EH \cong AF \cong FC$ e $AF \parallel EH$. Quindi, poiché A, F e C sono allineati, $FC \parallel EH$. Allora il quadrilatero FEHC ha due lati opposti (EH e FC) paralleli e congruenti; quindi è un parallelogramma. Allora $CH \cong FE \cong DB$ e $CH \parallel FE \parallel DB$. Quindi il quadrilatero DBHC è un parallelogramma perché ha due lati opposti (CH e DB) paralleli e congruenti. Allora $\overline{DC} = \overline{BH}$.

c)
Essendo FEHC un parallelogramma, $CH \parallel FE \parallel AB$. Allora, essendo F, E e G allineati e $AF \cong FC$ per ipotesi, per il teorema di Talete $HG \cong GB$. Quindi FG è una mediana del triangolo BFH.

d)
Sia P il punto di intersezione tra CD e FG. Per dimostrazione precedente, essendo DBHC un parallelogramma, $DC \parallel BH$. I triangoli CPE e BGE sono congruenti per il 2° criterio perché hanno: $CE \cong EB$ per ipotesi, $C\hat{E}P \cong B\hat{E}G$ perché angoli opposti al vertice e $P\hat{C}E \cong G\hat{B}E$ perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele passanti [per] DC e per BH con la trasversale passante per CB. Quindi $\overline{PE} = \overline{EG} = \frac{\overline{PG}}{2}$.
Il quadrilatero PDBG è un parallelogramma per definizione poiché ha i lati opposti paralleli ($PD \parallel GB$ e $PG \parallel DB$) per dimostrazione precedente. Allora $\overline{PG} = \overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Quindi

$\overline{EG} = \frac{\overline{PG}}{2} = \frac{\overline{AB}}{4}$ e, essendo $\overline{FE} = \frac{\overline{AB}}{2}$ per dimostrazione precedente, $\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG} = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{4} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

Angelo Dumitriu, Filippo Sandoletti, Classe 2D
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portogruaro (VE)



a)
Per ipotesi sappiamo che i segmenti AE ed FH sono paralleli e congruenti tra loro, condizione sufficiente affinché il quadrilatero AEHF sia un parallelogramma.

b)
Tracciamo i segmenti ED e FD. In base a quanto già dimostrato, il quadrilatero AEHF è un parallelogramma, in particolare AF ≅ EH. Poiché AF appartiene ad [è contenuto in] AC, anche AC sarà parallelo a EH. Per il teorema dei punti medi, ED è parallelo ad AC (e quindi ad AF). EH ed ED sono paralleli ad uno stesso lato AC, e quindi paralleli tra di loro. Per costruzione ED ed EH hanno il punto E in comune, per cui, siccome sono paralleli, non possono che giacere sulla stessa retta. Dunque D, E ed H sono allineati. Per quanto detto prima (ED // AC) possiamo affermare che, siccome per il teorema dei punti medi ED ≅ CF, CFDE è un parallelogramma, perché ha una coppia di lati congruenti e paralleli, quindi AF + FC ≅ DE + EH, ovvero AC ≅ DH. AC è parallelo a DH poiché sia ED, sia HE (appartenenti allo stesso segmento HD) sono paralleli al lato AC. L'angolo CAD è pari all'angolo HDB (angoli corrispondenti), AD ≅ DB e AC ≅ DH; per il primo criterio di congruenza i triangoli ACD e DHB sono congruenti, in particolare BH ≅ DC.

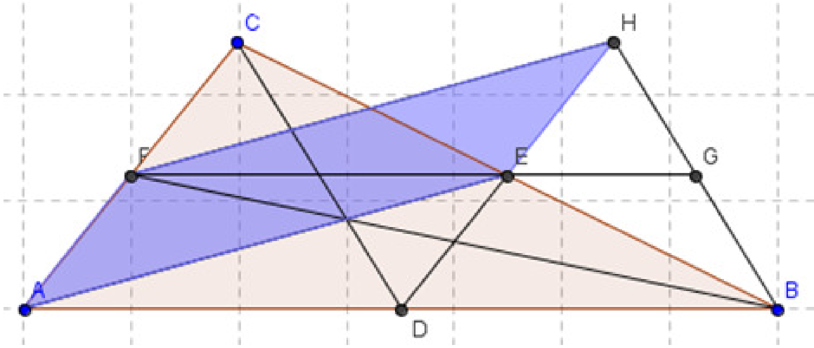
c)
Essendo i triangoli ADC e HDB congruenti, anche le loro altezze saranno congruenti. Per cui tracciando la retta r passante per C e per H, questa sarà parallela ad AB. FG è parallelo ad AB per ipotesi; per il teorema di Talete (che possiamo utilizzare poiché r // FG // AB) a segmenti congruenti su AC (AF ≅ FC), corrispondono segmenti congruenti su HB (HG ≅ GB). FG è quindi mediana del triangolo BFH, perché divide il lato HB in due parti congruenti.

d)
Siccome r // FG e CA // HD per quanto dimostrato al punto 2, possiamo affermare che CFEH è un parallelogramma, perché ha i lati opposti paralleli, e che quindi le diagonali CE ed HF si dividono scambievolmente in due parti congruenti: FK ≅ KH. BK è quindi mediana del triangolo BFH, perché divide il lato FH in due parti congruenti. Essendo anche FG mediana, l'intersezione fra FG e BK individuerà il punto E, cioè il baricentro. Per le proprietà del baricentro, EG ≅ ½ FE. Per il

teorema dei punti medi, FE ≅ ½ AB, dunque FG ≅ ½ AB + ½ FE ≅ ½ AB + ¼ AB ≅ ¾ AB [se non si precisa come va intesa la somma di segmenti si rischia di scrivere relazioni prive di senso].

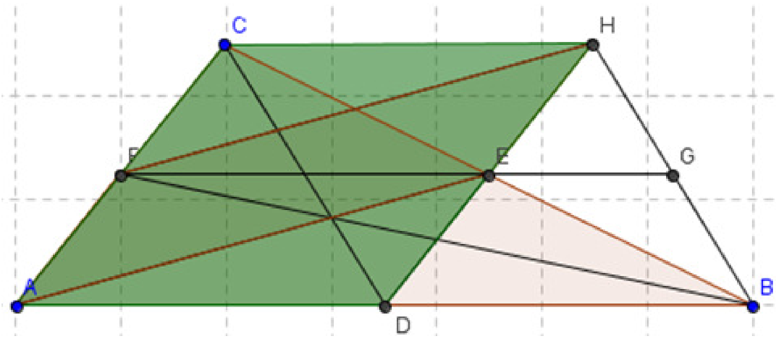
De Marco, Galeone, La Spada, Mandese, Notarnicola, Panerai, Pomes, Classe 2B
Liceo Scientifico Linguistico "G. Ferraris", Taranto (TA)

a)

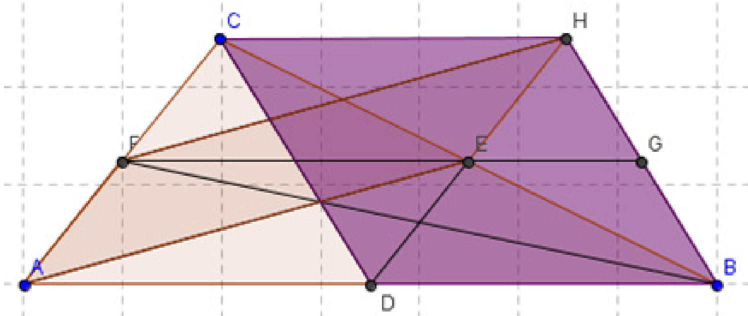


Il quadrilatero AEHF è un parallelogramma; infatti sappiamo che un quadrilatero convesso con i lati opposti a due a due uguali è un parallelogramma. Se tracciamo la diagonale AH, questa divide il quadrilatero in due triangoli congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
AH in comune
AE ≅ FH per ipotesi. $\widehat{FHA} \cong \widehat{HAE}$ [$\widehat{FHA} \cong \widehat{HAE}$] alterni interni rispetto alle parallele FH e AE tagliate dalla trasversale AH.
Quindi AF ≅ HE [e di conseguenza…].

b)

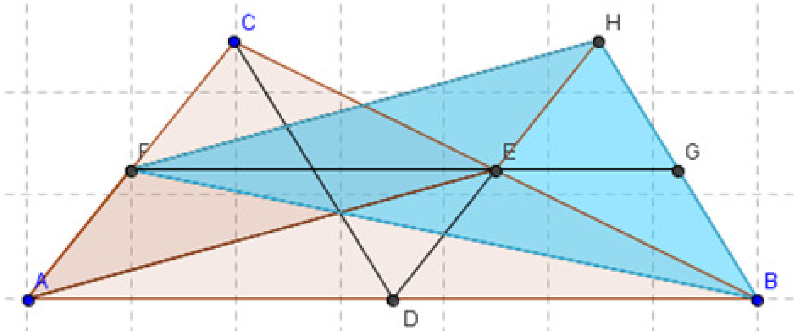


Il quadrilatero ADHC è un parallelogramma poiché AC//DH [occorrerebbe dimostrare preliminarmente che i punti D, E, H sono allineati] e AC ≅ DH [perché?]. FE//AB FE = AD = 1/2AB [$\overline{FE} = \overline{AD} = 1/2\overline{AB}$] (il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed uguale [in lunghezza] alla metà di questo).
AF ≅ EH (precedentemente dimostrato)
AF ≅ FC (F punto medio) AF ≅ DE (ADEF è un parallelogramma FE//AD FE = AD [$\overline{FE} = \overline{AD}$]) quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza [della relazione di congruenza] EH ≅ DE . E è punto medio del segmento DH.



Ora prendiamo in considerazione il quadrilatero BDCH: è un parallelogramma perché le diagonali si tagliano scambievolmente per metà (E è punto medio sia di DH che di BC).
Possiamo quindi affermare che DC $\cong$ BH.

c)



EG//DB quindi G è punto medio di HB. (Nel triangolo BDH abbiamo condotto per il punto medio E del lato DH la parallela al lato DB, questa taglia il lato HB nel suo punto medio G).
FG è una mediana del triangolo BFH.

d)

FE = 1/2AB [$\overline{FE} = 1/2\overline{AB}$

EG = 1/2BD = 1/4AB [$\overline{EG} = 1/2\overline{BD} = 1/4\overline{AB}$]

FG = FE + EG = 1/2AB + 1/4AB = 3/4AB [$\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG} = 1/2\overline{AB} + 1/4\overline{AB} = 3/4\overline{AB}$].

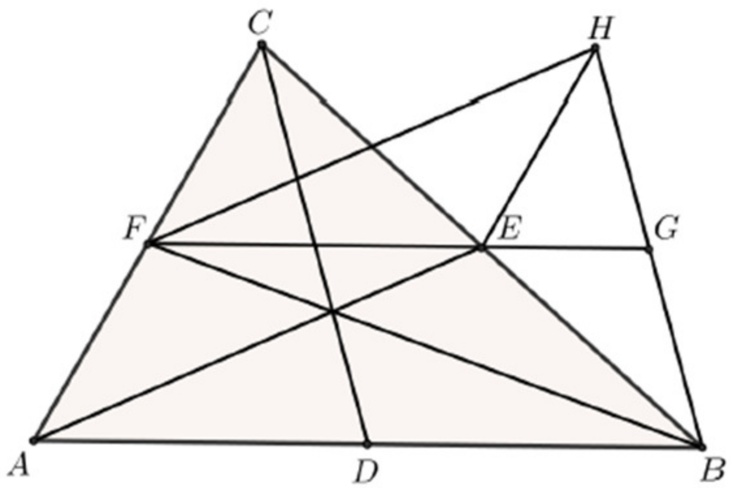
Caterina Ossanna, Classe 2C
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)

Consideriamo i segmenti AE e FH, essi sono:

- paralleli per ipotesi;
- congruenti per ipotesi;

Quindi AEHF, avendo due lati paralleli e congruenti è sicuramente un parallelogramma.



b)
Applicando ad ABC il corollario del Teorema di Talete, che dice che “la parallela tracciata dal punto medio di un lato di un triangolo a uno degli altri due lati interseca il terzo lato nel suo punto medio”, posso affermare che:

- Prolungando il segmento HE verso AB, questo interseca AB in D (poiché i segmenti AF e HE sono paralleli per la dimostrazione precedente ed E è il punto medio del lato BC per ipotesi);
- Il segmento **ED è congruente e parallelo al segmento AF** (poiché, tracciando la retta passante per i punti medi degli altri due lati, ottengo un segmento parallelo ad AC e congruente alla sua metà);
  I segmenti AF ed FC sono congruenti perché BF è mediana;
  I segmenti AF e HE sono congruenti perché AEHF è un parallelogramma;
  Quindi i segmenti AF, FC, HE e ED sono tutti congruenti.

Inoltre:

- I segmenti AD e DB sono congruenti perché CD è la mediana del lato AB per ipotesi;
- Gli angoli CAD e HDB sono congruenti perché corrispondenti (considerando FE [FA] e HE come rette parallele e AB come la trasversale);
- Per somma di segmenti congruenti il segmento CA è congruente al segmento DH;

Di conseguenza i triangoli ADC e DBH sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli e **in particolare CD è congruente a BH.**

c)
Considero il triangolo DHB:

- i segmenti ED e HE sono congruenti per la dimostrazione precedente;
- Il segmento FG è parallelo a AB per il corollario del Teorema di Talete applicato al triangolo ABC (quindi anche il segmento EG è parallelo a DB);

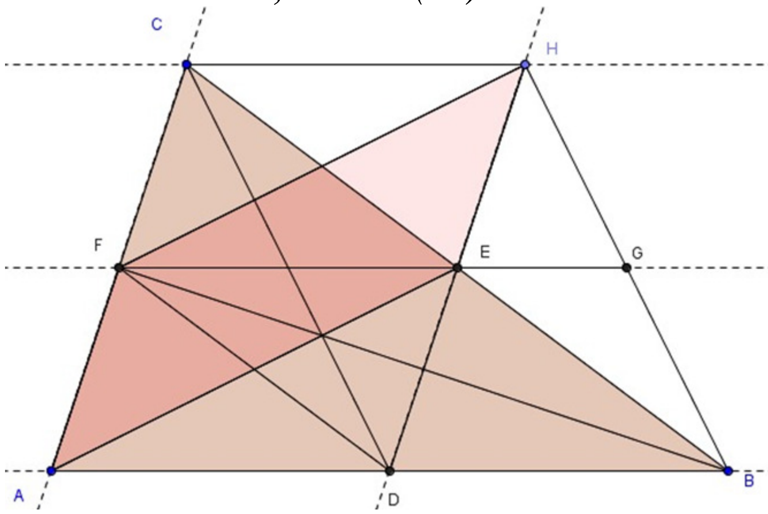
Quindi, per il corollario Teorema di Talete applicato a DHB, i segmenti HG e GB sono congruenti e, di conseguenza, FG è una mediana del triangolo BHF.

d)

- Per il corollario del Teorema di Talete applicato a ABC, il segmento FE è congruente alla metà della base AB.
  Inoltre, per il teorema di Talete applicata a HDB, il segmento EG è congruente [alla] metà di DB, che a sua volta è metà [come lunghezza] della base AB (perché il segmento CD è una mediana), quindi EG [come lunghezza] è un quarto di AB.
  Infine, FG = FE + EG [$\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG}$];

FG = ½ AB + ¼ AB [$\overline{FG} = 1/2\overline{AB} + 1/4\overline{AB}$];
Quindi, FG = ¾ AB [$\overline{FG} = 3/4\overline{AB}$].

Giulia Diano, Gianmarco Lorenti, Classe 2E
Istituto Scientifico Statale "A.Guarasci", Soverato (CZ)



a)
Per il teorema [che afferma]: "*Congiungendo i punti medi di due lati di un triangolo si ottiene un segmento parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà*" si ha:

FE ≅ $\frac{1}{2}$ AB ⟹ FE ≅ AD ≅ DB

ED ≅ $\frac{1}{2}$ AC ⟹ ED ≅ CF ≅ FA

FD ≅ $\frac{1}{2}$ BC ⟹ FD ≅ CE ≅ EB

Per dimostrare che il quadrilatero AEHF è un parallelogramma utilizziamo il seguente criterio: "*un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha due lati opposti paralleli e congruenti*", perciò essendo FH // AE e FH ≅ AE per ipotesi, **AEHF è un parallelogramma**.

In particolare EH ≅ FA ≅ CF ≅ ED e r(F,A) // s(H,E).

Poiché queste ultime rette sono parallele e tagliate dalla trasversale t (A,B), si ha $C\hat{A}D \cong H\hat{D}B$ perché angoli corrispondenti.

b)

Sapendo che CF ≅ HE e FA ≅ ED ⟹ CF + FA ≅ HE + ED [occorrerebbe dimostrare anche che i punti D, E, H sono allineati] ⟹ AC ≅ HD (somma di segmenti congruenti).

Consideriamo i triangoli CAD e HDB :

CA ≅ HD per dimostrazione

AD ≅ DB per ipotesi

$C\hat{A}D \cong H\hat{D}B$ per dimostrazione

Per il primo criterio di congruenza dei triangoli CAB [CAD] ≅ HDB, in particolare CD ≅ BH ⟹

$\overline{DC} = \overline{BH}$.

c)
Consideriamo ora i quadrilateri EFAD e HCFE:

- EFAD è un parallelogramma poiché ha i lati opposti congruenti, quindi i suoi lati sono paralleli a due a due; in particolare q(F, E) // p(A, D)
- HCFE è un parallelogramma poiché ha due lati opposti paralleli (perché appartenenti a due rette parallele per dimostrazione) e congruenti (per la precedente dimostrazione); in particolare n(C, H) // q(F, E)

Per la proprietà transitiva della relazione di parallelismo:

n(C, H) // q(F, E) // p(A, D)

si ha quindi un fascio di rette parallele tagliato dalle trasversali AC e BH. Per il piccolo teorema di Talete, essendo CF ≅ FA sulla prima trasversale segue che HG ≅ GB; **G risulta quindi essere il punto medio del segmento HB appartenente al triangolo HDB ed FG ne è la mediana**.

d)

Consideriamo adesso il segmento FG.

$\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG}$

Sappiamo che $\overline{FE} = \overline{AD}$ per dimostrazione ed $\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ (per il teorema dei punti medi di un triangolo di cui abbiamo parlato all'inizio della dimostrazione e per ipotesi), quindi

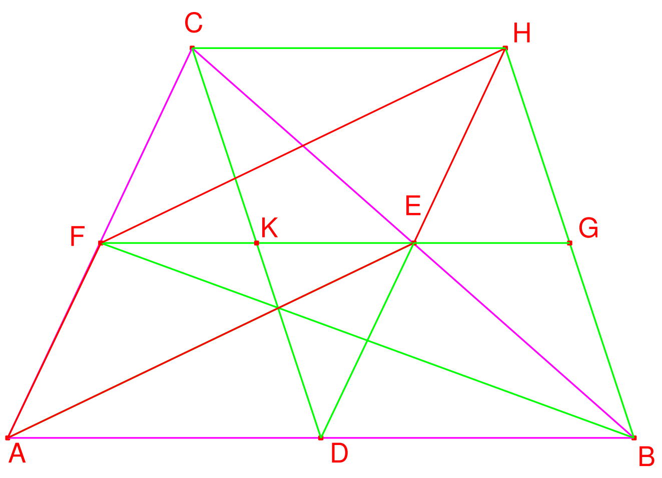
$\overline{FG} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AD} \Rightarrow \overline{FG} = \frac{3}{2}\overline{AD}$

Poiché $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} \xrightarrow{AD \cong DB \text{ per ipotesi}} \overline{AB} = 2\overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Pertanto abbiamo:

$\overline{FG} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right) \Rightarrow \overline{FG} = \frac{3}{4}\overline{AB}$

Classe 1H
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



a)
Il quadrilatero AEHF è un parallelogramma poiché ha i due lati opposti AE ed FH congruenti e paralleli. La diagonale FE divide infatti il quadrilatero in due triangoli congruenti per il I criterio di congruenza. (È AE = FH [cioè, congruenti] per costruzione [per ipotesi], FE in comune e gli angoli HFE = FEA [cioè, congruenti] alterni interni della parallele AE ed FH tagliate dalla trasversale FE). [Con questo ragionamento cosa dimostri?]

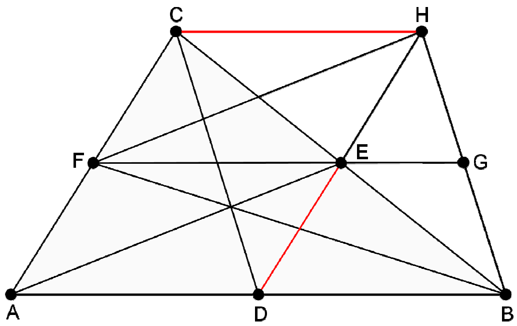
b)

Essendo il quadrilatero AEHF un parallelogramma, anche gli altri due lati AF ed EH sono paralleli e congruenti , e poiché AF = FC (F è punto medio di AC) per la proprietà transitiva della congruenza e del parallelismo sarà FC = EH e FC parallelo ad EH . Ne discende che anche il quadrilatero CFEH è un parallelogramma e quindi FE = CH ed FE è parallelo a CH.
Ma FE è anche il segmento che unisce i punti medi dei lati AC e CB del triangolo ABC ; esso è perciò (per il [un] corollario del teorema di Talete) parallelo ad AB e congruente alla metà di AB: FE = AD = DB = AB/2 [$\overline{FE} = \overline{AD} = \overline{DB} = \overline{AB}/2$]. Allora CH (= FE) risulta anch'esso parallelo ad AB e congruente alla sua metà: CH = DB. Il quadrilatero DBHC è perciò un parallelogramma, avendo i lati opposti CH e DB congruenti e paralleli. Ne deriva che anche gli altri due lati opposti BH e DC sono congruenti e paralleli.

c)
Sempre dal teorema di Talete, applicato alle rette [sostegno] di CH, FE ed AB che sono parallele, discende che nel trapezio ABHC la retta [sostegno] di FE, condotta dal punto medio del lato AC ,incontra il lato HB nel suo punto medio (ai segmenti congruenti CF ed FA sulla trasversale AC corrispondono HG e GB congruenti sulla trasversale BH). Quindi G è punto medio di BH e perciò FG è la mediana relativa al lato BH del triangolo BFH.

d)
Il segmento EG congiunge i punti medi dei lati DH e BH del triangolo DBH, esso è perciò parallelo a DB e congruente alla sua metà. Essendo però DB la metà di AB, sarà EG la quarta parte di AB. Per cui: FE = AB/2 [$\overline{FE} = \overline{AB}/2$], EG = AB/4 [$\overline{EG} = \overline{AB}/4$] e quindi FG = AB/2 + AB/4 = 3AB/4 [$\overline{FG} = \overline{AB}/2 + \overline{AB}/4 = 3\overline{AB}/4$.

Classe 2A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)
[[…]]

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)

AD = FE = $\frac{1}{2}AB$ [$\overline{AD} = \overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$]

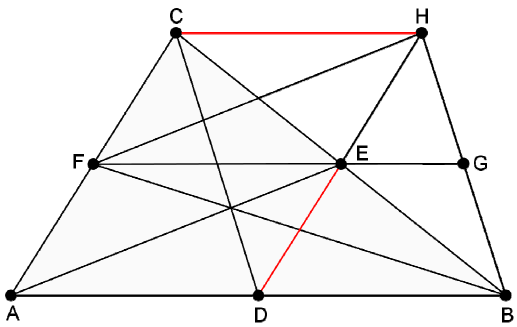
AD = DB [$\overline{AD} = \overline{DB}$] per ipotesi

EG = $\frac{1}{4}AB$ [$\overline{EG} = \frac{1}{4}\overline{AB}$] perché uguale [a] $\frac{1}{2}DB$ [$\frac{1}{2}\overline{DB}$]

Essendo E il punto d'intersezione delle diagonali CB e HD [percé?] consegue che FG = FE + EG [questa uguaglianza era già una conseguenza delle ipotesi iniziali]

FG= $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4}AB$ [$\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AB}$] come volevasi dimostrare.

Classe 2B dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)
Per dimostrare questo punto, abbiamo fatto riferimento ai criteri che forniscono le condizioni sufficienti per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma. Tra questi abbiamo considerato il criterio per cui un quadrilatero è un parallelogramma se ha due lati opposti congruenti e paralleli. Nel nostro caso, il quadrilatero AEHF, ha il lato FH parallelo e congruente al lato AE per costruzione e quindi per quanto sopra enunciato AEHF risulta essere [un] parallelogramma.

b)
Per dimostrare questo punto, abbiamo considerato il quadrilatero CDBH e osservato che:

- la diagonale CB è divisa a metà nel [ha come punto medio il] punto E in quanto in quest'ultimo ricade la mediana del triangolo ABC relativa al lato BC
- la diagonale DH è divisa a metà nel punto E [occorrerebbe dimostrare che i punti D, E e H sono allineati] in quanto:
  considerando il quadrilatero ADEF, di questo si può dire che FE = AD [cioè, congruenti] poiché facendo riferimento al teorema sui triangoli che dimostra che se si congiungono i punti medi di due lati (nel nostro caso il punto F sul lato AC con il punto E sul lato CB) il segmento che si ottiene è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà. Nel nostro caso FE è la metà da AB, ovvero FE = AD poiché D è il punto medio del lato AB.
  Segue che il quadrilatero ADEF è un parallelogramma, avendo i lati FE ed AD paralleli e congruenti (per lo stesso criterio sui parallelogrammi utilizzato nel punto a)). Nel suddetto parallelogramma i lati AF ed ED sono congruenti e nel parallelogramma AEHF i lati AF e EH sono congruenti, di conseguenza per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra segmenti] HE = ED [cioè, congruenti].

Poiché le diagonali CB e DH si incontrano nel loro punto medio E, il quadrilatero CDBH è un parallelogramma e in particolare BH = DC [cioè, congruenti].

c)
Per rispondere a questo quesito, abbiamo osservato che poiché FG è parallelo ad AB e CH è parallelo ad AB per quanto già dimostrato, otteniamo un fascio di rette parallele, tagliate dalle

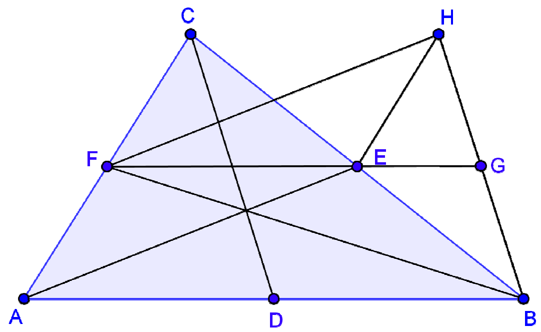
trasversali CA e HB, che forma segmenti congruenti sulla trasversale CA (CF = FA ipotesi del problema) a cui corrispondono i segmenti congruenti sull'altra trasversale HB che sono [BG e GH e quindi] BG = GH. Segue che FG è la mediana del triangolo BFH relativa al lato BH.

d)
Per dimostrare questo punto, abbiamo considerato:

- il parallelogramma ADEF in cui AD = EF [cioè, congruenti], segue che EF = 1/2 AB $\overline{EF} = 1/2\overline{AB}$ (già dimostrato).
- Il triangolo DBH a cui possiamo applicare lo stesso teorema sui triangoli, enunciato prima, per dimostrare che EG = 1/2DB [$\overline{EG} = 1/2\overline{DB}$] segue che EG = 1/4 AB [$\overline{EG} = 1/4\overline{AB}$].

Di conseguenza si ha FG = FE + EG = (1/2 + 1/4) AB = 3/4 AB
[$\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG} = (1/2 + 1/4)\overline{AB} = 3/4\overline{AB}$].

Classe 2C dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)
Consideriamo il quadrilatero AEHF, esso ha

- $\overline{AE} = \overline{FH}$ e $\overline{AE} // \overline{FH}$ [AE // FH] per ipotesi;

affinché esso sia un parallelogramma è necessario che:

- $\overline{AF} = \overline{EH}$ e $\overline{AF} // \overline{EH}$ [AF // EH]
- $F\hat{A}E = F\hat{H}E$ [cioè angoli congruenti]
- $H\hat{F}A = A\hat{E}H$ [cioè angoli congruenti].

$\overline{FE}$ [FE] è diagonale del quadrilatero AEHF e lo divide nei triangoli FEH e AFE. Questi hanno:

- $\overline{AE} = \overline{FH}$ per ipotesi
- $\overline{FE}$ [FE] in comune
- $E\hat{F}H = F\hat{E}A$ [cioè angoli congruenti] perché angoli alterni interni rispetto a $\overline{AE} // \overline{FH}$ tagliati da $\overline{FE}$ [alle rette parallele AE e FH tagliate dalla trasversale FE].

Possiamo quindi concludere che i triangoli FEH e AFE sono congruenti per il 1° criterio di congruenza e quindi il quadrilatero AEHF è un parallelogramma.

b)
Consideriamo i triangoli ABC e FEC. Questi hanno:

- $\overline{AC} : \overline{CF} = \overline{CB} : \overline{CE} = 2:1$
- $A\hat{C}B = F\hat{C}E$ [cioè angoli congruenti]

Possiamo affermare che i triangoli ABC e FEC sono simili per il 2° criterio di similitudine, da cui:

- $\overline{AB} : \overline{FE} = 2:1$

- $\overline{AD} = \overline{FE}$ e $\overline{AD} // \overline{FE}$ [AD // FE]
- $\overline{DB} = \overline{FE}$ e $\overline{DB} // \overline{FE}$ [DB // FE]

Congiungiamo il punto C con il punto H

- $\overline{AF} = \overline{FC}$ per ipotesi
- $\overline{AF} = \overline{EH}$ e $\overline{AF} // \overline{EH}$ [AF // EH] come dimostrato nel quesito a

Quindi per la proprietà transitiva [della relazione di uguaglianza e della relazione di parallelismo] $\overline{FC} = \overline{EH}$ e $\overline{FC} // \overline{EH}$ [FC // EH]

Possiamo affermare che $\overline{FE} = \overline{CH}$ e $\overline{FE} // \overline{CH}$ [FE // CH] perché il quadrilatero FCHE è un parallelogramma. (possiamo dimostrarlo come abbiamo fatto nel quesito a per il quadrilatero AEHF).

Consideriamo i triangoli DCB e BCH. Questi hanno:

- $\overline{CB}$ [CB] in comune
- $D\hat{C}B = C\hat{B}H$ [cioè angoli congruenti] perché angoli alterni interni rispetto a $\overline{CH} // \overline{DB}$ tagliati da $\overline{CB}$ [questo è falso: sono angoli alterni interni rispetto alle rette DC e BH (di cui occorre dimostrare il parallelismo) tagliate dalla trasversale CB]
- $H\hat{C}B = D\hat{B}C$ [cioè angoli congruenti] perché angoli alterni interni rispetto a $\overline{CH} // \overline{DB}$ tagliati da $\overline{CB}$ [alle rette parallele CH e DB tagliate dalla trasversale CB]

Possiamo concludere che i triangoli DCB e BCH sono congruenti per il 2° criterio di congruenza e quindi $\underline{\overline{BH} = \overline{DC}}$.

c)

Chiamiamo O il punto di intersezione tra $\overline{CD}$ e $\overline{FE}$ [CD e FE] e consideriamo i triangoli OCE e DCB. Questi hanno:

- $D\hat{C}B = O\hat{C}E$ perché in comune
- $C\hat{B}D = C\hat{E}O$ [cioè angoli congruenti] perché angoli corrispondenti rispetto a $\overline{OE} // \overline{DB}$ tagliati da $\overline{CB}$ [alle rette parallele OE e DB tagliate dalla trasversale CB]
- $C\hat{D}B = C\hat{O}E$ [cioè angoli congruenti] perché angoli corrispondenti rispetto a $\overline{OE} // \overline{DB}$ tagliati da $\overline{CD}$ [alle rette parallele OE e DB tagliate dalla trasversale CD]

Possiamo affermare che dato che i triangoli OCE e DCB sono simili per il 1° criterio di similitudine, allora $\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{CO} : \overline{CD} = \overline{OE} : \overline{DB} = 1 : 2$

Dato che:

- $\overline{CH} // \overline{OG} // \overline{DB}$ [CH // OG // DB]
- $\overline{CO} = \overline{OD}$ [perché?]
- $\overline{CO} = \overline{HG}$ [perché?]
- $\overline{OD} = \overline{GB}$ [perché?]

Possiamo concludere che $\overline{HG} = \overline{GB}$, da cui $\overline{FG}$ [FG] <u>è mediana relativa a</u> $\overline{BH}$ [BH].

d)

Dato che:

- $\overline{OE} : \overline{DB} = 1 : 2$ come dimostrato nel quesito c
- $\overline{DB} = \overline{FE}$ come dimostrato nel quesito b
- $\overline{DB} = \overline{OG}$ perché il quadrilatero DBGO è un parallelogramma

Allora:

- $\overline{OE} : \overline{FE} = 1 : 2$ da cui $\overline{FO} = \overline{OE}$

- $\overline{OE} : \overline{OG} = 1 : 2$ da cui $\overline{OE} = \overline{EG}$

Da cui $\overline{FO} = \overline{OE} = \overline{EG}$

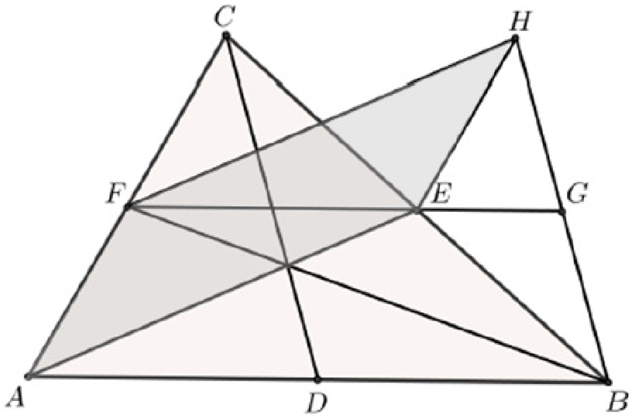
Supponendo che $\overline{FO} = \overline{OE} = \overline{EG} = 1$ e quindi $\overline{AD} = \overline{DB} = 2$

$\overline{FG} = \overline{FO} + \overline{OE} + \overline{EG} = 1 + 1 + 1 = 3$

$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 2 + 2 = 4$

Possiamo concludere che: $\underline{\overline{FG} : \overline{AB} = 3 : 4}$

Classe 2D dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

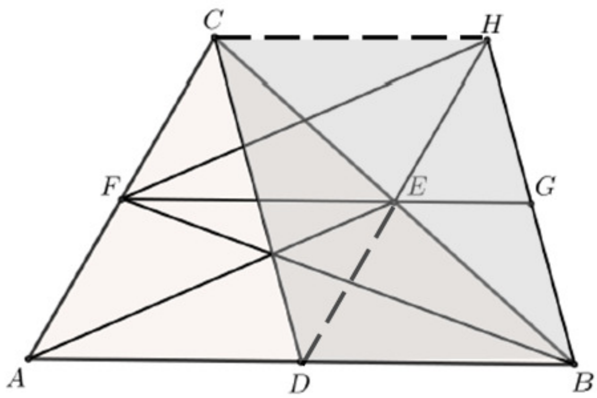


a)

Per dimostrare questo punto abbiamo considerato la definizione di parallelogramma, ed i criteri e i teoremi per riconoscerlo. Il quadrilatero AEHF è un parallelogramma perché, per definizione, un parallelogramma è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli e congruenti [non è esattamente questa la definizione di parallelogramma].

In particolare, il lato $\overline{FH}$ [FH] è parallelo e congruente al lato $\overline{AE}$ [AE] (dato del quesito). Conseguentemente per i teoremi relativi ai criteri per riconoscere un parallelogramma, per i quali se due lati opposti di un quadrilatero sono paralleli e congruenti anche gli altri due lati lo saranno, allora anche $\overline{AF}$ [AF] dovrà essere congruente e parallelo ad $\overline{HE}$ [HE].

b)



Abbiamo risolto questo punto dimostrando che il quadrilatero *CDBH* (ottenuto tracciando il segmento $\overline{CH}$ [CH]) è un parallelogramma. Infatti se questo quadrilatero è un parallelogramma, i lati opposti saranno paralleli e congruenti e quindi $\overline{BH} = \overline{DC}$. Inizialmente abbiamo notato che nel quadrilatero *CDBH* la diagonale $\overline{CB}$ [CB] è divisa a metà (nel punto *E,* in quanto punto medio del lato $\overline{CB}$) dall'altra diagonale $\overline{HD}$, anch'essa divisa a metà nel punto *E* (perché per quanto dimostrato nella soluzione del quesito "a" $\overline{AF}$ [AF] congruente a $\overline{HE}$ [HE], mentre $\overline{AF}$ [AF] è

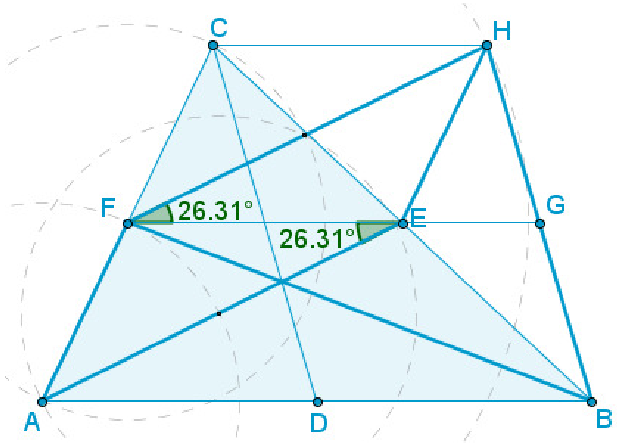
congruente a $\overline{ED}$ [ED] perché sono lati paralleli e congruenti del parallelogramma *ADEF*, allora $\overline{ED}$ [ED] è congruente a $\overline{HE}$ [HE]) [occorrerebbe però dimostrare che i punti H, E, D sono allineati].
Pertanto, per quanto dimostrato, il quadrilatero *CDBH* è un parallelogramma perché le diagonali si tagliano scambievolmente a metà, e quindi avrà i lati $\overline{CH} = \overline{DB}$ e $\overline{BH} = \overline{DC}$.

c)
Abbiamo risolto questo punto dimostrando che $\overline{HG} = \overline{GB}$.
Poiché $\overline{FE}$ [FE] è un segmento che unisce due punti medi (*F* e *E*) dei due lati del triangolo *ABC* e che, per definizione [per un teorema], il segmento che unisce i due punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato, allora $\overline{FE}$ [FE] sarà parallelo anche al segmento $\overline{AB}$ [AB].
Per quanto dimostrato nel quesito precedente, $\overline{CH}$ [CH] è parallelo a $\overline{DB}$ [DB] (e quindi ad $\overline{AB}$ [AB]), pertanto i tre segmenti $\overline{CH}$ [CH], $\overline{FG}$ [FG] e $\overline{DB}$ [DB] sono paralleli. Ma, poiché per definizione [per un teorema], tre rette parallele che staccano su una trasversale segmenti congruenti ($\overline{CE} = \overline{EB}$ essendo *E* punto medio di $\overline{CB}$), staccano segmenti congruenti su ogni altra trasversale, allora $\overline{HG} = \overline{GB}$.

d)
Siamo partiti dalla considerazione che [[il segmento]] $\overline{FE} = \overline{AD}$ perché, considerando il triangolo *ABC*, per definizione [per un teorema], il segmento che unisce i punti medi dei lati di un triangolo ($\overline{FE}$ [FE]) ha lunghezza pari alla metà del terzo lato (quindi $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DB}$, poiché *D* è punto medio).
Inoltre, poiché $\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG}$ allora $\overline{FE} = \overline{FG} - \overline{EG}$.
Sostituendo nell'uguaglianza $\overline{FE} = \overline{AD}$ i valori ottenuti avremo che $\overline{FG} - \overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.
Considerando il triangolo DBH e facendo le stesse considerazioni fatte per il triangolo ABC, [per] il segmento [EG risulta] $\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{DB}$. Ma poiché $\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ allora $\overline{EG} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.
Sostituendo, l'uguaglianza iniziale $\overline{FG} - \overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ diventa $\overline{FG} - \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.
Da quest'ultima formula, calcolando $\overline{FG}$ otteniamo che $\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AB}$ e quindi svolgendo le dovute operazioni $\overline{FG} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

Classe 3A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Pattada (SS)

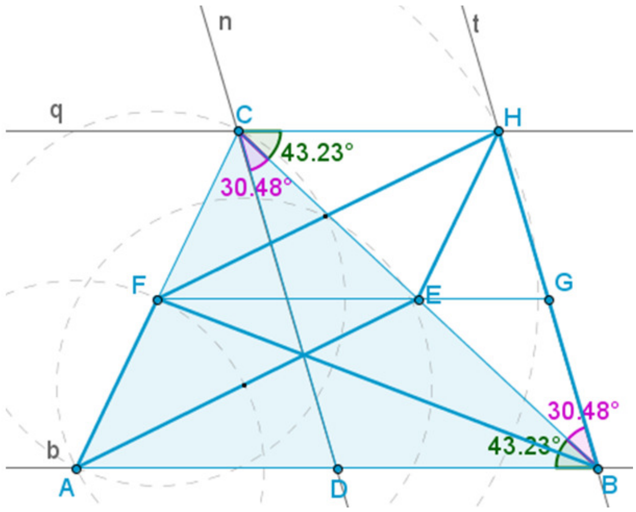
a)
Sappiamo che, per costruzione, il segmento FH è parallelo e congruente alla mediana AE; il segmento FE fa parte della retta trasversale alle rette che contengono i due segmenti paralleli: gli angoli F$\hat{E}$A e E$\hat{F}$H sono congruenti perché alterni interni. I due triangoli EFH e FEA sono congruenti per il 1° criterio di congruenza: hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso. Ruotando il triangolo FEA di un angolo di 180°, in senso antiorario, attorno al punto medio del segmento FE, i due triangoli si sovrappongono.



Il quadrilatero AEHF è perciò un parallelogramma [in base a quale proprietà?].

b)

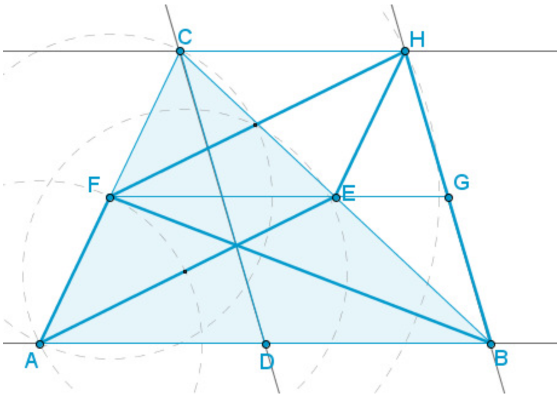
Per dimostrare questo punto ci siamo serviti del criterio fondamentale del parallelismo: “Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni congruenti, allora le due rette sono parallele”.



Le rette ***n*** e ***t*** contenenti i segmenti BH [DC] e DC [BH] sono parallele perché la trasversale di cui fa parte il segmento CB forma con esse angoli alterni interni congruenti ($D\hat{C}B$ e $H\hat{B}C$). [e la dimostrazione?]

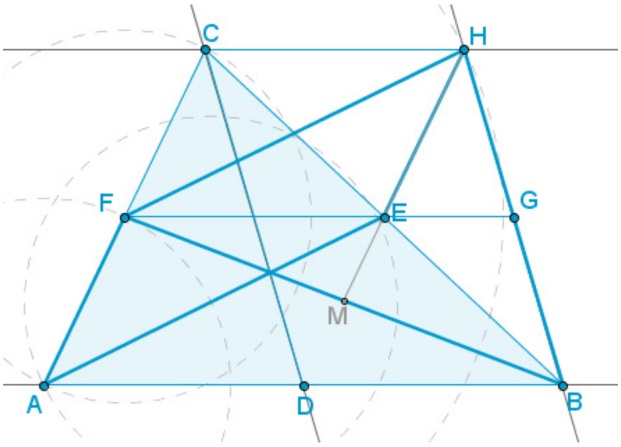
Le rette ***q*** e ***b*** di cui fanno parte rispettivamente i segmenti CH e DB sono anch'esse parallele perché la stessa trasversale forma con esse angoli alterni interni congruenti ($C\hat{B}D$ e $B\hat{C}H$) [e la dimostrazione?]. Il quadrilatero DBHC è un parallelogramma in quanto: gli angoli opposti sono congruenti (per somma di angoli congruenti), i lati opposti sono segmenti paralleli compresi tra rette parallele, quindi congruenti, quindi $\overline{BH} = \overline{DC}$.

c)



Per questo punto siamo ricorsi al Teorema di Talete. Il segmento FE è parallelo al segmento AB in quanto la retta che lo contiene divide due lati del triangolo ABC in parti ordinatamente proporzionali. Quindi anche il suo prolungamento EG è parallelo al segmento AB ed essendo il segmento CH parallelo a quello AB, il segmento EG è parallelo al segmento CH (proprietà transitiva [della relazione di parallelismo]).
Possiamo impostare la seguente proporzione:
$\overline{BG} : \overline{BH} = \overline{BE} : \overline{BC}$
Poiché [la lunghezza del] [[il]] segmento $\overline{BE}$ [BE] è uguale a ½ [della lunghezza] del segmento $\overline{BC}$ [BC], anche [la lunghezza del] [[il]] segmento $\overline{BG}$ [BG] è uguale a ½ [della lunghezza] di $\overline{BH}$ [BH], quindi il punto G è il punto medio del segmento BH e il segmento FG è la mediana relativa al lato BH del triangolo BFH.

d)

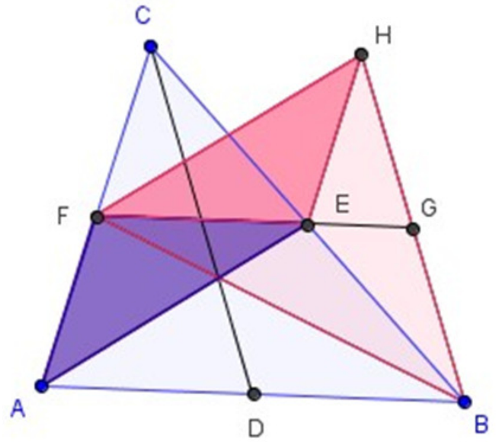


Abbiamo fatto le seguenti considerazioni:
poiché il segmento FG è una mediana del triangolo FHB, è valida la seguente relazione:
$\overline{FE} = 2\,\overline{EG}$ (il punto E è il baricentro del triangolo FHB [e la dimostrazione?] – abbiamo tracciato la mediana relativa al lato FB - e divide ciascuna mediana in due parti di cui una doppia dell'altra)
Nuovamente ci siamo serviti del teorema di Talete.
$\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{FE} : \overline{AB}$ da cui, essendo $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{CB}$, si ha: $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$
Poiché, come visto al punto precedente, $\overline{FE} = 2\,\overline{EG}$, si ha $\overline{AB} = 4\overline{EG}$
Essendo $\overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG}$ e
$\overline{FE} = 2\,\overline{EG}$ si ha $\overline{FG} = 3\,\overline{EG}$
Quindi $\frac{\overline{FG}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$

Alice Garbari, Classe 2I

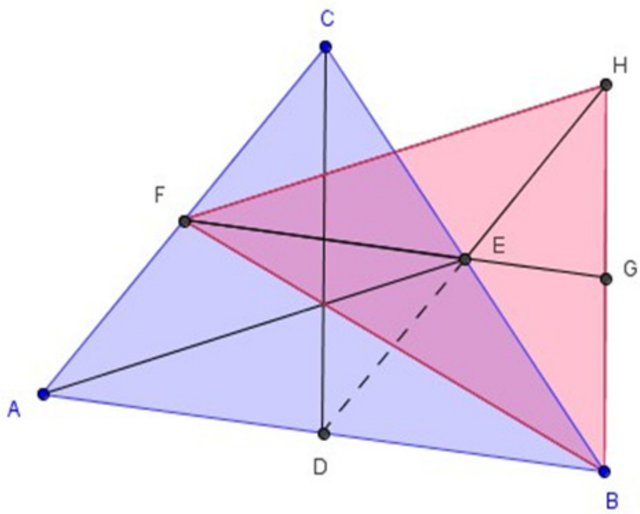
Scuola Media "G.B. Tiepolo", Milano (MI)

a)
Considero i triangoli AEF e HEF, essi sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli perché hanno:
- FE in comune
- $A\hat{E}F \cong H\hat{F}E$ perché alterni interni formati dalle parallele FH e AM [AE] con la trasversale FG
- FH $\cong$ AE per ipotesi/costruzione



Quindi AF $\cong$ EH e $A\hat{F}E \cong H\hat{E}F$ e, dato che le rette AF e EH tagliate dalla trasversale FG formano angoli alterni interni congruenti si ha che AF//EH.
Si può, quindi, affermare che AEHF è un parallelogramma.

b)

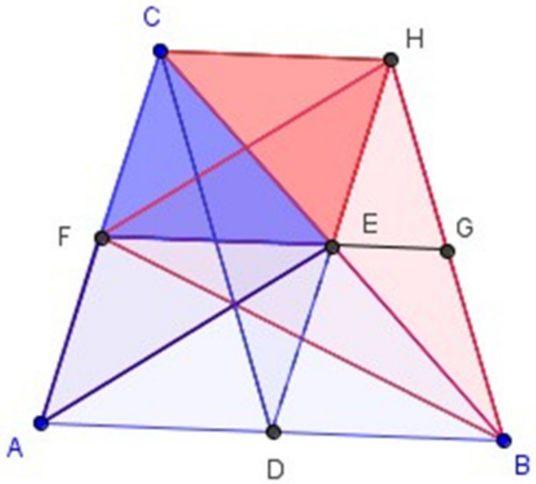


Da AF//EH segue che AC//EH
Prolungo il segmento HE fino a incontrare nel punto D [occorrerebbe dimostrare prima che i punti D, E, H sono allineati] il segmento AB.
ED // AC e ED $\cong$ AF perché il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà.
Considero i triangoli CDE e BHE, essi sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli perché hanno:
- BE $\cong$ EC per ipotesi
- $C\hat{E}D \cong H\hat{E}B$ perché opposti al vertice
- EH $\cong$ ED per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza] (AF $\cong$ EH e AF $\cong$ ED $\Rightarrow$ EH $\cong$ ED)

Si può, quindi, affermare che $\overline{BH} = \overline{DC}$

c)
Traccio il segmento CH. Considero i triangoli FEC e CEH, essi sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli perché hanno:

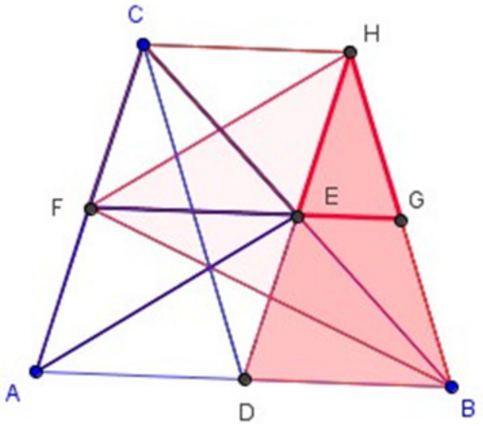
- FC $\cong$ EH (segue dal punto b, così come FC // EH)
- $F\hat{C}E \cong C\hat{E}H$ perché alterni interni formati dalle parallele FC e EH tagliate dalla trasversale CE
- CE in comune



Dato che i triangoli FEC e CEH sono congruenti, le rette CH e FG sono parallele perché, tagliate dalla trasversale CE, formano angoli alterni interni congruenti ($E\hat{C}H \cong C\hat{E}F$)
Dato che i triangoli CDE e BHE sono congruenti, le rette CH e AB sono parallele perché, tagliate dalla trasversale DH, formano angoli alterni interni congruenti ($C\hat{D}H \cong D\hat{H}B$) [così dimostri che sono parallele le rette CD e HB].
Le rette FG e AB sono parallele perché due rette parallele a una terza retta sono parallele tra loro e, CH, FG e AB formano un fascio [una terna] di rette parallele.
Considerando il fascio [la terna] di rette formato [formata] dalle rette CH, FG e AB si ha, per il teorema di Talete, che le due trasversali AC e BH staccano su di esse segmenti direttamente proporzionali.
Poiché AF $\cong$ FC per ipotesi, si ha che BG $\cong$ GH $\Rightarrow$ FG è mediana del triangolo BFH

d)
Considero i triangoli ABC e FEC essi sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli perché hanno:

- $A\hat{C}B$ in comune
- $C\hat{F}E \cong C\hat{A}B$ perché angoli corrispondenti formati dalle parallele FG e AB tagliate dalla trasversale CA



Considero i triangoli DBH e EGH essi sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli perché hanno:

- $D\hat{H}B$ in comune
- $H\hat{E}G \cong H\hat{D}B$ perché angoli corrispondenti formati dalle parallele FG e AB tagliate dalla trasversale HD.

Da quanto sopra dimostrato e dall'ipotesi, si deduce che ciascun lato dei triangoli CFE e HEG misura la metà dei lati [corrispondenti] dei triangoli ABC e DBH

$$\Rightarrow \quad \overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right) = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{FG} = \overline{FE} + \overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AB}$$