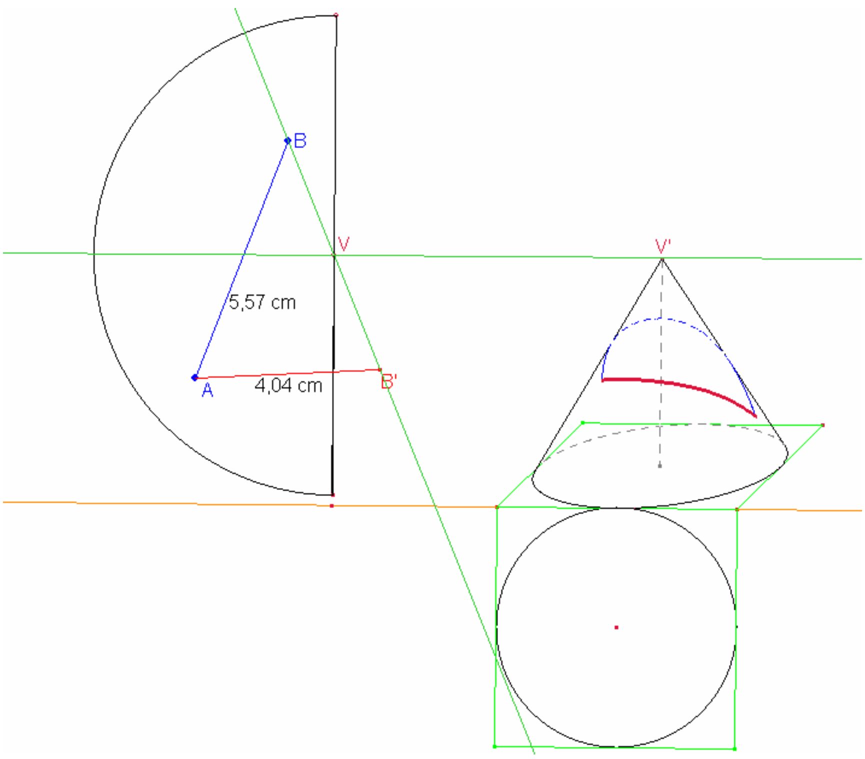
FLAT*landia*

Il problema di Marzo 2007

1) Sia **u** una arbitraria unità di misura di lunghezza. Ritagliare da un cartoncino un semicerchio di diametro 20**u** e con esso formare un cono. Quali caratteristiche presenta il cono ottenuto?

2) Si vuole tagliare il cono ottenuto in due solidi equivalenti con un piano parallelo alla base. Quale sarà la distanza del piano dal vertice del cono?

3) Siano A e B due punti che stanno sulla superficie laterale del cono. Qual è il cammino più breve per andare da A a B? Motivare la risposta.



Il percorso minimo si ottiene tracciando il segmento che congiunge i punti A e B oppure, in alternativa, i punti A e B’, essendo B’ il simmetrico del punto B rispetto al centro V del semicerchio che costituisce lo sviluppo laterale del cono.

Commento

Abbiamo ricevuto due risposte dalle scuole

LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
SM “C.A. Dalla Chiesa” San Genesio ed Uniti, (PV)

Ci complimentiamo con gli studenti e gli insegnanti di queste classi per l’assiduo interesse che mostrano nei confronti della geometria euclidea, disciplina che viene spesso trascurata a favore delle tecniche di calcolo.

Nel problema si chiedeva di formare un cono da un semicerchio, di individuarne le caratteristiche, di dividerlo in due parti equivalenti con un piano parallelo alla base calcolando la distanza di quel piano dal vertice del cono.
Si chiedeva inoltre il minimo percorso per andare da un qualunque punto ad un altro sulla superficie laterale del cono.
In entrambe le risposte sono state risolte correttamente le prime due parti anche se con calcoli un po’ laboriosi, specialmente da parte degli studenti del liceo “Aristosseno”.
Si fa notare che due coni (o piramidi o prismi) simili hanno i volumi proporzionali ai cubi delle rispettive altezze. Questo consente di rispondere al secondo quesito in modo semplice e rapido.

Per quanto riguarda il terzo quesito, dobbiamo convenire che individuare quel percorso come tratto curvilineo sulla superficie del cono non è un quesito alla portata degli studenti di scuola secondaria. Hanno pensato bene gli studenti della scuola media “Dalla Chiesa” a cercare la risposta considerando un opportuno sviluppo piano della superficie laterale del cono. Si vedano in proposito anche le nostre figure inserite nella loro risposta.

La figura allegata al testo illustra il terzo quesito nel caso analizzato (e non risolto) dagli studenti del liceo “Aristosseno”. Altre nostre figure sono inserite nella loro risposta

NOTA: *Le nostre osservazioni sono scritte in parentesi quadra. In doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.*

Classe 3S, Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)

1. I coni che abbiamo ottenuto partendo da un semicerchio in cartoncino avente il diametro di 20**u** hanno le seguenti caratteristiche:

- sono coni retti per il fatto che lo sviluppo della superficie laterale è un settore circolare (in questo caso un semicerchio)
- l'apotema del cono misura 10
- la lunghezza della circonferenza di base misura 10π
- il diametro del cerchio, che costituisce la base del cono, misura 10
- i coni sono pertanto equilateri
- l'area della superficie laterale del cono misura 50π
- l'area della superficie di base del cono misura 25π e quindi è ½ di quella laterale.

2. Per trovare a quale distanza [dal vertice] far passare un piano affinché i due solidi che si ottengono siano equivalenti, calcoliamo il volume del nostro cono:

$h = 5\sqrt{3}$; $V_1 = (25\pi*5\sqrt{3})/3$

Sezionando il cono con un piano parallelo alla base otteniamo un secondo cono il cui volume V_2 dovrà essere la metà del volume del primo cono e quindi:

$V_2 = (25\ \pi\ 5\ \sqrt{3}\ )/6 = (125\pi\sqrt{3})/6$

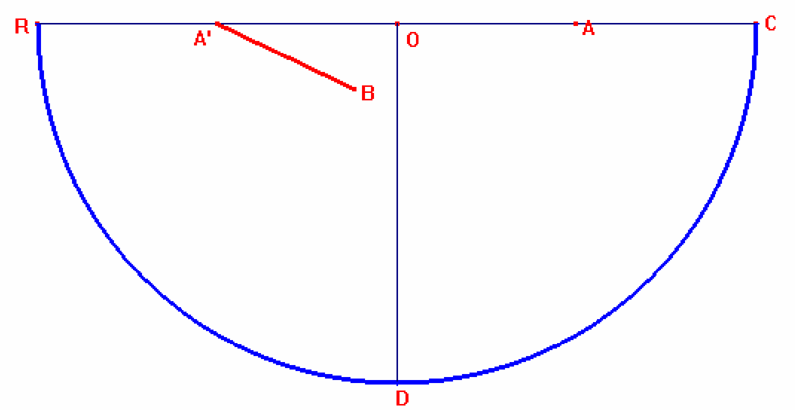
Utilizziamo una equazione per trovare il raggio di base di questo secondo cono (x) e poi la sua altezza:

$(x^2\pi*x\sqrt{3}\ )/3 = (125\pi\sqrt{3})/6$, risolvendo l'equazione si ottiene x = 5/(radice cubica di 2)

L'altezza del cono e cioè la distanza dal vertice per cui far passare il piano sarà $5\sqrt{3}$/(radice cubica di 2) cioè $h_2 = h_1$ /(radice cubica di 2) **[vedere in proposito il commento].**

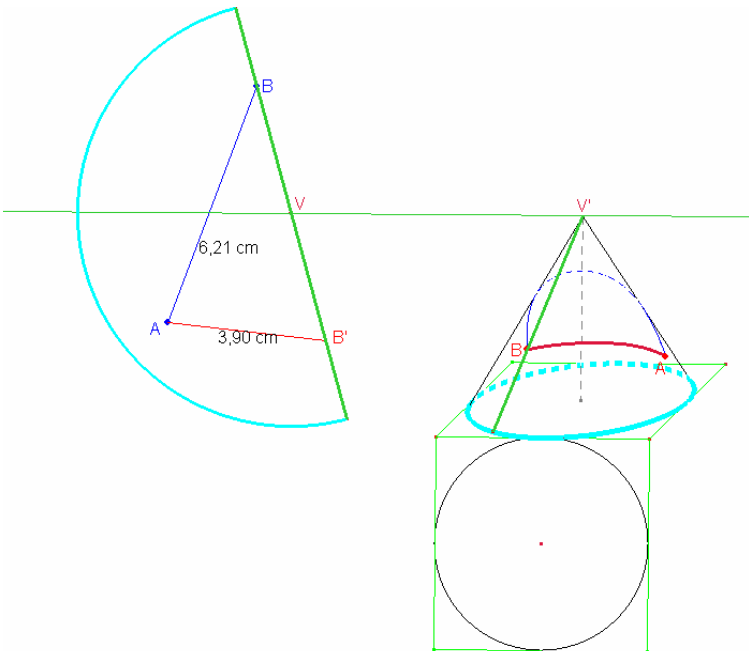
3. Costruiamo il cono e sulla sua superficie laterale individuiamo due punti A e B.

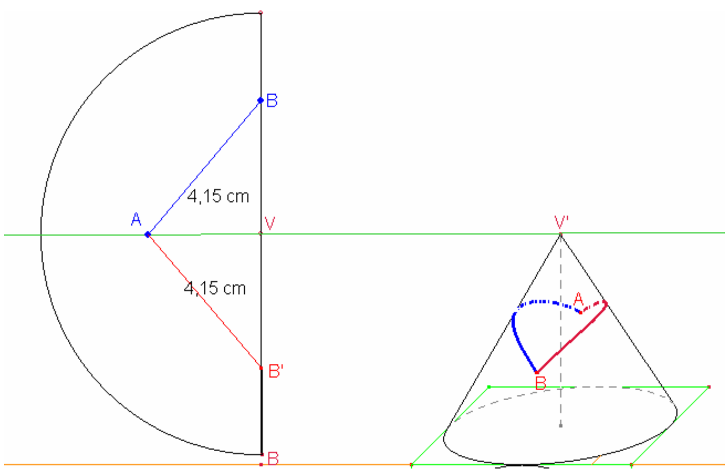
Consideriamo l'apotema del cono passante per A e tagliando la superficie laterale lungo questo apotema otteniamo questo sviluppo piano del cono.



Individuiamo il segmento OD che funge da asse di simmetria del semicerchio e chiamiamo ROD e DOC i due settori circolari congruenti che si individuano.
Trovo il simmetrico del punto A **[rispetto al contro O]** e lo chiamo A'.
Se il punto B si trova nel settore circolare ROD il percorso minimo tra A e B sarà il segmento A'B, se il punto B si trova nel settore DOC il percorso più corto tra A e B sarà il segmento AB, invece se il punto B si trova sul segmento DO è indifferente considerare il segmento AB o il segmento A'B perché sono uguali.

[L'idea di prendere una generatrice passante per uno dei due punti è ottima.
Gli allievi hanno esaminato molto bene i vari casi che si possono presentare nello sviluppo piano della superficie laterale del cono.
Alleghiamo due nostre figure per visualizzare i diversi casi.]





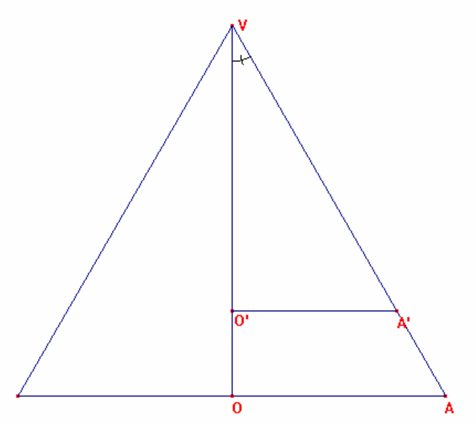
Classe 2M, Liceo Scientifico "Aristosseno"

Taranto

1) Il cono è equilatero. Infatti essendo il diametro d=20u , la lunghezza della semicirconferenza di base misura $C = 10\pi$ e quindi il raggio di base del cono è $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$

Essendo quindi il diametro di base del cono uguale al suo apotema, il cono è equilatero.

2) Il piano che taglia il cono lo divide in sue solidi, un cono (anch'esso equilatero) ed un tronco di cono. Questi solidi devono avere lo stesso volume, ovvero il rapporto tra i loro volumi deve essere uguale ad 1.



Esaminando la figura ottenuta in sezione , essendo il cono equilatero la sua altezza VO misura

VO = $\frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{10}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Essendo poi i triangoli rettangoli VOA e VO'A' simili (rettangoli con l'angolo di vertice V in comune) posto OA' = *r'*, sarà VO' = $r'\sqrt{3}$. L'altezza del tronco è perciò: OO'=VO - VO'=$5\sqrt{3} - r'\sqrt{3} = (5 - r')\sqrt{3}$

Il volume del cono è: $V_{cono} = \frac{\pi}{3} r'^2 VO' = \frac{\pi}{3} r'^3 \sqrt{3}$ ed il volume del tronco di cono è:

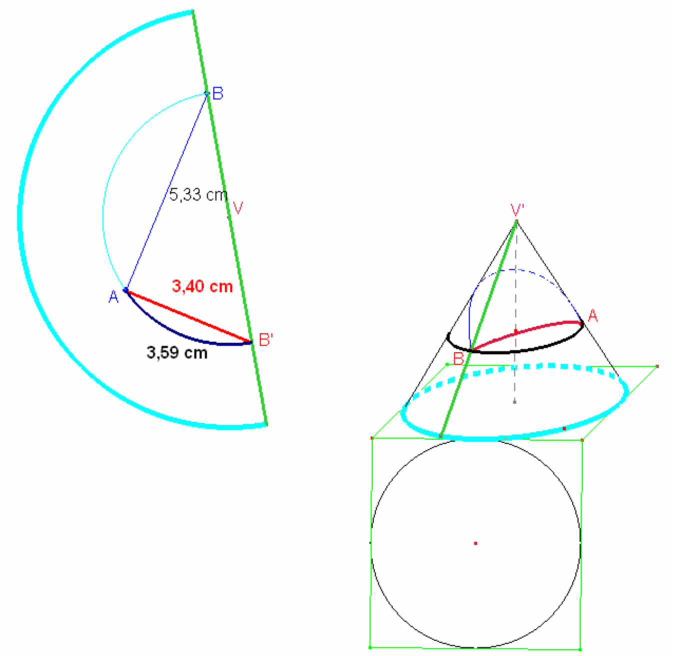
$$V_{tronco} = \frac{\pi}{3} OO'\left(r^2 + r'^2 + rr'\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}(5 - r')\left(25 + r'^2 + 5r'\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}(125 - r'^3).$$

Da $\frac{V_{cono}}{V_{tronco}} = 1$ segue: $\frac{r'^3}{125 - r'^3} = 1$ e da qui si ottiene $r' = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

La distanza del piano dal vertice del cono è allora VO' $= \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{3} = 5\sqrt[6]{\frac{27}{4}}$ **[vedere in proposito il commento].**

3) Presi due punti A e B sullo sviluppo del cono nel piano , abbiamo considerato che nella rotazione di 180° il segmento AB si trasforma in A'B' ma **[[…]] [vedere la figura allegata al testo del problema]**

Nel caso in cui il segmento AB è parallelo al diametro della semicirconferenza sviluppo del cono, **[[…]] [si rientra nel caso precedente; vi rientra anche il caso in cui A e B appartengano a una circonferenza parallela al piano di base: la corda AB' (in rosso nella figura) è minore dell'arco AB' (in nero)]**



Nel caso in cui AB è su uno dei raggi (generatrici) del cono, la linea di lunghezza minima è il segmento rettilineo AB. **[Giusto, vedere la figura qui allegata]**