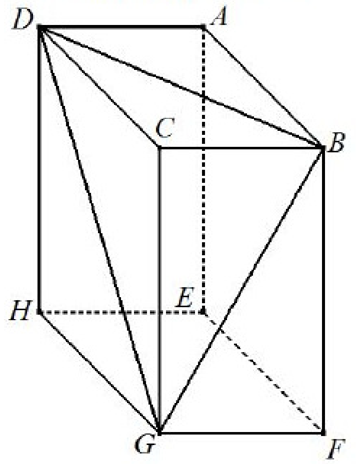
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 10-24 Aprile 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Nella figura sotto riportata è rappresentato un parallelepipedo rettangolo *ABCDEFGH*. L'angolo $\angle DGH$ misura 45° e l'angolo $\angle FGB$ misura 60°.



a) Di che tipo è il triangolo *BDG*?
b) Se lo spigolo *BC* ha lunghezza 1, quanto vale il volume della piramide *DGCB*?
c) Costruire con riga e compasso uno sviluppo piano della piramide *DGCB*.
d) Verificare che la somma dei quadrati delle aree delle facce della piramide *DGCB* che hanno un vertice in *C* è uguale al quadrato dell'area del triangolo *BDG*.

Commento

Abbiamo ricevuto diciassette risposte così suddivise: una da una classe prima di Liceo Scientifico, nove da classi seconde e due da classi terze, tutte di Licei Scientifici; inoltre cinque risposte provenienti da classi di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado) facenti parte di due Istituti Comprensivi, quattro di classi terze e una di classe seconda.
Il problema poneva quattro domande (tutte relative alla stessa figura geometrica, cioè un parallelepipedo rettangolo): nel primo quesito si chiedeva di individuare la tipologia di un triangolo facente parte della figura iniziale; nel secondo si chiedeva di calcolare il volume di una piramide (sempre parte del parallelepipedo) dopo aver fissato come unità di misura la lunghezza di uno degli spigoli del parallelepipedo; nel terzo si chiedeva di costruire con riga e compasso lo sviluppo piano della piramide di cui era stato determinato il volume; infine nel quarto si chiedeva di verificare l'esistenza di una data relazione tra i quadrati delle aree delle facce sempre della stessa piramide.
Quasi tutti individuano la risposta corretta al primo quesito, ma manca da parte di alcuni la giustificazione di quanto affermato. La maggior parte calcola correttamente il volume della piramide, anche se non mancano errori e imprecisioni. Pochi forniscono la corretta motivazione della costruzione con riga e compasso dello sviluppo piano della piramide: ancora una volta ci si dimentica che le costruzioni tramite un software di geometria dinamica richiedono una giustificazione. Infine diversi sbagliano, per errori di calcolo o per mancanza di motivazioni, la verifica della relazione esistente tra i quadrati delle facce della piramide (peraltro abbastanza nota).

Ribadiamo che una qualsiasi risposta, numerica o grafica o simbolica, in mancanza di opportune giustificazioni non sarà considerata corretta.
Osserviamo infine che in alcune risposte abbiamo rilevato una scarsa cura nel linguaggio utilizzato e nella scrittura delle formule, cosa che a volte sconfina nella sciatteria. Pertanto raccomandiamo caldamente a tutti gli studenti una attenta rilettura dell'elaborato prima dell'invio.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "G. Galilei", Adria (RO)
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
LS Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)
LS "Visitandine-Malpighi", Castel San Pietro Terme (BO)
LS "Aristosseno", Taranto
Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)
Ist. Comp. "G. Deledda", Pattada (SS)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Il gruppo di lavoro che gestisce FLAT*landia* è composto da:

- Ercole CASTAGNOLA - NRD Università di Napoli "Federico II"
- Giuliano MAZZANTI - Docente di Geometria, Università di Ferrara
- Valter ROSELLI - Ricercatore, Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
- Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica, LS "Galileo Galilei", Adria (RO)

Soluzioni

Giorgia Doni, Nicola Pivaro, Classe 3C
Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (RO)

a)
Essendo ABCDEFGH un parallelepipedo rettangolo allora tutti gli angoli delle sue facce sono retti [tutte le facce sono rettangoli e gli angoli formati dalle facce sono retti]. Poiché l'angolo DGH è di [ha ampiezza pari a] 45° allora la figura DHGC sarà un quadrato e poiché l'angolo FGB è di [ha ampiezza pari a] 60°, allora FBG sarà [avrà ampiezza pari a] di 30° e quindi il triangolo GFB è metà di un triangolo equilatero. Per questo motivo, ponendo CB [$\overline{CB}$] = x, possiamo dire che BG [$\overline{BG}$] = $2x$ e, essendo i due triangoli CBD e GBC isometrici per il primo criterio di isometria, [segue] che BG = BD [$\overline{BG} = \overline{BD}$]; quindi per transitività [per la proprietà transitiva della relazione di uguaglianza] anche BD [$\overline{BD}$] = $2x$. È dimostrato che il triangolo GBD è isoscele.

b)
Se lo spigolo $\overline{BC} = 1$ allora $\overline{BG} = \overline{BD} = 2$, $\overline{CG} = \overline{CD} = \sqrt{3}$ e $\overline{DG} = \sqrt{6}$. L'area di base della piramide BCDG, cioè l'area del triangolo DCB, è $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, quindi il volume di DGCB sarà $\frac{1}{2}$.

c)
[[…]]

d)
Ponendo CB [$\overline{CB}$] = x, possiamo ricavare che BG [$\overline{BG}$] = $2x$, CG [$\overline{CG}$] = $\sqrt{3}x$, DG [$\overline{DG}$] = $\sqrt{6}x$. Essendo il triangolo DGB isoscele sulla base DG, utilizzando il teorema di Pitagora si può ricavarne l'altezza che è: $\sqrt{4x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,x\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\,x$. Ne segue l'area: $\frac{\sqrt{15}}{2}x^2$

Ora possiamo trovare l'area delle facce della piramide: Area(BCG) = Area(DCB) = $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, mentre l'area(DCG)= $\frac{3}{2}x^2$; la tesi risulta dunque dimostrata poiché la somme [somma] delle tre aree, [ognuna elevata] al quadrato risulta uguale al quadrato dell'area della base, infatti: $2 \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{4}x^4 = \frac{15}{4}x^4$.

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

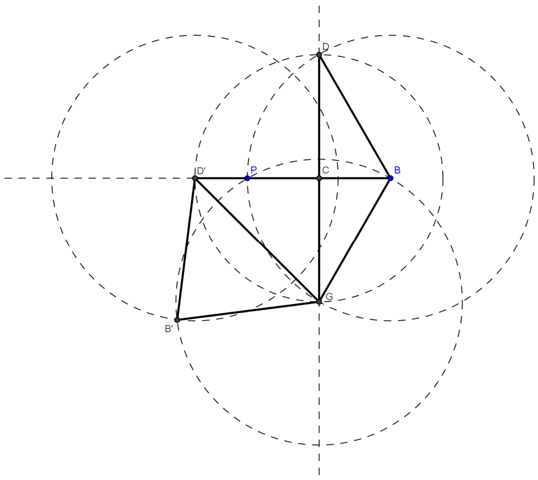
a)
Sia $\overline{BC} = \ell$. Essendo [l'ampiezza di] $B\hat{G}C = 30°$, perché complementare dell'angolo $F\hat{G}B$, ed essendo il triangolo BCG rettangolo in C, perché BCGF è una faccia di un parallelepipedo [retto] (quindi è un rettangolo), $\overline{BC} = \overline{BG}\sin(30°) \rightarrow \overline{BG} = \dfrac{\ell}{\sin(30°)} = 2\ell$ quindi

$\overline{CG} = \overline{BG}\cos(30°) = \ell\sqrt{3}$ [si può anche evitare l'uso della trigonometria]. Il triangolo DCG è rettangolo in C perché CDHG è una faccia di un parallelepipedo; è anche isoscele perché ha un angolo di [ampiezza pari a] 45°, cioè $\overline{DC} = \overline{CG} = \sqrt{3}\ell$. Per il teorema di Pitagora, $\overline{DG} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{3\ell^2 + 3\ell^2} = \sqrt{6}\ell$. Il triangolo BCD è congruente al triangolo BCG per il 1° criterio poiché hanno: BC in comune, $DC \cong CG$ per dimostrazione precedente e $D\hat{C}B \cong G\hat{C}B = 90°$ [entrambi di ampiezza pari a 90°] (anche ABCD è una faccia di un parallelepipedo). Quindi $\overline{BD} = \overline{BG} = 2\ell$. Allora il triangolo BDG è isoscele sulla base DG.

b)
Se $\overline{BC} = 1$, $\ell = 1$. Quindi $\overline{BD} = \overline{BG} = 2$, $\overline{CD} = \overline{CG} = \sqrt{3}$ e $\overline{DG} = \sqrt{6}$. BC è un lato del parallelepipedo ABCDEFGH con un estremo in C, ma non appartenente alla faccia DCGH del parallelepipedo; è quindi perpendicolare (nello spazio) al piano a cui appartiene DCGH (e quindi anche DCG) perché gli angoli diedri di un parallelepipedo sono retti. BC è quindi l'altezza della piramide DGCB relativa alla base DCG. Allora $Volume(DGCB) = \dfrac{Area(DCG) \cdot \overline{BC}}{3}$.

$Area(DCG) = \dfrac{\overline{DC} \cdot \overline{CG}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$. Quindi $Volume(DGCB) = \dfrac{\frac{3}{2} \cdot 1}{3} = \dfrac{1}{2}$.

c)



Traccio il segmento PB tale che $\overline{PB} = 2\ell$. Sia C il suo punto medio. $\overline{BC} = \ell$. Traccio l'asse di PB. Traccio la circonferenza di centro B e raggio $\overline{PB} = 2\overline{BC} = 2\ell$. Siano D e G i suoi punti di intersezione con l'asse di PB. $\overline{DB} = \overline{GB} = \overline{PB} = 2\ell$. I triangoli DCB e GCB sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli poiché hanno: BC in comune, $BD \cong BG$ per dimostrazione precedente e $D\hat{C}B \cong G\hat{C}B = 90°$ perché DC e GC giacciono sull'asse del segmento PB. Allora $D\hat{B}C = G\hat{B}C = \arccos\left(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{GB}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\ell}{2\ell}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60°$ [si può anche evitare l'uso della trigonometria] e $\overline{DC} = \overline{CG} = \overline{BG}\sin(G\hat{B}C) = 2\ell\sin(60°) = \sqrt{3}\ell$. Traccio la circonferenza di centro C e raggio $\overline{CG} = \sqrt{3}\ell$. Sia D' il suo punto di intersezione con il prolungamento di CP. $\overline{CD'} = \overline{CG} = \sqrt{3}\ell$. Traccio GD'. Per il teorema di Pitagora $\overline{GD'} = \sqrt{\overline{CD'}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{3\ell^2 + 3\ell^2} = \sqrt{6}\ell$. Traccio la circonferenza di centro G e raggio $\overline{GB} = 2\ell$ e la circonferenza di centro D' e raggio di ugual lunghezza. Sia B' il punto di intersezione tra queste circonferenze. $\overline{B'D'} = \overline{B'G} = \overline{GB} = 2\ell$. DBGB'D'C è uno sviluppo piano della piramide DGCB.

d)

$Area(CDG)=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{CG}}{2}=\frac{\sqrt{3}\ell\cdot\sqrt{3}\ell}{2}=\frac{3}{2}\ell^2$. I triangoli DCB e GCB sono congruenti per dimostrazione precedente. Quindi $Area(DCB)=Area(GCB)=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CG}}{2}=\frac{\ell\cdot\sqrt{3}\ell}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell^2$. Allora $(Area(CDG))^2+(Area(DCB))^2+(Area(GCB))^2=\frac{9}{4}\ell^4+\frac{3}{4}\ell^4+\frac{3}{4}\ell^4=\frac{15}{4}\ell^4$.

Per la formula di Erone, $(Area(DBG))^2=p(p-\overline{DB})(p-\overline{BG})(p-\overline{DG})$. $p=\frac{\overline{DB}+\overline{BG}+\overline{DG}}{2}=\frac{2\ell+2\ell+\sqrt{6}\ell}{2}=\frac{(4+\sqrt{6})\ell}{2}$. Quindi $(Area(DBG))^2=\left(\frac{(4+\sqrt{6})\ell}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}\ell}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}\ell}{2}\cdot\frac{(4-\sqrt{6})\ell}{2}\right)=\frac{15}{4}\ell^4$.

Allora $(Area(CDG))^2+(Area(DCB))^2+(Area(GCB))^2=(Area(DBG))^2=\frac{15}{4}\ell^4$.

Stefano Baratelli, Elen Bergamo, Elia Cattani, Eleonora Cortelletti, Marco Dalpiaz
Classe 2C, Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

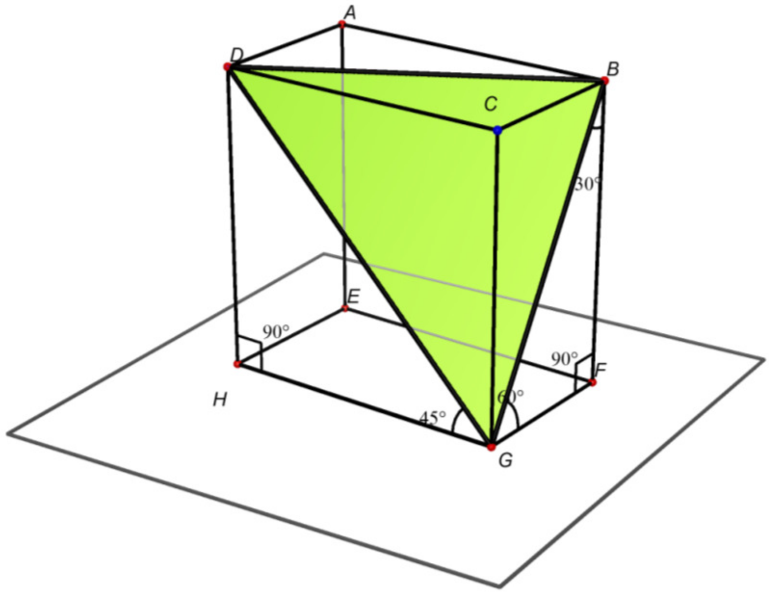
a)
Il triangolo BDG è isoscele in quanto ha per lati [quali?] le diagonali di due lati [facce] del parallelepipedo congruenti [questo deve essere dimostrato], quindi sono congruenti;

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Gianluca Bergamo,Federica Pedri, Classe 2C
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



a)
Poniamo HG [$\overline{HG}$] = l e GF [$\overline{GF}$] = a. DG è la diagonale del quadrato DCGH e quindi la sua misura sarà l√2, mentre BG è l'ipotenusa del triangolo GFB, il quale, avendo l'angolo in G = [di ampiezza pari a] 60° e quello in B = [di ampiezza pari a] 30°, è metà [di un] triangolo equilatero, e la sua misura è quindi 2a.
Il triangolo BDG è isoscele perché:
- BG [$\overline{BG}$] = 2 a
- DG [$\overline{DG}$] = l√2
- DB, essendo diagonale del triangolo DCB che ha CB = GF [$\overline{CB} = \overline{GF}$] = a , DC = HG [$\overline{DC} = \overline{HG}$] = l e l'angolo in C = [di ampiezza pari a] 90° = [all'ampiezza dell'angolo in] F, misura come [ha la stessa lunghezza di] BG, ovvero 2 a.
Sia il lato BG che quello DB misurano 2 a, il triangolo è quindi isoscele perché ha due lati congruenti.

b)
Per ipotesi BC [$\overline{BC}$] = 1.
V=Abase*h/3 (perché piramide retta) [la relazione vale per tutte le piramidi] , dove Abase = DC*CG /2 [$\overline{DC} \cdot \overline{CG} / 2$] e h = BC [$\overline{BC}$.
DC = CG = BF [$\overline{DC} = \overline{CG} = \overline{BF}$] = h del triangolo GFB (metà triangolo equilatero) = l√3/2 = BG√3/2 [$\overline{BG}\sqrt{3}/2$] = 2BC*√3/2 [$2\overline{BC}\sqrt{3}/2$ = 2√3/2 = √3
V = $(\sqrt{3})^2$/2*1/3 = 1/2

c)
[[…]]

d)
$(\text{AreaCBG})^2 + (\text{AreaDCB})^2 + (\text{AreaDCG})^2 = (\text{AreaDBG})^2$
Pongo CB [$\overline{CB}$] = a, quindi CG [$\overline{CG}$] = a√3 e GB [$\overline{GB}$] = 2 a.
Area CBG = CG*CB/2 [$\overline{CG} \cdot \overline{CB} / 2$] = a√3*a/2 = $a^2\sqrt{3}/2$
AreaDCB = AreaCBG = $a^2\sqrt{3}/2$

AreaDCG = DC*CG/2 [$\overline{DC}\cdot\overline{CG}/2$] = a√3*a√3/2 = 3a^2/2

AreaDBG = DG*KB/2 [$\overline{DG}\cdot\overline{KB}/2$]

DG = √(DH)^2 + (HG)^2 [$\overline{DG}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HG}^2}$] = √(a√3)^2 + (a√3)^2 = √6a^2 = a√6 ⟶ teorema di pitagora [Pitagora]

KB →altezza del triangolo isoscele DBG, che partendo dal vertice B cade a metà [nel punto medio] della base DG, uso quindi il teorema di pitagora [Pitagora]

= √(DB)^2 - (DG/2)^2 [$\sqrt{\overline{DB}^2-\left(\overline{DG}/2\right)^2}$ = √(2a)^2 - (a√6/2)^2 = √4a^2 - a^{2}6/4 = a/2√10

AreaDBG = a√6*a/2√10/2 = a^2√60/4

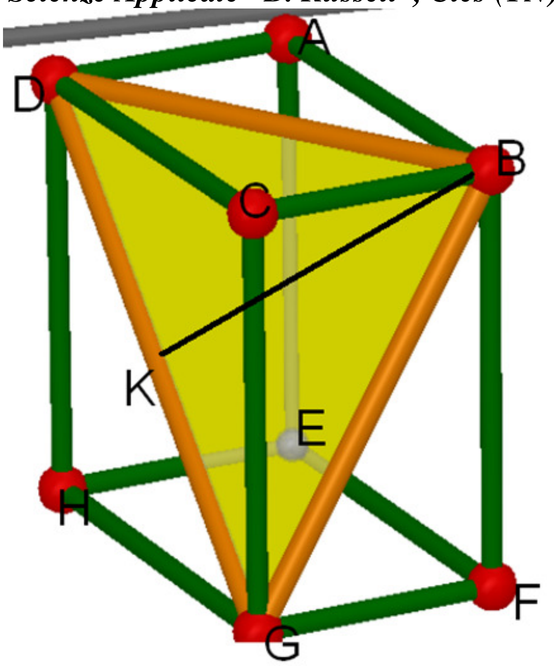
(AreaCBG)^2 + (AreaDCB)^2 + (AreaDCG)^2 = (AreaDBG)^2

(a^2√3 /2)^2 + (a^2√3 /2)^2 + (3a^2/2)^2 = (a^2√60/4)^2

3a^4/4 + 3a^4/4 + 9a^4/4 = 60a^4/16

15a^4/4 = 15a^4/4 → Ho verificato che la somma dei quadrati delle aree dei triangoli con vertice in C è uguale al quadrato [dell'area] del triangolo DBG.

Marco Dalpiaz, Eleonora Forcone, Francesca Leonardi, Caterina Ossanna
Classe 2C, Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



a)

Consideriamo i triangoli DCB e CGB, essi hanno:

- Un lato in comune, BC;
- Gli angoli DCB e BCG congruenti, entrambi di [ampiezza pari a] 90° (perché ABCDEFGH è un parallelepipedo [rettangolo]);
- I lati DC e CG congruenti, poiché DCG [DCGH] è un quadrato (perché la diagonale forma angoli di 45° con i lati);

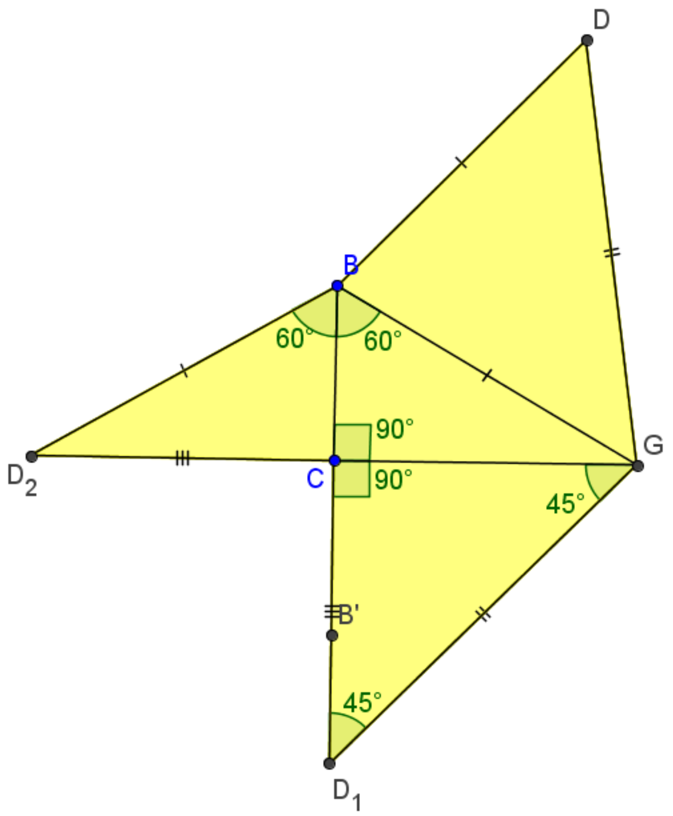
Quindi i triangoli DCB e CGB sono congruenti per il Primo Criterio di Congruenza dei triangoli.

In particolare DB è congruente a BG; quindi il triangolo DGB, avendo due lati congruenti, è isoscele.

b)

- Prendendo come base della piramide il triangolo DCB, allora il segmento CG è l'altezza della piramide: h = CG [$\overline{CG}$;
- Inoltre l'angolo CBG misura 60°, quindi:
  - BG = 2*CB [$\overline{BG} = 2\overline{CB}$] = 2;
  - CG = CB/2*√3 [$\overline{CG} = \overline{BG}/2 \cdot \sqrt{3}$];
  - CG [$\overline{CG}$] = 2/2*√3;
  - CG [$\overline{CG}$] = √3;
- Gli spigoli DC e CG sono congruenti poiché angolo DGH = [ha ampiezza pari a] 45° e quindi HGCD quadrato;
  DC = CG [$\overline{DC} = \overline{CG}$] = √3;
- Calcoliamo l'area del triangolo DCB, ossia la base della piramide:
  A_{DCB} = DC*BC/2 [$\overline{DC} \cdot \overline{BC} / 2$];
  A_{DCB} = √3*1/2 = √3/2
- Calcoliamo il volume della piramide DGCB:
  V_{DGCB} = A_{DCB}*h/3 = √3/2*√3/3 = 1/2

c)



Costruzione:

Triangoli BCG e CGD:

- Costruisco un segmento BB_1 di lunghezza 2 cm;
- Traccio la circonferenza k di centro B e raggio BB_1;
- Traccio la circonferenza k_1 di centro B_1 e raggio B_1B;
- Trovo i punti G e D_2, intersezioni fra le circonferenze k e k_1;
- Traccio la retta *r* perpendicolare a BB_1 passante per G;
- Trovo il punto C, intersezione tra la retta r e il segmento BB_1;

Triangolo CGD:

- Traccio la circonferenza l di centro C e raggio CG;
- Trovo D_1, punto di intersezione tra circonferenza l e retta s (retta passante per B e B_1);

Triangolo BGD:

- Traccio la circonferenza m di centro G e raggio GD_1;
- Trovo il punto D, intersezione fra la circonferenza m e la circonferenza k (di centro B e raggio BB_1, congruente a BD_2).

d)

SOMMA DEI QUADRATI DELLE AREE DI CGB, DCB e DCG (aventi 1 vertice in C):

- $(A_{CGB})^2 = (BC*CG/2)^2$ [$\left(\overline{BC}\cdot\overline{CG}/2\right)^2$] = $(1*\sqrt{3}/2)^2 = ¾$;
- $(A_{DCB})^2 = (A_{CGB})^2 = ¾$; (per dimostrazione quesito 1)
- $(A_{DCG})^2 = (DC*CG/2)^2$ [$\left(\overline{DC}\cdot\overline{CG}/2\right)^2$] = $(\sqrt{3}*\sqrt{3}/2)^2 = 9/4$;

- $(A_{CGB})^2 + (A_{DCB})^2 + (A_{DCG})^2 = ¾ + ¾ + 9/4 = 15/4$;

QUADRATO DELL'AREA DI DGB:

- DB [DG] è la diagonale del quadrato DHGC, quindi, sapendo che il lato CG misura √3 (vedi quesito 2), DB [$\overline{DG}$] = 1*√2 = √3*√2 = √6;

Traccio l'altezza BH relativa a DG, che taglia a metà DG (perché, per la dimostrazione del quesito 1, DBG è isoscele);

- BHG è un triangolo rettangolo, trovo l'altezza BH con il teorema di Pitagora, sapendo che BG misura 2 cm (vedi quesito 2);

  ipotenusa = BG [$\overline{BG}$] = 2;

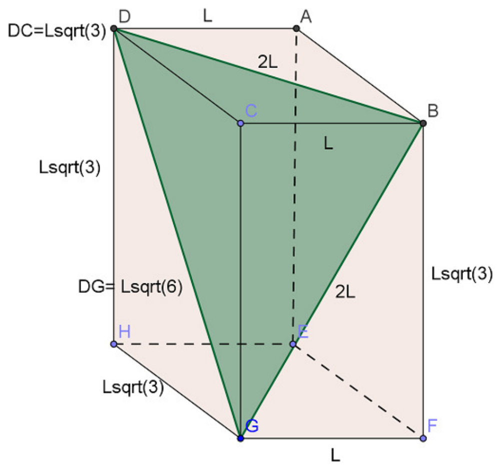
  cateto minore = BG = BD/2 [$\overline{GH} = \overline{DG}/2$] = √6/2;

  cateto maggiore = BH [$\overline{BH}$] = $\sqrt{[2^2 - (\sqrt{6}/2)^2]} = \sqrt{(4 - 6/4)} = \sqrt{(5/2)} = \sqrt{5}/\sqrt{2}$;
- $(A_{DGB})^2 = (HG*BH/2)^2$ [$\left(\overline{DG}\cdot\overline{BH}/2\right)^2$] = $[\sqrt{6}*(\sqrt{5}/\sqrt{2})/2]^2 = [\sqrt{30}/2\sqrt{2}]^2 = 15/4$.

Quindi la somma dei quadrati delle aree delle facce con un vertice in C è equivalente al quadrato dell'area di DGB.

Davide Dicaro, Classe 2D

Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



a)

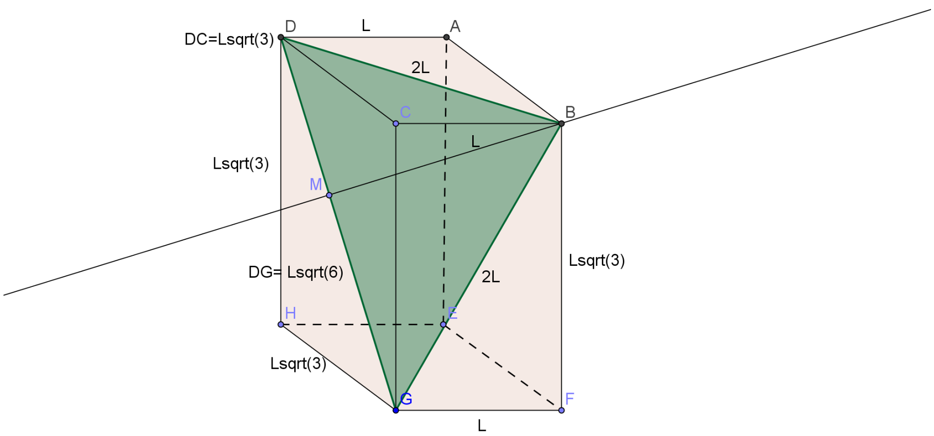
Il triangolo BDG è isoscele perché i lati BD e BG sono congruenti infatti entrambi misurano 2L.

BG [$\overline{BG}$] = 2L perché il triangolo BGF è la metà di un triangolo equilatero ($F\hat{G}B$= [l'angolo FGB ha ampiezza pari a] 60°). BD [$\overline{BD}$] = 2L per il teorema di Pitagora tra L e L√3 [da dove arriva L√3?].

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)
Per dimostrare l'uguaglianza ho calcolato le aree di tutte le facce della piramide con un vertice in C.
$A_{bcg} = (L^2\sqrt{3})/2$ che al quadrato diventa $(3L^4)/4$
$A_{bdg} = (L^2\sqrt{3})/2$ che al quadrato diventa $(3L^4)/4$
$A_{dcg} = (3L^2\sqrt{3})/2$ [$(3L^2)/2$ che al quadrato diventa $(9L^4)/4$
Quindi la somma delle aree delle facce della piramide è $(15L^4)/4$
Inoltre l'area del triangolo BDG è:
$A_{bdg}=(GD*BM)/2=(L\sqrt{6}*L\sqrt{5/2})/2$ [dov'è il calcolo di $\overline{BM}$?] = $(L^2\sqrt{15})/2$ che elevato al quadrato viene [dà come risultato] $15L^4/4$ che è uguale alla somma dei quadrati delle aree delle facce della piramide con vertice in C.



Alexandra Nistor, Alexandru Nistor, Classe 2D
Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)
[[…]]

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Emiliana Myftari, Classe 2
LS "Visitandine – Malpighi", Castel San Pietro Terme (BO)

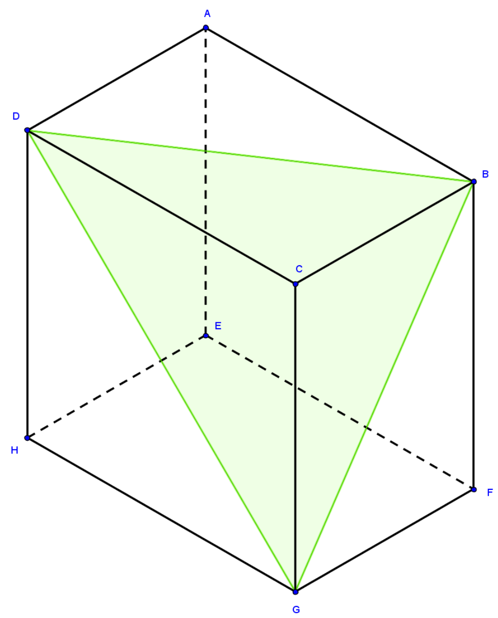
a)
[[…]]

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Caterina Pedini, Classe 2
LS "Visitandine – Malpighi", Castel San Pietro Terme (BO)



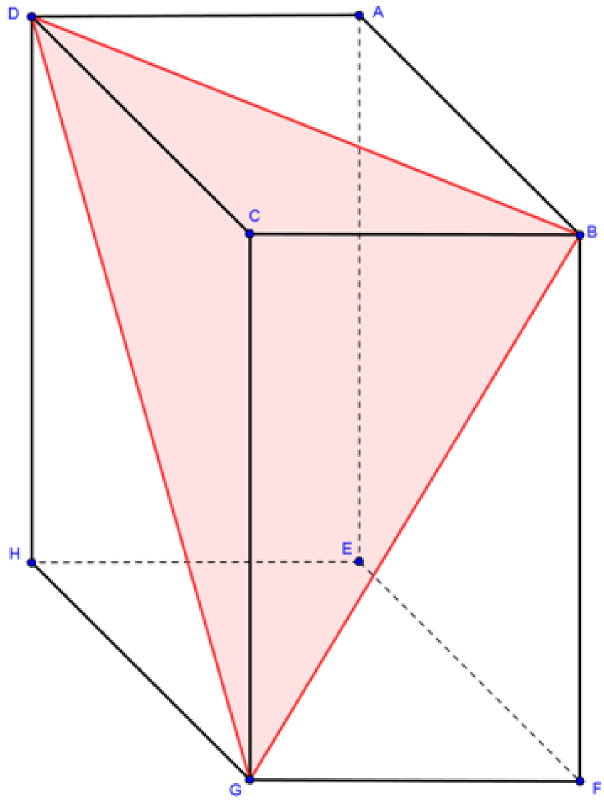
a)
[[…]]

b)
$\overline{BC} = 1$
$\overline{BG} = \overline{BD} = 1 \cdot 2 = 2$ [perché?]
$\overline{CG} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ [perché?]
$\mathbf{A}_{\mathrm{BCD}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathbf{V}_{\mathrm{DGCB}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Giulio Pedrazzi, Classe 2
LS "Visitandine – Malpighi", Castel San Pietro Terme (BO)



a)
[[…]]

b)
$\overline{BC} = 1$
$\overline{BD} = \overline{BG} = 2$ [perché?]
$\overline{CG} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ [perché?]
A($_{BCD)}$= $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
V$_{DGCB}$ = $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Mattia Zoffoli, Classe 2
LS "Visitandine – Malpighi", Castel San Pietro Terme (BO)

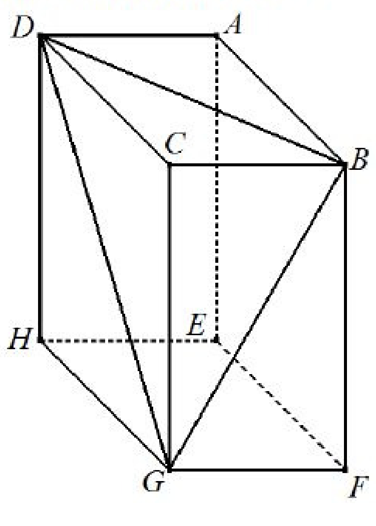
a)
[[…]]

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Classe 1H, Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



a)
Nella faccia rettangolare GFBC, il triangolo BCG è la metà di un triangolo equilatero poiché l'angolo *FGB* [ha ampiezza pari a] 60°. Sarà perciò *BG* = 2*BC* e $CG=\sqrt{BG^2-BC^2}=\sqrt{4BC^2-BC^2}=BC\sqrt{3}$. La faccia CDHG è invece un quadrato poiché l'angolo *DGH* [ha ampiezza pari a] 45° e quindi i suoi lati sono tutti uguali a CG [inoltre $\overline{CG}$] $=BC\sqrt{3}$ [$\overline{BC}\sqrt{3}$, mentre [per] la diagonale *GD* [risulta] $GD=CG\sqrt{2}=BC\sqrt{6}$ [$\overline{GD}=\overline{CG}\sqrt{2}=\overline{BC}\sqrt{6}$].
La faccia ABCD è rettangolare ed ha i lati uguali a quelli della faccia GFBC e quindi è uguale ad essa. Essendo *BD* = 2*BC* = *BG* [$\overline{BD}=2\overline{BC}=\overline{BG}$], il triangolo DBG è isoscele sulla base *GD*.

b)
[[…]]

c)
[[…]]

d)
[[…]]

Classe 2B dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)
a)
Prima di stabilire di che tipo è il triangolo BDG abbiamo fatto alcune considerazioni:
- osservando il triangolo *HGD* abbiamo trovato che questo è rettangolo isoscele avendo gli angoli adiacenti al lato DG congruenti, infatti l'angolo $\hat{H}$ è retto, l'angolo $H\hat{G}D$ misura 45° (per ipotesi del problema) e l'angolo $H\hat{D}G$ misura 45° per differenza di angoli interni ad un triangolo. Di conseguenza $\overline{DH}=\overline{HG}$ e si deduce che il quadrilatero *DCGH* è un quadrato.
- i due triangoli *DCB* e *BCG* risultano congruenti in quanto:
$\overline{DC}=\overline{CG}$ in quanto lati del quadrato DCGH;
$D\hat{C}B=B\hat{C}G=90°$ [intesa come uguaglianza delle ampiezze];
CB è un lato in comune.
Quindi per il primo criterio di congruenza dei triangoli questi risultano congruenti e in particolar modo $\overline{DB}=\overline{BG}$.
Concludendo, per quanto sopra esposto, il triangolo *BDG* è isoscele avendo due lati congruenti $\overline{DB}=\overline{BG}$.

b)
Prima di calcolare il volume della piramide *DGCB* abbiamo fatto le seguenti osservazioni:
- Il triangolo BGF risulta metà di un triangolo equilatero in quanto l'angolo in $\hat{F}$ è retto, l'angolo $F\hat{G}B$ è uguale [ha ampiezza pari] a 60° (per ipotesi del problema) e l'angolo $G\hat{B}F$ è uguale [ha ampiezza pari] a 30° per differenza di angoli nel triangolo stesso. Di conseguenza poiché il lato $\overline{GF}$ = $\overline{CB}$ = 1 si ha che il lato $\overline{GB}$ = 2.
- Applicando il teorema di Pitagora al triangolo GCB abbiamo calcolato lo [la lunghezza dello] spigolo del parallelepipedo $CG=BF$ [$\overline{CG}=\overline{BF}$] come segue

$$\overline{CG} = \sqrt{\overline{BG}^2 - \overline{CB}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

A questo punto abbiamo calcolato il volume della piramide DGCB considerando il triangolo BCD come base e CG come altezza della piramide.

$$A_b = A_{BCD} = \frac{\overline{CB} \ \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$h = \overline{CG} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

c)

[[…]]

d)

Per rispondere a questo quesito abbiamo verificato la seguente uguaglianza:

$$(A_{BCG})^2 + (A_{DCG})^2 + (A_{DCB})^2 = (A_{BDG})^2$$

poiché

$$A_{BCG} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CG}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{da cui :} \qquad (A_{BCG})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$A_{DCG} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{CG}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{da cui :} \qquad (A_{DCG})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$A_{DCB} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{da cui :} \qquad (A_{DCB})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

si ottiene

$$(A_{BCG})^2 + (A_{DCG})^2 + (A_{DCB})^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

Per calcolare l'area del triangolo isoscele BDG abbiamo trovato la lunghezza del lato DG e l'altezza ad esso relativa nel seguente modo:

- applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DCG abbiamo calcolato $\overline{DG}$:

$$\overline{DG} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

- Indicando con BK l'altezza del triangolo BDG relativa al lato DG, si può osservare che:

$$\overline{DK} = \overline{KG} = \frac{\overline{DG}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$ poiché BDG è in triangolo isoscele.

- applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BDK si ottiene:

$$\overline{BK} = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{DK}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{16-6}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

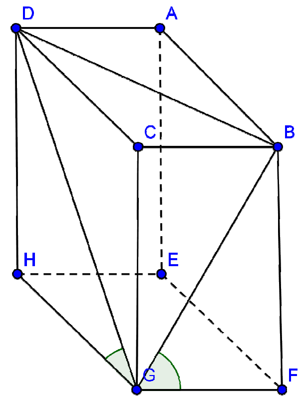
A questo punto abbiamo calcolato l'area del triangolo BDG come segue :

$$A_{BDG} = \frac{\overline{DG} \cdot \overline{BK}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{30}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$ da cui :

$$(A_{BDG})^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{15}{4}$$

Si può concludere che l'uguaglianza richiesta è stata verificata in quanto $\frac{15}{4} = \frac{15}{4}$.

Classe 3A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)
Il triangolo BDG è isoscele avendo i lati DB = BG poiché diagonali di due rettangoli congruenti: BCGF ≡ ABCD. I due rettangoli sono congruenti per avere il lato CB in comune e i lati CG = DC perché lati del quadrato DCGH.
Il quadrilatero DCGH, faccia laterale del parallelepipedo, è un quadrato perché il segmento DG lo divide in due triangoli rettangoli isosceli, essendo l'angolo DGH di ampiezza 45° (per ipotesi), anche l'angolo HDG è ampio 45° poiché l'angolo DHG è ampio 90°, e [[sapendo che]] la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180°.

b)
Il triangolo BCG è rettangolo e ha l'angolo BGC di ampiezza 30°, essendo per ipotesi l'angolo BGF di [ampiezza pari a] 60°, da ciò consegue che l'angolo GBC è ampio 60°, quindi il triangolo BCG è la metà di un triangolo equilatero di lato BG.

Se BC [$\overline{BC}$] = 1 [e] BC [$\overline{BC}$] = $\frac{1}{2}$ BG [$\overline{BG}$] consegue che:

BG [$\overline{BG}$] = 2

CG = HG [$\overline{CG} = \overline{HG}$] sono [le lunghezze di due] lati del quadrato DCGH

CG [$\overline{CG}$] = $\frac{\overline{BG}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Consideriamo come base [della piramide] il triangolo CBG

V $= \frac{Ab.h}{3} = \frac{A(CBG) \ . \ DC}{3} = \frac{\sqrt{3} \ . \ 1}{2} \ . \sqrt{3}.\frac{1}{3} = \frac{3}{2 \ . \ 3} = \frac{1}{2}$

Abbiamo così calcolato il volume della piramide.

c)
[[…]]

d)
Indichiamo le aree delle facce della piramide nel seguente modo

A_1 = area del triangolo BCG
A_2 = area del triangolo BCD
A_3 = area del triangolo DCG
A_4 = area del triangolo DBG

Per verificare che la somma dei quadrati delle aree delle facce A_1, A_2, A_3 è uguale al quadrato dell'area della faccia A_4 [cioè] $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_4^2$, poniamo:

BG [$\overline{BG}$] = 2x quindi BC [$\overline{BC}$ = x e CG [$\overline{CG}$] = x $\sqrt{3}$

Procediamo calcolando le aree dei triangoli e poi i rispettivi quadrati e verifichiamo l'ipotesi.

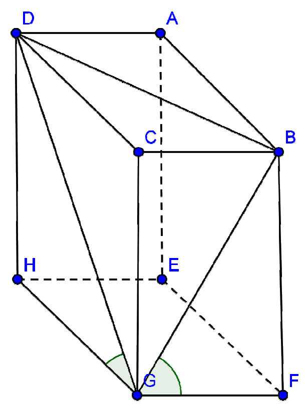
1. $A_{BCG} = x.x\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ [$A_{BCG} = \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$]
2. $A_{BCD} = x.x\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ [$A_{BCD} = \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$]
3. $A_{DCG} = x\sqrt{3}\ .\ x\sqrt{3} = \frac{3x^2}{2}$ [$A_{DCG} = \frac{x\sqrt{3} \cdot x\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^2}{2}$

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^4}{4} + \frac{9x^4}{4} = \frac{15x^4}{4}$$

4. $A_{DBG} = x\sqrt{6}.\frac{x}{2}\ .\ \sqrt{10}\ .\frac{1}{2} = \frac{x^2}{4}\ .\sqrt{60} = \frac{x^2}{2}\ .\ \sqrt{15}$

$$A_4^2 = \left(\frac{x^2}{2}\ .\ \sqrt{15}\right)^2 = \frac{15x^4}{4}$$

Classe 3C dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)
Consideriamo il triangolo DHG, gli angoli $D\hat{H}G$ e $D\hat{G}H$ misurano rispettivamente 90° e 45° per costruzione [ipotesi]. Sappiamo che la somma [delle ampiezze] degli angoli interni in un triangolo è 180°, per cui l'angolo $H\hat{D}G$ misura 45°. Il triangolo DHG è un triangolo rettangolo isoscele.

Possiamo quindi affermare che [per] gli spigoli del parallelepipedo ABCDEFGH vale la relazione $\overline{HG} = \overline{DH} = \overline{DC} = \overline{CG} = \overline{EF} = \overline{AE} = \overline{AB} = \overline{BF}$.

Consideriamo il triangolo BFG, gli angoli $B\hat{F}G$ e $F\hat{G}B$ misurano rispettivamente 90° e 60° per costruzione [ipotesi]. L'angolo $G\hat{B}F$ misura quindi 30°. Il triangolo rettangolo BFG ha l'ipotenusa [BG tale che] $\overline{BG} = 2\overline{GF}$, perché metà di un triangolo equilatero.

Consideriamo i triangoli rettangoli DCB e BCG, questi sono congruenti per il primo criterio di congruenza perché hanno entrambi un angolo retto e i cateti [DC e CG tali che] $\overline{DC} = \overline{CG}$ e $\overline{CB}$ [CB] in comune. Pertanto, le loro ipotenuse sono congruenti $\overline{DB} = \overline{BG}$.

Possiamo concludere che il triangolo BDG è un triangolo acutangolo isoscele.

b)

Consideriamo la piramide DGCB obliqua con [un] vertice in B, con altezza corrispondente allo spigolo $\overline{BC}$ [BC] e con triangolo di base DCG. Il volume della piramide si calcola: V = $\frac{Ab \cdot h}{3}$

Ipotizzando che [per] lo spigolo [DC risulti] $\overline{BC}$ = 1 cm, allora

$\overline{DB} = \overline{BG}$ = 2 cm , $\overline{DC} = \overline{CG} = \sqrt{3}$ cm come dimostrato nel quesito *a*

$Ab = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{3}{2}$ cm^2 =1,5 cm^2 V = $\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ cm^3 = 0,5 cm^3

c)

[[…]]

d)

Verifichiamo che la somma dei quadrati delle aree delle facce della piramide DGCB con vertice in C è uguale al quadrato dell'area del triangolo BDG.

Poniamo, come nel quesito *b*:

$\overline{BC}$ = 1 cm

$\overline{BG} = \overline{DB}$ = 2 cm

$\overline{DC} = \overline{CG} = \sqrt{3}$ cm

$\overline{DG} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$ cm (Applicando il teorema di Pitagora)

Da cui:

$A_{(DCB)} = A_{(CGB)} = \left(\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2

$A_{(DCG)} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{3}{2}$ cm^2

Applicando la formula di Erone al triangolo BDG ed essendo p il semiperimetro

p = $\frac{2+2+\sqrt{6}}{2} = \frac{4+\sqrt{6}}{2}$ cm

$A_{(BDG)} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} =$

$= \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{2} \cdot \left(\frac{4+\sqrt{6}}{2} - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{4+\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}\right)} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4-\sqrt{6}}{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot \left(4+\sqrt{6}\right) \cdot \left(4-\sqrt{6}\right)}{8}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (16-6)}{8}} = \sqrt{\frac{15}{4}}$ cm^2

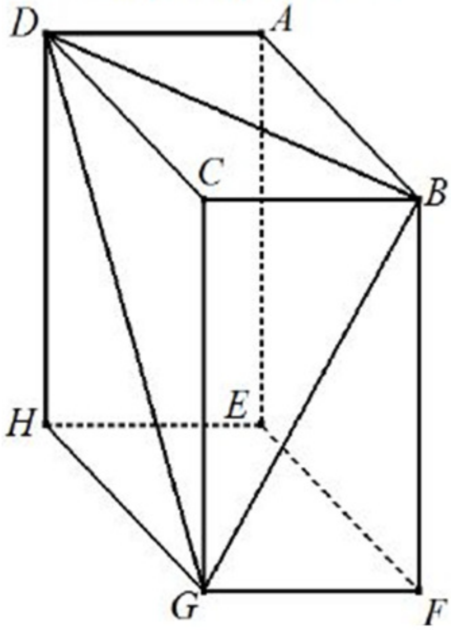
$A_{(DCB)}{}^2 + A_{(CGB)}{}^2 + A_{(DCG)}{}^2 = A_{(BDG)}{}^2$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$$

$\frac{15}{4} = \frac{15}{4}$ L'uguaglianza risulta verificata.

Classe 3D dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)

Il triangolo BDG è isoscele.

Siamo giunti a formulare questa risposta dopo aver effettuato le seguenti osservazioni.

Per definizione un parallelepipedo rettangolo è un prisma retto (tutte le facce sono perpendicolari alle basi) delimitato da 6 rettangoli, paralleli e congruenti a due a due.

Abbiamo osservato che la faccia DCGH (parallela e congruente a ABFE) è un quadrato, essendo tutti gli angoli = 90° e i lati $\overline{DH} = \overline{HG} = \overline{GC} = \overline{CD}$

In particolare, i lati $\overline{DH}$ e $\overline{HG}$ e i lati $\overline{GC}$ e $\overline{CD}$ sono congruenti tra loro perché rappresentano rispettivamente i cateti dei triangoli rettangoli isosceli DHG e DCG, ottenuti tracciando al [nel] quadrato DCGH la diagonale $\overline{DG}$ [DG]. Essi, infatti, hanno l'angolo $\angle$DHG = [di ampiezza pari a] 90° (e l'angolo $\angle$GCD = [di ampiezza pari a] 90°), l'angolo $\angle$DGH = [di ampiezza pari a] 45° (e l'angolo $\angle$DGC = [di ampiezza pari a] 45°, dato dal problema) e l'angolo $\angle$GDH (complementare all'altro angolo acuto) = [di ampiezza pari a] 45°.

Conseguentemente, gli altri quattro rettangoli che delimitano il parallelepipedo rettangolo sono congruenti tra loro.

In particolare, i due rettangoli DABC e CBFG sono congruenti (DC = AB = CG = BF [$\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{CG} = \overline{BF}$] e DA = CB = GF [$\overline{DA} = \overline{CB} = \overline{GF}$]) e conseguentemente anche le due diagonali DB e BG (che sono due lati del triangolo BDG) sono congruenti. Pertanto il triangolo BDG è isoscele.

b)

Il volume della piramide DGCB = 1/2

Per rispondere al quesito abbiamo calcolato il volume della piramide DGCB nel seguente modo:

$$V_{DGCB} = \frac{A_{DBC} \cdot \overline{CG}}{3}$$

$\overline{BC} = \overline{GF} = 1$ (dato del problema)

$\overline{GB} = 2$ (Motivazione → Essendo l'angolo $\angle$FGB = [di ampiezza pari a] 60°, l'angolo $\angle$CGB è suo complementare cioè [ha ampiezza pari a] 30°. Per definizione [Come è noto] in un triangolo rettangolo avente un angolo acuto ampio 30°, il cateto opposto a quest'angolo è pari a metà ipotenusa, quindi se CB [$\overline{CB}$] = 1, GB [$\overline{GB}$] = 2).

Per calcolare l'altezza della piramide $\overline{CG}$ applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rett. BCG.

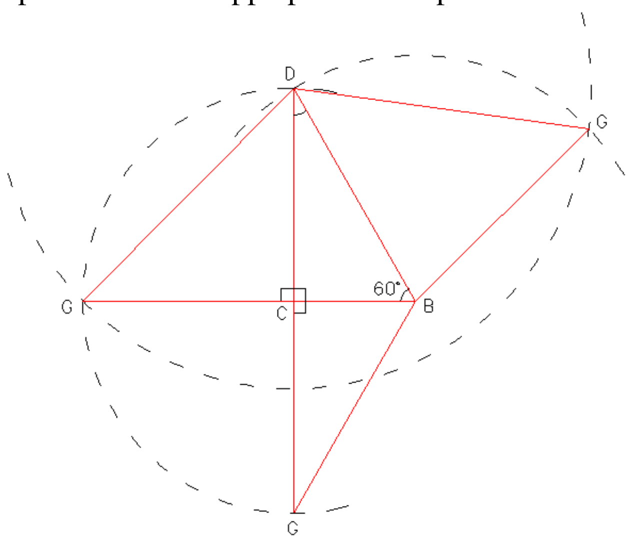
$$\overline{CG} = \sqrt{GB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$A_{DBC} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{DC}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ Pertanto, sostituendo nella formula per il calcolo del volume

$$V_{DGCB} = \frac{A_{DBC} \cdot \overline{CG}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{9}}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

c)

Costruzione con riga e compasso dello sviluppo piano della piramide DGCB.



Sono stati considerati come dati di partenza:

CB [$\overline{CB}$] = 1

BD [$\overline{BD}$] = 2

CD = CG [$\overline{CD} = \overline{CG}$] = $\sqrt{3}$ ottenuto per costruzione considerando l'angolo CBD = [di ampiezza pari a] 60°.

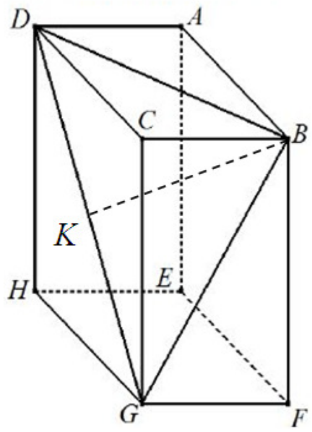
Tutti gli altri punti (e quindi gli altri spigoli) sono stati ottenuti per costruzione, con aperture di compasso corrispondenti alle misure dei lati da individuare (come illustrato in figura) e a partire dai dati iniziali.

d)

Per rispondere al quesito è necessario provare l'uguaglianza:

$(A_{BCG})^2 + (A_{DCB})^2 + (A_{DCG})^2 = (A_{BDG})^2$

Calcoliamo le diverse quantità utilizzando i dati forniti dal problema o precedentemente calcolati:



$$(A_{BCG})^2 = \left(\frac{\overline{CG}\cdot\overline{BC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$(A_{DCB})^2 = \left(\frac{\overline{DC}\cdot\overline{BC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$(A_{DCG})^2 = \left(\frac{\overline{CG}\cdot\overline{DC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Indicando con $\overline{BK}$ l'altezza del triangolo isoscele BDG

$$(A_{BDC})^2 = \left(\frac{\overline{DG}\cdot\overline{BK}}{2}\right)^2$$

Dove

$$\overline{DG} = \overline{CG}\sqrt{2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$\overline{BK} = \sqrt{BG^2 - \left(\frac{DG}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{4-\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

e quindi

$$(A_{BDC})^2 = \left(\frac{\overline{DG}\cdot\overline{BK}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{60}}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{60}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{60}}{4}\right)^2 = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}$$

Pertanto, sostituendo nell'uguaglianza da verificare:

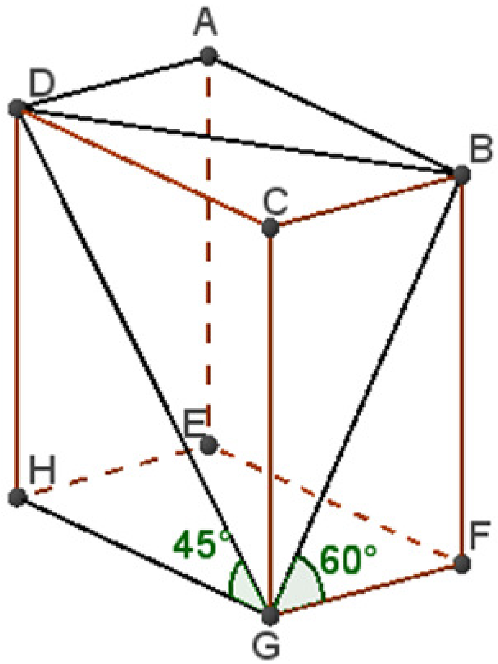
$(A_{BCG})^2 + (A_{DCB})^2 + (A_{DCG})^2 = (A_{BDG})^2$

$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$ ed eseguendo le operazioni si ottiene $\frac{15}{4}=\frac{15}{4}$

Classe 3A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Pattada (SS)

a)

Poiché l'angolo $\angle$DGH misura 45°, il triangolo DHG, rettangolo in H poiché il solido è un parallelepipedo rettangolo, è un triangolo rettangolo isoscele: gli angoli acuti sono uguali. La faccia DCGH è perciò un quadrato. Gli spigoli DH, AE, GC, BF, CD, AB, GH, EF sono congruenti. Le facce CBFG e ABCD sono perciò due rettangoli uguali in quanto hanno in comune lo spigolo CB e l'altra dimensione uguale (CG e CD rispettivamente). Le due diagonali BG e DB sono perciò congruenti. Il triangolo BDG è quindi un triangolo isoscele.



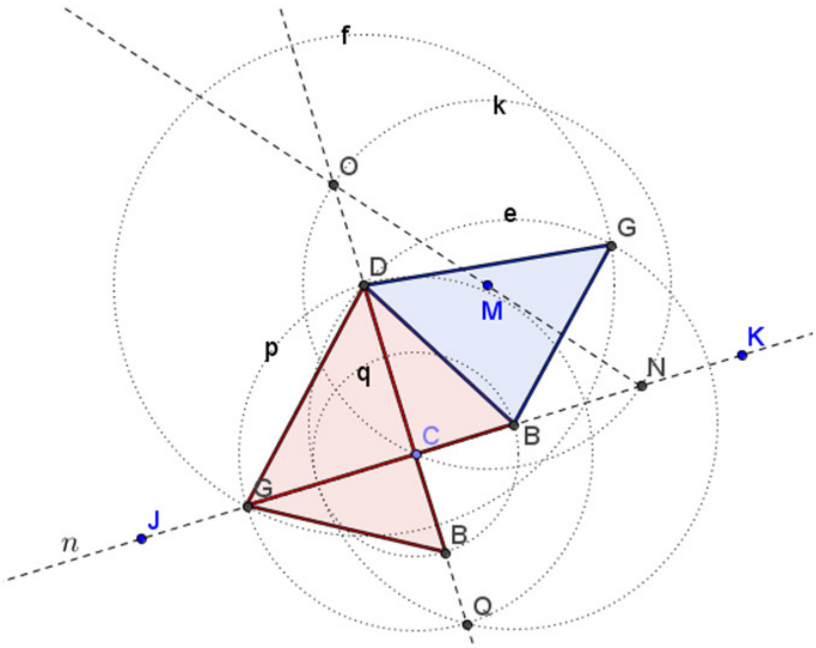
b)

Poiché l'angolo ∠FGB misura 60°, il triangolo BFG, rettangolo in F, è la metà di un triangolo equilatero di lato BG. Lo spigolo BF, altezza del triangolo equilatero, misura quindi: $\overline{BC}\sqrt{3}$ e, poiché BC ha lunghezza 1, $\overline{BF} = \sqrt{3}$. BF è congruente a CG perciò l'altezza CG della piramide *DGCB*, misura $\sqrt{3}$, così anche lo spigolo CD della base della piramide, per quanto detto al punto *a*, misura $\sqrt{3}$.

Il volume della piramide *DGCB,* vale perciò: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} * \sqrt{3}}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

c)

Abbiamo costruito con Geogebra lo sviluppo piano, simulando però l'uso di *riga e compasso*. Gli strumenti ci sono stati utili per tracciare le misure esatte dei segmenti.



- Abbiamo costruito la retta *n*, per i punti J e K
- Abbiamo individuato sulla retta il punto C
- Con centro in M abbiamo costruito la circonferenza **k** passante per C
- Abbiamo individuato l'intersezione N della circonferenza k con la retta *n*
- Abbiamo tracciato la semiretta per i punti NM
- Individuato l'intersezione O della semiretta con la circonferenza k
- La retta per i punti O e C, è la perpendicolare alla retta *n*

- Con centro in C abbiamo costruito la circonferenza **p** con raggio uguale a $\sqrt{3}$
- Abbiamo chiamato D e G le intersezioni della circonferenza p con le due rette perpendicolari: i segmenti CD e CG sono gli spigoli uguali della faccia DCG della piramide.
- Abbiamo costruito il triangolo DCG.
- Ancora con centro in C abbiamo tracciato la circonferenza **q** di raggio 1
- Abbiamo chiamato B e B (utilizzando la *legenda* per l'etichetta) le intersezioni della circonferenza q con le due rette perpendicolari.
- Abbiamo costruito i triangoli CBG e CBD

Per costruire la faccia BDG:

- con centro in B abbiamo costruito la circonferenza **e** di raggio uguale a 2 (lunghezza della diagonale delle facce rettangolari del solido, lunghezza del lato del triangolo equilatero di cui il triangolo BFG è la metà, in quanto lo spigolo GF congruente a BC, ha lunghezza 1)
- Con centro in D abbiamo costruito la circonferenza **f** di raggio uguale a $\sqrt{3} * \sqrt{2} = \sqrt{6}$ (il lato DG del triangolo BDG è la diagonale del quadrato DCGH)
- Abbiamo chiamato G (ancora con la *legenda* per l'etichetta) l'intersezione delle circonferenze **e** e **f**
- Abbiamo costruito il triangolo BDG.

d)

Abbiamo calcolato i quadrati delle aree delle facce della piramide *DGCB* che hanno un vertice in C:

1) $(A_{DCG})^2 = \left(\frac{(\sqrt{3})^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$
2) $(A_{BCG})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75$
3) $(A_{BCD})^2 = (A_{BCG})^2 = 0{,}75$

La somma dei quadrati delle tre aree è uguale a 3,75

Abbiamo calcolato il quadrato dell'area del triangolo *BDG* con la formula di Erone.

Indichiamo con *a* il lato DB che ha lunghezza 2, con *b* il lato BG, congruente a DB, e con *c* il lato DG che misura $\sqrt{6}$ e con *P* il perimetro del triangolo, che misura $4+\sqrt{6}$

$$(A_{BDG})^2 = \left(\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)}\right)^2 = \frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right) =$$

$$= \frac{4+\sqrt{6}}{2}\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}-2\right)^2\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}\right) = 3{,}75$$