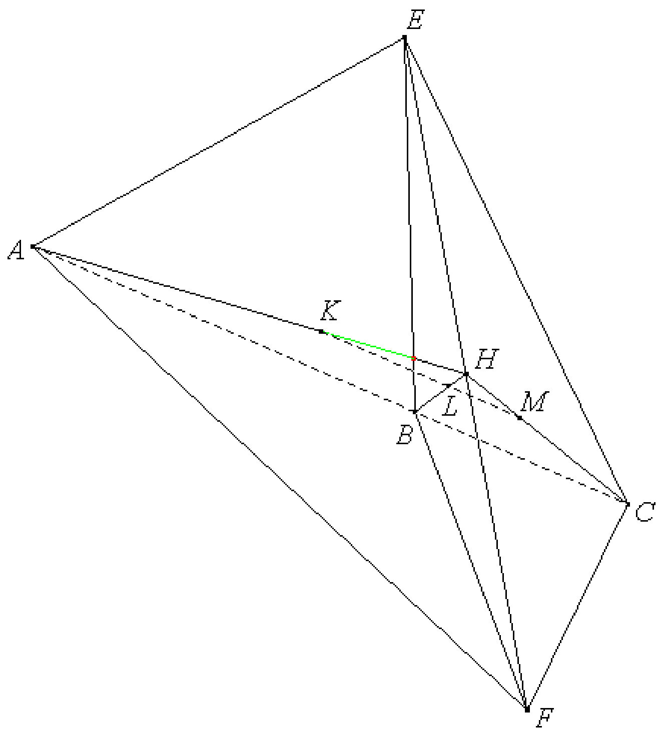
FLATLANDIA – Problema di Ottobre 2008

Premessa
Prima di qualsiasi osservazione riguardante le soluzioni pervenute, i componenti del gruppo di Flatlandia vogliono riaffermare la loro disponibilità al proseguimento del lavoro dedicato a questa attività di sostegno e stimolo dell'insegnamento della geometria. Colgono l'occasione per ringraziare **calorosamente** tutti coloro che hanno voluto manifestare il loro sostegno al proseguimento dell'attività di "Flatlandia".

9-24 Ottobre 2008
Il testo del problema:
Sono dati, nel piano, tre punti distinti e allineati A, B, C. Siano, inoltre, E, F altri due punti distinti dello stesso piano e si considerino i triangoli AEF, BEF, CEF.
a) Indicati con K, L, M i baricentri dei tre triangoli, che proprietà hanno questi tre punti?
b) Se i triangoli AEF, BEF, CEF sono inoltre equivalenti, cosa si può dire delle rette AC ed EF?
Dimostrare le proprietà individuate in *a*) e *b*).



Commento

Sono giunte quattro risposte, due provenienti da Scuole Medie, una da una seconda Liceo Scientifico e una da una terza, sempre di Liceo.
Il problema richiedeva prima la proprietà comune di tre punti particolari (cioè, la verifica del loro allineamento) e poi, in una situazione particolare, la mutua posizione di due rette.
Alla prima domanda rispondono in modo sostanzialmente corretto (con alcune imprecisioni) gli studenti delle Scuole Superiori e di una Scuola Media, mentre tutti arrivano a risolvere il secondo quesito, con una puntualizzazione che ora segnaleremo. In particolare ci preme sottolineare quanto segue: *a*) si dovrebbero esaminare separatamente i due casi in cui i punti E, F si trovano dalla stessa parte rispetto alla retta a cui appartengono i punti A, B, C o da parti opposte [o, perlomeno, dire che

la trattazione è analoga]; *b*) Cabri permette di congetturare una certa proprietà, ma non di dimostrarla; *c*) se due triangoli hanno la stessa area, questo non implica che le basi e le corrispondenti altezze abbiano la stessa lunghezza; *d*) se un punto K di un segmento AH divide il segmento in due parti tali che $HK : KA = 1 : 2$, allora $AH = 3HK$ (intesa come relazione tra le relative lunghezze) e, quindi, l'omotetia di centro H che porta il punto A nel punto K ha rapporto 1/3 e non 1/2.
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)
SM "G.B. Tiepolo", Milano (MI)
LS "A. Manzoni", Suzzara (MN)
LS "Aristosseno", Taranto (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Alessandro Trancuccio, Classe 3S
Scuola Media di San Genesio e Uniti (PV)

a) [[…]]

b)
Adesso analizzo la situazione per quanto riguarda la superficie dei triangoli AEF, BEF e CEF nel caso in cui i punti E ed F sono stati presi su uno stesso semipiano di origine AC (figura 3).
I triangoli AEF, BEF e CEF saranno equivalenti, avendo la stessa base EF, quando avranno la stessa altezza, ovvero quando i punti A,B,C si troveranno alla stessa distanza dalla retta EF e questo succede quando le rette AC ed EF sono parallele.

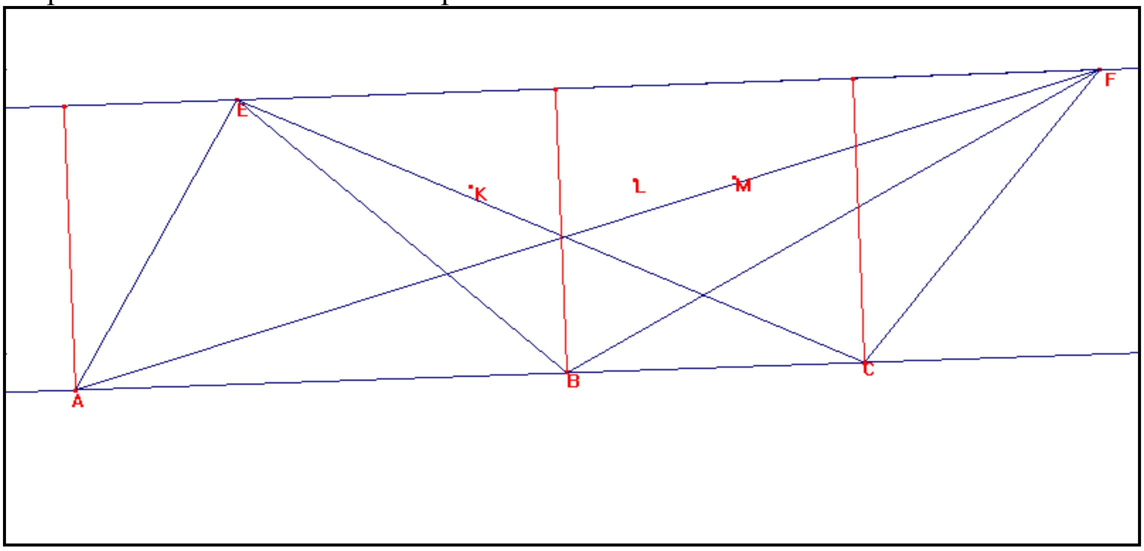
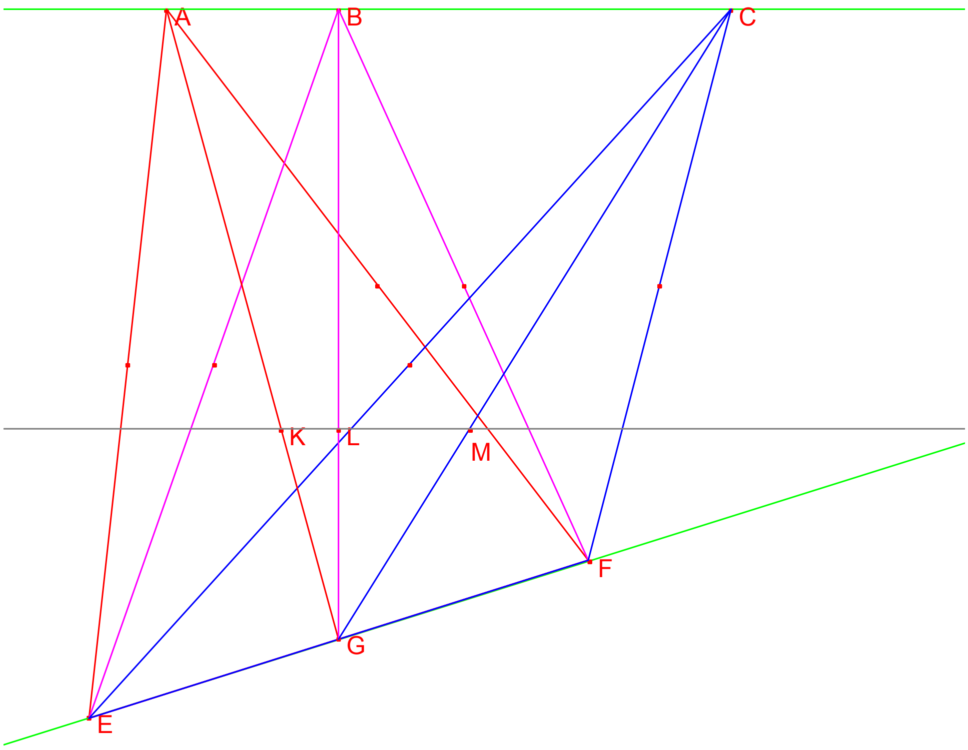


figura 3

[Non può succedere, nella situazione geometrica prospettata nel quesito b), che i punti *E*, *F* si trovino da parti opposte rispetto alla retta a cui appartengono i punti *A*, *B*, *C* (che, per ipotesi, sono distinti).]

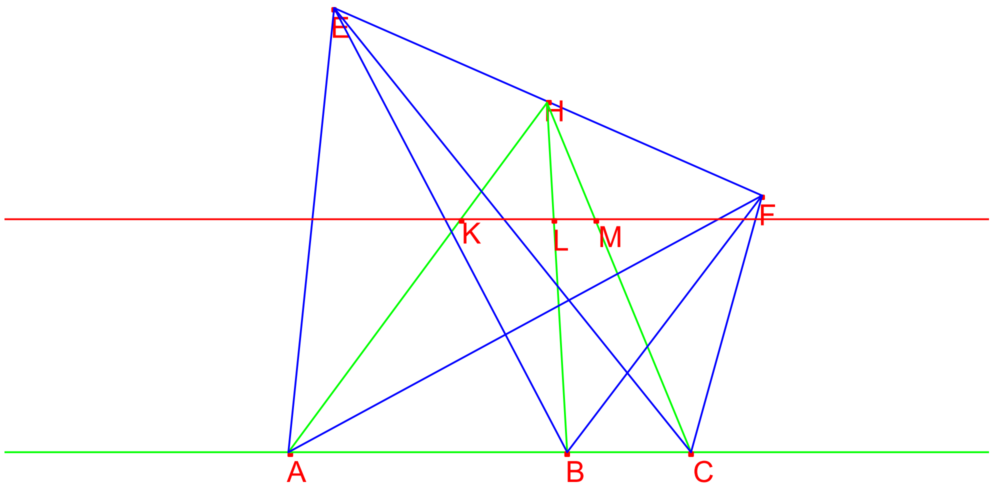
Leonardo De Castro, Gianluca Di Nicolò Classe 3F
Scuola Media "G.B. Tiepolo", Milano (MI)



a) I baricentri K, L, M sono su una retta parallela alla retta AC perchè ogni baricentro divide le mediane in due parti una il doppio dell'altra, quindi nel triangolo AGC i segmenti AG, BG, CG sono divisi da quella retta in due parti una il doppio dell'altra, infatti consideriamo AG, BG, CG mediane relative al lato EF e il triangolo AGC. Se tracciamo la parallela ad AC passante per K si formano triangoli simili [quale teorema giustifica questa conclusione?] e i segmenti AG, BG, CG saranno divisi in due parti una il doppio dell'altra. La parallela dovrà quindi passare per K, L, M pertanto K, L, M sono allineati su di essa.

b) L'area del triangolo si trova facendo [si calcola mediante...] base per altezza diviso 2 e per avere l'area uguale i triangoli AEF, BEF, CEF [che hanno il segmento EF, scelto come base, in comune] devono, quindi, avere sia la base che l'altezza uguali, [[la base è in comune, mentre]] ma l'altezza sarebbe [è] uguale solamente se le due rette EF e AC fossero [sono] parallele.
Quindi se i triangoli AEF, BEF, CEF sono equivalenti, le due rette (AC e EF) sono parallele.

Nicolò Ancellotti Classe 2AS
Liceo Scientifico "A. Manzoni", Suzzara (MN)



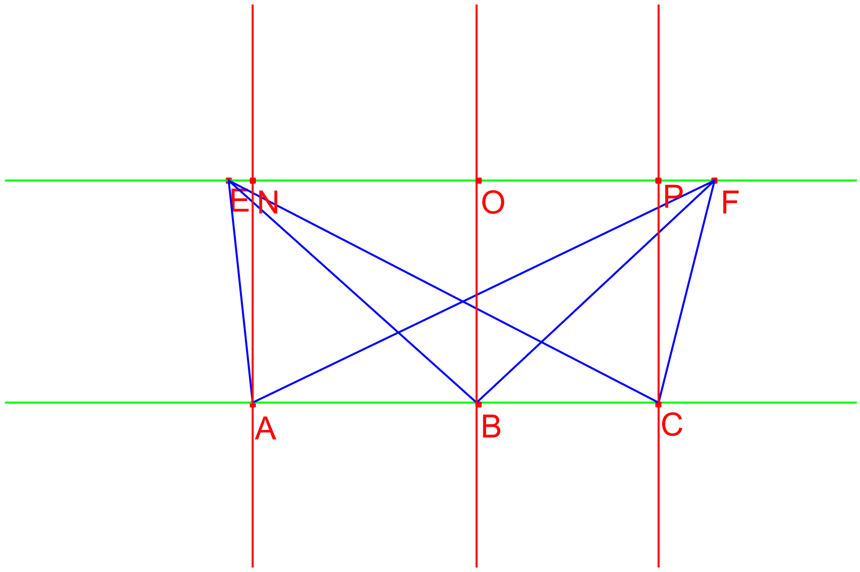
a) Sia H il punto medio del lato EF ed r la retta passante per A, B, C.
Poiché ciascuna delle mediane di un triangolo viene divisa dal baricentro dello stesso in due parti in rapporto fra loro 2:1 , si ha che:

1) AK=2KH
2) BL=2LH
3) CM=2MH

Si consideri ora il triangolo AHB e la retta t passante per il segmento KL.
Questa retta divide i due lati AH e BH del triangolo in segmenti proporzionali, per cui essa è parallela al lato AB (corollario del teorema di Talete) e dunque alla retta r.
In modo analogo, si consideri il triangolo AHC e la retta q passante per il segmento KM. Questa retta divide i due lati AH e CH del triangolo in segmenti proporzionali per cui essa è parallela al lato AC e dunque alla retta r.
Tuttavia, ora si ha che:

1) t//r e q//r
2) K e L appartengono a t e K e M appartengono a q

Poiché per un punto esterno ad una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data (postulato di Euclide), le due rette q e t, essendo per l'appunto entrambe passanti per K e parallele a r, coincidono.
Pertanto K, L e M sono allineati (se due rette coincidono tutti i punti dell'una sono anche punti dell'altra e viceversa) su una stessa retta parallela a r .
Si noti che questo ragionamento è valido sia se E ed F stanno, rispetto alla retta r, nello stesso semipiano, sia se stanno su semipiani diversi.
In particolare nel caso in cui sia E che F appartengano ad r non ha senso porsi la domanda e nel caso in cui H appartenga ad r anche i punti K, L, M vi apparterranno (i segmenti AH, BH e CH saranno contenuti nella retta poiché i loro estremi appartengono alla retta per cui tutti i punti di questi segmenti apparterranno alla retta).



B) Siano s la retta passante per EF ed r la retta passante per AC, già nominata per la dimostrazione del punto A).

I tre triangoli hanno in comune la stessa base EF, pertanto, se sono equivalenti, le altezze per tutti e tre i triangoli rispetto a questa base saranno congruenti.

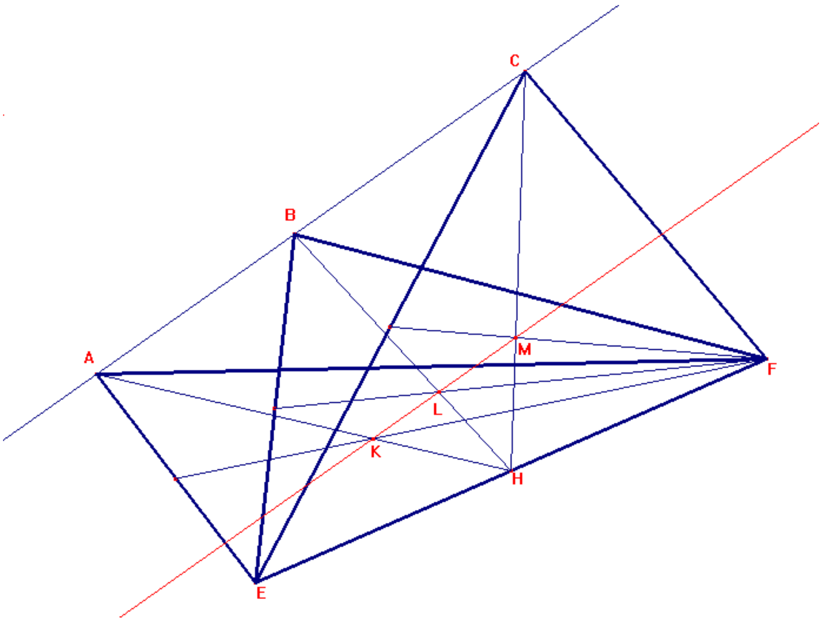
Siano AN, BO e CP le altezze dei rispettivi triangoli AEF, BEF e CEF. Le rette passanti per [sostegno di] queste altezze sono parallele perché formano con la retta s angoli corrispondenti congruenti.

Considero il quadrilatero ANPC, avente come lati il segmento AC della retta r, le altezze AN e CP e il segmento NP appartenente alla retta s (sia N che P appartengono a EF perché AN e CP sono altezze dei triangoli AEF e CEF) : esso è un parallelogrammo [è addirittura un rettangolo] perché ha una coppia di lati paralleli e congruenti.

Pertanto la retta r e la retta s sono parallele, quindi AC ed EF sono parallele.

Classe 3M Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto (TA)

a) Considerati i tre punti allineati A, B e C e i due punti E ed F esterni alla retta dei tre punti, tracciamo i triangoli AEF, BEF e CEF. Individuiamo i baricentri di questi tre triangoli quali punti di intersezione delle loro mediane .



Ricordiamo che il baricentro di un triangolo è il punto che divide ciascuna mediana in due parti, l'una doppia dell'altra. Possiamo perciò dire che valgono nei tre triangoli le seguenti proporzioni : HK:KA=1:2 , HL:LB=1:2, HM:MC=1:2
Da questo si deduce che nel triangolo AHB risulta KL parallela ad AB e nel triangolo BHC è LM parallela a BC ; e che nel triangolo AHC, KM è parallela ad AC [per quale teorema?]. I tre punti K , L ed M sono perciò allineati . Si può anche osservare che questi punti sono omotetici dei punti A, B e C nella omotetia di centro H e rapporto ½ [1/3].

b) Se i triangoli AEF, BEF, CEF sono equivalenti essi, avendo la stessa base EF, devono avere altezze congruenti; questo significa che la retta [sostegno] della base EF e quella dei [passante per i] tre vertici A, B e C devono essere parallele fra loro.