FLAT*landia*

Flatlandia 7-21 Aprile 2008

Il testo del problema:
Disegnare su un cartoncino il triangolo rettangolo isoscele ABC, con l'ipotenusa AB che misura 10 (cm). Disegnare quindi il triangolo equilatero ABD col vertice D da parte opposta a C rispetto ad AB. Ritagliare la figura ottenuta e ripiegarla lungo il lato AB in modo che il vertice D venga a trovarsi sulla perpendicolare condotta per C al piano del triangolo ABC.

1) Considerare il tetraedro $ABCD$ così ottenuto e determinare le lunghezze di tutti i suoi spigoli.
2) Tale tetraedro può essere considerato una piramide retta a base regolare?
3) Dimostrare che le altezze del tetraedro concorrono in uno stesso punto; precisare la sua posizione.
4) Verificare che il quadrato dell'area del triangolo equilatero ABD è uguale alla somma dei quadrati delle aree degli altri tre triangoli che compongono il tetraedro $ABCD$.

Motivare le risposte.

Nota. Come ulteriore chiarimento del testo del problema, dedicato alla geometria solida, riteniamo opportuno inserire le tre figure seguenti elaborate dal prof. Luigi Tomasi, utilizzando il software Cabri 3D.

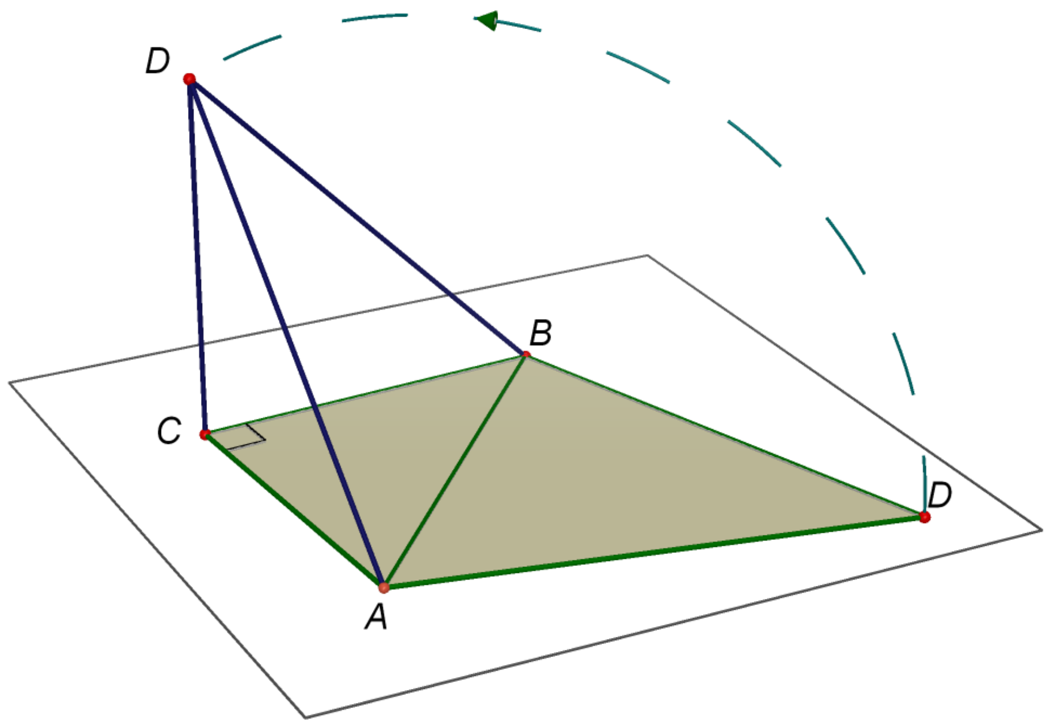


Figura 1

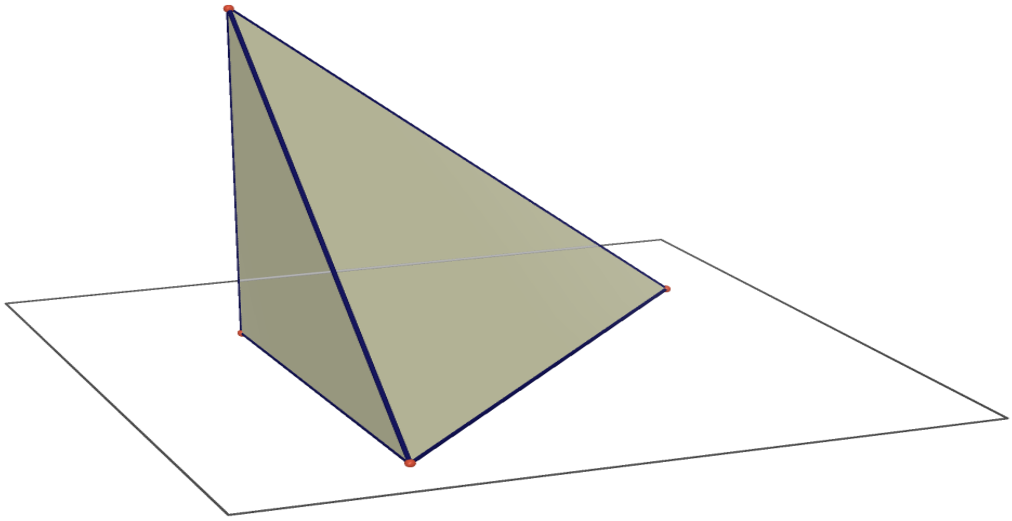


Figura 2

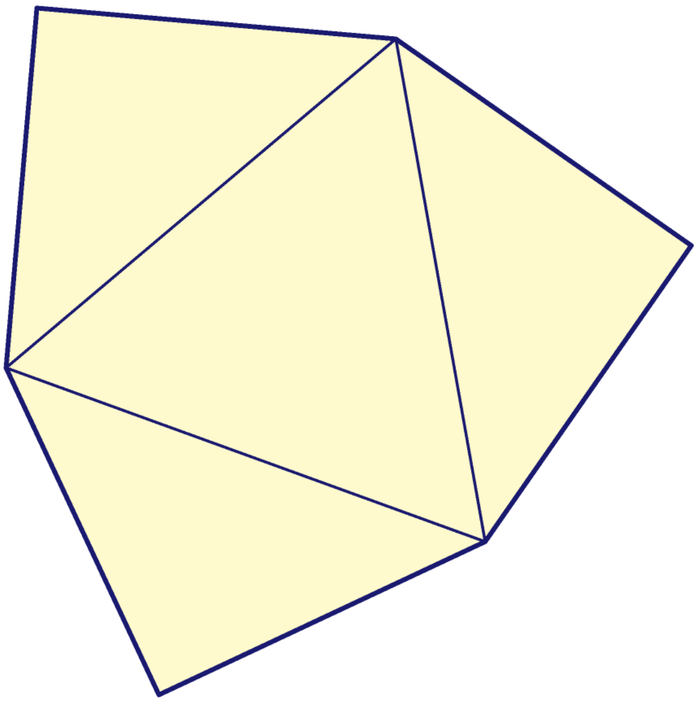


Figura 3

Commento
Abbiamo ricevuto tre risposte così suddivise: una da una Scuola Media, una dal biennio e una dal triennio di Scuole Superiori.
Il problema (oltre alle indicazioni per una costruzione "manuale" della figura solida) poneva quattro domande, di diversa difficoltà, tra loro direttamente o indirettamente collegate.
Al secondo quesito alcuni hanno risposto in modo corretto, fornendo però una giustificazione non del tutto completa.
A tale proposito ricordiamo che "una piramide si dice **retta** se nella sua base si può inscrivere una circonferenza il cui centro è il piede dell'altezza della piramide; in particolare se la base è un poligono regolare, la piramide si dice **retta a base regolare** (o comunemente **piramide regolare**)".

Si osservi che un tetraedro può essere considerato come una piramide avente per base una qualunque delle sue facce, in tal caso i concetti precedenti si riferiscono ad una *opportuna* faccia considerata come base.
Anche al terzo quesito sono state fornite risposte non del tutto soddisfacenti.
Riteniamo peraltro apprezzabili tutte le risposte, anche in considerazione della "scarsa popolarità" della geometria solida nei diversi ordini scolastici.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)
LS "Pitagora", Rende (CS)
ITCG "Ruffini", Imperia (IM)
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Alessandro Trancuccio
Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)
Classe II S

1)
Gli spigoli del tetraedro, un solido che ha quattro facce sono: AD, BD, BC, AC, DC [e AB].
AD = 10 cm per costruzione; **BD = 10 cm** per costruzione. Trovo la misura di BC. Poiché il triangolo ABC come dice il problema è rettangolo isoscele è sicuramente inscritto in una semicirconferenza di centro O punto medio di AB e quindi AO = OB = OC perché raggi; quindi AO = OB = OC = 5 cm.
BC = AC = $\sqrt{(BO^2 + CO^2)} = \sqrt{(5^2 + 5^2)} = \mathbf{5\sqrt{2}}$
Se D si trova sulla perpendicolare per C al piano del triangolo ABC, il triangolo DOC è rettangolo in C.
DO = $(l/2)\sqrt{3} = (10/2)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ [l'inserimento delle parentesi rende più chiara la lettura delle operazioni].
CD = $\sqrt{(DO^2 - CO^2)} = \sqrt{[(5\sqrt{3})^2 - 5^2]} = \mathbf{5\sqrt{2}}$
Quindi se: BC = AC = $5\sqrt{2}$ e CD = $5\sqrt{2}$, allora CD = BC = AC e quindi i triangoli BCD e ACD sono isosceli e rettangoli perché DC è perpendicolare al piano del triangolo ABC.

2) [[…]]

3) [[…]]

4)
Calcolo l'area di ABD = $10 \cdot 5\sqrt{3}/2 = 25\sqrt{3}$
L'area di ABC = $10 \cdot 5/2 = 25$
L'area di CBD = $5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}/2 = 25$
L'area di ACD = 25
IL quadrato dell'area di ABD è uguale a $625 \cdot 3$ ed è quindi uguale alla somma dei quadrati delle aree di ABC, CBD, ACD (625 + 625 + 625).

Giuseppe Lucarelli
Classe 2E, LS “Pitagora”, Rende (CS)

1)
Nel triangolo ABC rettangolo e isoscele tracciamo l’altezza [relativa all’ipotenusa] che sarà anche mediana dell’ipotenusa AB perchè si tratta di un triangolo isoscele. Il triangolo ABC è la metà di un quadrato quindi AC sarà uguale al prodotto tra la metà della diagonale e la radice quadrata di 2 [sarebbe più opportuno, in questo caso e in quelli successivi, utilizzare l’editor di “Word” che consente la scrittura dei simboli matematici]. Di conseguenza anche lo spigolo BC sarà 5per radice di 2 [cm]; come anche lo spigolo CD che è congruente ad AC e BC per il secondo criterio generalizzato di congruenza dei triangoli. Gli altri tre spigoli sono in effetti i tre lati del triangolo ABD equilatero quindi misureranno 10cm l’uno [ognuno]. In definitiva:
AC = 5radice di2 [cm] BC = 5radice di2 [cm] CD = 5radice di2 [cm] AB = 10 cm BD = 10 cm DA = 10 cm

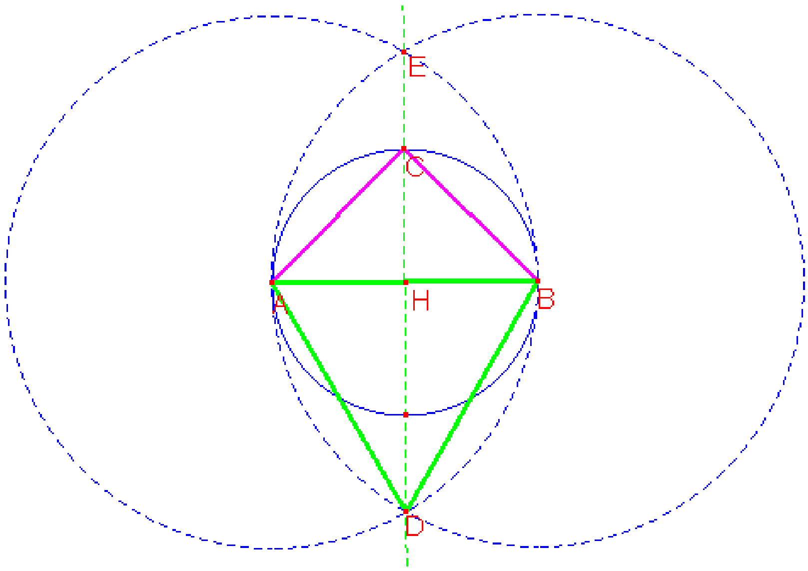
2)
Considerando come base il triangolo equilatero ABD, la risposta è sì [affermativa] perché il [ogni] triangolo equilatero è un poligono regolare. Inoltre la piramide sarà retta perché il centro della circonferenza iscritta in questo triangolo è il piede dell’altezza della piramide [perché...]. Se invece consideriamo gli altri tre triangoli come base allora la risposta è no [negativa] perché l’altezza della piramide cade sul vertice C sulla base. Inoltre il [un qualsiasi] triangolo rettangolo non è un poligono regolare.

3)
Il punto in cui concorrono tutte le altezze del tetraedro è il punto C perché è l’unico punto che forma in ogni circostanza solo angoli retti. [occorre fornire spiegazioni più dettagliate e motivate].

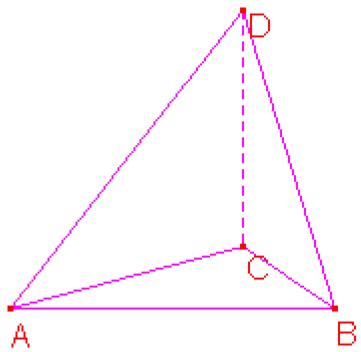
4)
L’area del triangolo ABD sarà uguale al semi prodotto della base AB con l’altezza HD che sarà uguale al prodotto tra la metà del lato e la radice quadrata di 3, vale a dire 5radice di3. Quindi l’area sarà uguale al semi prodotto tra dieci [10] e 5radice di3, ossia 25radice di3, il cui quadrato è 1875.
Nel triangolo ABC l’area sarà uguale al semiprodotto tra la base AB e l’altezza HC. L’altezza HC sarà uguale alla metà della base, quindi 5. Dunque l’are [area] sarà uguale al semiprodotto tra 10 e 5, vale a dire 25, il cui quadrato è 625, che moltiplicato per tra [3] è uguale a 1875, come volevasi dimostrare.

Ardoino, Bortolini, Confalone, Di Pietro, Dulbecco, Grimaldi, Multani, Oda, Pinto, Razzani, Sahlaoui, Scarsella, Tallone
Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

1)
Abbiamo disegnato sul cartoncino la seguente figura, usando riga e compasso:

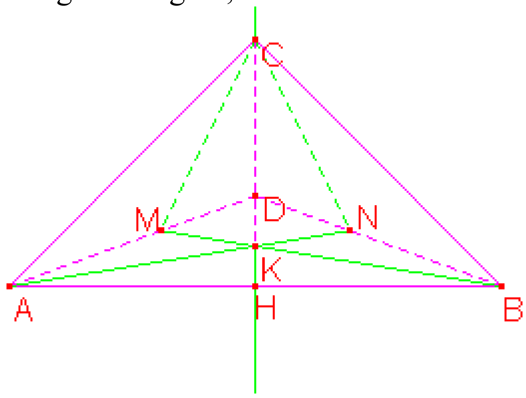


ovvero abbiamo tracciato AB di misura 10 cm, poi la semicirconferenza di raggio AH, quindi l'asse di AB (puntando in B con apertura AB e puntando in A con apertura AB, abbiamo trovato l'intersezione E di due archi, poi la retta per H e per il punto E). Detto C il punto comune all'asse HC e alla semicirconferenza, siamo certi che il triangolo ABC è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza e isoscele perché l'altezza relativa ad AB è anche mediana. Il triangolo ADB è poi equilatero per la costruzione fatta.
Il tetraedro ottenuto piegando lungo AB è del tipo:



con DC perpendicolare al piano di ABC. Gli spigoli sono dunque
AD $\cong$ AB $\cong$ BD = [di lunghezza pari a] 10 cm, lati del triangolo equilatero
AC $\cong$ CB = [di lunghezza pari a] $5\sqrt{2}$ cm perché lati del triangolo isoscele, la cui misura si ottiene con il teorema di Pitagora: AC $=\sqrt{AH^2+CH^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$ cm
DC = $5\sqrt{2}$ cm, perché, considerando la faccia DCB, che è un triangolo rettangolo in C, con il teorema di Pitagora abbiamo: DC $=\sqrt{DB^2-CB^2}=\sqrt{10^2-(5\sqrt{2})^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ cm

2)
Tale tetraedro può essere considerato una piramide retta a base regolare perché, ponendo ABD come base, l'altezza condotta da C al piano ABD cade nel centro della circonferenza inscritta in ABD.
Infatti, facendo riferimento alla seguente figura,



poiché le tre facce laterali sono triangoli rettangoli isosceli congruenti, le loro altezze [relative ai cateti] CN, CM e CH sono congruenti. Se chiamiamo K il piede dell'altezza [condotta] da C al piano ABD, i triangoli CKM, CKN e CKH sono rettangoli con ipotenuse congruenti e il cateto CK in comune, dunque sono congruenti e i cateti KH, KN e KM sono i raggi della circonferenza inscritta in ABD. [Detto in modo più preciso: K è equidistante da AB, BD, AD e quindi K è il centro della circonferenza inscritta in ABD].

3)
Le altezze del tetraedro sono concorrenti in C, infatti CD (come visto al punto 1)) è l'altezza da D al piano ABC; CK è l'altezza da C al piano ABD (come visto al punto 2)); BC è l'altezza relativa [condotta] da B al piano ADC e AC è l'altezza relativa [condotta] al piano CBD, perché viene a riproporsi la situazione del punto 1) essendo i triangoli ABC, ADC e CBD congruenti come visto al punto 1). [La spiegazione avrebbe dovuto essere più precisa e dettagliata]

4)
Con riferimento alla prima figura, troviamo DH $=\sqrt{DB^2-HB^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}\rightarrow$ Area(ABD) = AB*DH/2 $=25\sqrt{3}$
Area (ABC) = AB*CH/2 = 25 → Area(BCD) = Area(ADC) = 25
Da cui la tesi Area(ABD)^2 = $(25\sqrt{3})^2$ = 3Area (ABC) [3Area (ABC)^2] = 3*25^2.