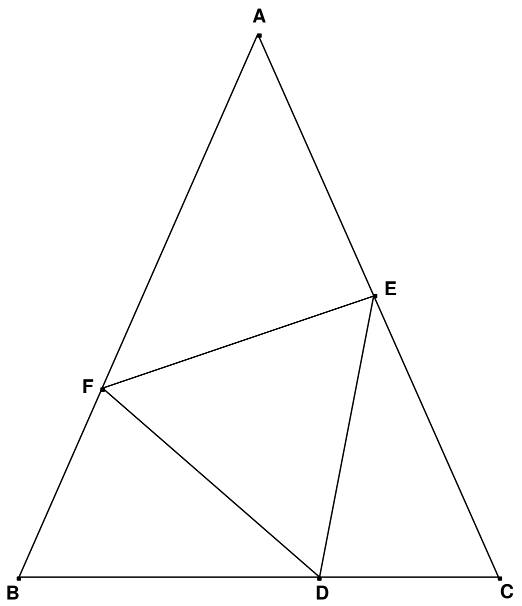
FLAT_landia_

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***[(Edwin A. Abbott)]***

Flatlandia 4-18 Ottobre 2010

Il testo del problema:
Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC (vedi figura allegata), mentre il triangolo DEF, i cui vertici giacciono sui lati di ABC, è equilatero. Indichiamo con α, β e γ le ampiezze degli angoli FDB, AFE e DEC, rispettivamente.



a) Esprimere α in funzione di β e γ.
b) Cosa si può dire riguardo al triangolo ABC se $\alpha = \beta = \gamma$?
c) Fissato il triangolo isoscele ABC, indicare una costruzione del triangolo equilatero DEF con i requisiti previsti nel testo.
Motivare le risposte.

Commento
Sono giunte quattro risposte, una proveniente da una prima Liceo Scientifico, due da due seconde di due diversi Licei scientifici e infine una risposta proveniente da due classi congiunte, una seconda e una terza, di un Istituto Comprensivo.
Il problema poneva tre quesiti relativi alla stessa figura: nel primo si chiedeva di individuare la relazione esistente tra le ampiezze di tre angoli, nel secondo di analizzare un caso particolare e nell’ultimo di suggerire una possibile costruzione geometrica legata alla figura allegata al problema.

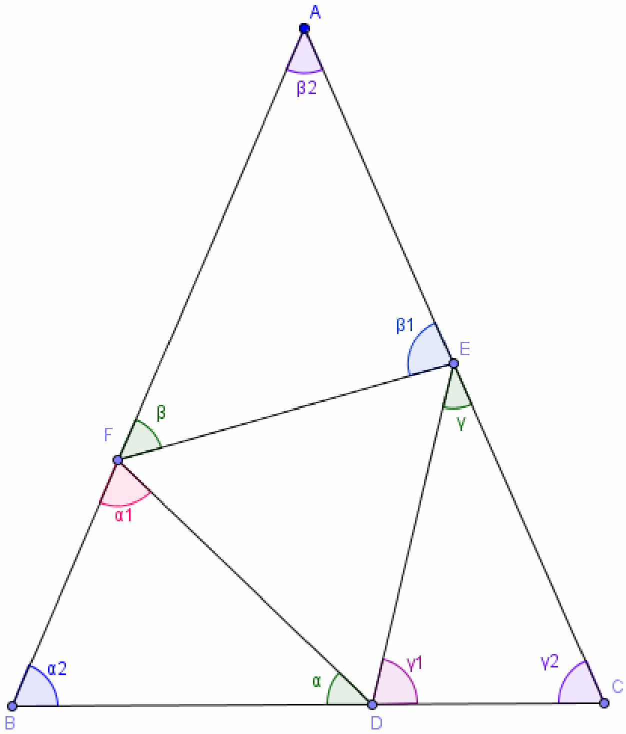
Alla prima domanda rispondono in modo sostanzialmente corretto le due seconde di Liceo Scientifico e le due classi congiunte, mentre tutti arrivano a risolvere il secondo quesito.
Solo due risposte prendono in esame anche la costruzione geometrica, ma in una risposta non sono motivate tutte le costruzioni e nell'altra manca la dimostrazione dell'allineamento di certi punti costruiti.
Infine vogliamo sottolineare la presenza in tutte le soluzioni di un "errore" [forse dovremmo dire una imprecisione] abbastanza comune in tutti i livelli scolari, cioè confondere un angolo con la sua ampiezza, il che porta a utilizzare la stessa notazione per indicare due concetti diversi.
Un'ultima raccomandazione: evitare assolutamente di utilizzare i software di geometria dinamica per scrivere il testo della soluzione al problema proposto, in quanto risulta poi estremamente difficile inserire tale testo nel file contenente tutte le soluzioni.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
LS "F. Masci", Chieti (CH)
LS "A. Banfi", Vimercate (MI)
Is. Comprensivo, sez. di Branzi, Valnegra (BG)
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni
Vanessa Roncadori, Classe 1°
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

a) [[…]]

b)



Poiché $\alpha1 \cong 120° - \beta$ [$\alpha1 = 120° - \beta$], $\gamma1 \cong 120° - \alpha$ [$\gamma1 = 120° - \alpha$], $\beta1 \cong 120° - \gamma$ [$\beta1 = 120° - \gamma$] e poiché siamo nell'ipotesi che $\alpha \cong \beta \cong \gamma$ [$\alpha = \beta = \gamma$], allora ne deriva che $\alpha1 \cong \beta1 \cong \gamma1$ [$\alpha1 = \beta1 = \gamma1$].
Poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli di un triangolo è 180°, possiamo scrivere che:
$\alpha2 \cong 180° - \alpha - \alpha1$ [$\alpha2 = 180° - \alpha - \alpha1$], $\beta2 \cong 180° - \beta - \beta1$ [$\beta2 = 180° - \beta - \beta1$], $\gamma2 \cong 180° - \gamma - \gamma1$ [$\gamma2 = 180° - \gamma - \gamma1$]
e dato che $\alpha \cong \beta \cong \gamma$ [$\alpha = \beta = \gamma$] per ipotesi è anche $\alpha1 \cong \beta1 \cong \gamma1$ [$\alpha1 = \beta1 = \gamma1$] per [la] dimostrazione precedente, ne consegue che $\alpha2 \cong \beta2 \cong \gamma2$ [$\alpha2 = \beta2 = \gamma2$].
Quindi il triangolo ABC avendo i tre angoli interni congruenti è equilatero.

c) [[…]]

Emilia Maria Bernabei, Classe 2A, Sper. Bilingue
Liceo Scientifico Statale "F. Masci", Chieti (CH)

a)

Posto $\varphi = A\hat{B}C = B\hat{C}A$ [cioè φ indica l'ampiezza comune dei due angoli], da $\pi = D\hat{F}B + \frac{\pi}{3} + \beta = D\hat{F}B + \varphi + \alpha$ [cioè $D\hat{F}B$ indica l'ampiezza dell'angolo], si ha

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \beta - \alpha, \qquad (1)$$

inoltre, nel triangolo AFE, da $\beta + \left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\right] + (\pi - 2\varphi) = \pi$, si ha

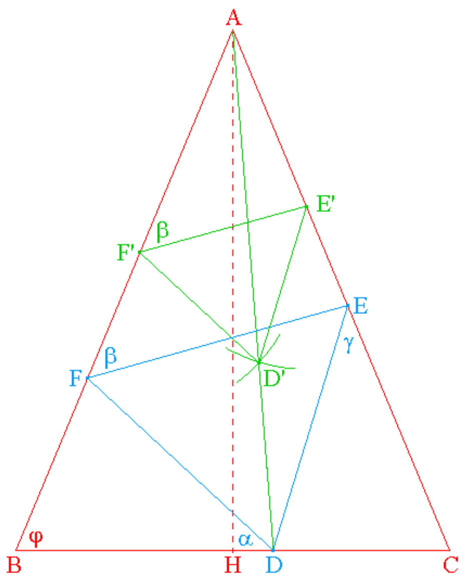
$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\beta - \gamma}{2}. \qquad (2)$$

Dal confronto di (1) e (2) segue $\beta - \alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$, cioè $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$.

b)

Le (1) e (2) mostrano che se $\alpha = \beta = \gamma$, allora $\varphi = \frac{\pi}{3}$, quindi il triangolo ABC è equilatero. In ogni altro caso, se $\varphi > \frac{\pi}{3}$, β è maggiore di α e γ, se $\varphi < \frac{\pi}{3}$, β è minore di α e γ.

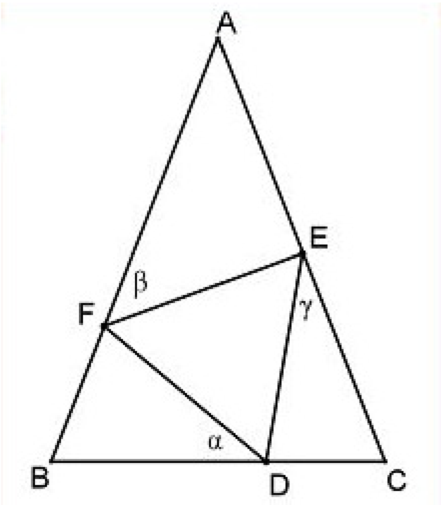
c)



Fissato il triangolo isoscele ABC, è assegnato l'angolo [di ampiezza] φ. Scelto uno dei tre angoli [aventi come ampiezze] α, β, γ, ad esempio β, esso e [l'angolo di ampiezza] φ determinano gli altri due angoli in forza delle (1), (2) e, da tali angoli, risulta pure determinato il triangolo equilatero DEF, inscritto nel triangolo ABC, che si può ottenere mediante la costruzione seguente.
Si conduca un segmento E'F', avente un estremo su ciascuno dei due lati congruenti e formante il prescelto angolo β con uno di essi, ad esempio, AB [con quale costruzione?]. Puntato il compasso sugli estremi, con apertura uguale ad E'F', s'individui, internamente ad ABC [è sempre possibile?], il terzo vertice D' del triangolo equilatero D'E'F'. La retta AD' incontra la base BC nel punto D. Si conducano per D le parallele alla [retta] D'E' e alla [retta] D'F' [rispettivamente], in modo da determinare, sui lati AB e AC, gli altri due vertici del triangolo equilatero [perché è equilatero?] voluto. Quando β = φ, D coincide con H ed FE è parallelo a BC.

Lorenzo Sala,Classe 2E
Liceo Scientifico "A. Banfi", Vimercate (MI)

a)



Hp: ABC triangolo isoscele

EFD triangolo equilatero

Th: relazione tra α, β e γ [$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$]

<u>**Dimostrazione:**</u> Gli angoli ABC e ACB sono congruenti perché angoli alla base in un triangolo isoscele.

Gli angoli del triangolo equilatero EFD sono congruenti. Quindi, poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni in un triangolo è 180°, allora [ognuno degli angoli] sono congruenti [ha ampiezza uguale] a 60°.

Indicando con δ [l'ampiezza comune di] gli angoli ABC e ACB, impostiamo la seguente equazione nel [relativa al] triangolo FBD:

$180° = \alpha + \delta + 180° - 60° - \beta$

$60° = \alpha + \delta - \beta$

Nel [Per il] triangolo DEC invece:

$180° = \gamma + \delta + 180° - 60° - \alpha$

$60° = \gamma + \delta - \alpha$

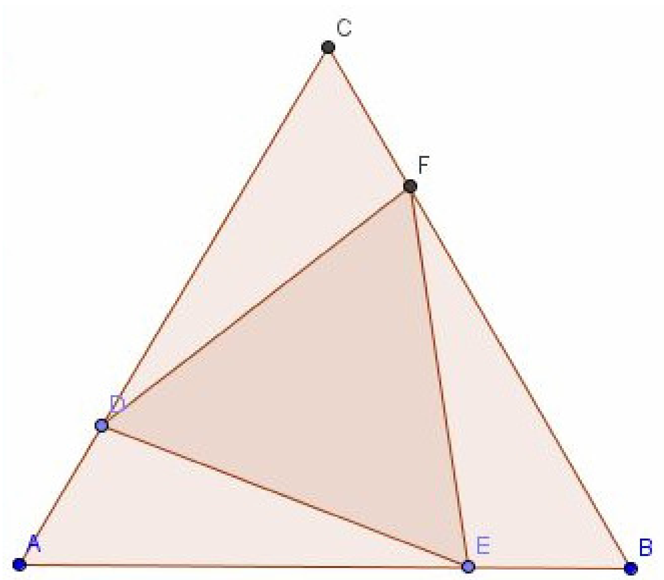
quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza,

$\alpha + \delta - \beta = \gamma + \delta - \alpha$

$2\alpha = \gamma + \beta$

$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$.

b)



Hp: ABC triangolo isoscele

EFD triangolo equilatero

$\alpha = \beta = \gamma$

Th: ABC triangolo equilatero

<u>**Dimostrazione:**</u> Indicando con ε [il valore comune di] $\alpha = \beta = \gamma$, sostituiamo ε ad α, β e γ nell'equazione ottenuta precedentemente:

$180° = \alpha + \delta + 180° - 60° - \beta$

$180° = \varepsilon + \delta + 180° - 60° - \varepsilon$

$\delta = 60°$

Ma dato che gli angoli ABC e ACB sono congruenti [hanno ampiezza uguale] a δ perché angoli alla base di un triangolo isoscele e la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è 180°, ABC=BAC=ACB=60° [intesa come uguaglianza delle ampiezze], quindi ABC triangolo equilatero.

c) [[…]]

Classe 2C e Classe 3C
Istituto Comprensivo, Sez. staccata di Branzi, Vanegra (BG)

a)

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Motivazione:

1) $\alpha + 60° = \gamma + \hat{C}$ perché [l'angolo] $B\hat{D}E = \alpha + 60°$ [che ha ampiezza uguale a α + 60°] è angolo esterno del triangolo CED e quindi congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti

2) $\beta + 60° = \alpha + \hat{B}$ perché [l'angolo] $D\hat{F}A = \beta + 60°$ [che ha ampiezza uguale a β + 60°] è angolo esterno del triangolo BDF e quindi congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.

Essendo $\hat{B} = \hat{C}$ [intesa come uguaglianza delle ampiezze], in quanto ABC isoscele, possiamo scrivere la 1) e la 2) in modo diverso

$$\hat{B} - 60° = \alpha - \gamma$$

$$\hat{B} - 60° = \beta - \alpha$$

Da cui otteniamo che

$\alpha - \gamma = \beta - \alpha$ ovvero $2\alpha = \beta + \gamma$ e quindi la relazione cercata.

b)

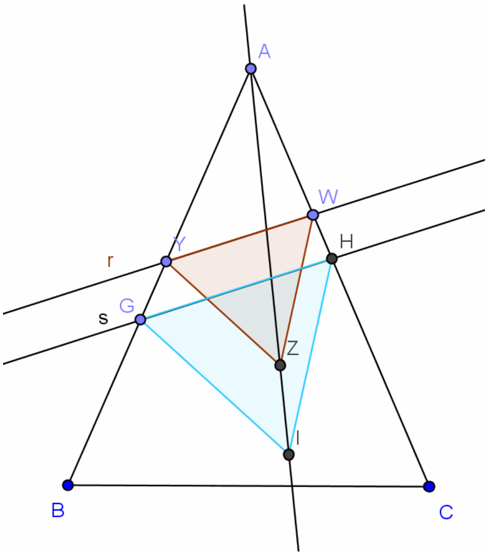
Se poniamo $\alpha = \beta$ nella relazione 2) del punto a) otteniamo $\beta + 60° = \beta + \hat{B}$ e quindi $\hat{B}$ = 60° ovvero il triangolo ABC è equilatero

c)

Costruisco il triangolo DFE con i seguenti passaggi.

- Traccio una retta r che interseca i lati obliqui di ABC nei punti Y e W.
- Costruisco il triangolo equilatero con lato YW, ottenendo il terzo vertice Z.
- Traccio la retta s passante per A e Z.
- L'intersezione tra la retta s e il lato BC è il vertice D del triangolo equilatero cercato.
- Traccio la perpendicolare p ad r passante per D.
- Traccio un angolo di 60° che ha D per vertice e p per bisettrice.
- I lati di questo angolo intersecano i lati del triangolo ABC nei vertici F ed E del triangolo equilatero cercato.

MOTIVAZIONE



Abbiamo intersecato la retta r con i lati obliqui di ABC ottenendo i punti Y, W.
Abbiamo costruito il triangolo equilatero YWZ
Abbiamo proceduto poi nello stesso modo a partire da una retta s parallela ad r ottenendo il triangolo equilatero GHI.
Abbiamo notato che Z ed I risultano allineati al vertice A del triangolo ABC.
Questa proprietà abbiamo intuito e verificato che è valida per ogni triangolo equilatero costruito con lo stesso procedimento a partire da rette parallele ad r [e la dimostrazione?].
Alla retta passante per A e per Z appartengono quindi i possibili vertici dei triangoli equilateri che hanno un lato parallelo alla retta r.
Abbiamo quindi concluso che il triangolo soluzione del problema dovesse avere come vertice il punto intersezione del lato BC e della retta passante per A e per uno qualsiasi dei vertici [I o Z].
Trovato il punto D abbiamo costruito facilmente il triangolo DFE.