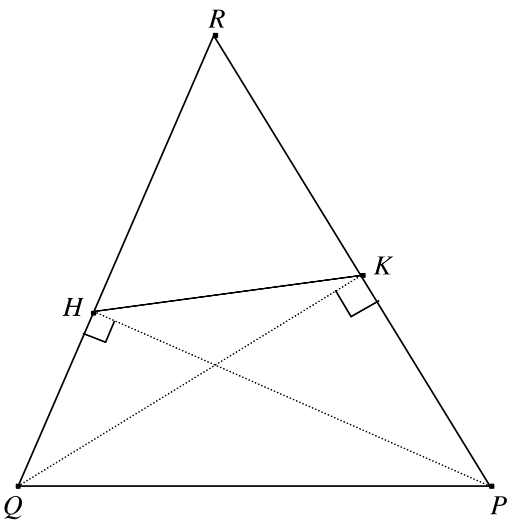
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" [(Edwin A. Abbott)]

FLATlandia 7-25 Gennaio 2010

Il testo del problema:
È dato un triangolo acutangolo *PQR*. Si traccino le altezze *PH* e *QK*.
1) Che cosa si può dire del quadrilatero *PQHK*?
2) Esistono triangoli *PQR* per i quali il quadrilatero *PQHK* è un trapezio isoscele?
3) Se il triangolo *PQR* è ottusangolo, le conclusioni ottenute in 1) e 2) sono ancora valide?

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte così suddivise: quattro dal biennio delle Scuole Superiori (di cui due da uno stesso Liceo), una da una terza delle Scuole Superiori. Il problema poneva tre domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di individuare le caratteristiche di un quadrilatero costruito secondo le indicazioni del testo; nel secondo quesito (che costituiva un caso particolare del primo) si chiedeva di stabilire l'esistenza o meno di una situazione in cui il quadrilatero risultante fosse un trapezio isoscele; infine, nell'ultimo quesito si chiedeva di verificare se le situazioni prospettate nei primi due fossero ancora presenti dopo aver modificato una delle ipotesi iniziali.
In quattro delle risposte pervenute viene risolto in modo sostanzialmente corretto il primo quesito (salvo piccole imprecisioni). Per il secondo quesito, solo due delle risposte risultano soddisfacenti. Altre presentano errori e imprecisioni accompagnati da una scarsa attenzione alla elaborazione del testo. Per quanto riguarda il terzo quesito vogliamo fare subito una precisazione: a differenza di quanto succede per i triangoli, nel caso dei quadrilateri e, in generale, dei poligoni di n lati (con $n > 3$) *non* si può, di regola, modificare l'ordine dei vertici [per intenderci, il quadrilatero *PHKQ* *non* coincide col quadrilatero *PQHK*]. Ciò nonostante abbiamo convenuto di ritenere valide anche le risposte che hanno considerato il quadrilatero convesso di vertici *P*, *H*, *K*, *Q*. Infine consigliamo di evitare l'uso di simboli "strani" o di particolari "equation editor" che rischiano di complicare la lettura del testo invece di chiarirla [ad esempio il simbolo "∠" va benissimo per indicare gli angoli.]

Un’ultima osservazione che è anche un invito pressante per il futuro: cercate di rispettare le specifiche stabilite per la scrittura del testo [ad esempio, evitate di usare “Open office” o programmi simili, oppure convertite il file in formato Word o anche in PDF] per non correre il rischio che il Vostro elaborato non sia leggibile e, quindi, non preso in considerazione.

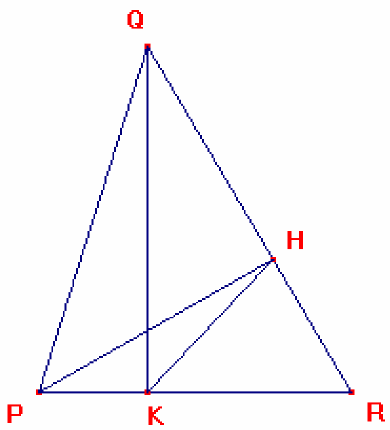
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “T. Gullace Talotta”, Roma
LS “Righi”, Bologna

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni
Manuel De Rose, Classe 2A
Istituto di Istruzione Superiore, Sez. Geometri, Castrolibero (CS)

1)



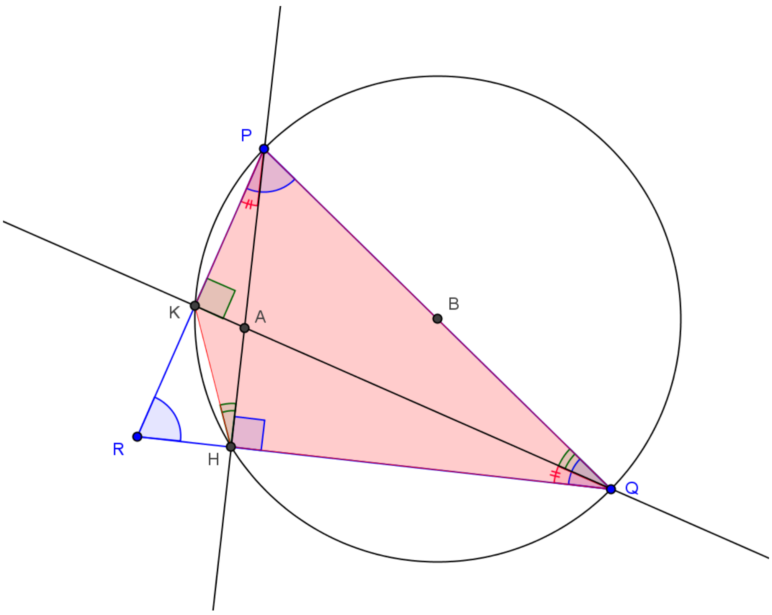
Costruiamo un triangolo acutangolo PQR. Tracciate le altezze PH e QK, otteniamo un quadrilatero PQHK. Possiamo dire che le altezze tracciate corrispondono alle diagonali del quadrilatero PQHK. E’ un quadrilatero che non ci consente di dare altre informazioni, pertanto è un quadrilatero generico. [È un quadrilatero convesso inscrivibile in una circonferenza.]

2) [[…]]

3) [[…]]

M. Malaponte, F. Petriaggi, A. Bambati, M. Baggiani, A. Cristadoro, L. Mariotti, G. Di Nucci, D. Simoncelli, Classe 2D
LS "T. Gullace Talotta", Roma

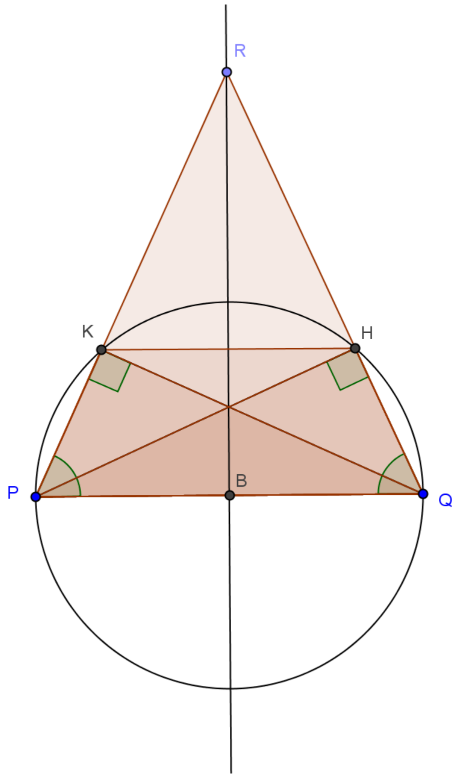
Quesito 1: Che cosa si può dire del quadrilatero PQHK?



L'analisi della figura ha condotto alle seguenti osservazioni:

- Le altezze PH e QK sono le diagonali del quadrilatero PQHK: il quadrilatero ha le diagonali sempre perpendicolari ai lati PK e QH
- I triangoli PKQ e PHQ sono rettangoli e hanno lo stesso ipotenusa. Pertanto sono inscritti nella stessa semicirconferenza di diametro PQ e centro il punto medio B.
- il quadrilatero PQHK è inscritto nella semicirconferenza di diametro PQ.
- Detto A il punto di intersezione di PH e QK, il triangolo KPA è simile al triangolo HQA poiché:
  - Gli angoli $\angle$PHQ=$\angle$PKA perché entrambi retti per costruzione,
  - Gli angoli $\angle$HAQ=$\angle$KAP perché opposti al vertice.
- I triangoli KAH e PAQ sono simili poiché:
  - Gli angoli $\angle$KAH=$\angle$PAQ perché opposti al vertice,
  - Gli angoli $\angle$KHA=$\angle$PQK poiché entrambi angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.
- Nel quadrilatero PKHQ [Tra gli angoli presenti in figura] si trovano le seguenti coppie di angoli congruenti: $\angle$PHQ=$\angle$PKA, $\angle$HAQ=$\angle$KAP, $\angle$KAH=$\angle$PAQ, $\angle$KHA=$\angle$PQK, $\angle$HPQ=$\angle$HKQ, $\angle$KPH=$\angle$KQH. Sono congruenti poiché sono tutte coppie di angoli alla circonferenza che insistono sugli stessi archi.
- Gli angoli opposti del quadrilatero sono supplementari (sempre nei [è una proprietà generale dei] quadrilateri inscritti in una circonferenza) .

Quesito n. 2: Esistono triangoli PQR per i quali PQHK è un trapezio isoscele?



Il quadrilatero PKHQ diventa un trapezio quando il triangolo PQR è isoscele su base PQ.

Dimostrazione:
Consideriamo i triangoli PKQ e PHQ. Sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli perché hanno:
- PQ in comune
- l'angolo $\angle PKQ = \angle PHQ = 90°$ poiché angoli inscritti sulla semicirconferenza di diametro PQ [fa parte delle ipotesi presenti nel testo del problema] (dalla dimostrazione presente nelle risposte al quesito 1).
- L'angolo $\angle P = \angle Q$ perché PQR è isoscele.

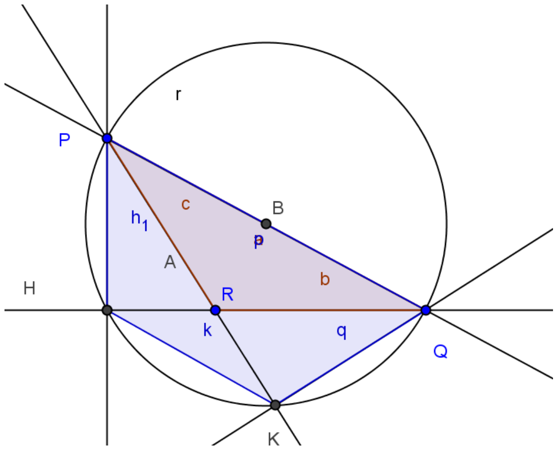
Essendo i due triangoli congruenti si ottiene PK = HQ. Pertanto i segmenti RK e RH sono congruenti perché differenza di segmenti congruenti e il triangolo RKH è isoscele su base KH.
Gli angoli alla base del triangolo RKH sono congruenti tra loro e sono congruenti agli angoli alla base del triangolo PQR, perché entrambi i triangoli isosceli hanno lo stesso angolo al vertice.
Per il criterio di parallelismo, essendo congruenti gli angoli $\angle RKH$ e $\angle RPQ$ corrispondenti tra le due rette KH e PQ tagliate dalla trasversale KP, i lati KH e PQ del quadrilatero sono paralleli e il quadrilatero è un trapezio. Il trapezio ottenuto è sempre isoscele.
Viceversa si osserva che se il quadrilatero è un trapezio isoscele i prolungamenti dei lati obliqui si incontrano sull'asse delle basi e il triangolo PQR è isoscele [occorre precisare meglio].

3)
Quesito n. 3: Se il triangolo PQR è ottusangolo, le conclusioni ottenute in 1 e 2 sono ancora valide?

Qui di seguito sono mostrate le figure corrispondenti ai triangoli ottusangoli che si formano a seconda di quale sia l'angolo ottuso**.**
Consideriamo i vari casi:

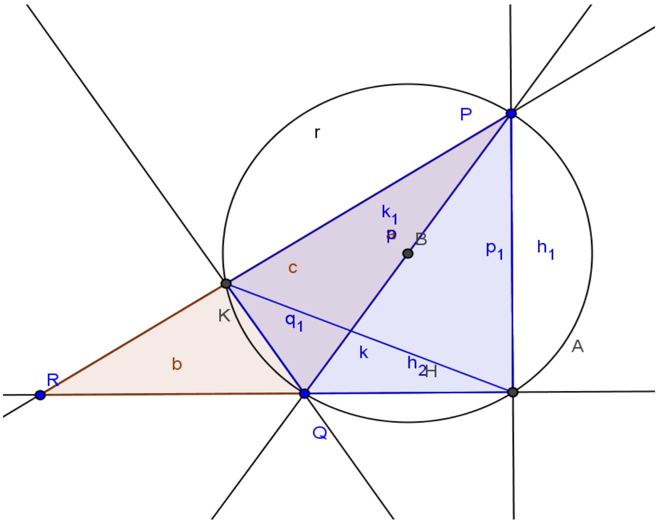
Primo caso: $\angle$PRQ ottuso

Il quadrilatero PHKQ è sempre inscritto nella semicirconferenza di diametro PQ. Se il triangolo ottusangolo è isoscele su base PQ, il quadrilatero è un trapezio isoscele.



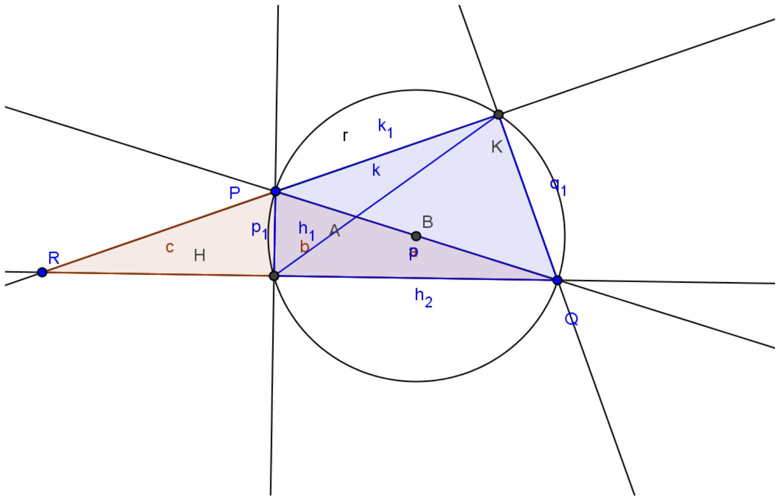
Secondo caso: l'angolo $\angle$PQR è ottuso

In questo caso il quadrilatero PHKQ è inscritto in una circonferenza che ha sempre il diametro PQ e centro nel punto medio B. Adesso PQ è una diagonale e non un lato [del quadrilatero]. (Non abbiamo tenuto conto dell'ordinamento dei vertici, prendendo sempre in considerazione il quadrilatero convesso; comunque anche il quadrilatero intrecciato PQHK sarebbe sempre inscrivibile in una circonferenza). Il quadrilatero non può essere un trapezio poiché essendo PH e QK perpendicolari agli altri due lati KP e QH, se PH e QK o PK e QH fossero paralleli il triangolo PQR degenererebbe.



Terzo caso: l'angolo $\angle$RPQ è ottuso

In questo caso il quadrilatero convesso PHQK è inscritto nella circonferenza di diametro PQ. Il quadrilatero non può essere un trapezio per lo stesso motivo del caso 2 [infatti il caso è del tutto analogo al precedente].

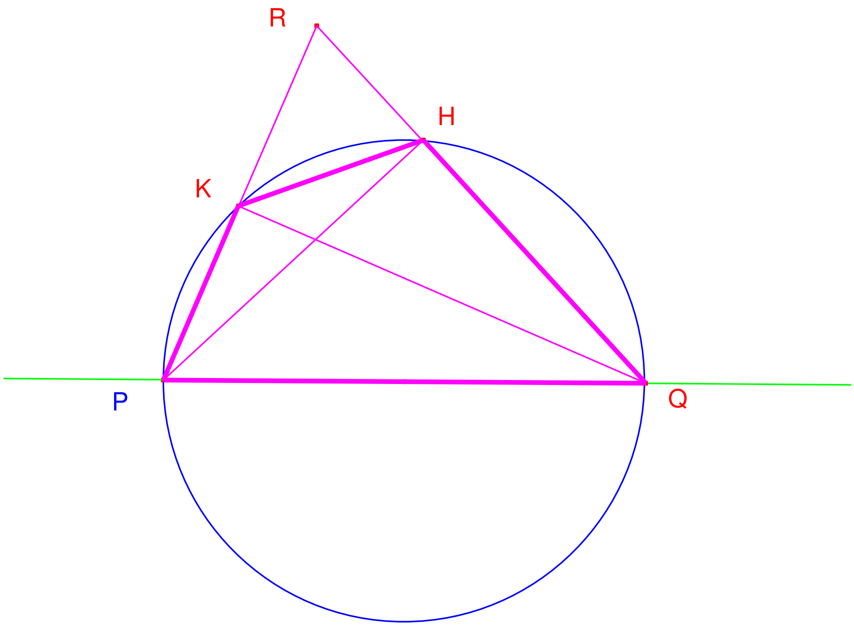


Classe 2B, LS "Pitagora", Rende (CS)

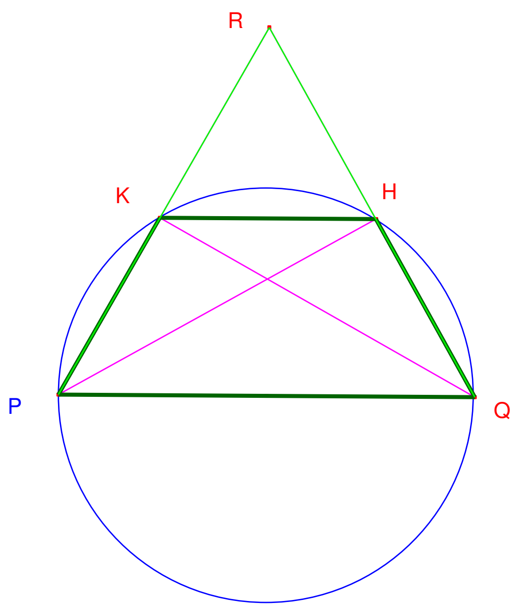
1)
Il quadrilatero PQHK si può inscrivere in una circonferenza perché è caratterizzato da due triangoli rettangoli PHQ e PKQ che hanno l'ipotenusa PQ in comune :

- Il triangolo PHQ è rettangolo in H e ha l'ipotenusa PQ che corrisponde al diametro di una circonferenza;
- Il triangolo PKQ è rettangolo in K e ha l'ipotenusa PQ che corrisponde sempre al diametro di una circonferenza.

Quindi i punti PKHQ [P, K, H, Q] appartengono tutti a una stessa circonferenza [di diametro PQ].



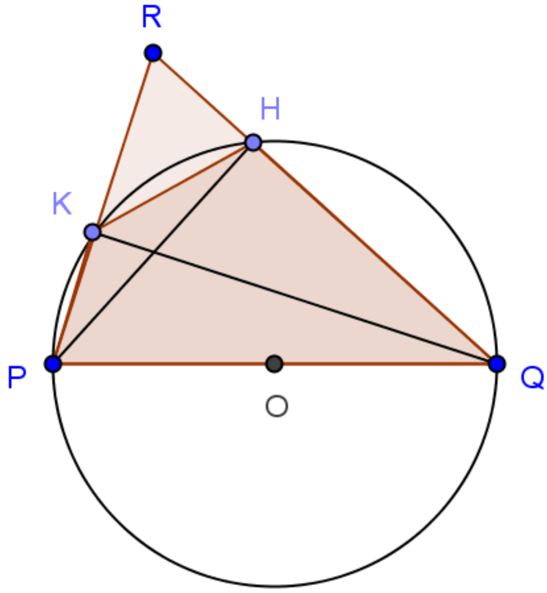
2)
Se il triangolo PQR è isoscele allora si dimostra che il quadrilatero PQHK è [un trapezio] isoscele infatti KP ≅ HQ in quanto:
i triangoli [gli angoli] PKQ e HPQ [QHP] sono congruenti perché retti;
i triangoli [gli angoli] KPQ e HQP sono congruenti perché angoli alla base in un triangolo isoscele;
[l'ipotenusa PQ in comune; quindi i due triangoli rettangoli PKQ e QHP sono congruenti.]
Di conseguenza KP ≅ HQ.
[Inoltre] osserviamo che il triangolo RKH è isoscele perché RK ≅ RH per differenza di lati [congruenti], quindi gli angoli alla base sono congruenti.
Inoltre, confrontando gli angoli del triangolo RKH con quelli del triangolo RPQ segue che [gli angoli RKH e RPQ sono congruenti] per differenza di angoli [congruenti]; poiché [essi] sono corrispondenti [e] congruenti [rispetto alle rette] KH e PQ tagliate dalla trasversale KP, allora KH è parallela a PQ.
Il quadrilatero PQHK è perciò un trapezio isoscele.



3) [[…]]

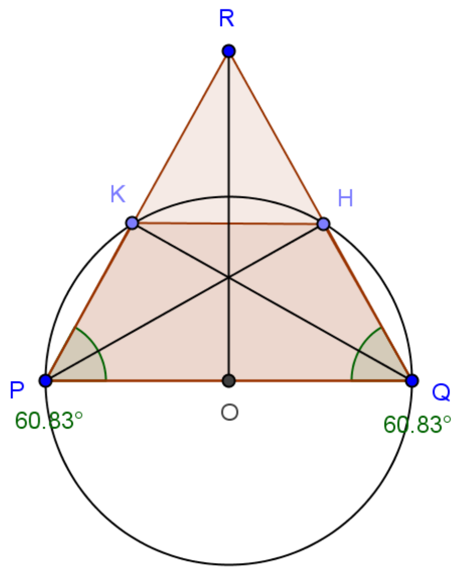
Imbrogno, Adami, Rende, Plastina, Giordano
Classe 2B, LS "Pitagora", Rende (CS)

1)



Il quadrilatero PQHK è inscrittibile in una circonferenza poiché il triangolo PQK,
essendo rettangolo, è inscrittibile in una [nella] circonferenza di diametro PQ e il triangolo PQH, essendo rettangolo, è inscrittibile in una [nella] circonferenza di diametro PQ. Segue che i punti P,Q,H,K appartengono alla stessa circonferenza quindi il quadrilatero PQHK è inscrittibile nella circonferenza di diametro PQ e centro O, punto medio di PQ.

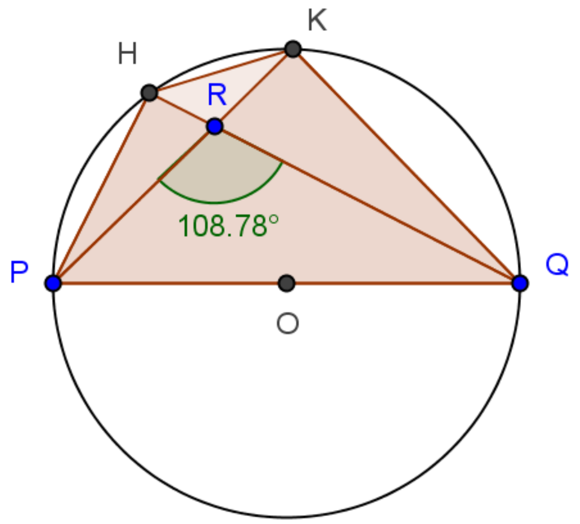
2)



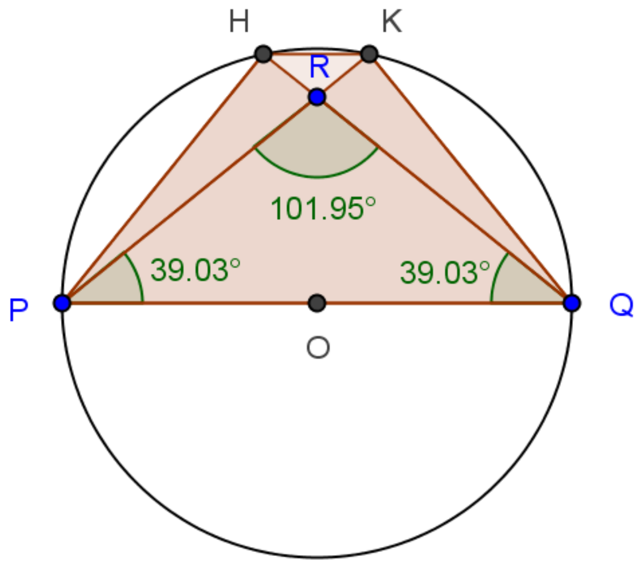
Se il triangolo PQR è isoscele [sulla base PQ], allora il quadrilatero PQHK è un trapezio isoscele. Infatti se consideriamo i triangoli PHQ e QKP :
1)∠PHQ ≅ ∠QKP perché retti
2) ∠KPQ ≅ ∠HQP perché angoli alla base del triangolo isosceli
3)PQ in comune
Allora i due triangoli sono congruenti per il 2° criterio di congruenza generalizzato. Di conseguenza KQ ≅ HP [KP ≅ HQ]. Dunque, per differenza di lati [congruenti], il triangolo RKH è isoscele. Inoltre KH // QP perché gli angoli ∠RKH e ∠KPQ, ∠RHK e ∠HQP sono congruenti per (differenza degli angoli congruenti) [la similitudine] dei due triangoli isosceli RPQ e RKH e sono,

per la posizione che occupano, corrispondenti congruenti. Allora il quadrilatero PQHK è un trapezio isoscele poiché ha i due lati obliqui KQ ≅ HP [KP ≅ HQ] e le due basi KH // QP.

3)



1) Nella figura del primo punto del problema, costruiti [costruita] con GeoGebra, si fa variare il vertice R del triangolo PQR, fino a che l'angolo in R diventi ottusangolo [ottuso]. Il triangolo PQR è diventato ottusangolo in R, ma la situazione non cambia perché il quadrilatero PQHK rimane inscrittibile in una circonferenza poiché il triangolo PQK, essendo rettangolo, è inscrittibile in una [nella] circonferenza di diametro PQ e il triangolo PHQ, anch'esso rettangolo, è inscrittibile di una [nella] circonferenza di diametro PQ. Segue che i punti P,Q,H,K appartengono alla stessa circonferenza quindi il quadrilatero PQHK è inscrittibile nella circonferenza di diametro PQ e centro O, punto medio di PQ.



2) Se il triangolo PQR è ottusangolo isoscele il quadrilatero PQHK rimane [un trapezio] isoscele perché se consideriamo i triangoli PHR e QKR :

1)∠PHR ≅ ∠QKR perché retti

2)∠HPR ≅ ∠RQK perché angli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco HK

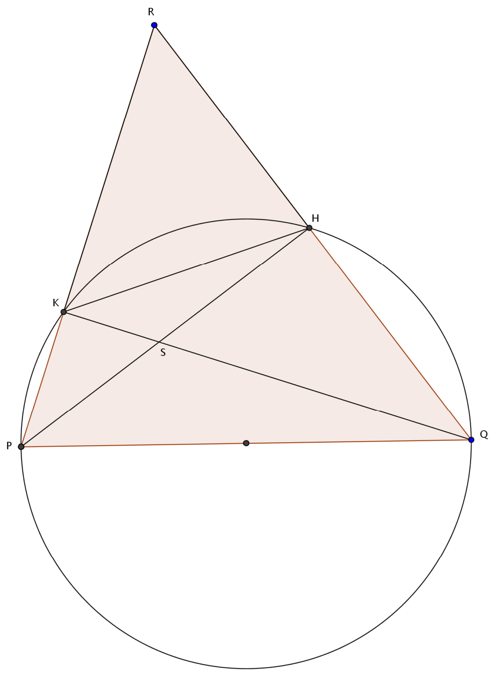
3)PR ≅ QR perché lati obliqui del triangolo isoscele

Allora i due triangoli sono congruenti per il 2° criterio di congruenza generalizato. Di conseguenze HP ≅ KQ. Inoltre l'arco PH è congruente all'arco KQ, perché sottendono corde congruenti, quindi

$\angle$HKP è congruente $\angle$KPQ ed essendo alterni interni rispetto alle rette HK e PQ, tagliate dalla trasversale PK, allora HK e PQ sono paralleli e quindi PQKH è un trapezio isoscele.
[Manca la considerazione dei casi in cui l'angolo ottuso ha vertice P oppure Q.]

Silvia Davoli, Classe 3F PNI
LS "Righi", Bologna

1)

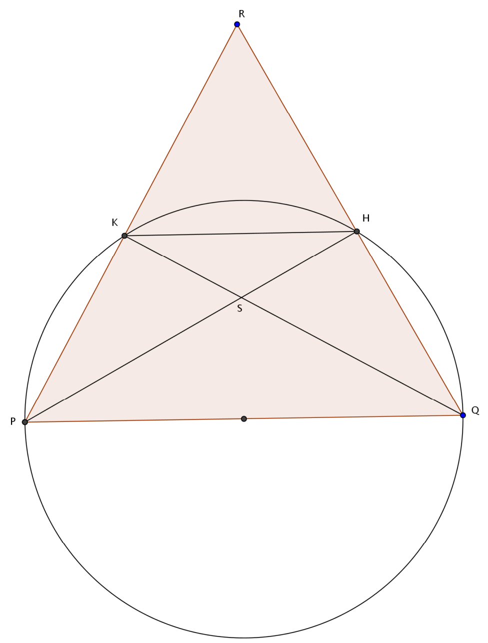


- PQK è un triangolo rettangolo in $\angle K$, quindi inscrittibile nella semicirconferenza di diametro PQ.
- PHQ è un triangolo rettangolo in $\angle H$, quindi inscrittibile nella semicirconferenza di diametro PQ.

=>
Il quadrilatero $PQHK$ è inscrittibile nella semicirconferenza di diametro PQ, perciò anche nella circonferenza di diametro PQ.
=>
$\angle PKH + \angle PQH = \pi$
$\angle KPQ + \angle \mathrm{QHK} = \pi$
[se l'angolo è espresso in radianti, in quanto si tratta di una proprietà comune a tutti i quadrilateri inscritti in una circonferenza]
Si può affermare che valga il teorema delle due corde per le diagonali del quadrilatero:
Chiamo con S il punto di intersezione tra le diagonali PH e KQ
$PH \cap KQ = \{S\}$
e affermo:
$PS : SK = SQ : SH$ [gli angoli $\angle KSP$ e $\angle HSQ$ sono congruenti perché opposti al vertice] =>
i triangoli PSK e QSH sono simili. E' evidente, dunque, la congruenza tra gli angoli $\angle KPH$ e $\angle KQH$.

Questa proprietà poteva essere anche notata dal fatto che gli angoli $\angle KPH$ e $\angle KQH$ insistono sullo stesso arco KH.
$\angle KPH$ e $\angle KQH$ - perché opposti a lati in proporzione di triangoli simili
- perché sottendono lo stesso arco KH

2)
Sì, i triangoli isosceli *PQR* [sulla base PQ], infatti:



- $\angle KPQ = \angle PQH$ perché angoli alla base del triangolo isoscele *PQR*
- $\angle PKQ = \angle PHQ = \pi/2$ per costruzione (perché *KQ* e *PH* sono altezze)
- *PQ* è un lato in comune

=>
[i triangoli *PQK* e *PQH* sono congruenti] per il secondo criterio generalizzato di congruenza dei triangoli
=> $PK = QH$

1. Gli archi *PK* e *HQ* sono congruenti poiché sottendono segmenti congruenti ($PK = QH$ per precedente dimostrazione)
   $\angle PHK = \angle HPQ$ poiché angoli che insistono su archi congruenti (*PK* e *HQ*)
2. *KH* parallelo a *PQ* perché rette che, tagliate da una trasversale (*PH*), formano angoli alterni interni congruenti ([$\angle PHK = \angle HPQ$])

per la 1. e la 2. il quadrilatero *PQHK* è un trapezio isoscele.

3) [[…]]