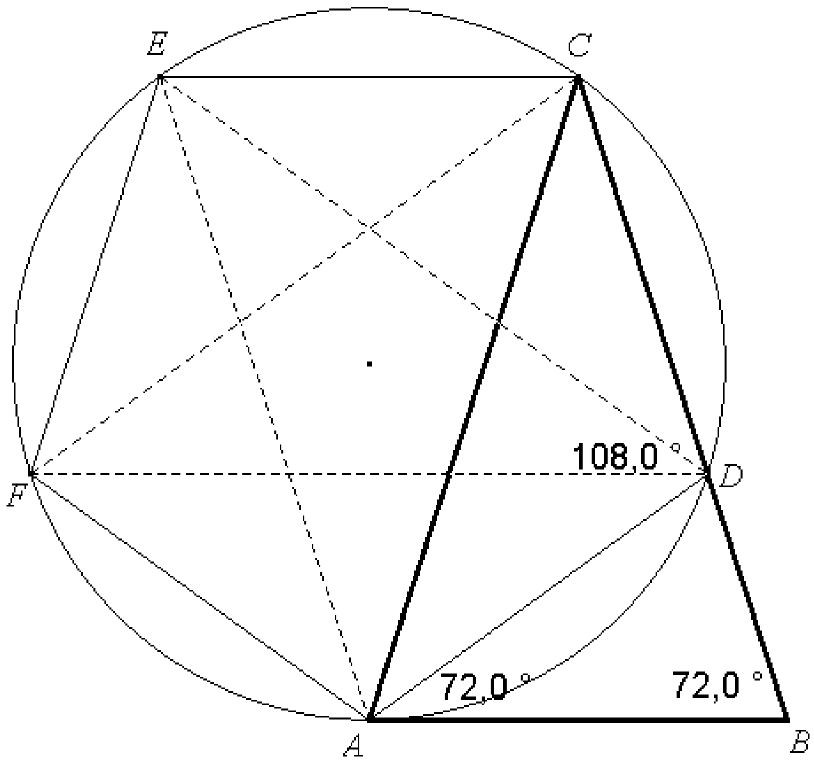
**Flatlandia - Novembre Dicembre 2008**

Il testo del problema:

1) Utilizzando il goniometro o uno strumento informatico, disegnare un triangolo isoscele *ABC* i cui angoli alla base, di vertici *A* e *B*, misurino 72°.
2) Costruire la bisettrice dell'angolo di vertice *A* e indicare con *D* il punto in cui questa incontra il lato *CB*. Verificare che i segmenti *AD* e *DC* e l'angolo $\angle ADC$ sono rispettivamente due lati e un angolo di un poligono regolare. Di quale poligono si tratta?
3) Costruire i rimanenti vertici del poligono e tracciarne le diagonali. Quali considerazioni si possono fare su tali diagonali?

Descrivere le costruzioni richieste e motivare le risposte.

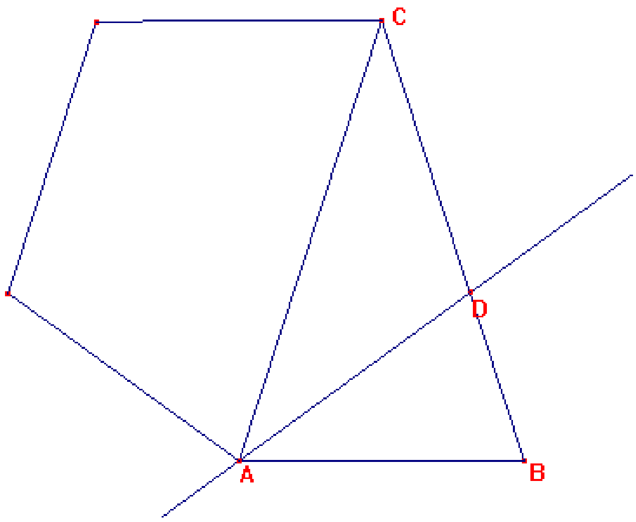



**Commento**

Sono giunte cinque risposte, due provenienti da due Scuole Medie, una da una seconda Liceo Scientifico e due da due classi terze, una di Liceo Scientifico e un'altra di un ITCG Programmatori.
Il problema richiedeva prima la costruzione di un particolare triangolo isoscele (cioè con gli angoli alla base di ampiezza pari a 72°), poi la costruzione di un particolare segmento (la bisettrice di un angolo), con la conseguente individuazione di un particolare poligono regolare (un pentagono). Infine il completamento del poligono regolare individuato e la costruzione delle sue diagonali, di cui si chiedeva di analizzare le relative proprietà.
Alla prima domanda rispondono correttamente solo gli studenti delle due classi terze [uno studente di terza media non fornisce indicazioni sulla costruzione, mentre gli studenti dell'altra terza media e la studentessa di seconda liceo iniziano direttamente dal secondo quesito]. Tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto alla seconda e alla terza domanda [salvo alcune imprecisioni che segnaleremo caso per caso]. In ogni caso ci preme sottolineare quanto segue: *a*) le diagonali di un poligono vanno contate una sola volta e quindi le diagonali di un pentagono sono 5; *b*) i poligoni stellati hanno sempre un numero pari di lati [ogni "punta" della "stella" è costituita da 2 lati] e quindi non esiste il pentagono stellato [il poligono stellato a cui si fa riferimento è, in effetti, un decagono].

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
SM “C.A. Dalla Chiesa”, S.Genesio ed Uniti (PV)
SM “G.B. Tiepolo”, Milano (MI)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)
*NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

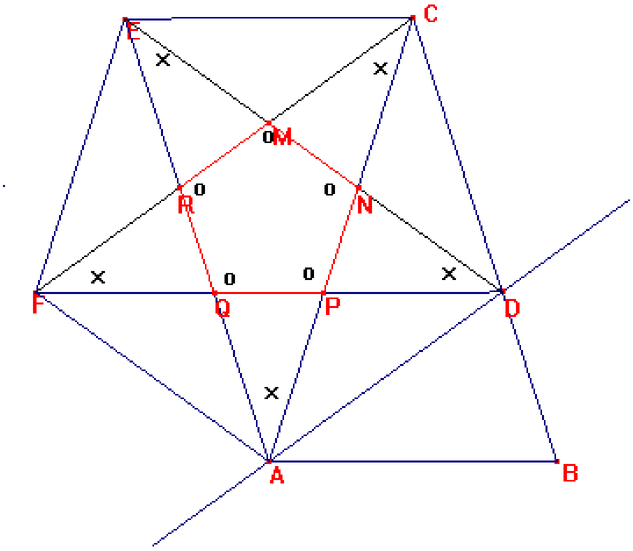
**Soluzioni**
***Alessandro Trancuccio, Classe 3S***
***Scuola Media di San Genesio e Uniti (PV)***




**1)** [[…]]

**2)**
Ho costruito il triangolo isoscele fissando i due angoli di 72°, quindi ho tracciato la bisettrice dell’angolo CAB che incontra in D il lato CB
Gli angoli DAB e CAD misurano 72/2 = 36° per costruzione
Essendo l’angolo DBA di 72° per ipotesi, l’angolo ADB misura 180 – (72+36) = 72°
Di conseguenza il triangolo ABD è isoscele.
Poiché l’angolo ACD misura 180 – ( 72+72) = 36° il triangolo ACD è isoscele perché gli angoli ACD = CAB [CAD] = 36°
Da ciò deduco che: AD = CD e che l’angolo ADC = 180 – 36 x 2 = 108°
Quindi i lati AD e CD e l’angolo ADC possono essere rispettivamente due lati e un angolo di un pentagono regolare; ciò accade perché:
la somma degli angoli interni di un poligono è “(n – 2) x 180”, quindi la somma degli angoli interni di un pentagono è 3 x 180 = 540°
Poiché il poligono deve essere regolare si deve rendere vera la seguente equazione dove “x” indica un angolo del pentagono :
5x = 540
x = 540/5 = 108°

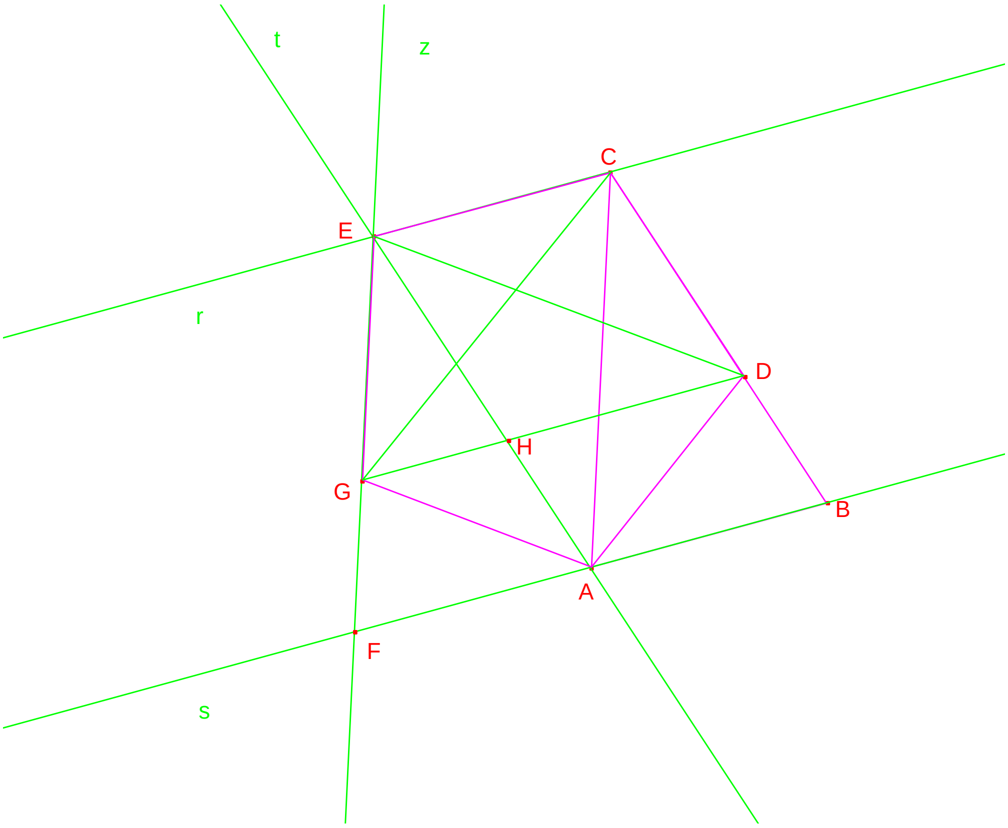
Dato che l'angolo ADC misura proprio 108°, il poligono regolare che si può costruire è un pentagono.
Sfruttando le proprietà dei poligoni regolari (che hanno angoli uguali fra loro e lati uguali fra loro) ho costruito il pentagono eseguendo per mezzo di Cabrì [Cabri] la rotazione del segmento AD, sempre per lo stesso angolo di 108° e nello stesso verso [meglio sarebbe dire che si ruota AD rispetto al punto A di 108° in verso antiorario e si ottiene AF, poi si ruota AF rispetto al punto F di 108°, sempre in verso antiorario, e si ottiene FE,...].




**3)**
Dopo aver costruito le diagonali ho fatto delle considerazioni:

1. Le diagonali FC = FD = CA = AE = ED sono uguali perché lati di triangoli isosceli uguali FEC = FAD = EFA = CDA = ECD aventi due lati e l'angolo compreso uguale;
2. Gli angoli CFD = EAC = EDF = FCA = AED sono uguali perché angoli al vertice di triangoli isosceli uguali come ho dimostrato al punto 1) e l'ampiezza di ciascuno è 108° - (36° + 36°) = 36°
3. Anche i triangoli FMD = ENA = CPF = DQE = ARC sono triangoli isosceli uguali per quanto ho dimostrato al punto 2) e di conseguenza gli angoli al vertice sono uguali: RMN = MNP = NPQ = PQR = QRM e la loro ampiezza è di 180° - (36°+36°) = 108°.
4. Per differenza di lati uguali i lati RQ, QP, PN, NM, MR sono uguali, quindi il poligono RMNPQ è un pentagono regolare.

*Andrea Blasi, Leonardo De Castro, Giulio Vannicelli Classe 3F*
*Scuola Media "G.B. Tiepolo", Milano (MI)*




**1)** [[…]]

**2)**
**Hp:**
∠ABC = ∠BAC = 72°
∠DAC = ∠DAB
**Th:**
Sapendo che:
∠DAB = ∠BAC : 2 = 36°
∠ADB = 72° per differenza di angoli interni
∠ADC = 108° perché è supplementare a ∠ADB per ipotesi
Allora:
N° lati del poligono [regolare] = Se [360°] : (180° - α) [cosa rappresenta α in generale?]
= 360° : (180° - ∠ADC) =
= 360° : (180° - 108°) = 5
Quindi il poligono regolare è un pentagono.

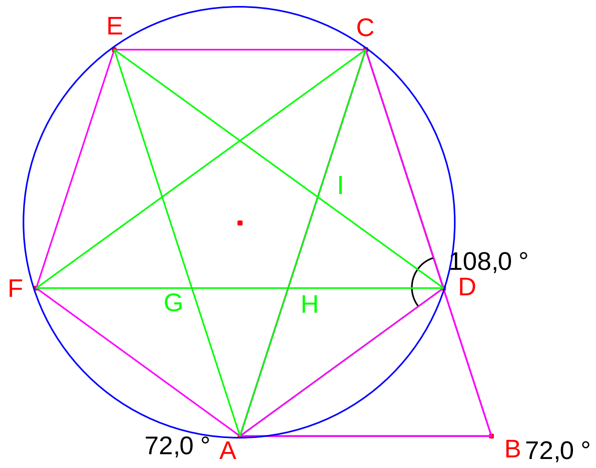
**3)**
**Costruzione del pentagono:**
Abbiamo tracciato una retta passante per A e per B, chiamandola "s", e costruito la sua parallela passante per il vertice C, chiamandola "r". Costruiamo anche la parallela di CB passante per A, chiamandola "t", e una parallela di CA passante per il punto d'intersezione tra "t" ed "r", che chiamiamo "z", mentre chiamiamo il punto d'intersezione E. Chiamiamo F il punto d'intersezione tra le rette "s" e "z".
Sapendo che:
∠ACB = 36° per differenza di angoli interni

$\angle ACE = \angle BAC$ perché alterni interni
$\angle EAC = \angle ACB = 36°$ perché alterni interni
$\angle AEC = 72°$ per differenza di angoli interni
$\angle FAE = 72°$ perché alterno interno di $\angle AEC$ [$\angle FAE$ e $\angle AEC$ sono angoli alterni interni]
$\angle FEA = \angle EAC$ perché alterni interni
$\angle AFE = 72°$ per differenza di angoli interni
Quindi i triangoli FEA, EAC e ABC sono congruenti perché sapendo che:
$\angle CAB = \angle ECA = 72°$
$\angle EAC = \angle ACB = 36°$
Allora i triangoli ABC e EAC sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, poiché il lato AC è in comune.
Sapendo che:
$\angle FEA = \angle EAC = 36°$
$\angle FAE = \angle AEC = 72°$
Allora i triangoli FEA ed EAC sono congruenti per il secondo criterio di similitudine [congruenza], poiché il lato EA è in comune.
Tracciando la bisettrice di $\angle EAF$ si trova un segmento congruente alla bisettrice di $\angle BAC$, poiché il triangolo FEA è congruente al triangolo ABC per la proprietà transitiva. Il punto d'intersezione di questa bisettrice e il segmento EF lo chiamiamo G.
$\angle FAG = 72° : 2 = 36°$
$\angle FGA = 72°$ per differenza di angoli interni
Il pentagono ADCEG è regolare perché ha tutti gli angoli di 108°, infatti:
$\angle D = 108°$ come trovato in precedenza
$\angle C = \angle ACD + \angle ACE = 36° + 72° = 108°$
$\angle E = \angle FEA + \angle AEC = 36° + 72° = 108°$
$\angle G = 108°$ perché supplementare di $\angle FGA$
$\angle A = \angle CAD + \angle CAE + \angle GAE =$
$= 36° + 36° + (72° : 2) =$
$= 36° + 36° + 36° = 108°$ [e per quanto riguarda i lati?]

**Considerazioni sulle diagonali:**

ogni diagonale del pentagono è parallela ad un lato perché, prendendo in considerazione la diagonale EA, essa è parallela al lato CD. Questo lo si può dimostrare prendendo in considerazione $\angle AEC$ e $\angle BCE$, che sono supplementari. Questo si verifica solo nel caso in cui AE e CD siano paralleli. Questa regola si può applicare quindi anche a tutte le altre diagonali.
Una seconda proprietà delle diagonali è il fatto che esse creino moltissimi triangoli isosceli simili fra loro aventi gli angoli alla base di 72° e l'angolo al vertice di 36°.
Le diagonali formano anche un nuovo pentagono, anch'esso regolare e se tracciassimo nuove diagonali in questo pentagono si formerebbero nuovi pentagoni regolari e triangoli isosceli, sempre delle medesime proporzioni. Questo si potrebbe ripetere un infinito numero di volte. Inoltre, considerando i triangoli AEC e EGH valgono le seguenti proporzioni:
$AE : EH = EC : GH$ [perché?]
$AE : EH = EH : AH$ [perché?]

***Martina Casentino*, *Classe 2B***
***LS "Pitagora", Rende (CS)***



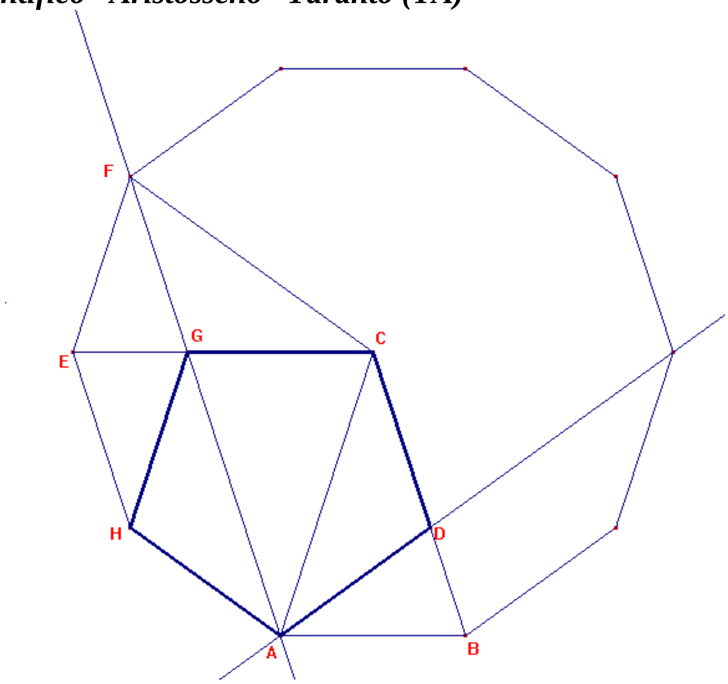

**1)** [[…]]

**2)**
Considero il triangolo ADC:
ACB = 36° per differenza di angoli
CAD = 36° perché AD per ipotesi è bisettrice dell'angolo CAB
Avendo i due angoli alla base congruenti, ADC è isoscele; di conseguenza:
AD = CD (per cui sono ipoteticamente due lati di un poligono regolare)
CDA (angolo) = 108° per differenza di angoli interni di un triangolo.
Dato che: CD = AD e CDA = 108°, allora il poligono regolare sarà un pentagono [occorre precisare perché si tratta di un pentagono].

**3)**
Costruendo i rimanenti vertici del poligono e tracciando le sue diagonali, si nota che:
- le diagonali sono 10 [5], e sono tutte congruenti.
Considero i triangoli ACD e ECD, essi hanno:
CD in comune
EC = AD perché lati di un poligono regolare
ECD = CDA (angoli) perché angoli di un poligono regolare.
Di conseguenza:
ED = CA
Si applica la stessa dimostrazione alle rimanenti diagonali.
- le diagonali dividono gli angoli interni in tre parti uguali:
Cnsidero [Considero] i triangoli FAG e HAD, essi hanno:
GF = HD per differenza di segmenti congruenti [quali?]
GA = HA per differenza di segmenti congruenti [quali?]
FA = AD perché lati di un poligono regolare
I triangoli sono congruenti per il terzo criterio, di conseguenza:
GFA = HAD = 36°
GAF = HDA = 36°
FGA = AHD = 108°
e sono isoceli [isosceli] in quanto per la proprietà transitiva [dell'uguaglianza]:

GFA = GAF
HDA = HAD
Si applica la stessa dimostrazione per i rimanenti triangoli [quali?].
Considero i triangoli GHA e IHD:
GA = HD per precedente dim.
AH = ID per precedente dim.
GAH = HDA = 36° per differenza di angoli congruenti (108 – 36 – 36 = 36°)
Sono congruenti per il primo criterio, di conseguenza:
GH = HI
HGA = HID
GHA = IHD
- le diagonali, intersecandosi, formano nuovamente un pentagono regolare:
GH = HI per precedente dimostrazione
GHI = 108° perché angolo opposto al vertice di AHD che è 108°

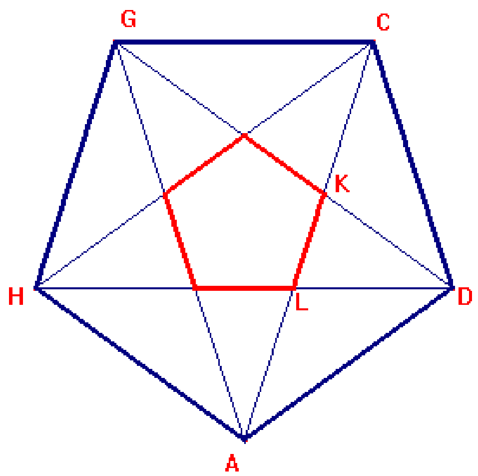
***Classe 3H Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto (TA)***




**1)**
Il triangolo isoscele che ha gli angoli alla base di 72° si ottiene costruendo un decagono regolare e congiungendo il suo centro con gli estremi di un suo lato. In tal modo infatti l'angolo al vertice del triangolo ABC misura 36° (la decima parte dell'angolo giro).

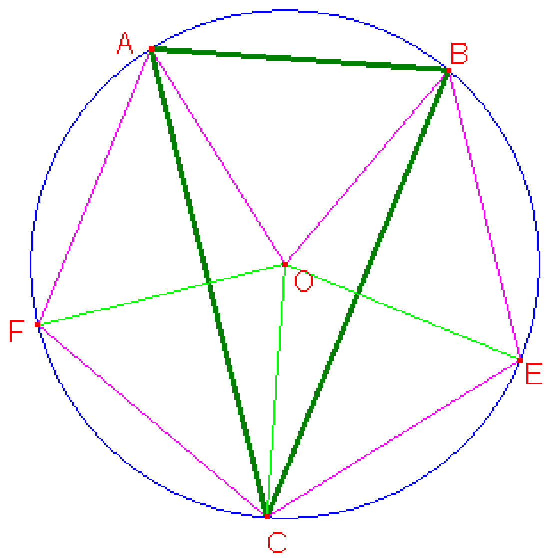
**2)**
Tracciata la bisettrice dell'angolo ADC, applichiamo il teorema della bisettrice al triangolo ABC e scriviamo la proporzione:
AB : AC = BD : DC e osserviamo che il triangolo ADC è anch'esso isoscele poiché ha gli angoli alla base congruenti (CAD = ACD) e perciò risulta AD = DC. Ma anche il triangolo ABD è isoscele poiché ha gli angolo [angoli] alla base congruenti, e quindi è pure AB = AD (= DC).
La proporzione si scrive quindi AB : AC = BD : AB. Scambiando i termini della proporzione e sostituendo ad AC il lato CB, ad esso congruente, si ha infine:
CB : AB = AB : BD.
Possiamo da ciò concludere che il segmento AB è la sezione aurea del lato CB = CA [non necessario nella risoluzione del problema].

Nel triangolo isoscele ADC gli angoli alla base misurano 36° e quindi l'angolo al vertice misura 108°. Questo vuol dire che i segmenti AD e DC sono due dei cinque lati di un pentagono regolare.
**3)**




Per costruire i rimanenti lati utilizziamo ancora il decagono regolare da cui siamo partiti e ripetiamo la costruzione nel triangolo EFC della bisettrice FG dell'angolo EFC . Sarà CG la sezione aurea del raggio CE e quindi il terzo lato del pentagono .L'ultimo dei vertici del pentagono è il punto H in quanto il lato AH del decagono è congruente a GH e a CG .
Le diagonali del pentagono sono congruenti ai lati del triangolo ABC e quindi sono congruenti fra loro, anche perché sono basi dei triangoli isosceli aventi per lati i lati del pentagono. Se tracciamo tutte le diagonali otteniamo il famoso pentagono [decagono] stellato, chiamato pentagramma dai Pitagorici. Si può osservare che AL è sezione aurea di AK [non necessario nella risoluzione del problema], ovvero i lati [le diagonali] del pentagono [[stellato]] si intersecano secondo la sezione aurea [occorrerebbe precisare meglio].

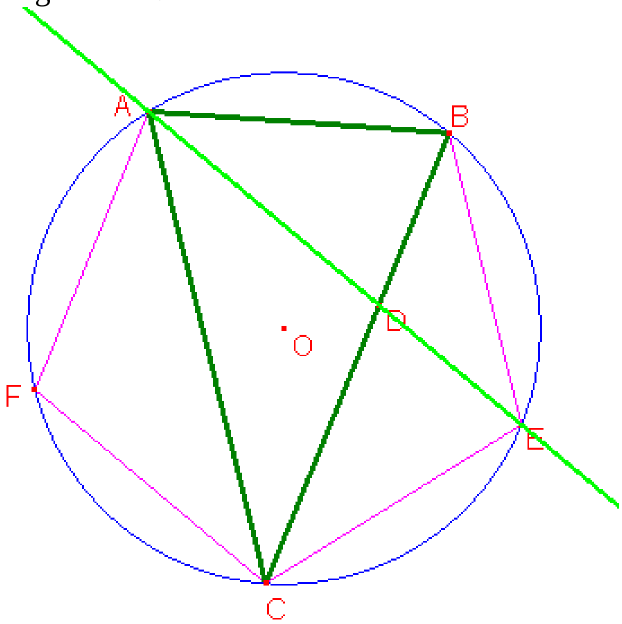
***Alloro**, **Badano**, **Barellino**, **Benza**, **Bianchi**, **Bonsignorio**, **Borio**, **Brunendo**, **Cordeglio**, **Navigo**, **Di Grazia**, **Gazzelli**, **Gugliotta**, **Lanzillotta**, **Pugi**, **Pupino**, **Risso**, **Sciacca**, **Sula**, **Vitassovich**, **Zagato**, **Zerbone - Classe III A Programmatori - ITGC "Ruffini" Imperia (IM)***
**1)**




Abbiamo svolto l'esercizio in laboratorio, con il software Cabri. Osservando che un angolo di 72° è la quinta parte di un angolo giro, abbiamo costruito un pentagono regolare inscritto in una circonferenza, in cui l'angolo AOB misura 72°. Poiché la somma degli angoli interni del triangolo

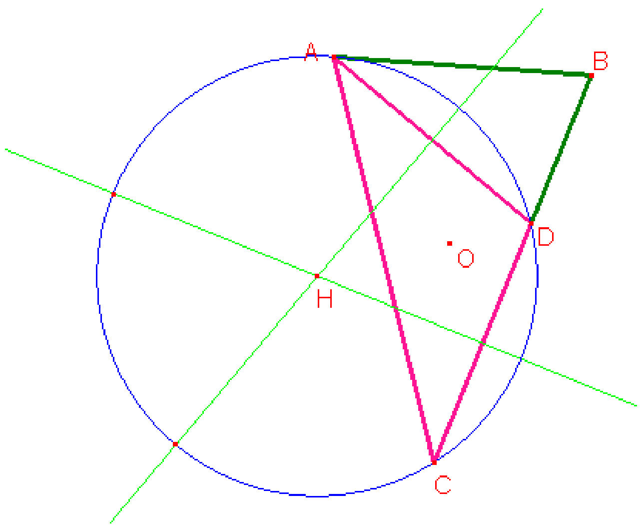
AOB è 180°, sappiamo che $O\hat{B}A = O\hat{A}B$ (il triangolo AOB è isoscele perché OA e OB sono raggi della circonferenza circoscritta al pentagono), dunque $O\hat{B}A = O\hat{A}B$=(180°-72°)/2=54°.
Anche il triangolo BOC è isoscele perché OC e OB raggi della stessa circonferenza. L'angolo BOC misura $72^o \cdot 2 = 144^o$ e quindi $O\hat{B}C = \frac{(180^0 - 144^0)}{2} = 18^0$ →l'angolo CBA misura 54°+18°=72°.
Infine il triangolo ABC è isoscele perché gli angoli alla base ABC e BAC sono congruenti.

**2)**
Tracciamo la bisettrice dell'angolo in A:

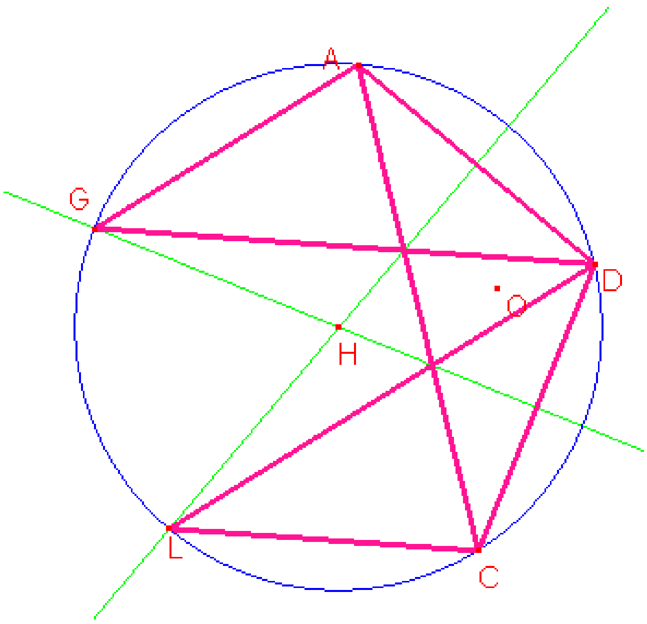



Nel triangolo ADC, l'angolo DAC misura 72°/2 = 36° per costruzione; l'angolo ACD (in quanto angolo del triangolo ABC) misura 36°→ il triangolo ADC è isoscele avendo due angoli congruenti. L'angolo CDA misura (180°- 36°x2)=108°. La somma degli angoli interni di un poligono è (n-2) angoli piatti; un poligono regolare ha gli n angoli interni congruenti, quindi dall'equazione $\frac{(n-2)180}{n} = 108$ (che fornisce l'ampiezza di un angolo interno) si ottiene: $180n - 360 = 108n \rightarrow 72n = 360 \rightarrow n = 5$. Il poligono regolare richiesto è un pentagono.

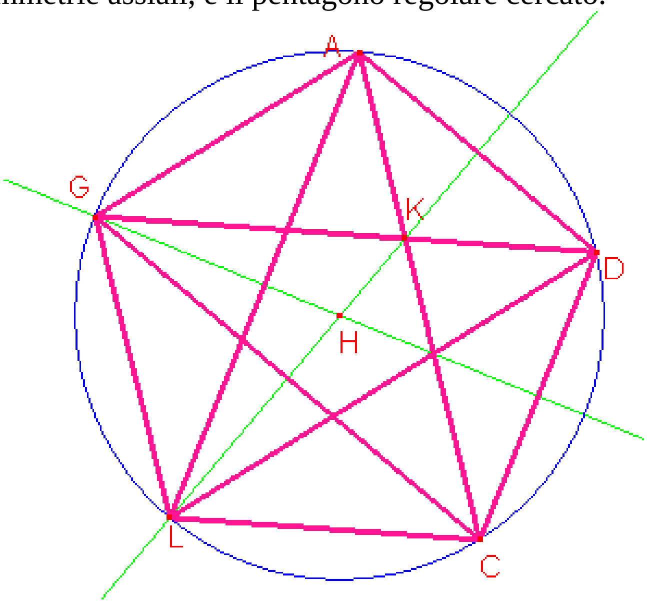
**3)**
Per completare la figura, costruiamo la circonferenza in cui risulterà inscritto il nostro pentagono, come segue: asse del lato AD; asse del lato DC; l'intersezione H è il centro della circonferenza (l'asse di una corda passa per il centro)




Con simmetrie assiali rispetto agli assi di AD e DC, tracciamo AGD e DCL.




La simmetria assiale conserva le misure di angoli e segmenti, quindi siamo certi che ADCLG, ottenuto con analoghe simmetrie assiali, è il pentagono regolare cercato.



Con questa costruzione abbiamo ottenuto anche le diagonali, che formano un pentagono [decagono] stellato. In particolare il rapporto tra GK e KD è il numero aureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; così pure per GD e GK.