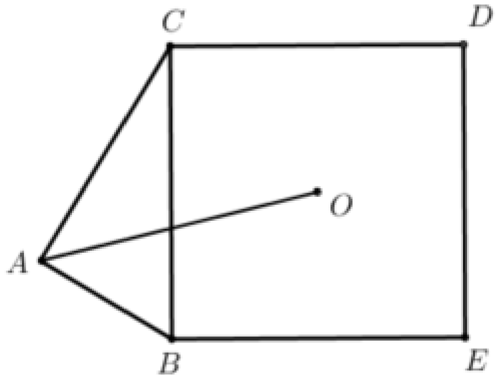
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* *(Edwin A. Abbott)

Flatlandia 13-27 Febbraio 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema:
Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC (retto in A).



a) Dimostrare che AO biseca l'angolo BAC.
b) Prolungato il lato AB, dalla parte di B, di un segmento BF congruente ad AC, provare che $ACEF$ è un trapezio.
c) Come deve essere scelto il triangolo rettangolo ABC affinché il trapezio suddetto sia equivalente al quadrato?

Commento

Abbiamo ricevuto diciassette risposte così suddivise: due da classi prime delle Scuole Superiori, sei da classi seconde e cinque da classi terze, sempre di Scuole Superiori (con decisa prevalenza del Liceo Scientifico come tipologia di scuola); ci sono state inoltre quattro risposte provenienti da classi seconde di Scuola Media, o, meglio, da quattro classi diverse (tutte seconde) di uno stesso Istituto Comprensivo.
Il problema riguardava una figura geometrica costituita inizialmente da un triangolo rettangolo e da un quadrato costruito sull'ipotenusa, esternamente al triangolo stesso, e poneva tre domande (tra loro collegate). Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare che il segmento congiungente il vertice dell'angolo retto del triangolo col centro del quadrato era anche bisettrice dello stesso angolo retto; nel secondo si chiedeva di costruire, dopo aver opportunamente prolungato un lato del triangolo, un quadrilatero e di dimostrare che tale quadrilatero era un trapezio e infine nel terzo quesito si chiedeva quali caratteristiche dovesse avere il triangolo rettangolo affinché il trapezio costruito fosse equivalente al quadrato.
Quasi tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto alle prime due domande (anche se con alcune imprecisioni), mentre, per quanto riguarda la terza domanda, solo alcuni dimostrano che solo il triangolo rettangolo isoscele soddisfa alla richiesta equivalenza: la maggioranza (probabilmente per un uso non appropriato del software di geometria dinamica) suppone che il triangolo sia anche isoscele e dimostra di conseguenza l'equivalenza.
Dobbiamo sottolineare ancora una volta la presenza in quasi tutte le soluzioni di un "errore" (forse dovremmo dire un'imprecisione) abbastanza comune in tutti i livelli scolari, cioè confondere un

segmento con la sua lunghezza e un angolo con la sua ampiezza, il che porta a utilizzare la stessa notazione per indicare due concetti diversi.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS “G. Galilei”, Adria (RO)
LS “Alfano da Termoli”, Termoli (CB)
LS “Don Milani”, Montichiari (BS)
LS “R. Donatelli”, Terni (TR)
LS Scienze Applicate “B. Russell”, Cles (TN)
LS “XXV Aprile”, Portogruaro (VE)
LS “Visitandine-Malpighi”, Castel San Pietro Terme (BO)
ISIS “Archimede”, San Giovanni in Persiceto (BO)
LS “G. Aselli”, Cremona (CR)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
Ist. Comprensivo “G. Deledda”, Ginosa (TA)

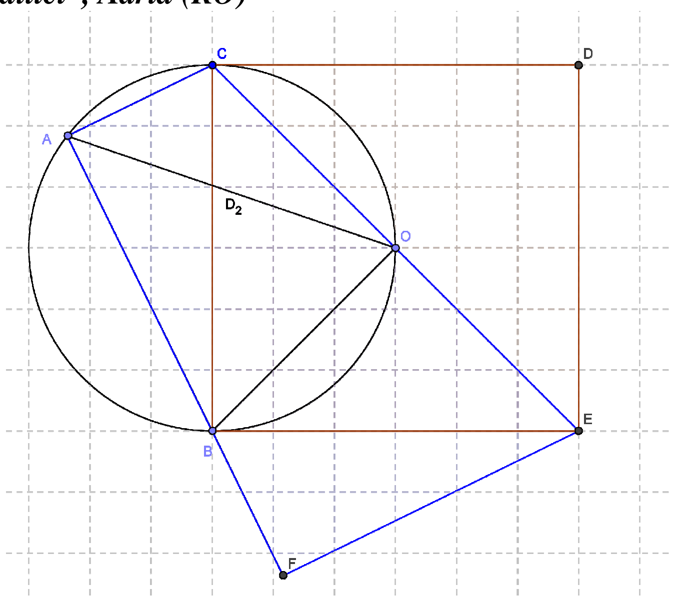
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Il gruppo di lavoro che gestisce FLAT*landia* è composto da:

- Ercole CASTAGNOLA - NRD Università di Napoli “Federico II”
- Giuliano MAZZANTI - Docente di Geometria, Università di Ferrara
- Valter ROSELLI - Ricercatore, Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
- Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica, LS "Galileo Galilei", Adria (RO)

Soluzioni

Nicola Pivaro, Paolo Portesan, Classe 3C
Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (RO)



a)
Considero il punto O che è l'incontro [il punto di intersezione] delle diagonali del quadrato CBED,[;] questo punto è anche il vertice di un triangolo rettangolo isoscele che ha per base CB e poiché CO = OB [$\overline{CO} = \overline{OB}$], dato che le diagonali si dividono scambievolmente a metà, gli angoli ∠BCO e ∠CBO sono di [hanno ampiezza pari a] 45°. Dato che in una circonferenza ad archi uguali corrispondono angoli alla circonferenza uguali l'angolo ∠CBO = [è uguale all'angolo] ∠CAO e quindi sono entrambi di [ampiezza pari a] 45°. Lo stesso vale per [l'angolo] ∠BAO = [che è uguale all'angolo] ∠BCO. [Quale circonferenza si considera? e perché passa per A,C,B,O]
b)
Il trapezio, per essere considerato tale, necessita che i lati paralleli siano entrambi perpendicolari alla retta contenente il segmento BA, perché AC è perpendicolare a BA, e [l'angolo] ∠EFB è retto [questo è da dimostrare (vedi più avanti)].
BF = AC [$\overline{BF} = \overline{AC}$] per [[ipotesi]] [costruzione] e CB = BE [$\overline{CB} = \overline{BE}$] per [[costruzione]] [ipotesi]. [quali triangoli consideri ?]
∠ABC + ∠ACB = 90° poiché [il triangolo] ABC è rettangolo e dovendo essere la somma [delle ampiezze] degli angoli interni [pari a] 180°, la somma [delle ampiezze] dei due [angli] non retti è [uguale a] 90°.
CBE=90 [∠CBE = 90°], ∠ABF – ∠CBE è [pari a] un angolo retto, ∠ABC + ∠FBE = 90° quindi ∠ACB = ∠FBE. allora [Di conseguenza] i due triangoli sono isometrici poiché hanno due lati e l'angolo fra essi compreso isometri. [L'angolo] ∠EFB è retto, quindi EF [è] perpendicolare al segmento AB. quindi [Di conseguenza] il quadrilatero è un trapezio.
c) Chiamando AC = *a* [$\overline{AC} = a$] BA = *b* [$\overline{BA} = b$] CB = *c* [$\overline{CB} = c$] l'uguaglianza delle aree risulta:

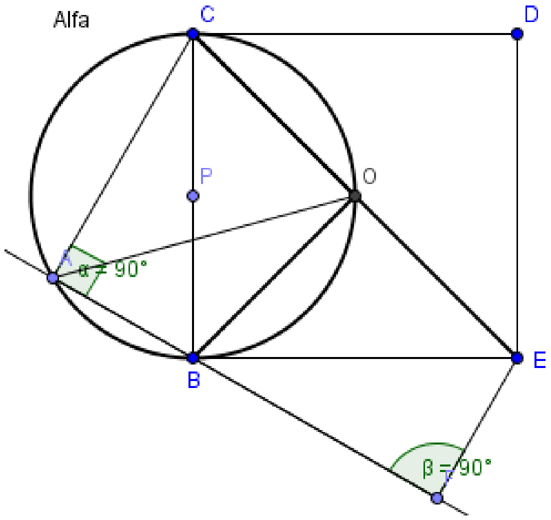
$$c^2 = \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$c\sqrt{2} = a+b$$

Poiché *c* è il [la lunghezza del] lato del quadrato $c\sqrt{2}$ è la [lunghezza della] diagonale. Quindi la somma dei cateti deve essere uguale alla diagonale perciò affinché l'area sia uguale basta porre che il triangolo sia isoscele così:

$$[a = b = \frac{c\sqrt{2}}{2}]$$

Lorenzo Colombo, Classe 3C
Liceo Scientifico "Alfano da Termoli", Termoli (CB)



a)
HP:
ABC triangolo rettangolo in A
BCDE quadrato costruito sull'ipotenusa BC
O centro di BCDE
TH:
AO biseca l'angolo BAC

DIMOSTRAZIONE:
Considero il punto medio del segmento BC e lo chiamo P.
Poiché ABC è un triangolo rettangolo esso è sempre inscrivibile in una circonferenza Alfa avente centro nel punto medio della ipotenusa e raggio congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.

⇒ I punti C, B ed A appartengono ad Alfa circonferenza [alla circonferenza Alfa]

Considero il triangolo BCE: in esso O è punto medio del lato CE (essendo CE diagonale e O centro del quadrato BCDE) e P è punto medio del lato BC per costruzione, quindi il segmento PO è parallelo e congruente alla metà di BE (per il primo corollario del teorema di Talete).

⇒ OP è congruente a PB

Essendo tuttavia PB un raggio della circonferenza Alfa, non può che esserlo anche OP essendogli congruente e con un estremo in comune

⇒ O appartiene ad Alfa

Considerando le diagonali del quadrato CE e BD, esse si intersecano nel punto O (poiché è il centro del quadrato BCDE)

⇒ CO è congruente a BO

Tuttavia CO e BO sono anche corde della circonferenza Alfa (poiché B e C le appartengono) e sono congruenti, di conseguenza lo sono anche gli archi che sottendono e in particolare gli angoli alla circonferenza che a loro volta sottendono tali archi

⇒ CAO e OAB angoli sono congruenti

⇒ AO biseca l'angolo BAC

[Nella figura mancano le lettere A ed F]

b)
HP:
ABC triangolo rettangolo in A
BCDE quadrato costruito sull'ipotenusa BC
O centro di BCDE
F appartiene alla retta passante per A e B ed è consecutivo a B [sul prolungamento di AB dalla parte di B]
BF è congruente ad AC
TH:
ACEF è un trapezio

DIMOSTRAZIONE:
Se ACEF fosse un trapezio, esso dovrebbe avere almeno due lati paralleli
ABF è un angolo piatto poiché i punti A, B ed F sono allineati per HP [ipotesi]

$\Rightarrow \angle ABF = \angle CBA + \angle EBF + \angle CBE = 180°$; (intendendo con il solo nome dell'angolo la misura della sua ampiezza)

$\Rightarrow \angle CBA + \angle EBF = 180° - 90°$; (essendo CBE angolo interno di un quadrato)

$\Rightarrow \angle CBA + \angle EBF = 90°$

Ma è anche vero che $\angle BCA + \angle CBA = 90°$ essendo i due angoli acuti del triangolo rettangolo ABC

$\Rightarrow \angle BCA$ è congruente a $\angle EBF$ poiché differenze di angoli congruenti

Il triangolo ABC è congruente al triangolo BFE per il primo criterio di congruenza dei triangoli poiché:

1. BC è congruente a BE (lati del quadrato BCDE)
2. AC è congruente a BF per HP
3. $\angle BCA$ è congruente a $\angle EBF$ per deduzione precedente

$\Rightarrow$ Gli angoli $\angle CAB$ e $\angle EFB$ sono congruente [congruenti]

$\Rightarrow$ La retta passante per E ed F e la retta passante per A e C sono entrambe perpendicolari alla retta passante per A ed F

$\Rightarrow$ La retta passante per E ed F e la retta passante per A e C sono parallele

$\Rightarrow$ I segmenti AC ed EF sono paralleli

$\Rightarrow$ ACEF è un trapezio per definizione !

c)
Devo imporre che l'area di ACEF sia equivalente [uguale] all'area di CBED

$\Rightarrow A_{ACEF} = A_{CBED}$; (intendendo semplicemente con area la sua misura dell'estensione [la misura della sua estensione])

$\Rightarrow A_{ABC} + A_{BFE} + A_{CBE} = A_{CBE} + A_{CDE}$;

$\Rightarrow 2A_{ABC} = A_{CDE}$; (essendo ABC e BFE congruenti)

$\Rightarrow 2AC \cdot AB/2 = CD \cdot DE/2$; (intendendo con il semplice nome del segmento la [[sua]] misura della [sua] lunghezza)

$\Rightarrow 2AC \cdot AB = BC^2$; (essendo CD, DE e BC congruenti)

$\Rightarrow 2AC \cdot AB = AB^2 + AC^2$; (per il teorema di Pitagora applicato al tr. rett. ABC)

$\Rightarrow AB^2 - 2AC \cdot AB + AC^2 = 0$;

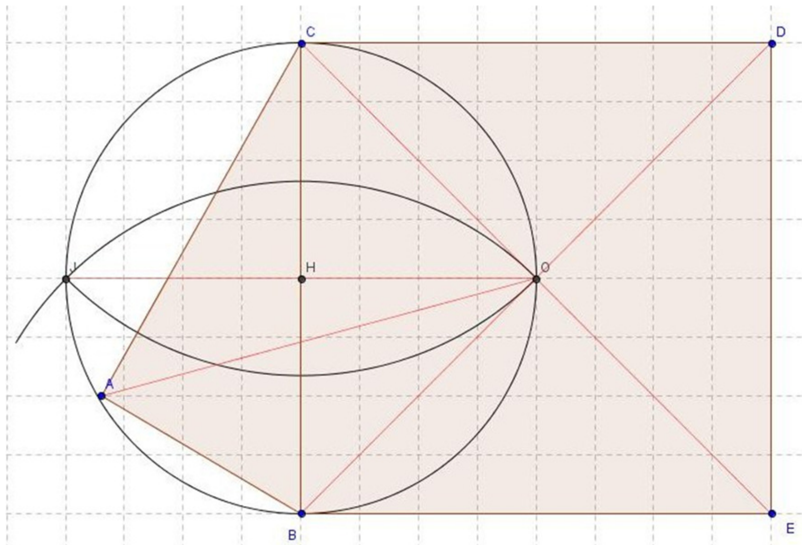
$\Rightarrow (AB - AC)^2 = 0$;

$\Rightarrow AB = AC$!

Il triangolo rettangolo ABC deve essere scelto in modo tale che AB sia congruente ad AC affinché il trapezio ACEF sia equivalente al quadrato BCDE.

Lucia Salierno, Classe 3C
Liceo Scientifico "Alfano da Termoli", Termoli (CB)

a)



Hp: (IPOTESI)

1. *BCDE quadrato*
2. *ABC triangolo rettangolo*
3. $\hat{A} = 90°$
4. $CE \perp BD \wedge CE \cap BD = \{0\}$ $[\{O\}]$

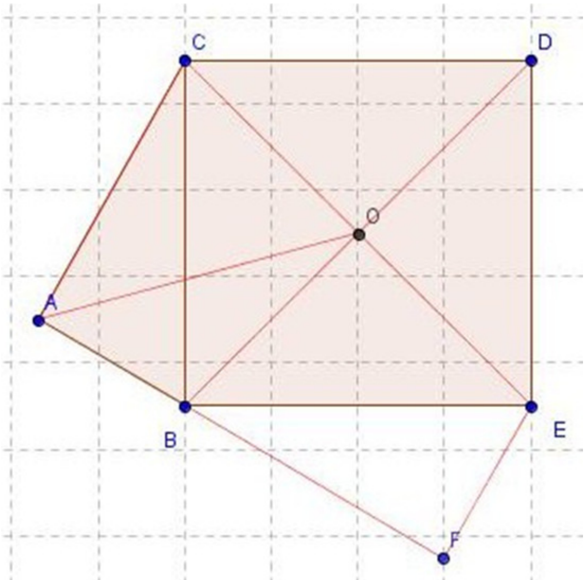
Th:(TESI) $B\hat{A}O \cong O\hat{A}C$

<u>DIMOSTRAZIONE:</u> Al fine della dimostrazione è necessario trovare il punto medio del segmento $\overline{BC}$. Puntiamo il compasso in B con apertura a piacere [maggiore di BH] e tracciamo una semicirconferenza. Facciamo lo stesso puntando in C con la medesima apertura, e la retta passante per i 2 punti di intersezione tra le semicirconferenze è l'asse del segmento BC, e di conseguenza si è trovato anche il punto medio che chiamiamo H che è l'intersezione tra il segmento e l'asse. Puntando in H il compasso con apertura in B [HB] tracciamo una circonferenza. Quest'ultima passa sia per A, che per C, che per O. Passa per A poiché un triangolo rettangolo è sempre inscrivibile in una semicirconferenza con diametro congruente all'ipotenusa (diametro congruente all'ipotenusa per costruzione); passa per C e per O per definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto chiamato centro, in questo caso H ($\overline{OH} \cong \frac{1}{2}\overline{CB} \Longrightarrow \overline{OH} \cong \overline{CH} \cong \overline{BH}$).

Si tracciano le diagonali $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$, che si bisecano reciprocamente nel punto O, e poiché $\overline{BD} \cong \overline{CE} \wedge \overline{BD} \cong (\overline{BO} + \overline{DO}) \wedge \overline{CE} \cong (\overline{CO} + \overline{EO}) \Longrightarrow (\overline{BO} + \overline{DO}) \cong (\overline{CO} + \overline{EO}) \Longrightarrow$
in particolare $\overline{CO} \cong \overline{BO}$

Essendo $\overline{CO}$ e $\overline{BO}$ corde congruenti, sono sottese da archi congruenti. Ma archi congruenti sottendono angoli alla circonferenza congruenti, quindi $B\hat{A}O \cong O\hat{A}C$.

b)

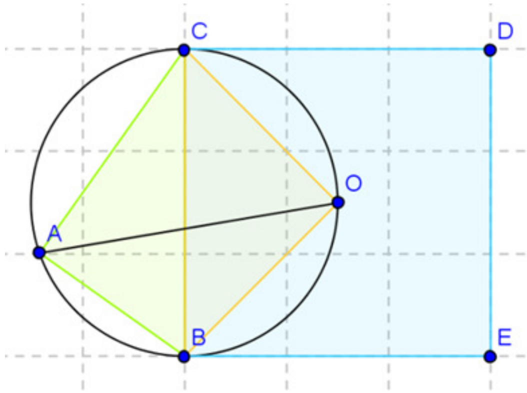


Gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ sono complementari. La somma degli angoli interni di un triangolo è [pari a] un angolo piatto, e nel caso del triangolo rettangolo, essendo un angolo retto, i restanti due non possono che essere complementari.
Gli angoli $A\hat{B}C$ e $F\hat{B}E$ sono anch'essi complementari, poiché la somma dei due angoli più l'angolo $\hat{B}$ [$C\hat{B}E$] è un angolo piatto (e lo sappiamo perché BF è il prolungamento di AB, quindi è perpendicolare ad AC), ed essendo l'angolo $\hat{B}$[$C\hat{B}E$] un angolo retto, di conseguenza l'affermazione precedente è vera.
Essendo i due angoli $A\hat{C}B$ e $F\hat{B}E$ complementari dello stesso angolo, sono congruenti. I triangoli ABC e BEF sono congruenti, poiché $A\hat{C}B \cong F\hat{B}E$ per la dimostrazione precedente, BC $\cong$ BE siccome lati di un quadrato e pertanto congruenti, e AC $\cong$ BE per costruzione. Di conseguenza anche BEF è un triangolo rettangolo con $\hat{F}$ retto.
Considerando le rette contenenti i segmenti AC e EF tagliate dalla trasversale contenente il segmento AF, possiamo dire che sono parallele dato che generano due angoli coniugati interni congruenti (che sappiamo essere retti per la dimostrazione precedente).
È un trapezio un quadrilatero con due lati paralleli, e per la dimostrazione fatta AC è parallelo a EF, quindi il quadrilatero ACEF è un trapezio.

c)
[[…]]

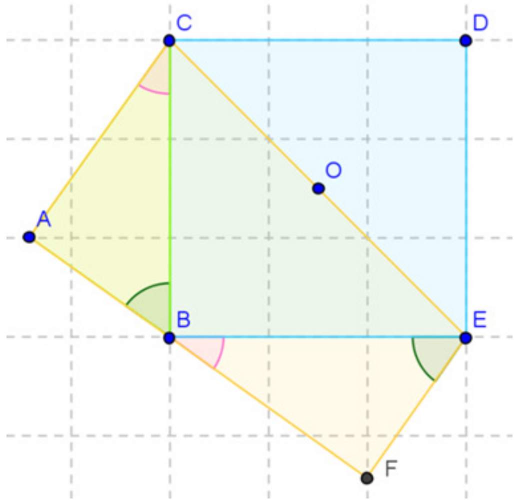
Elisa Diamanti, Classe 3D
Liceo Scientifico "R. Donatelli", Terni (TR)

a)
Costruiamo una circonferenza con diametro CB [occorrerebbe spiegare perché tale circonferenza passa per i punti A e O].



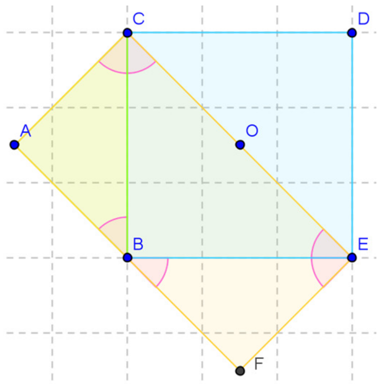
Il triangolo COB sarà retto (in O) e isoscele (CO = OB [$\overline{CO} = \overline{OB}$]). Di conseguenza gli angoli ∠OBC e ∠BCO, congruenti, saranno di ampiezza 45°. L'angolo ∠OAC sarà anche esso di ampiezza 45° poiché insiste sullo stesso arco di ∠OBC. L'angolo ∠BAO sarà anche esso di ampiezza 45° poiché insiste sullo stesso arco di ∠BCO. Poiché ∠OBC = ∠BCO, allora ∠OAC = ∠OBC. Il segmento AO è quindi bisettrice dell'angolo A.

b)



∠BEF = ∠ABC poiché supplementari [complementari] di uno stesso angolo (∠EBF)
BE = BC [$\overline{BE} = \overline{BC}$]
BF = CA [$\overline{BF} = \overline{CA}$] per costruzione
Per il 1° criterio di congruenza i triangoli CAB e BEF sono congruenti, l'angolo ∠BFE sarà quindi retto; di conseguenza CA e FE sono paralleli e per la definizione di trapezio possiamo dire che tale poligono è un trapezio (in questo caso è un trapezio rettangolo).

c)



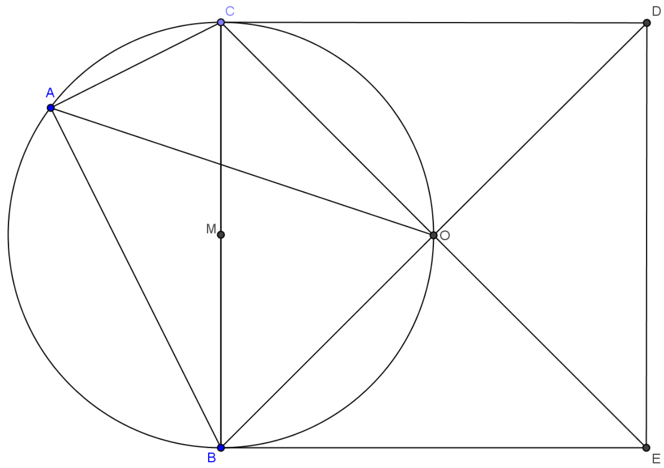
Il triangolo ABC deve essere un triangolo rettangolo isoscele (CA = CB [$\overline{CA} = \overline{CB}$]). La sua area sarà infatti ¼ di quella del quadrato, e il triangolo BEF sarà equivalente al primo. Di conseguenza l'area del trapezio (che in questo caso particolare è un rettangolo) è equivalente a quella del quadrato.

Oppure l'area del rettangolo è uguale a CE*BO [$\overline{CE} \cdot \overline{BO}$], che è [pari al doppio dell'area del triangolo CBE] [[l'area del tringolo CBE*2]] e quindi equivalente al [uguale all'area del] quadrato.

c)
[[…]]

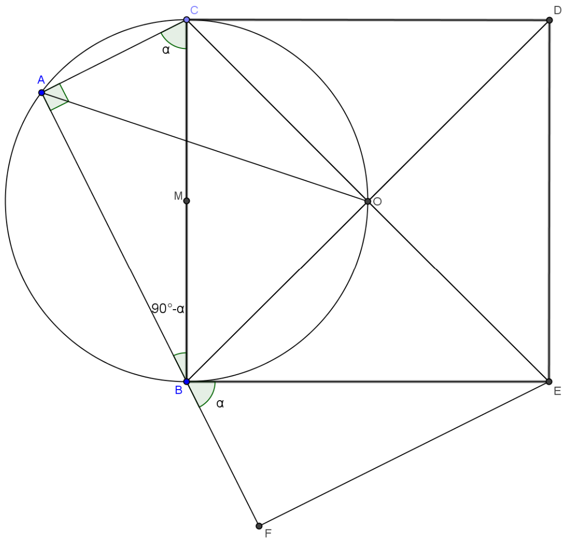
Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

a)
Traccio le diagonali CE e BD del quadrato BCDE, che si intersecano perpendicolarmente nel loro punto medio O e sono congruenti per le proprietà del quadrato (quindi $OC \cong OB$). Per le proprietà dei triangoli rettangoli, la lunghezza della mediana relativa all'ipotenusa è uguale a metà della lunghezza dell'ipotenusa. Quindi $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$, $\overline{OM} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e, poiché anche $\overline{CM} = \overline{BM} = \frac{\overline{BC}}{2}$, M è equidistante da A, B, O e C.



Allora esiste [la] circonferenza di centro M passante per A, B, O e C. Traccio tale circonferenza. $B\hat{A}O \cong O\hat{A}C$ perché angoli alla circonferenza che insistono su corde (e quindi archi) congruenti OC e OB. AO è quindi bisettrice di $B\hat{A}C$.

b)



Sia $A\hat{C}B = \alpha$. Allora $A\hat{B}C = 90° - \alpha$ e $E\hat{B}F = 180° - E\hat{B}C - A\hat{B}C = 180° - 90° + \alpha - 90° = \alpha$. Quindi i triangoli ABC e FEB sono congruenti per il 1° criterio poiché hanno: $BC \cong BE$ perché lati dello stesso quadrato, $AC \cong BF$ per costruzione e $A\hat{C}B = F\hat{B}E = \alpha$ per dimostrazione precedente. Allora $C\hat{A}B = B\hat{F}E = 90°$ e AC//FE perché entrambi perpendicolari a AF, cioè ACEF è un trapezio (rettangolo).

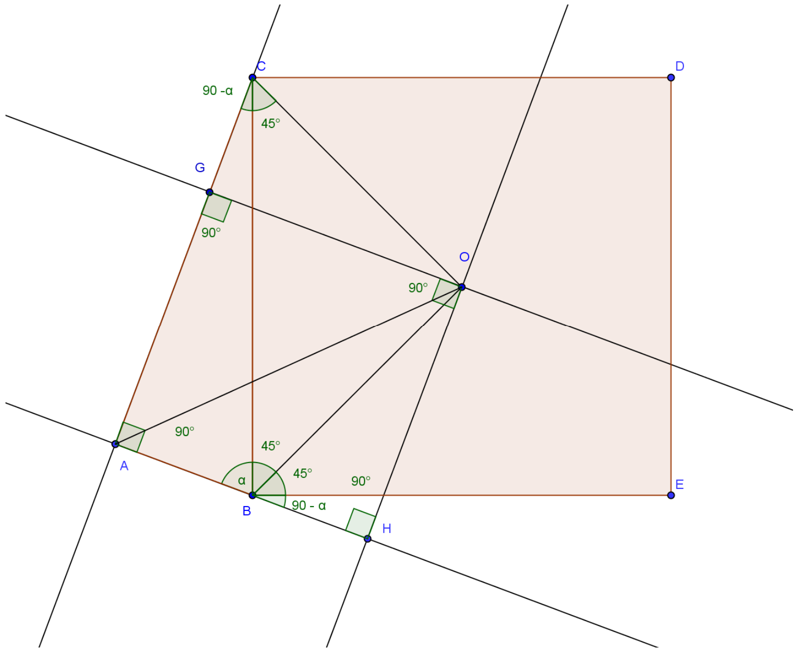
c)

Detto ℓ il lato del quadrato BCDE, Area(BCDE) = ℓ^2. Detti a $\overline{AC} = \overline{BF}$ e b $\overline{AB} = \overline{EF}$, Area(ACEF) = $\dfrac{(\overline{FE} + \overline{AC})(\overline{AF})}{2} = \dfrac{(a+b)(a+b)}{2} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$.

Quindi Area(BCDE) = Area(ACEF) se $a^2 + 2ab + b^2 = 2\ell^2$ e, poiché $\ell^2 = a^2 + b^2$ per il teorema di Pitagora, deve essere $a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2 \rightarrow (a-b)^2 = 0 \rightarrow a = b$. Allora, affinché sia Area(BCDE) = Area(ACEF), il triangolo ABC deve avere i cateti di lunghezza uguale, cioè deve essere [anche] isoscele.

Alessandro Lenoci, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

a)

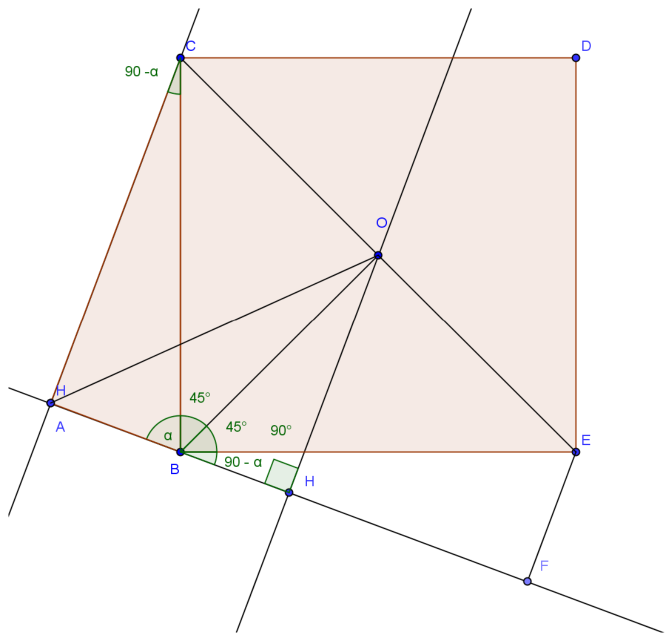


Tracciamo le mezze diagonali del quadrato BCDE, OC e OB e tracciamo le distanze del centro O dalle rette dei cateti AB e AC, OG e OH. Poniamo $\angle ABC = \alpha$ *e quindi* $\angle ACB = 90° - \alpha$ *e anche* $\angle EBH = 90° - \alpha$, $\angle BCO = 45°$ *e* $\angle OBH = 45°$ [$\angle OBC = 45°$] *poiché OC e OB bisecano gli angoli retti.*

Consideriamo i triangoli rettangoli CGO e OBH (poiché $OH \perp AH$ *e* $OG \perp AG$*) che hanno rispettivamente congruenti le ipotenuse BO e OC e* $GCO \cong HBO = 135° - \alpha$ [$\angle GCO \cong \angle HBO$ *e la loro ampiezza vale* $135° - \alpha$]. *Dunque i due triangoli sono congruenti per il quarto criterio di congruenza e* $OH \cong OG$*, quindi, avendo quattro angoli retti e due lati consecutivi congruenti il quadrilatero GAHO è un quadrato. Ne risulta che AO del quadrato GAHO biseca l'angolo retto GAH in due parti di 45° ciascuna, proprio poiché diagonale del quadrato GAHO.*

b)

Consideriamo i triangoli ABC e BEF. Per ipotesi sappiamo che $BC \cong BE$ *e* $AC \cong BF$ *e inoltre* $\angle ACB \cong \angle EBF$ *per dimostrazione precedente. I due triangoli sono congruenti per il primo criterio e ne otteniamo che l'angolo in F è retto. AC è quindi parallelo ad EF poiché perpendicolari allo stesso segmento AF e ne deriva che ACEF, avendo due lati paralleli e due non* [*paralleli*] *è un trapezio (poiché CE non è perpendicolare né ad AC né ad EF).* [Bisogna comunque intendersi sulla definizione di trapezio]



c)
Perché il trapezio ACEF sia equivalente al quadrato BCED:
Area(ABC) + Area(BEF) + Area(BCE) = Area(BCED).
Ponendo AC ≅ BF = x [$\overline{AC} = \overline{BF} = x$], *AB ≅ EF = y* [$\overline{AB} = \overline{EF} = y$] *e BC ≅ BE = l* [$\overline{BC} = \overline{BE} = l$]

$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{l^2}{2} = l^2$ $\quad 2xy - l^2 = 0$ *ma se* [*essendo*] *per Pitagora* $l^2 = x^2 + y^2$

$x^2 - 2xy - y^2 = 0$ [$x^2 - 2xy + y^2 = 0$] *da cui* $(x - y)^2 = 0$ *quindi* $x = y$.

Dunque perché il trapezio ACEF sia equivalente al quadrato BCED è necessario che il triangolo rettangolo ABC sia anche isoscele nei lati AB e AC che saranno rispettivamente uguali a [*che avranno rispettivamente lunghezza pari a*] $\frac{l\sqrt{2}}{2}$.

Lorenzo Vecchi, Classe 2
ISIS "Archimede", San Giovanni in Persiceto (BO)

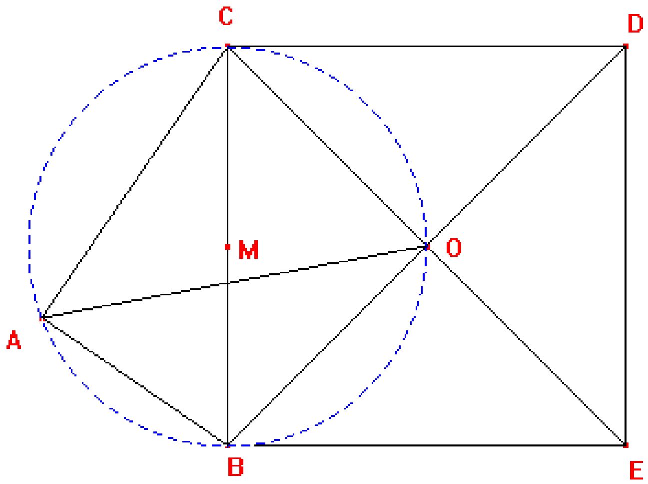
a)
Considero il triangolo COB ➔ COB angolo [l'angolo ∠COB] è retto, poiché le diagonali di un quadrato sono perpendicolari fra loro.
Considero il quadrilatero ABOC ➔ Esso è inscrivibile in una circonferenza in quanto ∠CAB + ∠COB = 180°
Quindi ∠CAO = ∠CBO poiché insistono sullo stesso arco CO;
∠OAB = ∠OCB poiché insistono sullo stesso arco BO.
Considero ∠OCB ➔ ∠OCB + ∠CBO = 90° Le diagonali in un triangolo [quadrato] formano angoli di 45° con i lati
➔ ∠OCB = ∠CBO = 45°
∠OCB = ∠OAB = 45°
∠CBO = ∠CAO = 45°
∠OAB = ∠CAO = 45° ➔ AO è bisettrice di CAB
[Perché non inserire anche una figura?]

b)
Considero il triangolo ABC e l'angolo piatto ABF
$\angle$ABC + $\angle$ACB = 90° per ipotesi poiché angoli acuti di un triangolo rettangolo
$\angle$ABC + $\angle$CBE + $\angle$EBF = 180°, ma poiché $\angle$CBE = 90° ➔ $\angle$ABC + $\angle$EBF = 90°
$\angle$ABC + $\angle$ACB = $\angle$ABC + $\angle$EBF ➔ $\angle$ACB = $\angle$EBF
Considero i triangoli ABC e BEF
Essi sono uguali [congruenti] per il primo criterio di congruenza poiché:
BE = CB [$\overline{BE} = \overline{CB}$] essendo lati di [uno stesso] quadrato;
AC = BF [$\overline{AC} = \overline{BF}$] per costruzione;
$\angle$ACB = $\angle$EBF, per dimostrazione precedente.
In particolare CAB angolo = BFE angolo [$\angle$CAB = $\angle$BFE]
Considero le due rette AC e EF tagliate dalla trasversale AF: esse formano angoli coniugati interni supplementari (due angoli retti) $\angle$CAB + $\angle$BFE = 180°
➔AC\\EF per il teorema delle rette parallele ➔ ACEF è un trapezio (in particolare rettangolo)

c)
[[…]]

Eleonora Mariuzzo, Classe 2D
LS "XXV Aprile", Portogruaro (VE)

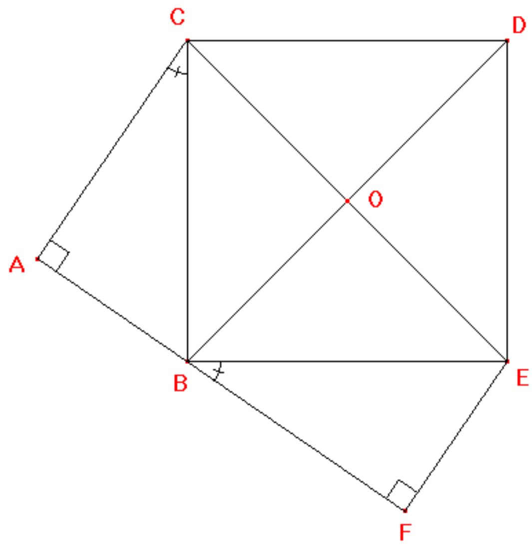
a)



Si tracci la circonferenza *r* circoscritta ai triangoli *ABC* e *BCO*, che, essendo entrambi i triangoli rettangoli (*ABC* per ipotesi e *BCO* perché ha l'angolo $C\hat{O}B$ retto dato che le diagonali di un quadrato sono perpendicolari tra di loro) [con l'ipotenusa *BC* in comune, sono inscrivibili in una stessa circonferenza]. Considerando le corde *BO* e *CO*, queste sono congruenti perché le diagonali di un quadrato si intersecano nel loro punto medio, e di conseguenza anche gli archi $\overset{\frown}{BO}$ e $\overset{\frown}{CO}$ sono congruenti. Gli angoli alla circonferenza $B\hat{A}O$ e $C\hat{A}O$ insistono rispettivamente sugli archi $\overset{\frown}{BO}$ e $\overset{\frown}{CO}$, pertanto sono congruenti e si può dire che *AO* biseca l'angolo $B\hat{A}C$.

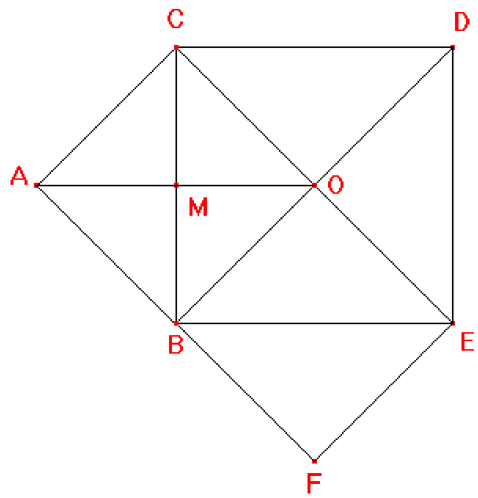
b)
Considerando ora i triangoli *BCA* e *BEF*, essi hanno: $AC \cong BF$ per ipotesi; $CB \cong BE$ perché sono lati dello stesso quadrato; $ACB \cong FBE$ perché $A\hat{C}B$ è complementare di $A\hat{B}C$, che a sua volta è

complementare di $F\widehat{B}E$.



I triangoli *BCA* e *BEF* sono congruenti per il 1° criterio di congruenza, in particolare $B\widehat{F}E$ è retto perché corrispondente a $B\widehat{A}C$. I segmenti *AC* e *FE* sono paralleli perché sono entrambi perpendicolari ad *AF*, quindi il quadrilatero *AFEC* è un trapezio.

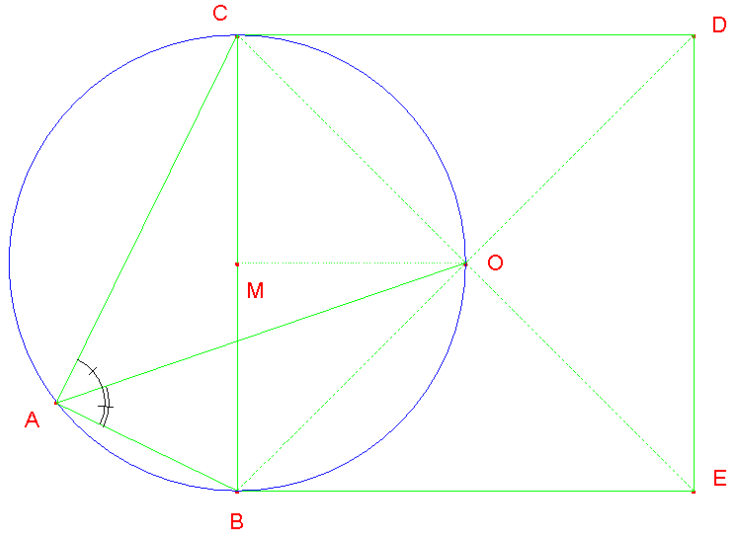
c)



Affinché il trapezio *AFEC* sia equivalente al quadrato *BCDE*, la somma dei triangoli *ABC* e *BEF* deve essere equivalente al triangolo *CBE*, ovvero metà del quadrato. Essendo *ABC* congruente a *BEF* e *CBO* congruente a *BOE*, il triangolo *ABC* deve essere equivalente al triangolo *COB* e, poiché questi hanno già la base *BC* in comune, [è necessario] [[basta]] che le relative altezze siano congruenti, ovvero, dato che la distanza tra il centro di un quadrato e un suo lato è congruente a metà del lato stesso, allora anche l'altezza deve essere congruente a $\frac{BC}{2}$ [e quindi il triangolo *ABC* è …].

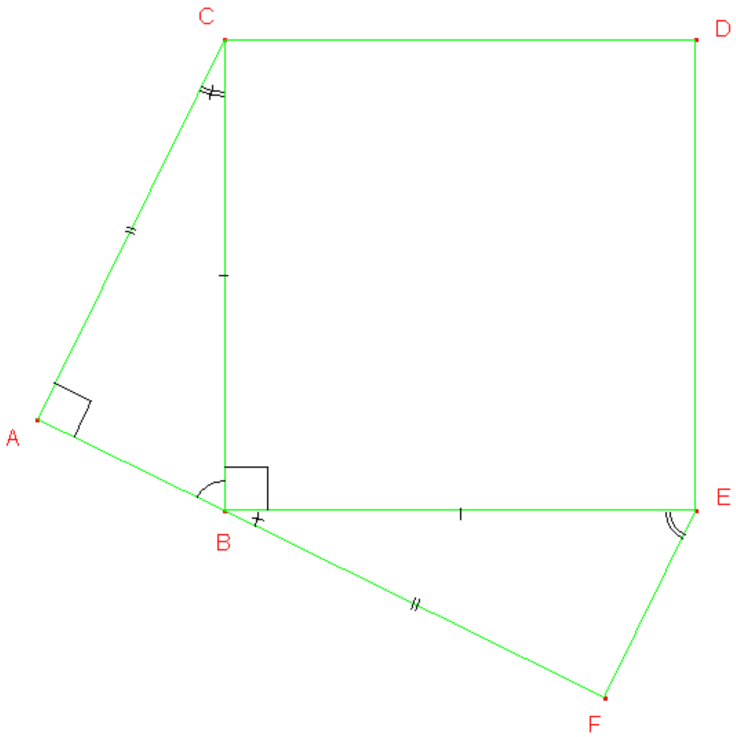
Angelo Dumitriu, Filippo Sandoletti, Classe 2D
LS "XXV Aprile", Portogruaro (VE)

a)



Essendo *ABC* rettangolo in *A*, possiamo tracciare per i tre vertici una circonferenza, di cui *BC* sarà il diametro, e il suo punto medio *M* il centro. Di conseguenza anche il punto *O* apparterrà alla circonferenza, poiché la distanza tra *O* e M [[il lato CB]] è congruente a metà del lato *BC*, ovvero al raggio. Otteniamo quindi gli angoli alla circonferenza $O\hat{A}B$ e $C\hat{A}O$, che insistono sugli archi $\overset{\frown}{CO}$ e $\overset{\frown}{OB}$. Essendo questi ultimi congruenti [perché ?] i due angoli $C\hat{A}O$ e $O\hat{A}B$ saranno anch'essi congruenti.

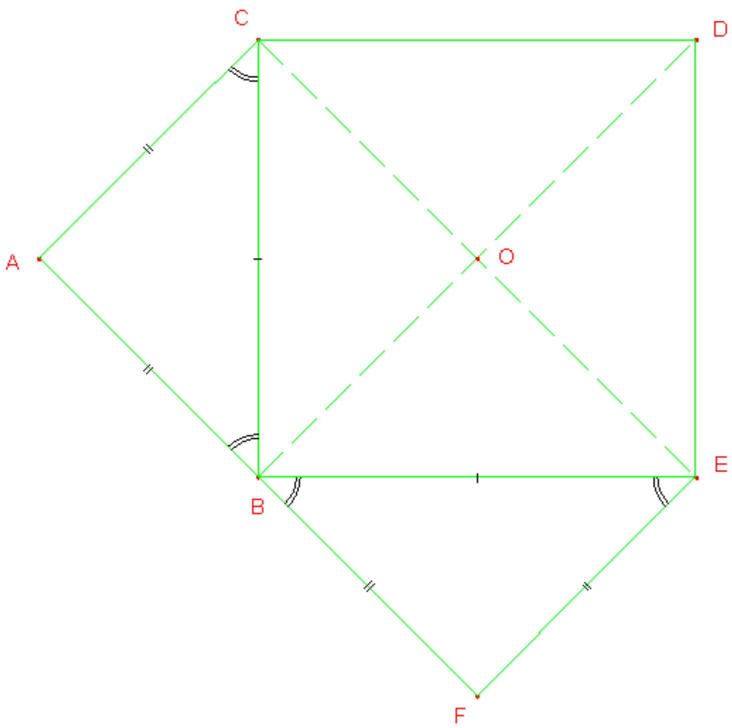
b)



.

Consideriamo i triangoli *ABC* e *BEF*. Il lato *CB* è congruente al lato *BE*, essendo *BEDC* un quadrato, e il lato *AC* è congruente al lato *BF*. Poiché $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}E$ sono retti, gli angoli $A\widehat{C}B$ e $E\widehat{B}F$ sono congruenti poiché complementari di uno stesso angolo (*ABC*).
Quindi possiamo dire che i triangoli *ABC* e *BEF* sono congruenti per il primo criterio di congruenza, in particolare l'angolo $E\widehat{F}B$ è retto. Di conseguenza *AC* ed *FE* sono paralleli, e *AFEC* è un trapezio.

c)



Affinché *AFEC* sia equivalente a *BEDC*, il triangolo *ABC* dovrà essere isoscele su *CB* [volendo questo si può dimostrare]. Per quanto detto prima, $A\widehat{C}B$ sarà congruente a $E\widehat{B}F$, ovvero [di ampiezza pari a] 45°, poiché l'angolo in *A* è retto. Quindi, avremo sempre i triangoli *ABC* e *BEF* congruenti. I triangoli *CBO* e *BOE* saranno anch'essi congruenti per il secondo criterio ($B\widehat{O}E \cong B\widehat{O}C \cong 90°$ [e l'ampiezza comune è pari a 90°], essendo isosceli su lati congruenti, gli angoli alla base saranno tutti congruenti). Anche le coppie di triangoli *ACB*, *CBO* e *FBE*, *BEO* saranno congruenti per il secondo criterio, poiché $O\widehat{B}F \cong F\widehat{E}O \cong A\widehat{B}O \cong A\widehat{C}O \cong 90°$ [e l'ampiezza comune è pari a 90°], e gli angoli alla base dei due triangoli isosceli esterni sono congruenti [e di ampiezza pari] a 45°, per cui per differenza $O\widehat{B}E \cong O\widehat{E}B \cong O\widehat{B}C \cong O\widehat{C}B \cong 45°$ [e l'ampiezza comune è pari a 45°].
In definitiva, ciascuno dei quattro triangoli isosceli che compongono il quadrilatero *AFEC* è congruente a ciascuno dei quattro triangoli isosceli che compongono il quadrato *BEDC*, quindi le due figure saranno equivalenti.

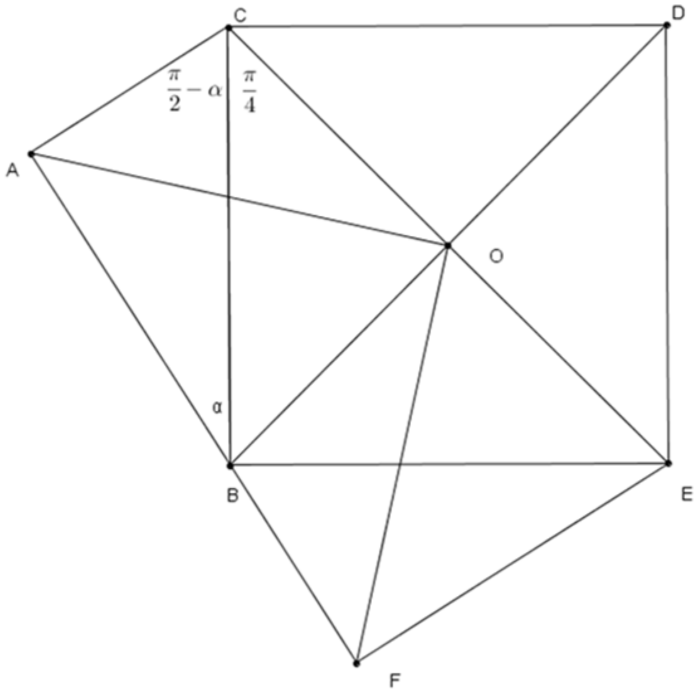
Iven Cagnolati, Emiliana Myftari, Mattia Zoffoli, Classe 2
LS "Visitandine – Malpighi", Castel San Pietro Terme (BO)

a)
Prolungo AB di un segmento BF uguale ad AC e considero i triangoli ABC e BEF [indico con α

l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$]:

- $A\hat{C}B = \pi - \hat{A} - \alpha$;
- $F\hat{B}E = \pi - C\hat{B}E - \alpha$;

poiché $\hat{A} = C\hat{B}E = \frac{\pi}{2}$ si ha che:



1)$A\hat{C}B = F\hat{B}E = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Inoltre:

2) BE = BC [$\overline{BE} = \overline{BC}$] perché due lati di un quadrato;

3) BF = AC [$\overline{BF} = \overline{AC}$] per costruzione.

Quindi i triangoli ABC e BEF sono congruenti per il I criterio di congruenza.

Ora unisco O con F e considero i triangoli BOF e COA:

1) BF = AC [$\overline{BF} = \overline{AC}$] per costruzione;

2) CO = BO [$\overline{CO} = \overline{BO}$] perché in un quadrato le diagonali si dividono in quattro segmenti congruenti;

3)$F\hat{B}O = A\hat{C}O$ [$F\hat{B}O = A\hat{C}O$] perché somma di angoli congruenti (di ampiezza $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \alpha$).

Quindi i triangoli BOF e COA sono congruenti per il I criterio di congruenza.

Di conseguenza:

AO = FO [$\overline{AO} = \overline{FO}$];

$B\hat{F}O = C\hat{A}O$;

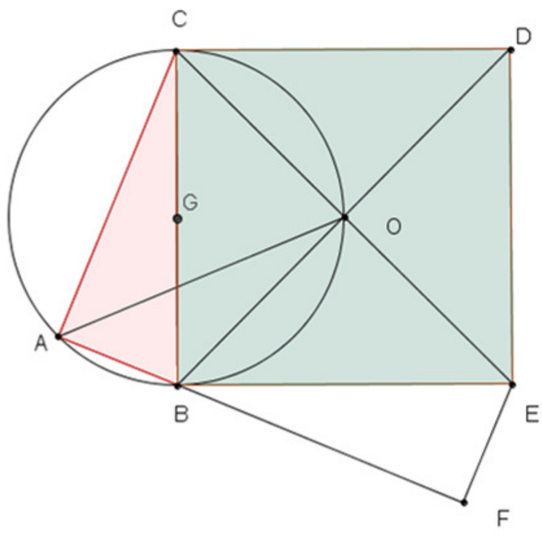
$B\hat{F}O = O\hat{A}B$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele (AOF);

$C\hat{A}O = O\hat{A}B$ per la proprietà transitiva [dell'uguaglianza].

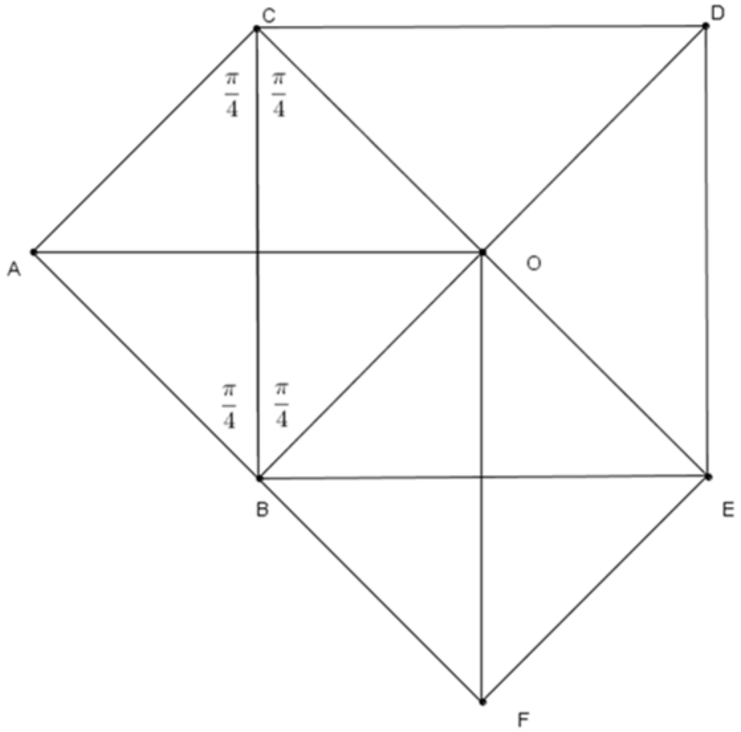
a')

Poiché le diagonali di un quadrato si intersecano scambievolmente nel loro punto medio O, CO = OB [$\overline{CO} = \overline{OB}$]. Dopo avere tracciato la circonferenza di centro G (punto medio di CB) e raggio GO si ha che anche A appartiene alla circonferenza.

Essendo CO = OB [$\overline{CO} = \overline{OB}$] anche i corrispondenti archi sono congruenti, quindi $C\hat{A}O = O\hat{A}B$ poiché sono angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti.

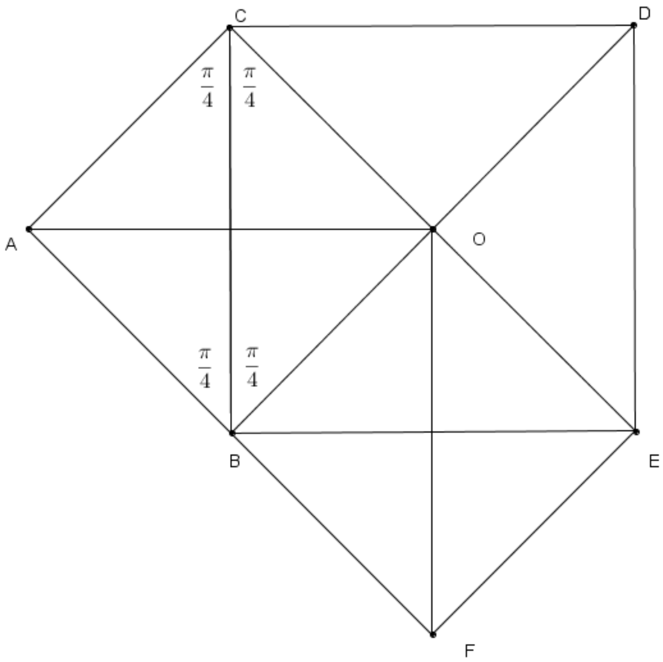


b)



Poiché al punto a) si è dimostrato che i triangoli ABC e BEF sono congruenti e ABC è retto [rettangolo] in A, allora BEF è retto [rettangolo] in F. Poiché AC e FE sono perpendicolari ad AF allora sono paralleli tra loro e quindi ACEF è un trapezio.

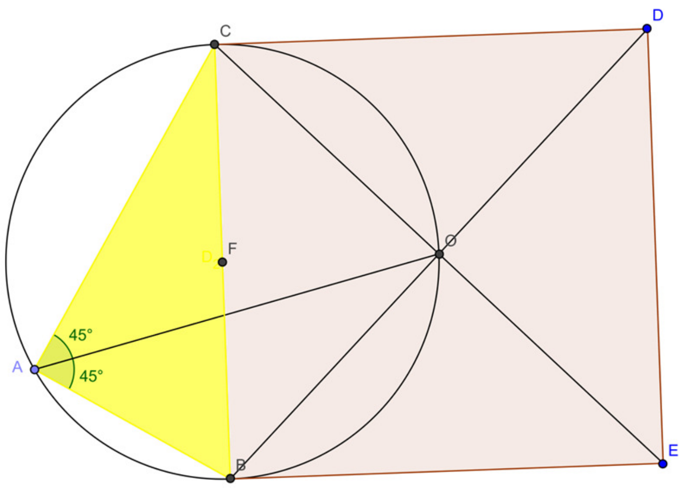
c)



Se $\alpha = \frac{\pi}{4}$ allora ABC è isoscele su [sulla] base BC e risultano congruenti i triangoli ABC, BOC,BFE, EOB, DOE, COE. Allora AFEC e BEDC sono equivalenti perché somma di un ugual numero di triangoli tra loro tutti congruenti [è questa l'unica possibilità affinché il trapezio sia equivalente al quadrato ?].

Francesca Leonardi, Caterina Ossanna, Classe 2C
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)



COSTRUZIONE

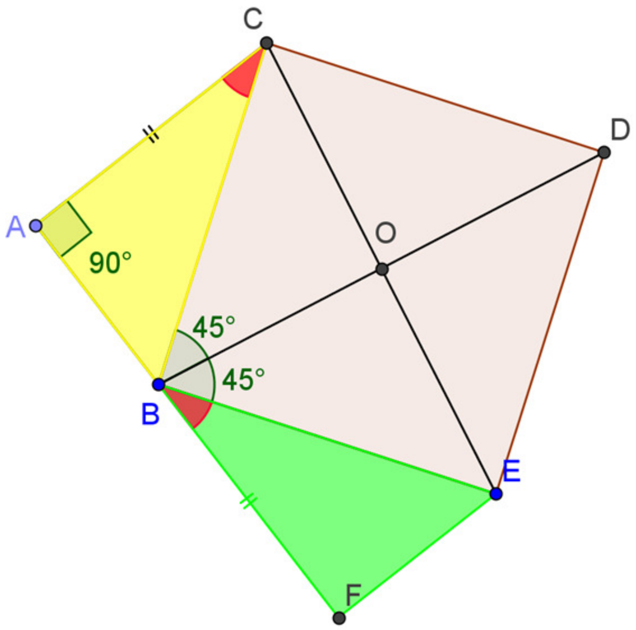
- Costruzione quadrato, dato il segmento qualsiasi DE;
- BD e CE diagonali di BEDC;
- O punto di intersezione delle diagonali;
- F punto medio di BC;
- Circonferenza centro F e raggio FB;
- A punto qualsiasi della semicirconferenza esterna al quadrato;
- Segmenti AB e AC;

- Segmento OA.

RISOLUZIONE

- Dalla costruzione della figura abbiamo capito che il punto O appartiene alla circonferenza centrata in F (punto medio di BC) e di raggio FB; questo perché l'angolo BOC misura 90° (→ 360°/4) e ogni triangolo rettangolo (in questo caso BOC) è inscrivibile in una circonferenza il cui raggio è metà ipotenusa [e centro …]
- Lo stesso ragionamento va applicato su A, anch'esso punto appartenente alla circonferenza di centro F e di raggio FB.
- Inoltre CO è congruente a BO, perché entrambi metà diagonale, quindi gli archi CO e BO sono congruenti;
- Di conseguenza gli angoli BAO e OAC, sono congruenti, poiché sono angoli alla circonferenza che sottendono archi di circonferenza congruenti.

b)



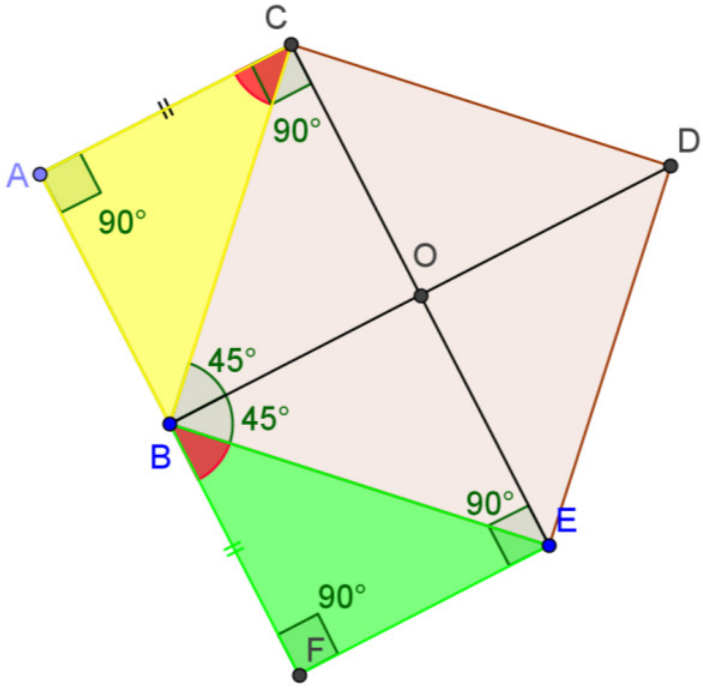
- i segmenti CB e BE sono congruenti perché entrambi lati del quadrato DCBE;
- i segmenti CA e BF sono congruenti per ipotesi;
- gli angoli BCA e EBF sono congruenti perché:
  - [ampiezza] Angolo ABF = 180°;
  - [ampiezza] Angolo CBE = 90° (perché angolo del quadrato DCBE);
  - $\angle ABC = 180° - \angle CBE - \angle EBF$;
  - $\boldsymbol{\angle ABC = 180° - 90° - \angle EBF}$;
  - Inoltre CAB è un triangolo rettangolo in BAC [retto in A];
  - $\angle ABC = 180° - \angle CAB - \angle BCA$;
  - $\boldsymbol{\angle ABC = 180° - 90° - \angle BCA}$;
  - quindi $\angle EBF = \angle BCA$;

DI CONSEGUENZA I TRIANGOLI CAB E EBF SONO CONGRUENTI PER IL PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA.

- L'angolo BAC misura 90° per ipotesi;
- L'angolo BFE misura 90°, per dimostrazione precedente ;
- Quindi i segmenti EF e CA sono paralleli perché appartengono a rette perpendicolari allo stesso segmento AF .

DI CONSEGUENZA EFAC <u>È UN TRAPEZIO PERCHÉ È UN QUADRILATERO CON DUE LATI PARALLELI</u>.

c)



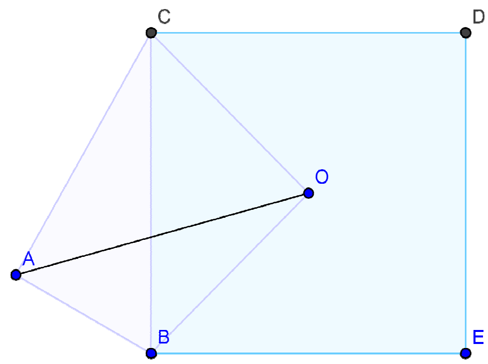
Affinché li trapezio AFEC ed il quadrato DCBE siano equivalenti, il triangolo **ABC deve essere [equivalente] [[congruente]] al triangolo CBO**;

In questo modo, se chiamo X l'area di ABC:

- Area CBO = X (per ipotesi);
- **<u>Area DCBE = 4 X</u>** (perché i quattro triangoli che compongono il quadrato sono congruenti, per il terzo criterio);
- Area ABC = X (per ipotesi);
- Area BFE = X (perché ABC è congruente a BFE per dimostrazione precedente);
- Area BEO = X;
- Area BOC = X;
- **<u>Area AFEC = 4 X ;</u>**
- Quindi i quadrilateri DCBE e AFEC sono equivalenti.

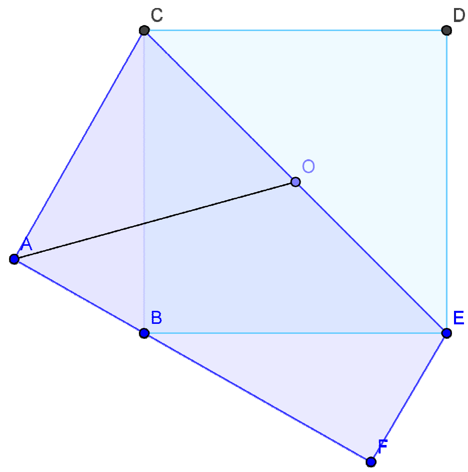
Classe 2A dell'Ist. Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)



Ipotesi
AB ⊥ AC
BC = CD = DE = BE [$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{BE}$]
∠B = ∠C = ∠D = ∠E = 90°
CE∩BD ={0} [{O}]
Tesi
∠BAO = ∠OAC
Dimostrazione
Nei triangoli ACO e AOB i lati OC=OB [OC e OB sono uguali] perché rispettivamente metà delle diagonali CE e BD. [[Poiché a lati congruenti si oppongono angoli congruenti]] [in generale, questa proprietà è falsa], consegue che l'angolo ∠CAO = [è uguale all'angolo] ∠OAB quindi il segmento AO è bisettrice dell'angolo ∠CAB.

b)



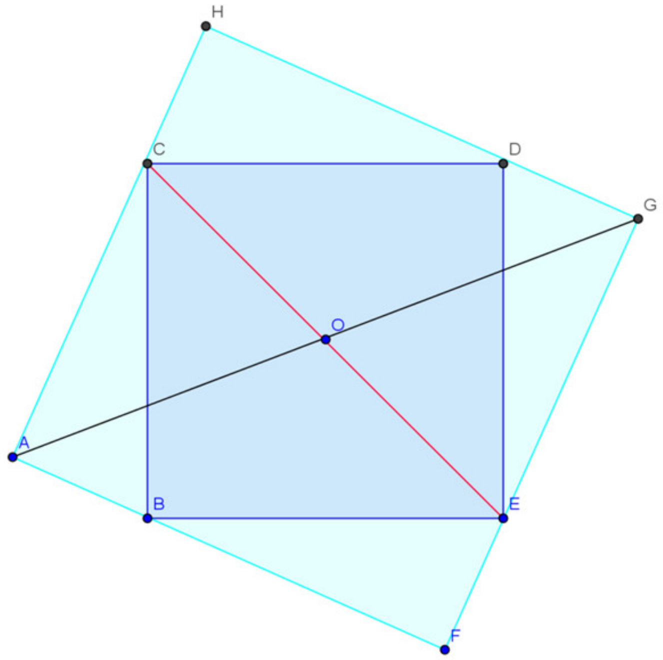
Ipotesi BF = AC [$\overline{BF} = \overline{AC}$]
AB∩BF = {B}
Tesi AC//FE oppure AF//CE
dimostrazione
il triangolo ACB = [è congruente al triangolo] BFE perché:
BF = AC [$\overline{BF} = \overline{AC}$] per costruzione

BC = BE [$\overline{BC} = \overline{BE}$] perché lati del quadrato CBED, [occorre dimostrare anche la congruenza degli angoli ∠ACB e ∠EBF] consegue che AB = FE [$\overline{AB} = \overline{FE}$] [e] poiché A = 90° [∠CAB = 90°] anche F = 90° [∠EFB = 90°]
il lato AC // [è parallelo al lato] EF: condizione necessaria perché un quadrilatero sia un trapezio.

c)
[[…]]

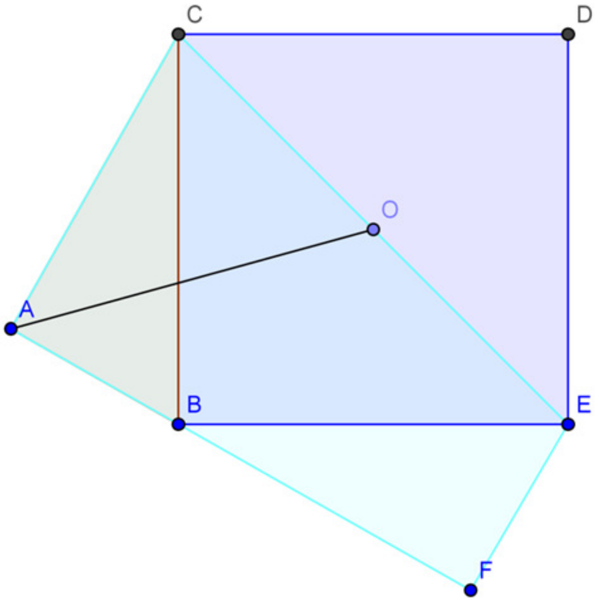
Classe 2B dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)



Per dimostrare questo punto, abbiamo ritagliato e incollato il triangolo ABC sui quattro lati del quadrato BCDE e osservato la formazione di un nuovo quadrato AFGH [questo deve essere giustificato]. Poi abbiamo prolungato il segmento AO fino al vertice G, ottenendo una diagonale del quadrato AFGH. A questo punto abbiamo concluso che dal momento che le diagonali di un quadrato sono anche bisettrici degli angoli dello stesso, risulta dimostrato che il segmento AO biseca l'angolo BAC [occorre prima dimostrare che il centro del quadrato BCDE coincide col centro del quadrato AFGH].

b)

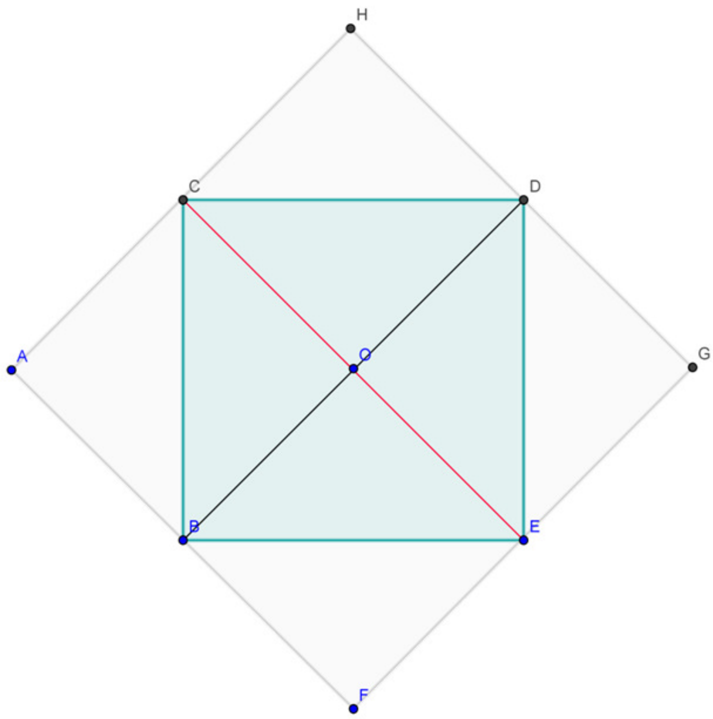


Per dimostrare questo punto, abbiamo considerato i due triangoli ABC e BEF e osservato che:

- BC = BE [$\overline{BC} = \overline{BE}$], in quanto lati del quadrato BCDE
- AC = BF [$\overline{AC} = \overline{BF}$], per dato del problema
- E$\hat{B}$F = A$\hat{C}$B, in quanto A$\hat{B}$C + E$\hat{B}$F = 90° e A$\hat{C}$B + A$\hat{B}$C = 90°.

segue che i triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Quindi l'angolo B$\hat{F}$E risulta retto così come l'angolo C$\hat{A}$B, allora i lati AC e FE sono paralleli perché tagliati dal segmento AF che forma angoli coniugati congruenti. Questa osservazione ci permette di concludere che il quadrilatero ACEF è un trapezio.

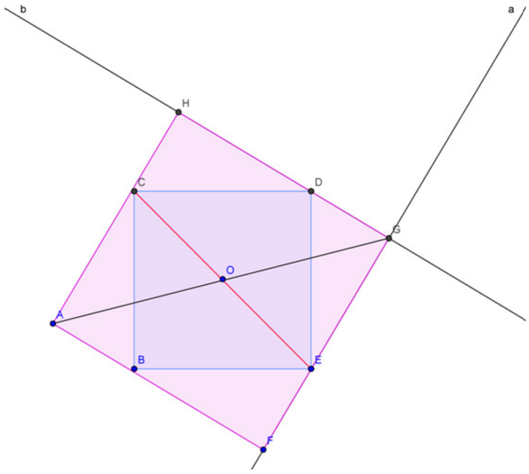
c)



Per rispondere a questo quesito, abbiamo osservato che il trapezio e il quadrato per essere equivalenti devono essere anche equiscomponibili. Abbiamo notato che questi hanno in comune il triangolo CBE e di conseguenza i due triangoli ABC e BEF (congruenti per quanto dimostrato al punto b) devono essere equivalenti al triangolo COD. Allora abbiamo dedotto che i due triangoli devono essere rettangoli isosceli e congruenti al triangolo COD.

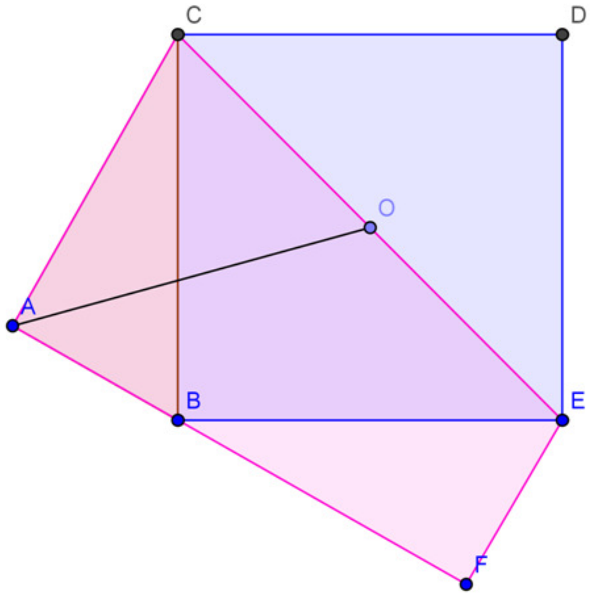
Classe 2C dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)



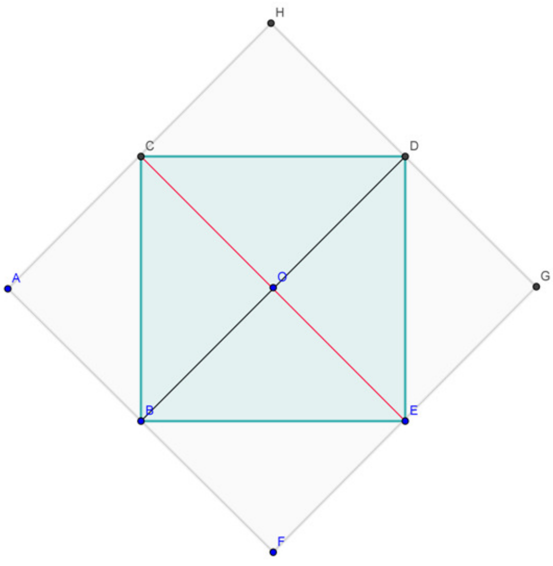
Prolunghiamo il lato AC, dalla parte di C, di un segmento congruente ad AB e il lato AB, dalla parte di B, di un segmento pari a AC. In questo modo AH = AF [$\overline{AH} = \overline{AF}$] perché somma di segmenti congruenti. Disegniamo la retta a passante per il punto F e parallela al segmento AH e [[ed]] la retta b passante dal [per il] punto H parallela al segmento AF. Le due rette si incontrano in un punto che chiamiamo G.
Il quadrilatero AFGH, per costruzione, ha quattro lati congruenti ciascuno uguale alla somma dei due cateti del triangolo rettangolo ABC: AH = HG = GF = AF = AC + AB [$\overline{AH} = \overline{HG} = ...$]
Inoltre ha quattro angoli retti [sarebbe opportuna qualche spiegazione] perché i lati HG e FG sono stati costruiti per essere paralleli rispettivamente a AF e AH:
∠BAC = ∠AHG = ∠HGF = ∠GFA = 90°.
Il quadrilatero AFGH è quindi un quadrato, perché equilatero ed equiangolo.
Tracciando la diagonale AG del quadrato AFGH dimostriamo che AO [occorrerebbe spiegare perché il centro del quadrato BCDF coincide con il centro del quadrato AFGH] biseca l'angolo BAC perché semidiagonale del quadrato.

b)



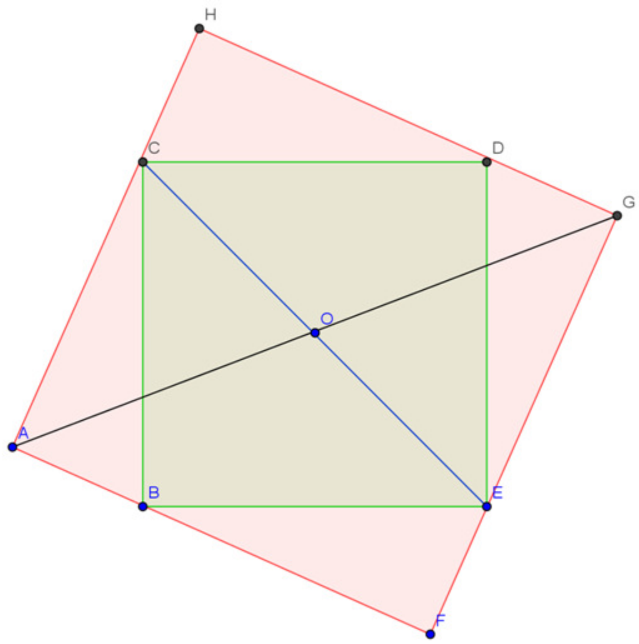
Usufruendo della costruzione fatta nel quesito A, possiamo facilmente dimostrare che il quadrilatero ACEF è un trapezio rettangolo perché: AC // EF e ∠FAC = ∠AFE = 90°.
Il lato obliquo CE del trapezio risulta essere coincidente con la diagonale del quadrato BCDE.

c)
Affinché il trapezio ACEF sia equivalente al quadrato BCDE è necessario che:
$A_{(ABC)} + A_{(BFE)} = A_{(CDE)}$
Dato che per costruzione i triangoli ABC e BFE sono congruenti, allora il triangolo rettangolo da scegliere deve essere la metà del triangolo CDE, cioè un quarto del quadrato.
Il triangolo ABC oltre che rettangolo deve essere anche isoscele.
Infatti le diagonali di un quadrato, bisecandosi ed essendo tra loro perpendicolari, dividono il quadrato in quattro triangoli rettangoli isosceli congruenti, che hanno come cateto la semidiagonale del quadrato e come ipotenusa il lato del quadrato.
Possiamo concludere che, dato che i triangoli ABC e BEF sommati sono equivalenti a metà quadrato BCDE, allora $A_{(BCDE)} = A_{(ACEF)}$.



Classe 2D dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)

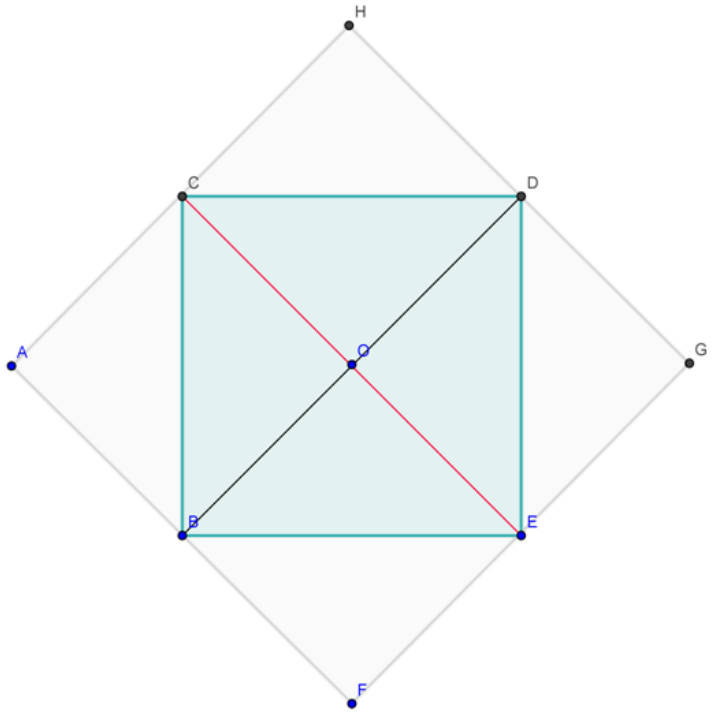


Se costruiamo su ogni lato del quadrato dei triangoli rettangoli congruenti ad ABC, otteniamo un quadrato più grande (AFGH) [questo è da dimostrare]. Così, se prolunghiamo il segmento AO [occorrerebbe dimostrare che i centri dei due quadrati coincidono], facendolo arrivare al vertice G, otteniamo una diagonale (AG) del quadrato (AFGH) che divide [[perfettamente]] a metà l'angolo retto BAC, poiché le diagonali di un quadrato sono bisettrici dei suoi vertici [angoli].

b)

ACEF è un trapezio perché è un quadrilatero e ha due lati opposti (AC e FE) che si trovano sui due lati paralleli del quadrato AFGH. In particolare, i due lati (AH e FG) sono paralleli perché, tagliati dal segmento EC, formano angoli alterni interni e alterni esterni congruenti.

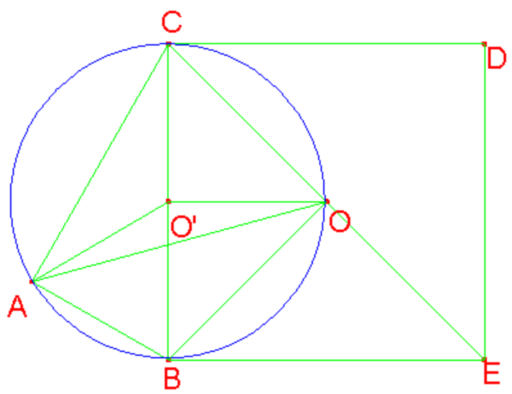
c)



Affinché il trapezio ACEF sia equivalente al quadrato BEDC, è [sufficiente] [[necessario]] che il triangolo rettangolo ABC sia isoscele. In questo modo, sia il quadrato che il trapezio sono composti dallo stesso numero di triangoli rettangoli congruenti (4) e, pertanto, le due figure essendo equicomposte [equiscomponibili] sono equivalenti.

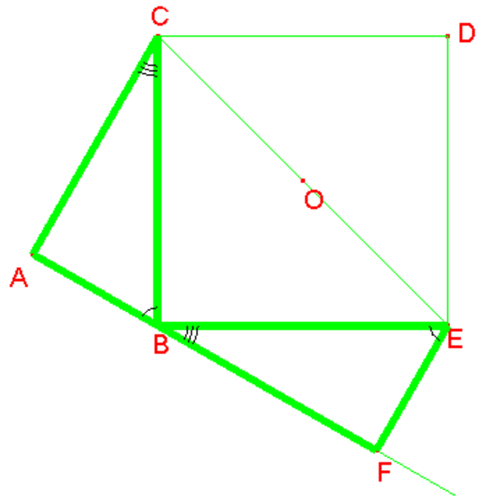
Classe 1H, Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)

a)



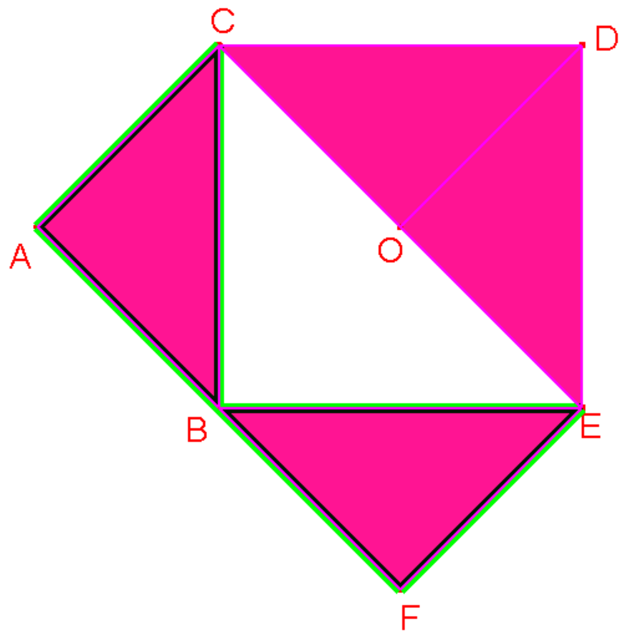
Il triangolo ABC è inscrittibile in una circonferenza il cui centro O' è il punto medio di BC. Questa circonferenza passa quindi per il punto O. Essendo il triangolo BOC rettangolo e isoscele, BO è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza e perciò gli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda BO hanno ampiezza 45 °: ∠BAO = ∠BOC [∠BCO] = 45°.
Inoltre si ha che: ∠AO'O = 2(∠ACO) = 2(∠ACO') + 2(∠BCO) = 2∠ACO' + 90° per la relazione che lega gli angoli alla circonferenza agli angoli al centro corrispondenti.
Nel triangolo isoscele AO'O l'angolo alla base è ∠OAO'= (180° − (2∠ACO' + 90°))/2 = 45° − ∠ACO'. E quindi ∠CAO = ∠CAO' + ∠O'AO = ∠ACO' + 45° − ∠ACO' = 45° = ∠BAO e questo dimostra che AO biseca l'angolo BAC.

b)



Il quadrilatero ACEF è un trapezio .Infatti nel triangolo ABC è ∠ABC + ∠ACB = 90° e poiché ∠CBE = 90° e ∠ABF è un angolo piatto, anche ∠ABC + ∠EBF = 90° e allora ∠ACB = ∠EBF. I triangoli ABC ed EBF sono congruenti per il primo criterio di congruenza (essendo BC = BE [$\overline{BC} = \overline{BE}$], AC = BF [$\overline{AC} = \overline{BF}$] e ∠ACB = ∠EBF). Pertanto il triangolo EBF è anch'esso rettangolo in F e le rette dei lati AC ed EF del quadrilatero ACEF risultano parallele in quanto formano con la trasversale AF angoli coniugati interni supplementari.

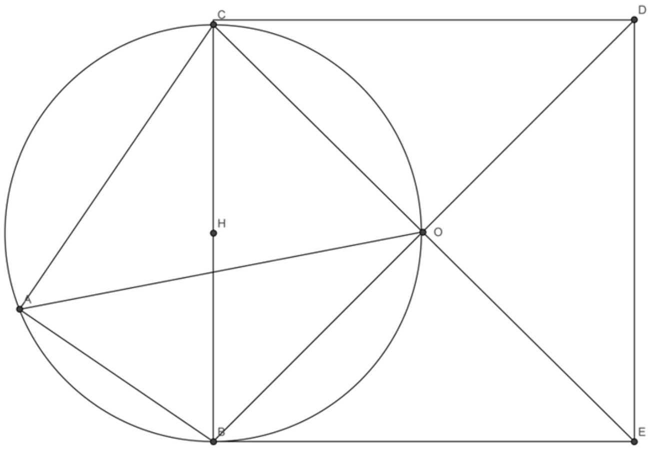
c)



Il trapezio AFEC è equivalente al quadrato quando le due figure sono equiscomponibili. Poiché esse hanno in comune il triangolo BEC, i due triangoli rettangoli congruenti ABC e BFE devono essere equivalenti al triangolo CDE che è la metà del quadrato. Occorre perciò che i triangoli suddetti siano oltre che rettangoli anche isosceli e quindi che il triangolo ABC abbia i due cateti uguali alla metà della diagonale del quadrato

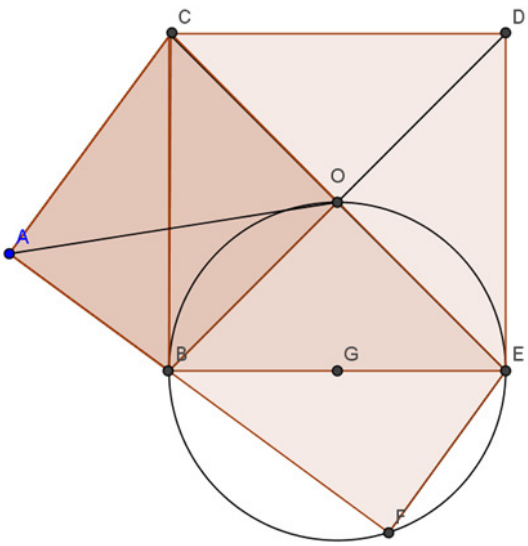
Giovanni Ferrami, Classe 1E
Liceo Scientifico "G. Aselli", Cremona (CR)

a)



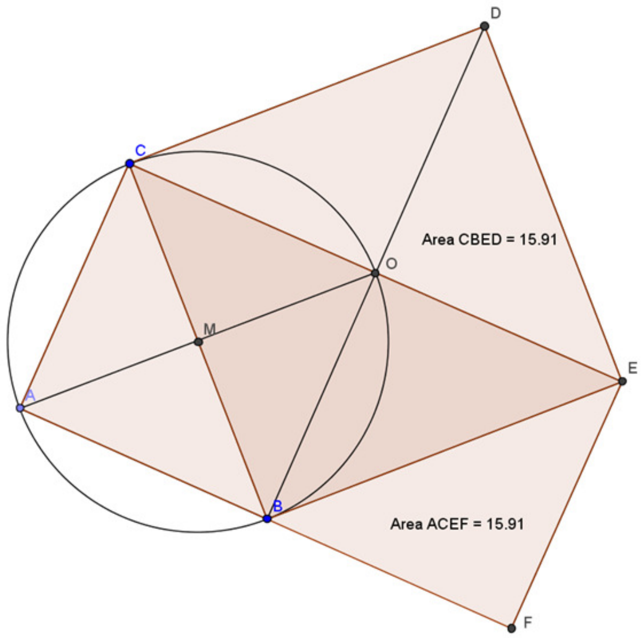
[[…]]

b)
Il quadrilatero ACEF è un trapezio poiché ha due lati paralleli fra loro (AC e FE). Ciò è dimostrabile seguendo [facendo riferimento a] questa figura:



In base a quanto affermato nella risposta precedente l'angolo ∠COB è un quarto di angolo giro, anche perché è limitato dalle semidiagonali di un quadrato. Detto questo si può affermare di conseguenza che anche l' angolo ∠BOE è di 90°, perché ∠COB ≅ ∠BOE ≅ ∠EOD ≅ ∠DOC. Essendo anche il quadrilatero BOEF inscrivibile in una circonferenza [perché?] si può affermare che l'angolo in F sia di 90° secondo il teorema sopra enunciato. Poiché il quadrilatero ACEF ha due angoli retti consecutivi (∠BAC e ∠EFB) AC e FE sono paralleli fra loro e perciò il quadrilatero ACEF è un trapezio.

c)
Perché l' area del trapezio sia equivalente a quella del quadrato Il triangolo ABC deve essere isoscele e rettangolo [e la spiegazione?].


D
C
Area CBED = 15.91
O
M
E
A
B
Area ACEF = 15.91
F