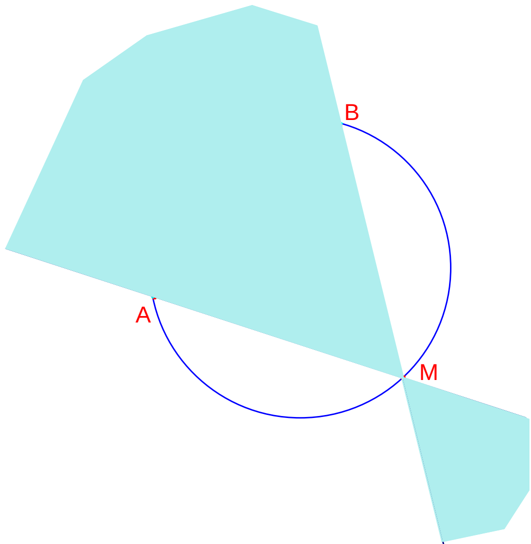
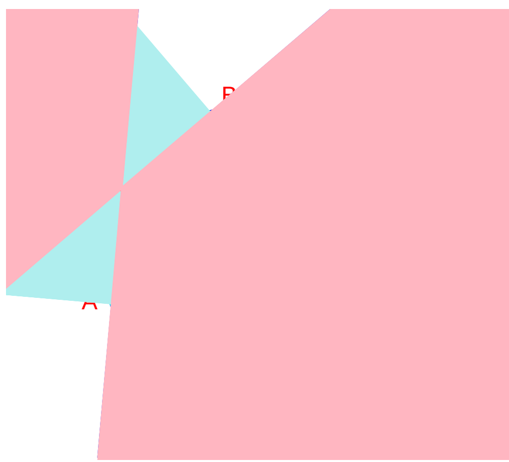
FLAT*landia*

Il problema di Gennaio 2007

1) Sono dati un arco AB di circonferenza e un punto P non appartenente ad essa. Individuare sull'arco AB un punto C tale che la bisettrice dell'angolo ACB passi per P.
La costruzione precedente è possibile per ogni scelta del punto P?

2) E'facoltativo risolvere ora il seguente quesito: costruire un quadrato essendo dati un vertice e due punti appartenenti ai due lati (o ai loro prolungamenti) che non concorrono in quel vertice.





Commento

Sono giunte cinque risposte dalle scuole:

- LS "Aristosseno", Taranto (TA)
- SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)
- LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)
- LST,ITI "Berenini", Fidenza (PR)
- LS "Teresa Gullace", Roma (RM)

Nel problema proposto si richiedevano due costruzioni, la prima delle quali forniva un metodo per risolvere la seconda.

Primo quesito.
Si trattava di costruire, scelto un arco di circonferenza, l’angolo in esso inscritto la cui bisettrice passasse per un punto P prefissato, non appartenente alla circonferenza. Si chiedeva inoltre di indagare sulla possibilità di ottenere il risultato richiesto.
Nelle risposte ricevute è stata individuata solo parzialmente la regione di piano in cui considerare i punti P che consentono di eseguire la costruzione.
Gli studenti del LS “Aristosseno” non hanno fissato un solo arco, ma considerato la possibilità di utilizzare l’uno o l’altro dei due archi che vengono a formarsi, giungendo poi alla errata conclusione che il problema abbia una soluzione dovunque si prenda il punto P. Si veda in proposito la seconda figura che illustra il problema.

Secondo quesito.
Si chiedeva di costruire un quadrato dati un vertice e due punti appartenenti ai due lati (o ai loro prolungamenti) che non concorro in quel vertice. In tal modo diventa possibile ottenere la soluzione utilizzando la costruzione precedente, nel caso particolare che l’arco sia una semicirconferenza, qualunque sia la posizione dei tre punti.
Gli studenti della SM “C.A. Dalla Chiesa” non hanno raccolto tale suggerimento, ma hanno fornito una costruzione basata sulle proprietà della rotazione attorno a un punto, dedotta da osservazioni sulla figura risultante.

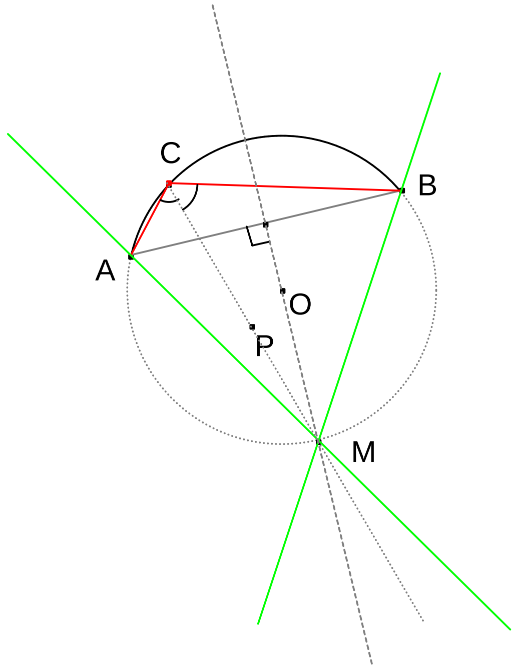
Abbiamo stabilito di presentare le seguenti risposte, corredate da ulteriori nostre osservazioni contenute in parentesi quadra:

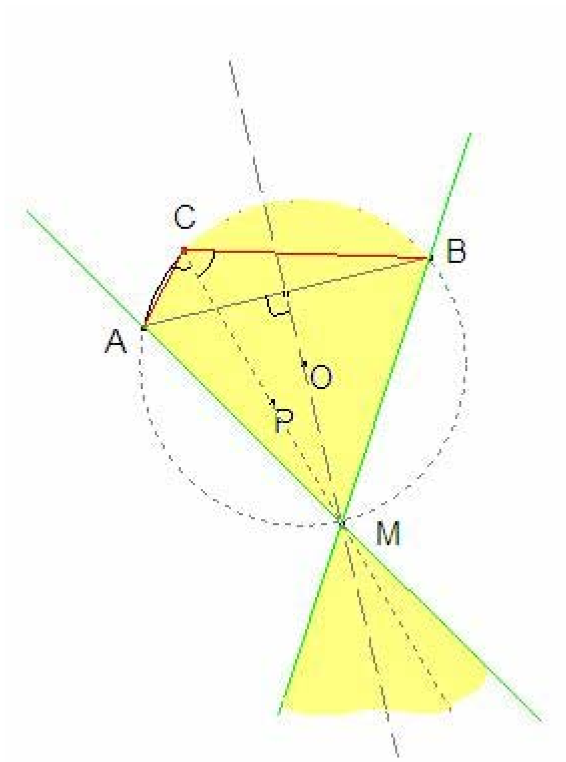
LS “Teresa Gullace”: alcuni studenti della classe 2F hanno risolto entrambi i quesiti e motivato le costruzioni. Sono stati un po’ imprecisi nelle conclusioni.

SM “C.A. Dalla Chiesa”: la risposta del gruppo di studenti della classe 3S presenta qualche carenza nelle motivazioni, giustificabile, come più volte detto, per una scuola media inferiore.

G. Gennari, D. Incletoli, F. Di Paolo, M. Fantauzzi
Classe 2F, Liceo Scientifico "Teresa Gullace"
Roma

Osservando la figura costituita da un arco AB della circonferenza γ e un punto P esterno ad esso, si può notare che tutte le bisettrici degli angoli ACB, i cui vertici C sono punti appartenenti all'arco AB, passano per uno stesso punto M. Il punto M indicato è il punto medio dell'altro arco AB individuato sulla stessa circonferenza γ . Questa proprietà è una conseguenza del teorema sugli angoli al centro e alla circonferenza: angoli alla circonferenza congruenti sottendono archi congruenti.
Per costruire quindi la bisettrice che passi per il punto P è sufficiente tracciare la corda AB e il suo asse in modo da incontrare in M l'arco AB opposto a quello su cui deve trovarsi il punto C.
La retta PM intersecherà l'arco AB nel punto C e sarà la bisettrice dell'angolo ACB.





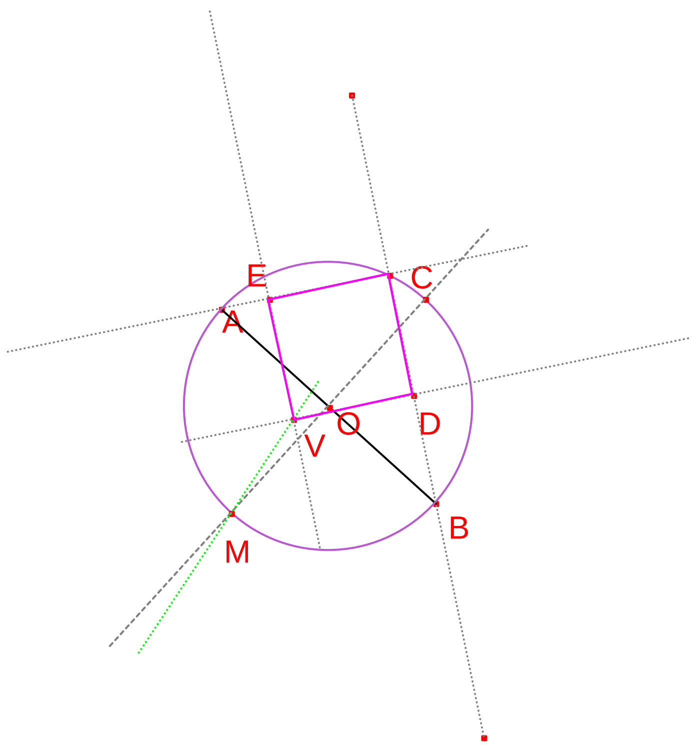
Non sempre tale costruzione è possibile.
Soltanto quando il punto P si trova nella regione di piano colorata in figura costituita dalla regione delimitata dalle rette AM e BM **[[**e dall'arco AB di circonferenza**]] [si devono considerare tutto l'angolo AMB e il suo opposto al vertice]** è possibile far passare la bisettrice di un qualsiasi angolo alla circonferenza che ha vertice su AB per P.

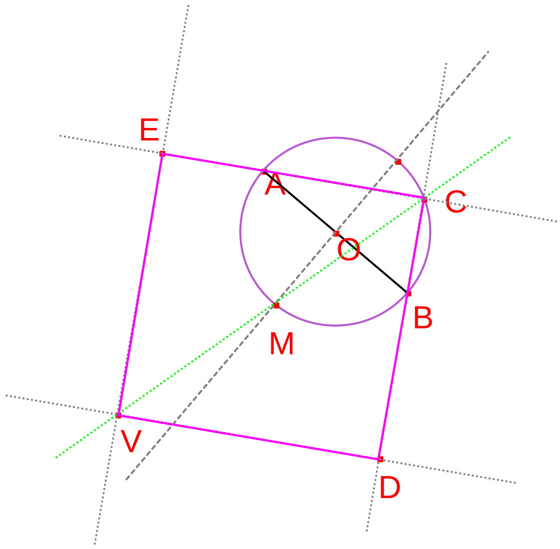
Risposta al quesito n. 2

Utilizzando la costruzione descritta al punto 1 possiamo costruire il quadrato avente vertice in V e due lati (o i loro prolungamenti) a cui appartengono i punti A e B.
I punti A e B devono giacere su due rette perpendicolari tra loro, quindi detto C il loro punto d'intersezione il triangolo ABC è un triangolo rettangolo. E' per tale motivo inscrivibile nella semicirconferenza di diametro AB.

Inoltre il segmento VC, diagonale del quadrato, è anche la bisettrice dell’angolo ACB.
La costruzione del quadrato si basa quindi sui seguenti passaggi:

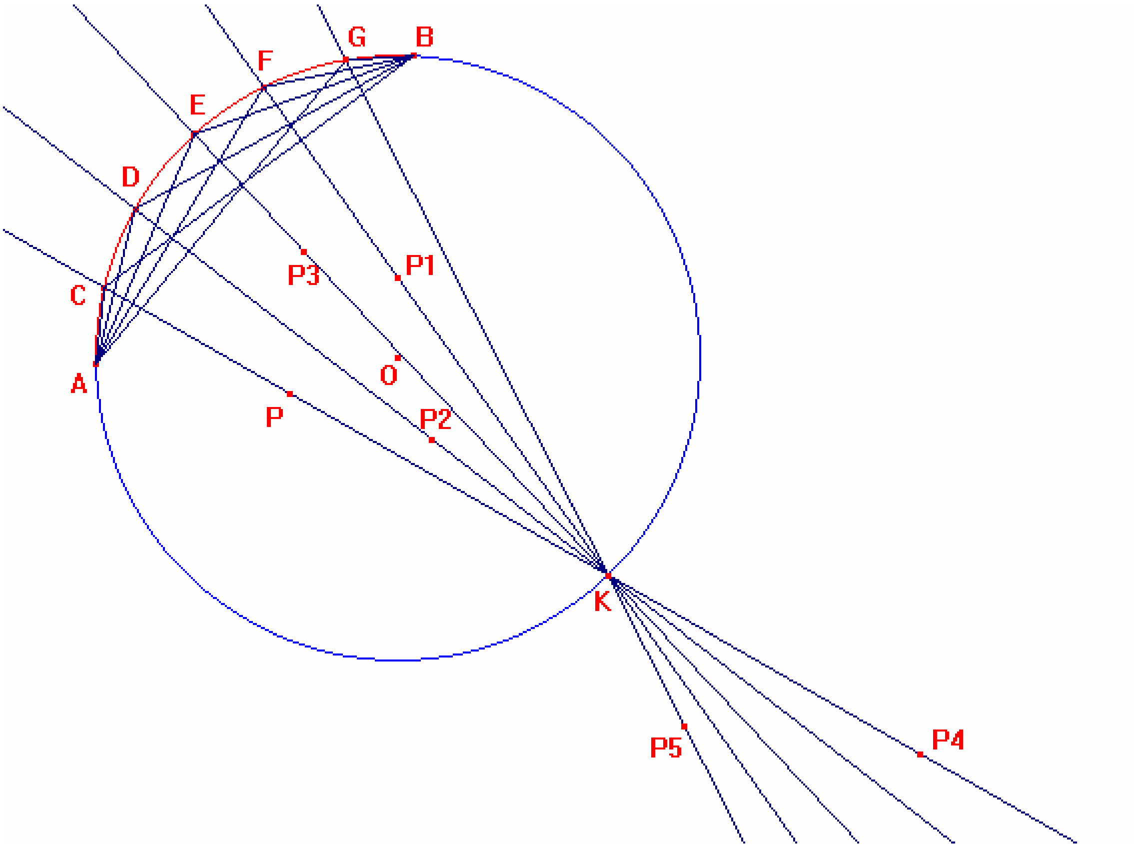
1. disegno della circonferenza di diametro AB
2. disegno dell’asse del diametro AB che incontra in M la semicirconferenza che si trova dalla stessa parte di V
3. disegno della retta VM che incontra in C l’altra semicirconferenza
4. disegno delle rette AC e BC, perpendicolari tra loro.
5. disegno di due rette per V parallele rispettivamente ad AC e BC che le intersecano in D e E
6. disegno del quadrato DVEC richiesto dal testo del problema





Nelle due figure sono riportate le figure ottenute utilizzando la costruzione descritta: si può osservare che se il punto V è interno alla circonferenza di diametro AB allora i punti A **[e]** B apparterranno ai prolungamenti del quadrato, mentre se V è esterno i punti A e B apparterranno ai lati del quadrato **[non è sempre così, dipende dalla scelta della semicirconferenza in cui inscrivere l’angolo ACB]**.
La costruzione è possibile qualsiasi sia la posizione del punto V rispetto ad A e B **[vero, perché?].**

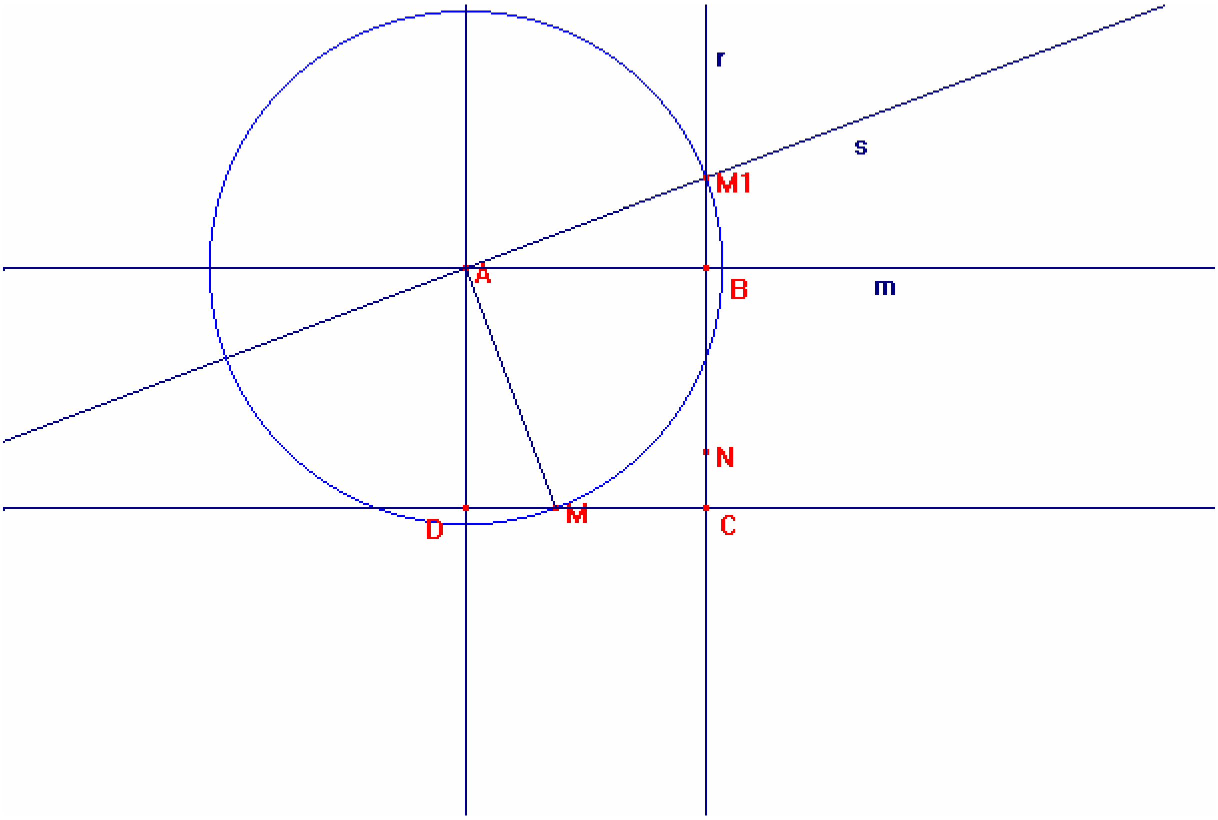
Alfredo Rivero, Chiara Veronesi, Giorgia Tavella, Edoardo Pasquini
Classe 3S Scuola Media “C.A.Dalla Chiesa”
San Genesio ed Uniti (PV)



1. Per trovare le possibili posizioni del punto P sul piano, abbiamo preso alcuni punti appartenenti all’arco AB, costruito gli angoli aventi i vertici in questi punti e i lati passanti per A e B e poi abbiamo costruito le loro bisettrici ; abbiamo notato che tutte le bisettrici si incontravano in uno stesso punto, che abbiamo chiamato K e che questo punto apparteneva alla circonferenza di cui AB è un arco **[è anche punto medio dell’altro arco di estremi A e B]**.
Quindi il punto P, per poter fare la costruzione richiesta, deve appartenere alla parte di cerchio delimitata dalle corde AK e BK e dall’arco AB **[si deve considerare tutto l’angolo limitato dalle semirette KA e KB contenente l’arco AB]** oppure deve appartenere all’angolo di vertice K esterno alla circonferenza e delimitato dai prolungamenti delle corde AK e BK.
Dato un arco AB e un punto P possiamo individuare sull’arco un punto C tale che la bisettrice dell’angolo ACB passi per P, prendendo un punto D sull’arco AB, costruendo l’ angolo ADB e la sua bisettrice, trovando l’intersezione tra questa bisettrice e la circonferenza che chiameremo K. Tracciando una retta KP, questa intersecherà l’arco AB nel punto C richiesto.

2. Per costruire un quadrato partendo da un vertice e da due punti appartenenti ai suoi lati o ai loro prolungamenti abbiamo analizzato la figura partendo dal quadrato stesso. Così facendo abbiamo notato che, costruito un quadrato ABCD, presi sui lati DC e CB i punti M ed N, unendo il vertice A con M si ottiene un triangolo rettangolo ADM che si può far ruotare di 90° attorno al punto A in modo da far coincidere il lato AD con il lato AB. Chiamiamo M1 il corrispondente di M nella

rotazione. Di conseguenza essendo l'angolo DAB retto (perché angolo del quadrato) anche l'angolo MAM1 sarà retto.
Concluse queste osservazioni siamo riusciti ad ottenere un quadrato dato un vertice A e due punti (M ed N) appartenenti ai suoi lati o ai loro prolungamenti in questo modo:



Prendiamo nel piano tre punti A, M ed N. Uniamo A con M e tracciamo una retta "s" perpendicolare in A al segmento AM.
Successivamente con la funzione compasso puntando in A con apertura AM riportiamo la misura del segmento AM su "s".
Troviamo il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta "s" e lo chiamiamo M1.
Tracciamo poi la retta "r" passante per M1 ed N e poi la retta "m " passante per A e perpendicolare alla retta "r". Chiamiamo B l'intersezione tra le rette "r" ed "m". Tracciamo poi una retta passante per A e parallela alla retta "r" e una retta passante per M e parallela alla retta "m". L'intersezione tra queste ultime rette sono i punti D e C, vertici del quadrato ABCD **[non si può ancora affermare che ABCD è un quadrato, occorre dimostrare che ha due lati consecutivi congruenti, in questo caso AD e AB, perché …]**.