FLAT*landia*

Il problema di Novembre 2006

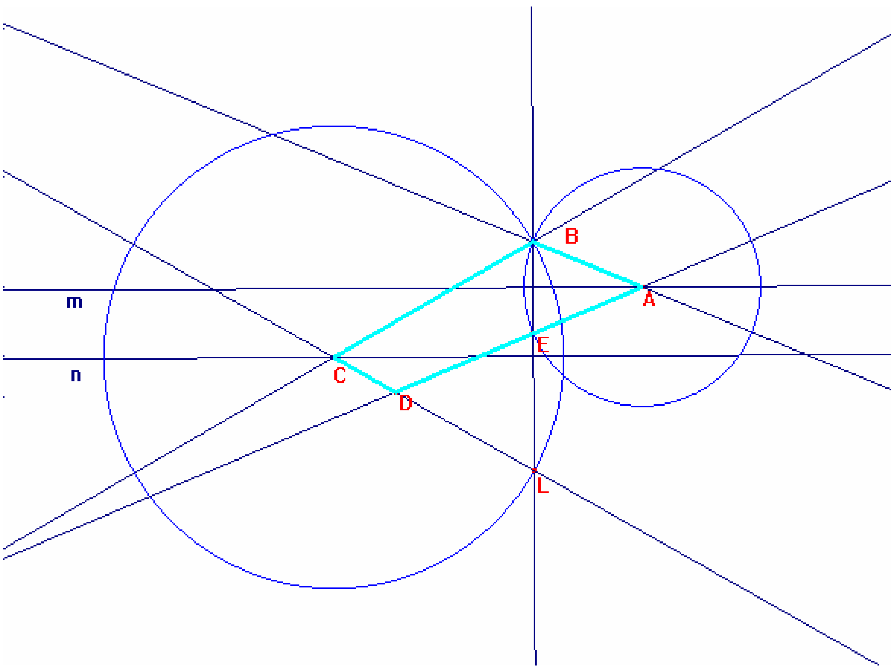
Costruire un quadrilatero in cui le bisettrici di due angoli opposti (di vertici A e C) siano parallele.

1) Quali caratteristiche presenta il quadrilatero così ottenuto?

2) Potrebbe essere un trapezio o un parallelogrammo?

Descrivere la costruzione e giustificare le risposte.

Costruzione eseguita da:
Alfredo Rivero, Francesca Giacovelli, Gaia Pallestrini, Michel Usai, Classe 3S, SM di San Genesio ed Uniti (PV)



rette parallele “m” ed “n”;
A punto su “m”, C su “n”;
retta per A, retta per C,
punto di intersezione B;
circonferenza con centro A e raggio AB;
circonferenza con centro C e raggio CB;
retta per B perpendicolare alle rette “m” ed “n”;
E e L intersezione con le due circonferenze;
retta CL, retta AE, punto di intersezione D.
ABCD è un quadrilatero generico che ha le bisettrici di due angoli opposti parallele.

Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte provenienti da cinque scuole, alcune nuove. Una delle risposte è stata inviata dagli studenti di una prima classe di scuola media inferiore, che invitiamo a seguirci ancora. Uno studente non dichiarato la scuola di provenienza.

- LS “G.B. Scorza”, Brindisi (BR)
- SM “C.A. Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti (PV) – tre risposte
- LS “T. Gullace”, Roma (RM)
- SM “Giusti-Gramsci”, Monsummano Terme (PT).

Dopo aver costruito un quadrilatero con le bisettrici di due angoli opposti parallele, si doveva individuare una ulteriore caratteristica della figura ottenuta, ad esempio di avere gli altri due angoli fra loro congruenti.
Tale proprietà avrebbe consentito di rispondere in modo immediato alle successive domande, ma non è stata rilevata o evidenziata in modo esplicito nelle risposte pervenute ad eccezione di quella del LS “T. Gullace”, in cui si imposta la costruzione proprio sulla congruenza dei due angoli.
E’ possibile infatti dimostrare anche il teorema inverso: *se un quadrilatero ha due angoli opposti congruenti, allora le bisettrici degli atri due sono fra loro parallele*.
Dalla SM “C.A. Dalla Chiesa” sono giunte due costruzioni simili fra loro, basate sulla proprietà del triangolo isoscele di avere l’altezza relativa alla base anche bisettrice dell’angolo al vertice. Una di queste verrà proposta per illustrare il testo del problema (una terza costruzione tratta solo un caso particolare).

Abbiamo convenuto di presentare tre risposte

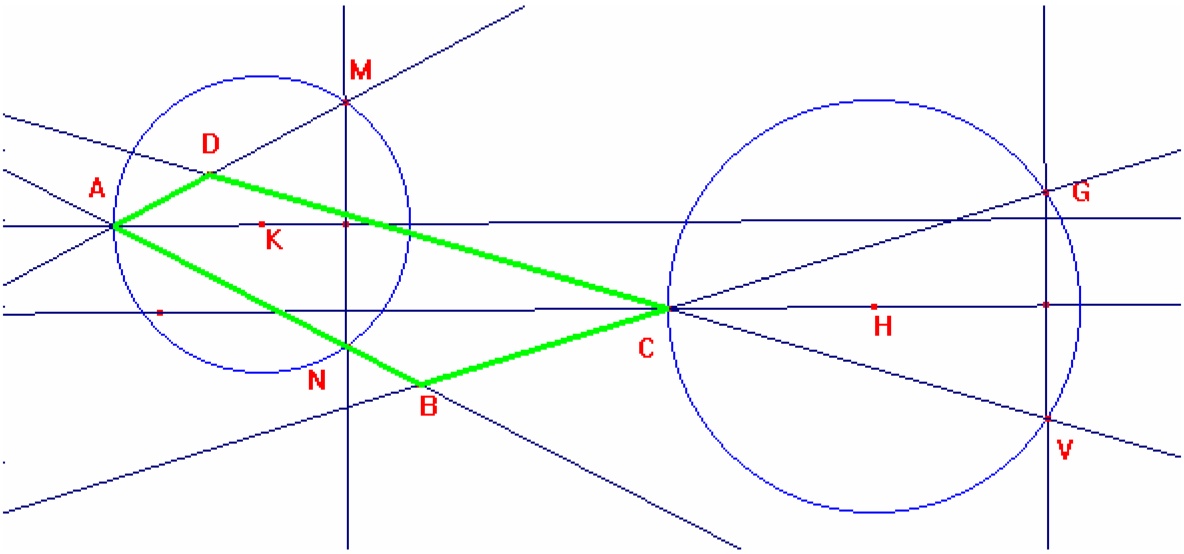
SM “C:A: Dalla Chiesa”; in essa Chiara Veronesi giustifica in modo esauriente la sua costruzione, ma non tutti i casi particolari. Considera anche il caso in cui le bisettrici siano coincidenti.

LS “G.B. Scorza”; Alfonso Scarpino propone una costruzione molto semplice ricorrendo alla simmetria rispetto a una retta. Non avendo constatato la congruenza degli angoli D e B, fornisce una giustificazione un po’ complessa nella seconda parte.

LS “T. Gullace”; nella costruzione proposta dalla classe 2F, come già detto, si utilizza la congruenza degli angoli B e D facendo ricorso agli angoli alla circonferenza. Semplice e corretta la conclusione nella seconda parte.

NOTA: *Le nostre osservazioni sono scritte in parentesi quadra. In doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.*

Chiara Veronesi
Classe 3S Scuola Media di San Genesio ed Uniti (PV).



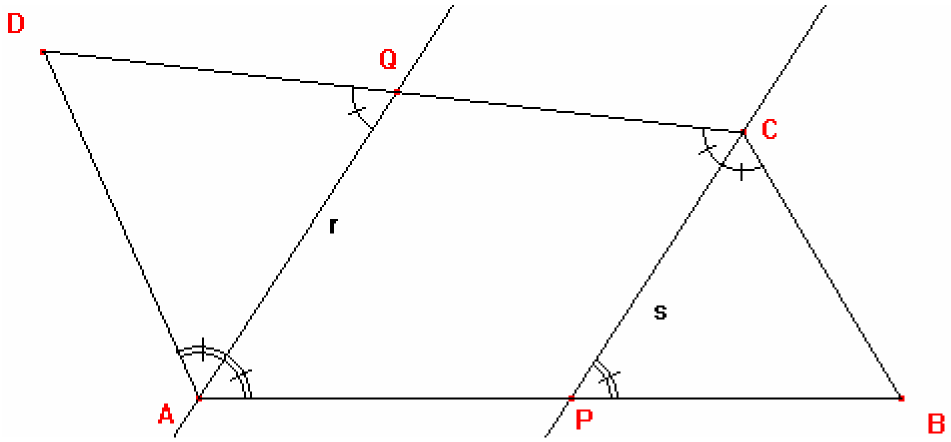
- QUADRILATERO IRREGOLARE

Traccio due rette parallele e prendo su ciascuna retta un punto che chiamo A e C. Individuo su ciascuna di esse un altro punto che chiamo K e H.
Con apertura AK e CH puntando in K e in H traccio due circonferenze.
Traccio in ciascuna circonferenza una retta perpendicolare rispettivamente ad AK e CH ed individuo i punti di intersezione tra queste rette e le circonferenze che chiamo rispettivamente M ed N, G e V.
Trovo l'intersezione tra le rette AM e CV che chiamo D e l'intersezione tra le rette AN e CG che chiamo B.
Quindi traccio i segmenti AB, BC, CD, DA ed ottengo il quadrilatero ABCD.

1) Il quadrilatero ABCD è un quadrilareo irregolare che ha le bisettrici AK e CH di due angoli opposti parallele per costruzione; AK e CH sono bisettrici perché AK e CH sono perpendicolari alle corde MN e GV, passano per il punto medio delle corde e quindi sono bisettrici, nei triangoli isosceli AMN e CGV, degli angoli MAN e GCV = DCB.
2) Il quadrilatero è un parallelogramma quando i triangoli AMN e CGV inscritti nelle circonferenze sono simili, non si potrà trovare un trapezio, otterrò invece un rombo quando le bisettrici dell'angolo MAN e DCB saranno sovrapposte **[ciascuna di queste risposte poteva essere motivata con brevi riflessioni]**.

Alfonso Scarpino
Classe 2G, Liceo Scientifico “G.B. Scorza”
Cosenza (CS)

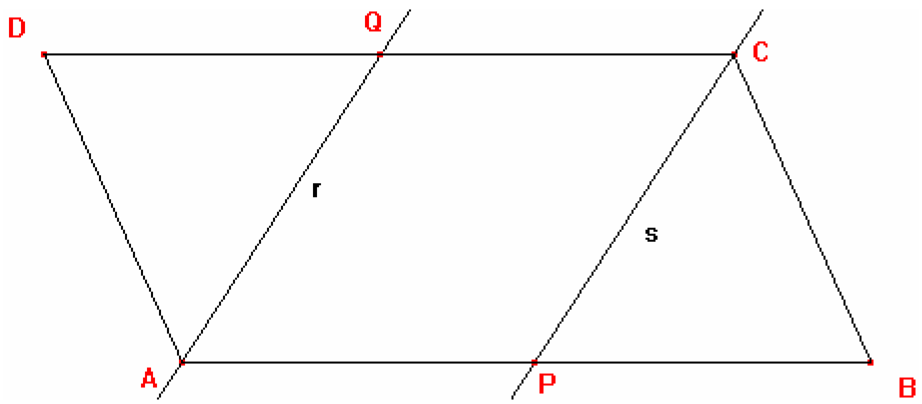
1.



Partendo dal segmento AD si traccia una retta r passante per A e rispetto a questa si costruisce la semiretta simmetrica ad AD. Successivamente si costruisce la retta s, parallela ad r,che passi per un punto C a piacere. Da C tracciamo una semiretta che passa per D e la sua simmetrica rispetto alla retta s. Chiamiamo B il punto di intersezione tra quest’ultima semiretta e quella simmetrica al segmento AD.

Nel quadrilatero così ottenuto i triangoli ADQ (dove Q è il punto di intersezione tra la retta r e CD) e BCP (dove P è il punto di intersezione tra la retta s e AB) sono simili per avere due angoli rispettivamente congruenti. Infatti DAQ e PAQ sono congruenti per costruzione, PAQ e BPC sono congruenti perché corrispondenti rispetto alle parallele r ed s e alla trasversale per AB, quindi, per la proprietà transitiva, DAQ e BPC sono congruenti. Similmente AQD è congruente a BCP.

2.

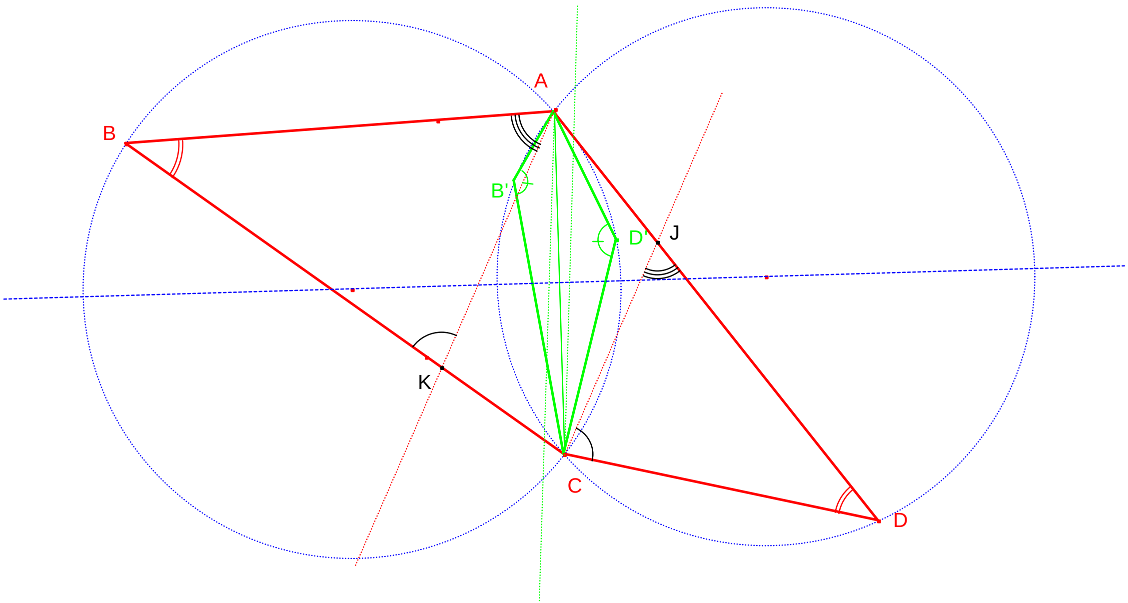


Il quadrilatero non può essere un trapezio.

Infatti, ipotizzando che AD e BC siano paralleli, gli angoli BAD e ABC, che sono coniugati interni, sarebbero supplementari; per lo stesso motivo PAQ e APC sono supplementari. Da ciò segue che l'angolo APC dovrebbe essere congruente alla somma di DAQ e PBC. Ma APC è anche l'angolo esterno di BPC nel triangolo BCP, quindi è uguale alla somma di CBP e BCP. Ne segue perciò che DAQ dovrebbe essere congruente a BCP e quindi BAD congruente a DCB. Si avrebbe perciò che, essendo DCB supplementare di ABC, i lati DC e AB sarebbero paralleli e quindi il quadrilatero ABCD un parallelogrammo e non semplicemente un trapezio.

Dalla dimostrazione precedente possiamo dire che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo a patto che DAB sia congruente a DCB oppure abbia due lati opposti paralleli.

Classe 2F
Liceo Scientifico "T. Gullace"
Roma (RM)

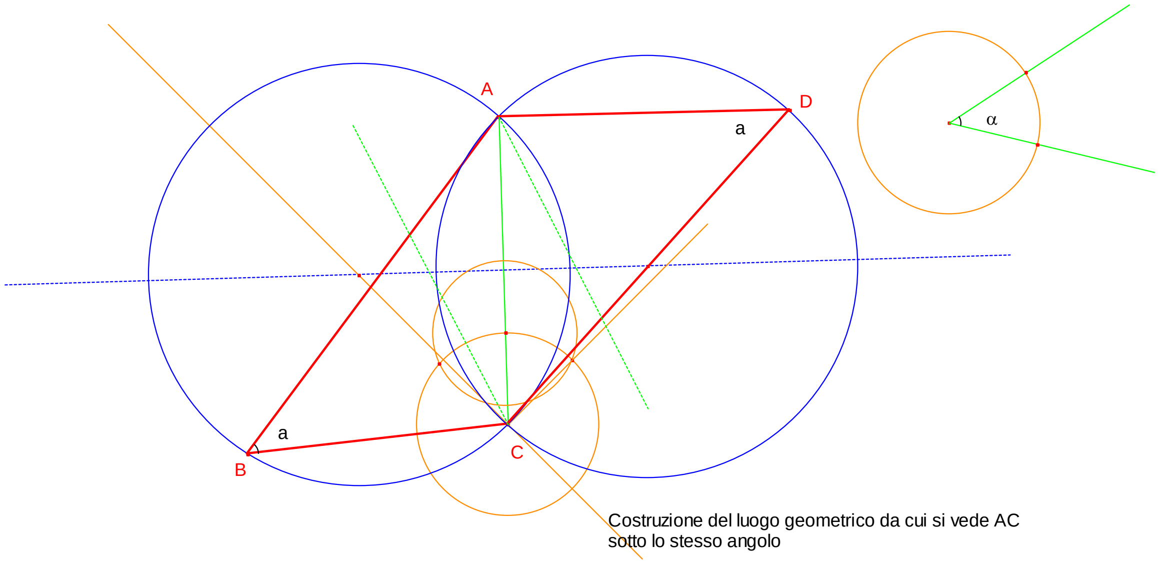


E' possibile costruire un quadrilatero del tipo descritto nel testo del problema nel modo seguente:
Per costruire un quadrilatero che abbia due bisettrici parallele basta disegnare due circonferenze secanti si e aventi lo stesso raggio. I punti di intersezione delle circonferenze (chiamati A e C) saranno i due vertici del quadrilatero da cui partono le bisettrici parallele. La corda AC comune alle due circonferenze è una diagonale del quadrilatero ABCD. I vertici B e D, invece, possono essere due punti qualsiasi rispettivamente dei due archi di circonferenza che vedono la corda AC sotto lo stesso angolo: quindi esistono infinite coppie di punti B e D ed infiniti quadrilateri che avendo la stessa diagonale AC hanno le bisettrici parallele.
In figura è possibile osservare che i punti possono essere presi sugli archi maggiori (ABC e ADC) o sugli archi minori (AB'C e AD'C) e quindi si originano due famiglie di quadrilateri segnate in rosso o verde in figura.

La costruzione è giustificata dal fatto che gli altri due angoli del quadrilatero (B e D) sono congruenti. Infatti, considerando K e J i punti di intersezione delle bisettrici con i lati opposti all'angolo relativo (K appartiene a BC , J appartiene ad AD), si osserva che l'angolo BKA è congruente all'angolo JCD perché JCD=JCB per ipotesi (CJ bisettrice) e BKA=JCB perché angoli corrispondenti in un fascio di rette parallele tagliate da una trasversale. Stesso ragionamento per gli angoli BAK e CJD.
I triangoli ABK e JCD hanno due coppie di angoli corrispondenti congruenti e quindi per il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo (la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180°) hanno gli angoli ABC e ADC congruenti **[data la costruzione eseguita era più oppotuno giustificarla ricorrendo al teorema inverso: assumere come ipotesi la congruenza degli angoli B e D e dimostrare che le bisettrici degli altri due angoli sono parallele].**

Per costruire quindi il quadrilatero ABCD che ha una coppia di angoli opposti congruenti si può sfruttare il luogo geometrico dei punti del piano dai quali è possibile vedere la diagonale AC del quadrilatero sotto lo stesso angolo: tale luogo geometrico è un arco di circonferenza, per il teorema che dice che gli angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco sono tutti uguali tra loro.

[[…]]



Per quanto riguarda il secondo quesito si può affermare con certezza che il quadrilatero in questione può essere un trapezio solo nel caso in cui sia anche un parallelogramma perché solo i parallelogrammi hanno gli angoli opposti congruenti.
Quindi i parallelogrammi, avendo gli angoli opposti congruenti, hanno le bisettrici a due a due parallele.
Se soltanto una coppia di bisettrici è parallela allora i quadrilateri del tipo ABCD non sono parallelogrammi.