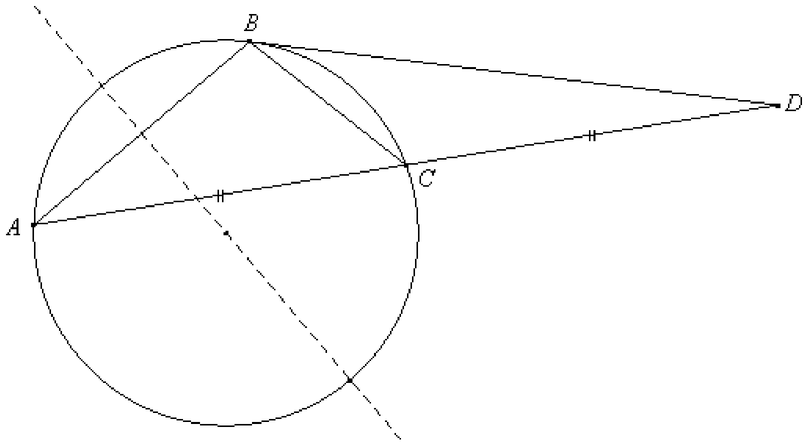
FLATlandia

Flatlandia 3-17 Dicembre 2007

Il testo del problema:

Data la corda AB di una circonferenza (diversa dal diametro), detto C un punto sull'arco maggiore AB, si prolunghi AC di un segmento CD congruente ad AC.
a) Che cosa si può dire dei triangoli ACB e CDB?
b) Determinare C in modo che il triangolo BCD abbia area massima.
c) Qualora sia verificata la proprietà di cui al punto b), stabilire la natura del triangolo ABD.

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto dieci risposte così suddivise: due provenienti da Scuole Medie, tre dal biennio delle Scuole Superiori, quattro dal triennio delle Scuole Superiori (sempre III anno) e una da un Liceo in cui manca la precisazione dell'anno. Pensiamo che tutto questo sia una conferma del fatto che l'interesse per la geometria euclidea non è limitato al solo biennio delle Scuole Superiori.
Il problema poneva tre domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di individuare l'equiestensione di due triangoli; nel secondo di determinare in quale situazione l'area (comune) di tali triangoli risultava massima e nel terzo di individuare che, nella situazione corrispondente al secondo punto, il triangolo "somma" dei due era rettangolo.
In tutte le risposte pervenute viene risolto correttamente il primo quesito, mentre solo alcuni forniscono una dimostrazione esauriente di quale posizione deve assumere il punto C affinché l'area sia massima (altri forniscono una giustificazione dettata semplicemente dall'evidenza "visiva"). Infine per l'ultimo quesito alcuni mostrano di non aver ancora chiara la distinzione tra teorema diretto e teorema inverso: nel caso specifico il teorema diretto è "Se un triangolo è rettangolo, allora la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa" [e questo è un teorema ben conosciuto], mentre il teorema inverso è "Se in un triangolo la mediana relativa a un lato è congruente alla metà di quel lato, allora il triangolo è rettangolo (e il lato in questione è l'ipotenusa)" e dovrebbe essere dimostrato.

Un’ultima preghiera: cercate di resistere alla tentazione di costruire figure gigantesche (questo non le rende più “leggibili”, ma solo più difficili da gestire). Per quanto riguarda la “leggibilità” è opportuno evitare di sovrapporre al piano euclideo il riferimento cartesiano.

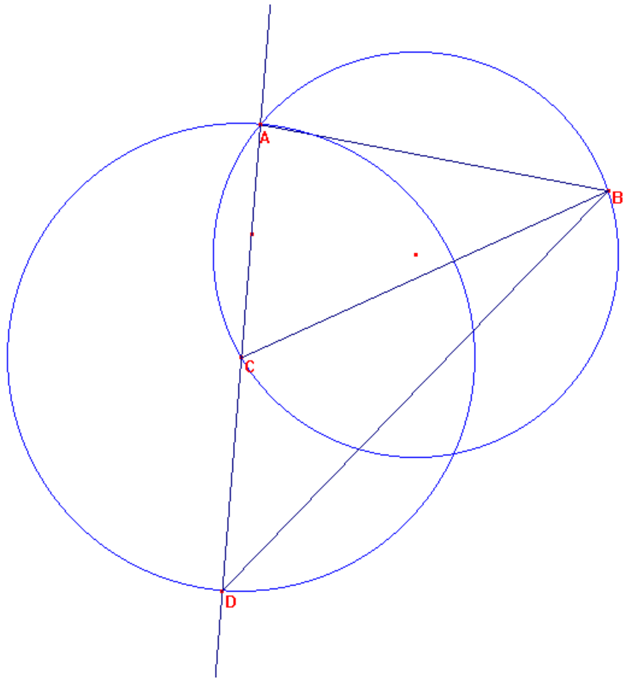
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

SM “C.A. Dalla Chiesa”, S.Genesio ed Uniti (PV)
SM “F. Besta”, Bologna (BO)
ITI, LST “F. Berenini”, Fidenza (PR)
ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)
ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)
LS “A. Volta”, Torino (TO)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
LS “G.C. Tannini”, Casarano (LE)
Liceo Socio-psico-pedagogico “Dante Alighieri”, Enna (EN)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

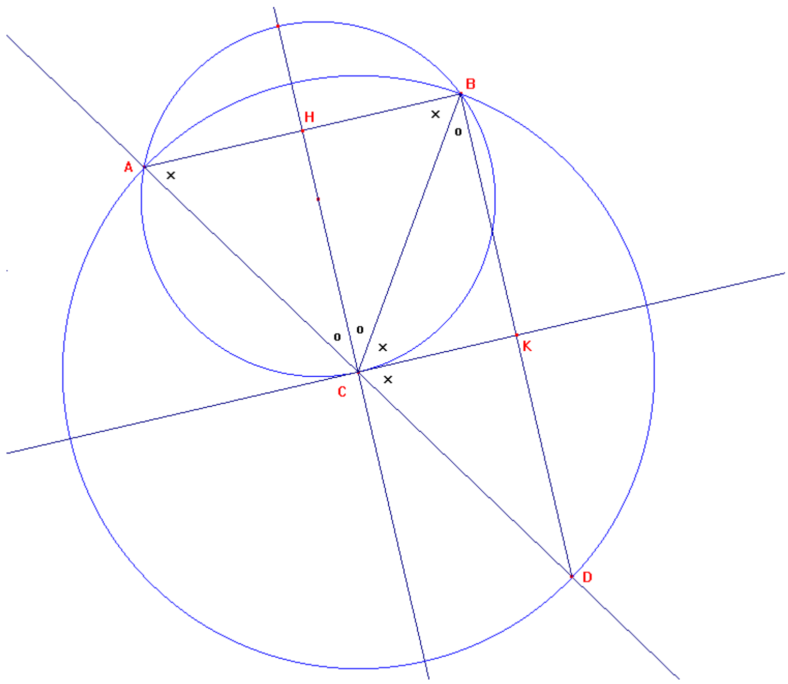
Alessandro Trancuccio, Classe 2S
Scuola Media di San Genesio e Uniti (PV)

1)



- I triangoli ABC e BCD hanno un lato in comune, il lato BC;
- Il triangolo ABC è scaleno acutangolo [dipende dalla posizione del punto C];
- Il triangolo BCD è scaleno ottusangolo;
- I triangoli ABC e BCD sono equiestesi perché hanno la stessa base [hanno le basi AC e CD congruenti] (AC = CD per costruzione) e la stessa altezza, cioè la distanza del punto B dalla retta AD

2) [[…]]

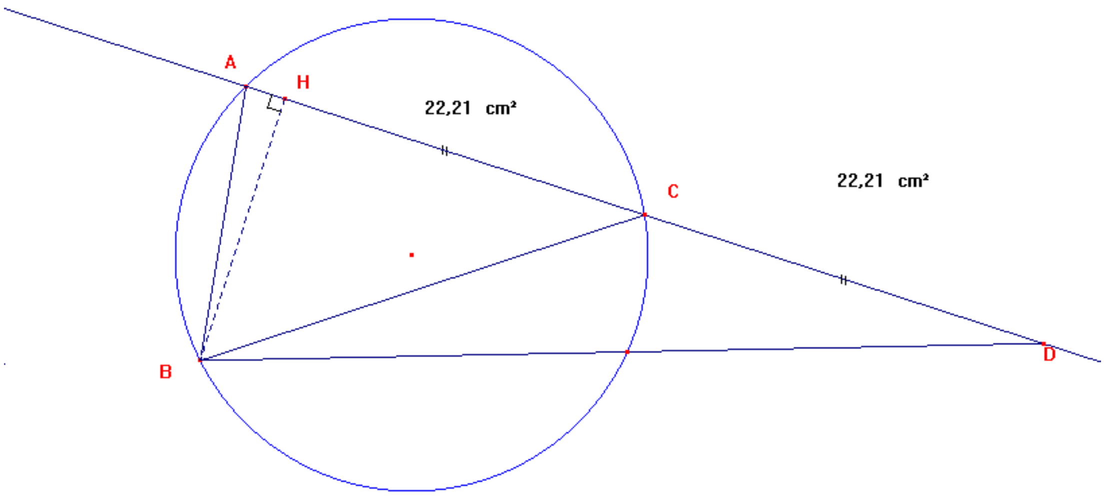


3)
Il triangolo ABD è rettangolo perché:

- l’angolo BCD essendo l’angolo esterno di vertice C del triangolo ABC ha una ampiezza pari alla somma degli angoli uguali BAC e ABC,
- Se traccio l’altezza CK del triangolo isoscele BCD questa è anche bisettrice per cui gli angoli BCK =KCD= HBC .
- Anche gli angoli HCB e CBK hanno uguale ampiezza perché sono angoli complementari di angoli uguali (HBC=BCK) nei triangoli HBC e CBK.
- perciò l’angolo ABD è di 90°, perché è formato dagli angoli HBC e CBK la somma delle cui ampiezze è di 90°.

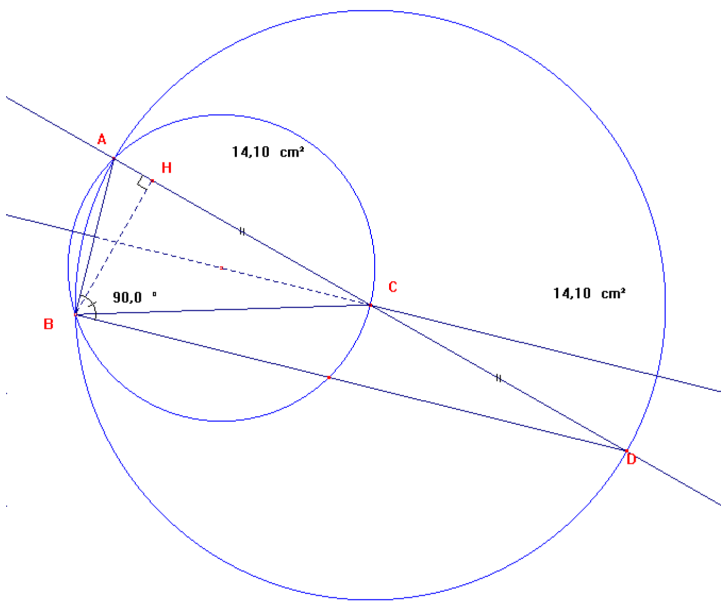
Huang Xin, Simone Innorta
Classe 3C, Scuola Media "F. Besta", Bologna

1)
I triangoli ABC e CBD hanno la stessa area perché hanno un lato uguale [congruente] (AC=CD) e l'altezza relativa a quel lato (HB) è uguale perché comune.



2) [[…]]

3)
1. Costruisco una circonferenza di centro C e di raggio AC. Essa passa per i punti B e D poiché AC=CB=CD=raggi
2. Il triangolo ABD è rettangolo in B perché:
3. L'angolo alla circonferenza ABD insiste sullo stesso arco dell'angolo al centro ACD che è piatto; poiché un angolo alla circonferenza è la metà del suo corrispondente angolo al centro, allora ABD = 1/2 ACD = 90°



Federico Boselli, Federico Merli
Classe 2B ITI, LST "F. Berenini" Fidenza (PR)

1)

[la figura ha dimensioni enormi ed è confusa e non aderente al testo]

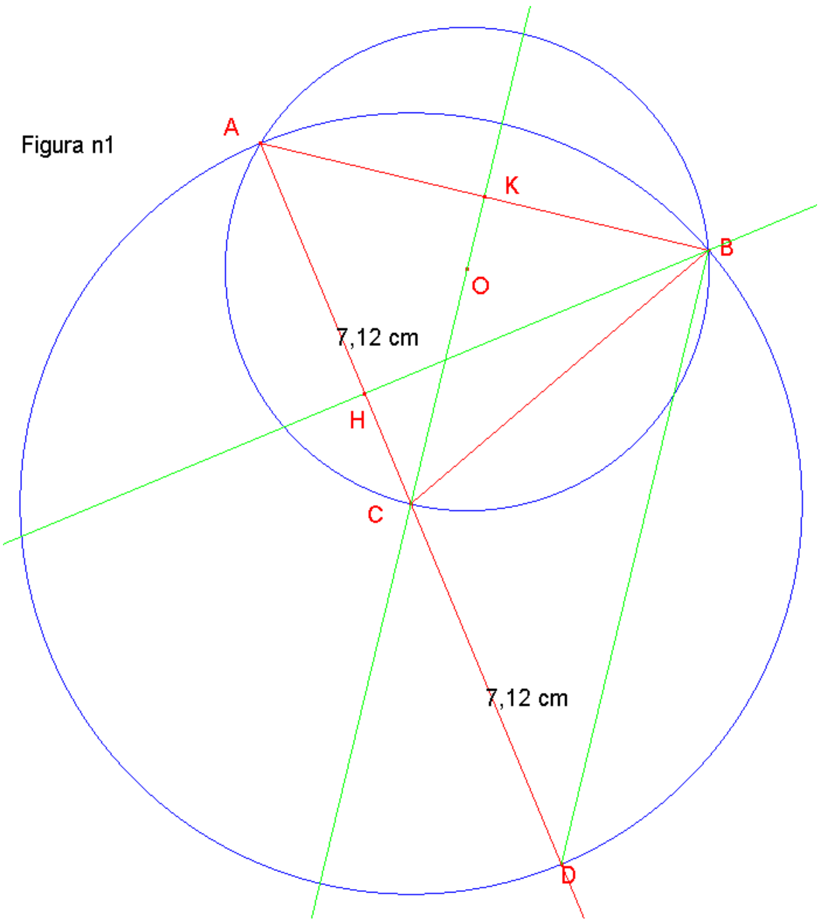
I triangoli ACB e CDB sono due triangoli equivalenti poiché hanno le basi AC e CD congruenti per costruzione e la stessa altezza (BK).
Essendo l'area del triangolo uguale a b*h/2 i due triangoli hanno sempre la stessa area e di conseguenza sono equivalenti.

2) [[…]]

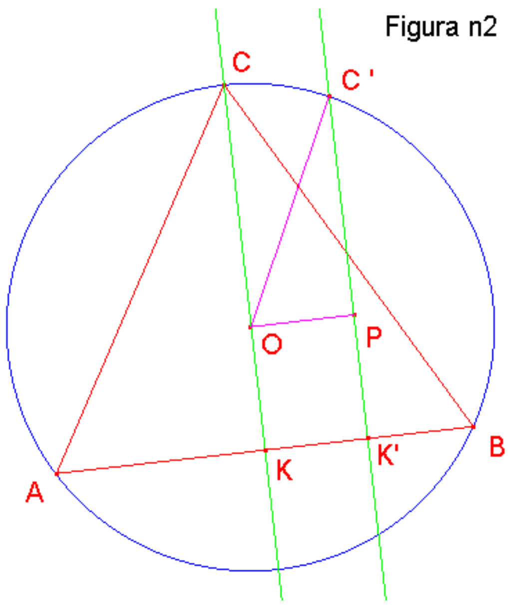
3) [[…]]

Alice Bovini, Marianna Lorenzano, Chiara Zalaffi
Classe 2 LST “F. Berenini” Fidenza (PR)

1)
(figura 1) I due triangoli ABC e CBD hanno:
- AC = CD (per costruzione)
- AC e CD appartengono alla stessa retta e sono rispettivamente le basi dei triangoli ACB e CBD, perciò il segmento BH perpendicolare alla retta che contiene le due basi è anche l’altezza dei due triangoli che quindi hanno la stessa altezza.
  Sapendo che i triangoli ABC e CBD hanno basi congruenti (AC e CD) e stessa altezza (BH) pertanto sono equivalenti.



2)
Il triangolo CBD ha pertanto area massima quando ha area massima il triangolo ABC.
Il triangolo ABC ha base AB fissata dal problema quindi la sua area è massima quando è massima l’altezza CK cioè quando CK passa per il centro della circonferenza perciò quando il triangolo è isoscele.

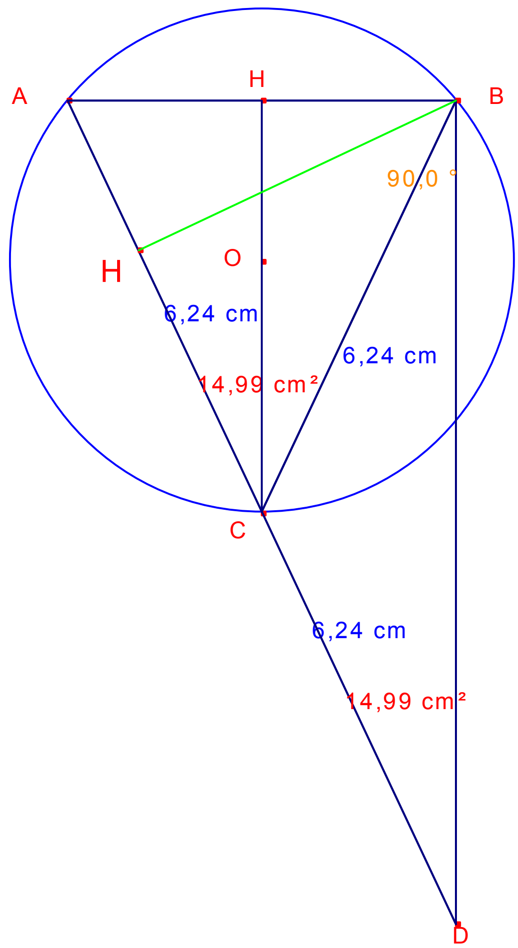


Si dimostra che l'altezza passante per il centro è quella massima perché (vedi figura 2) tracciando l'altezza CK parallela a C'K' passante per il centro O e la parallela di AB passante per O si ottiene il punto P sul segmento C'K', unendo C' con O si forma il triangolo rettangolo C'OP che ha l'ipotenusa C'O maggiore degli altri lati e congruente a CO perché entrambi raggi della circonferenza di centro O.

3) [[…]]

Francesco Muoio, Classe 1 A/G
ITCG "E. Majorana" Castrolibero (CS)

1)



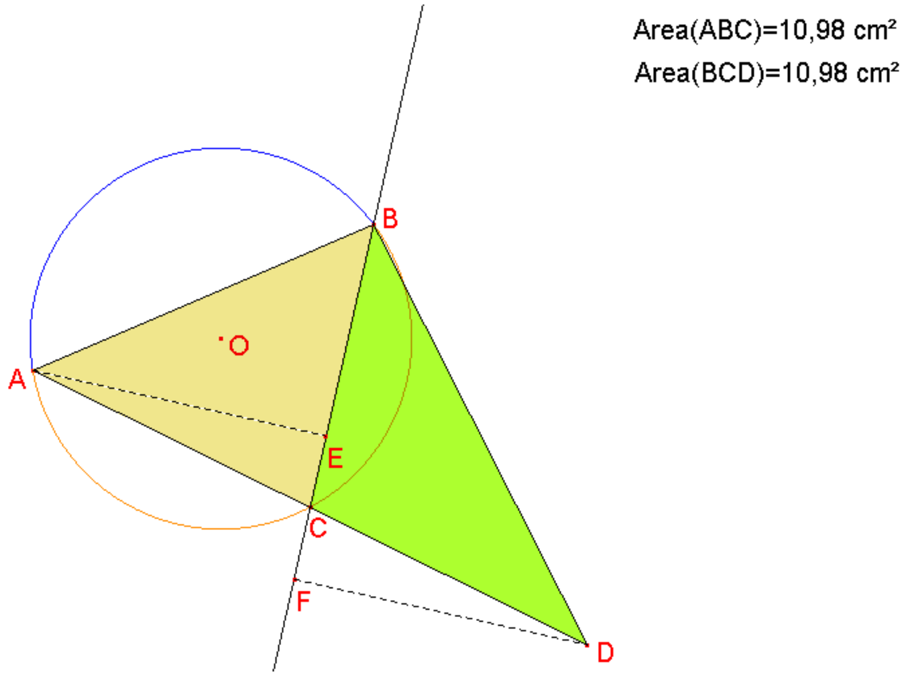
I triangoli ABC e BCD sono equivalenti perché hanno la stessa altezza BH e le rispettive basi AC e CD congruenti.

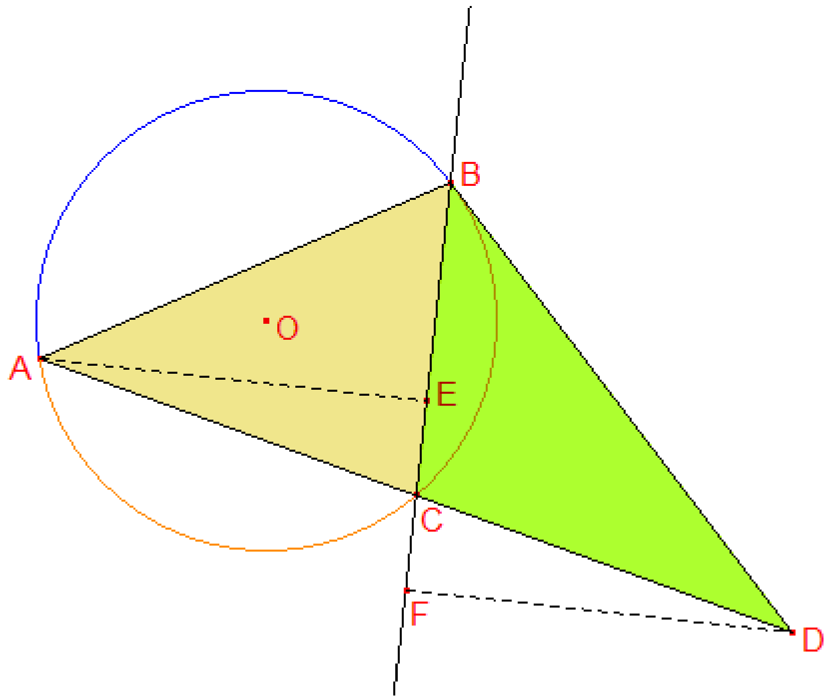
2) [[…]]

3) [[…]]

Angelo Rendina, Classe 3C
Liceo Scientifico "A. Volta" Torino

1)





I triangoli *ABC* e *BCD* sono equivalenti.
Per dimostrarlo bisogna dimostrare che hanno base e altezza congruenti.

Ipotesi $\{AC = CD\}$
Tesi $\{ABC$ □ $BCD\}$

Per prima cosa si costruiscono le altezze *AE* e *DF* relative a *BC* dei triangoli *ABC* e *BCD*. Si dimostra che i triangoli *ACE* e *CDF* sono congruenti.
$\{ACE, CDF\}$:

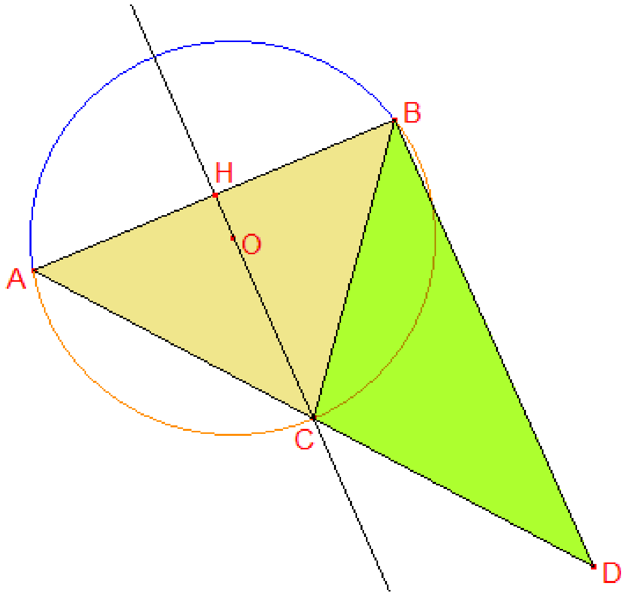
1. $AC = CD$ per costruzione

2. $\angle CAE = \angle FDC$ perché angoli alterni interni (AE // FD [poiché entrambi $\perp BC$], inter. AD)
3. $\angle ACE = \angle FCD$ perché angoli opposti al vertice

Dunque $ACE = CDF$ per II criterio di congruenza tra triangoli; in particolare $AE = DF$.
Ora, due triangoli sono equivalenti se hanno una coppia di lati e le altezze relative a quel lato congruenti. Nei triangoli ABC e BCD consideriamo il lato BC, comune ad entrambi i triangoli; per quanto riguarda le altezze relative a quel lato, abbiamo appena dimostrato che esse sono congruenti.
Dunque ABC BCD.

2) [[…]]

3)



***ABD* è un triangolo rettangolo in *B*.**

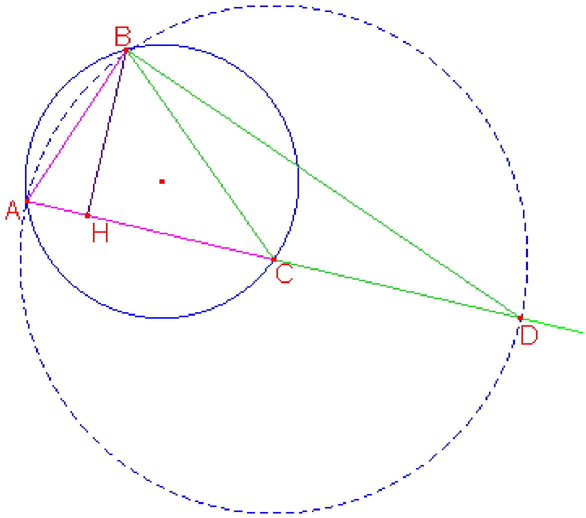
Ipotesi $\{AH = HB; AC = CD; CH \perp AB\}$
Tesi $\{ABD$ triangolo rettangolo in $B\}$

(I) Il triangolo AHC è rettangolo con ipotenusa AC perché $\angle AHC$=90° (per Ipotesi $CH \perp AB$).
(II) Dimostriamo facilmente che ABD e AHC sono simili e dunque entrambi rettangoli.
$\{AHC, ABD\}$
1. $\angle A$ in comune
2. $AB = 2AH$
3. $AD = 2AC$

Dunque ABD e AHC sono simili per II criterio di similitudine.
(III) Essendo AHC un triangolo rettangolo (in H) per punto (I), anche ABD è rettangolo (in B) per punto (II).

Ardoino, Bortolini, Confalone, Di Pietro, Dulbecco, Grimaldi, Multani, Oda, Pinto, Razzani, Sahlaoui, Scarella Tallone
Classe 3A Programmatori ITCG "Ruffini" Imperia

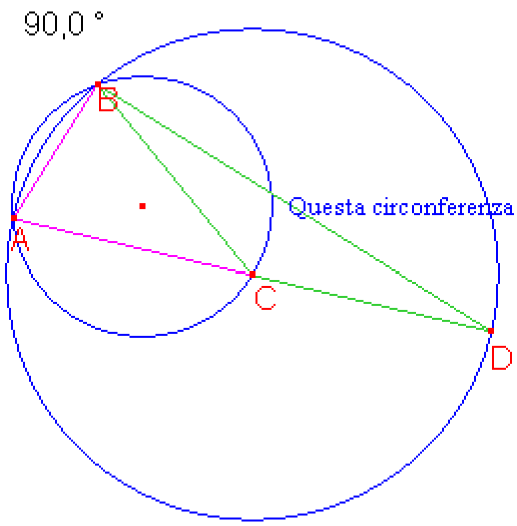
1) Come visualizzato nella figura seguente,



i triangoli ABC e CDB sono equivalenti, ossia hanno la stessa area, considerando AC e CD come basi e BH come altezza relativa a tali basi. Infatti AC e CD sono congruenti per costruzione e BH è la perpendicolare da B ad AC ed anche da B a CD.

2) [[…]]

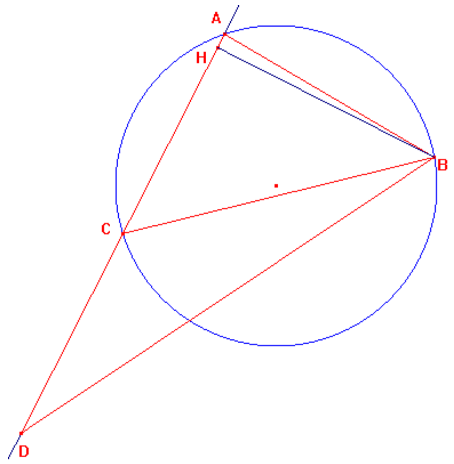
3)
Il triangolo ABD, in tal caso è rettangolo con angolo retto in B, perché:
il triangolo ABC è isoscele (appartenendo C all'asse di AB, CB = AC) → $A\hat{B}C \cong B\hat{A}C$
il triangolo BCD è isoscele (per la proprietà transitiva AC = CD e AC = CB → CD = CB) → $C\hat{B}D \cong C\hat{D}B$. Poiché la somma degli angoli interni del triangolo ABD è 180° si ha $2\,A\hat{B}C + 2\,C\hat{B}D = 180°$ → $A\hat{B}C + C\hat{B}D = 90°$.
La figura illustra quanto dimostrato e suggerisce un'altra spiegazione del fatto che l'angolo ABD sia retto: insiste infatti su una semicirconferenza, tracciata per costruire AC congruente a CD:



Nel caso di Lorenzo Parrotta, Classe 3AS del Liceo Scientifico "G.C. Vannini" di Casarano (LC) risulta impossibile trasferire le figure in un altro file senza modificarne in modo "irreparabile" la struttura.

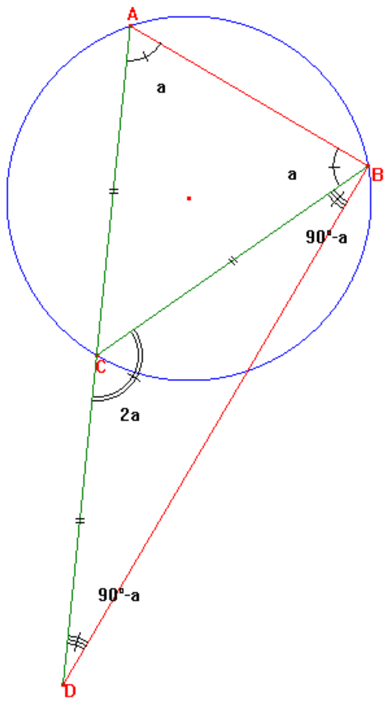
Classe 3M Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto

1)
I triangoli ACB e CDB sono equivalenti ; hanno infatti le basi AC e CD congruenti e la stessa altezza BH , distanza del vertice B dalla retta di AC .



2) [[…]]

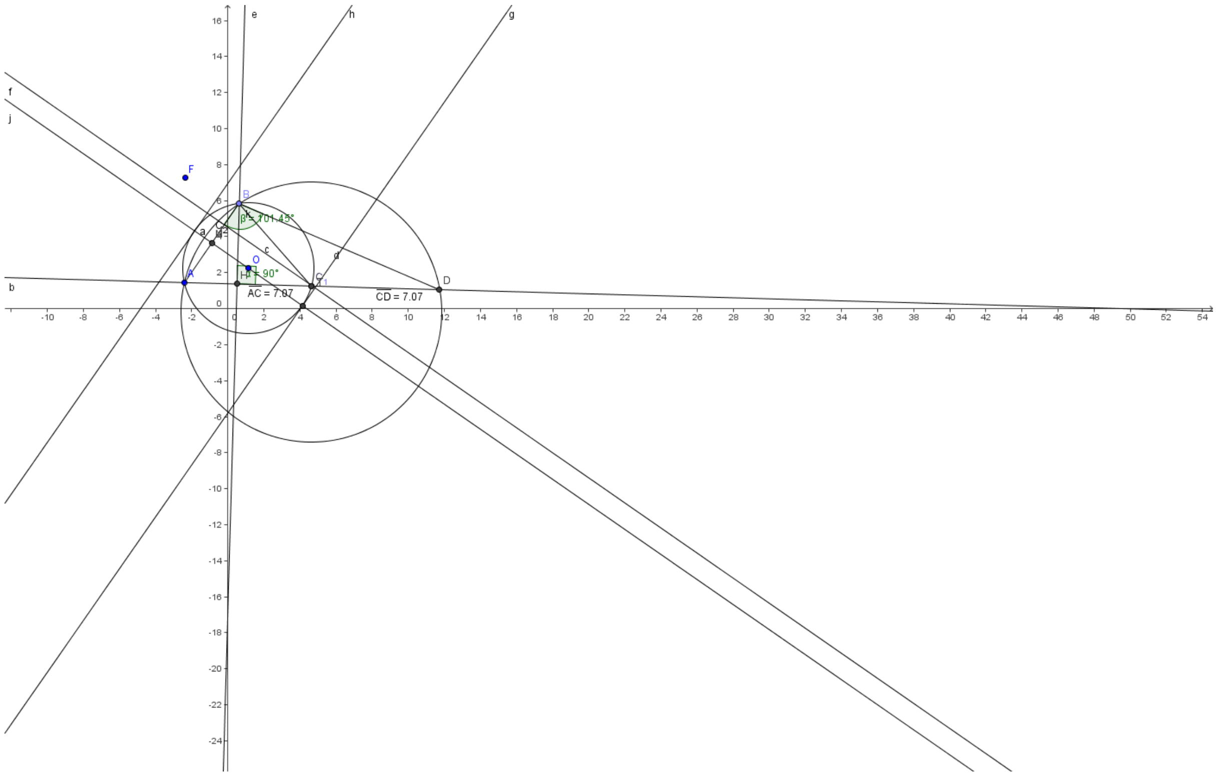
3)
Quando si verifica che i triangoli hanno la massima area , il triangolo ABD è rettangolo in B. Infatti la sua mediana BC è congruente ad AC e a CD (proprietà caratteristica di tutti e soli i triangoli rettangoli) . Ma si può anche osservare che , posto CAB=CBA=a , per il teorema dell'angolo esterno è BCD=2a e poiché il triangolo BCD è anch'esso isoscele : CDB=CBD=90°-a. Si ha perciò: ABD=ABC+CBD=90°.



Samanta Sutera, Rosaria Corona, Enrico Pastorelli, Gaetana Lattuca
Liceo Socio-psico-pedagogico "Dante Alighieri" Enna

NB. La soluzione del problema, ma l'unica figura allegata (costruita con Geogebra) risulta poco "leggibile" anche a causa del riferimento cartesiano (non richiesto).

1)
I triangoli ABC e CBD sono equivalenti.



Consideriamo i triangoli ABC e CDB rispettivamente rispetto alle basi AC e CD; essi hanno la stessa altezza BH e le due basi congruenti, quindi sono equivalenti.

2)
Considerato che BCD e ABC sono equivalenti, l'area di BCD è massima quando è massima l'area di ABC. Consideriamo il triangolo ABC sulla base AB, AB è la corda ed è data per cui la sua area è massima quando è massima l'altezza. La massima altezza si ha quando C si trova alla massima distanza da AB.
Per esplorare la posizione di C si considerano le rette parallele alla corda AB ed intersecanti la circonferenza nell'arco maggiore, ogni punto di intersezione è un possibile punto C che forma con AB un triangolo la cui altezza è la distanza tra la corda e la retta ad essa parallela. La massima distanza si ottiene con la retta parallela ad AB, tangente alla circonferenza in T.La massima area si ha quando C coincide con T.
Dal centro O della circonferenza si tracci il raggio OT e il segmento OM perpendicolare alla corda AB nel suo punto medio M. I punti M,O e T appartengono alla stessa retta perché se non fosse così dal punto O si potrebbero condurre due diverse perpendicolari a due rette parallele. Segue che T appartiene all'asse di AB ed essendo AT e BT congruenti si ha che la massima area si ha quando ABC è isoscele.

3)
Quando ABC è isoscele, consideriamo la circonferenza passante per ABD. In questa circonferenza il punto C è equidistante da A, da B e da D ed è pertanto il centro, segue che AD è un diametro e il triangolo ABD iscritto nella circonferenza ed avente un lato per diametro è rettangolo.