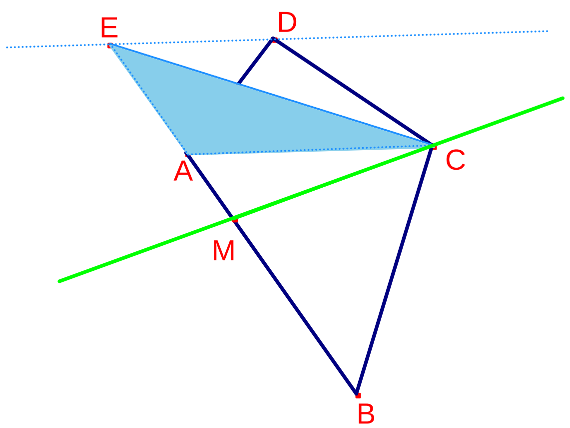
FLAT*landia*

Il problema di Febbraio 2007

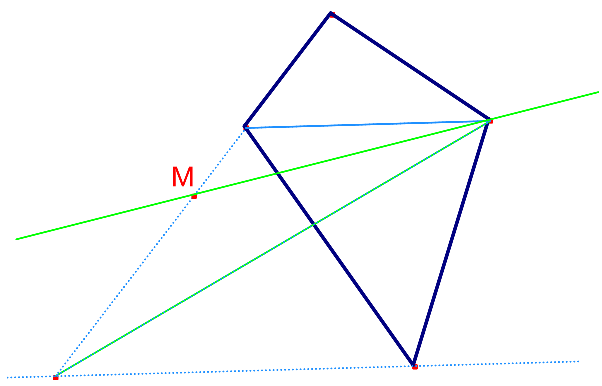
Per dividere in due parti equivalenti la superficie di un triangolo mediante una retta passante per un vertice è sufficiente congiungere quel vertice con un opportuno punto del lato opposto. Quale?

E’ possibile dividere un quadrilatero in due parti equivalenti con una retta passante per un vertice? Come?

Motivare le risposte.



S(MCE) = S(MCDA) = S(MBC)



Se il punto M non è su un lato del quadrilatero, la costruzione non riesce.

Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte, una da una scuola che finora non aveva partecipato, alla quale diamo il benvenuto, e una priva dei dati richiesti per essere inserita nell’elenco.

- **LS “Aristosseno”, Taranto (TA)**
- **LST,ITI “Berenini”, Fidenza (PR)**
- **LS “G.C. Vanini”, Casarano (LE)**
- **SM “G.B.Tiepolo”, Milano (MI)**

Nel problema di questo mese si chiedeva di dividere un quadrilatero in due parti equivalenti mediante una retta passante per un suo vertice, dopo aver ricordato come si riesce ad ottenere lo stesso risulato in un triangolo.
Si precisa che per quadrilatero, senza altri attributi, si deve intendere un generico quadrilatero convesso.
Si ribadisce inoltre che le costruzioni geometriche debbono essere eseguibili con riga e compasso anche quando si fa ricorso allo strumento informatico, quindi non ammettono il trasporto di misure derivate da calcoli aritmetici.
Le risposte ai problemi di FLATlandia riservano spesso delle sorprese: avevamo pensato che il primo quesito avrebbe indirizzato gli studenti a trasformare il generico quadrilatero in un triangolo, come mostra la nostra costruzione allegata al testo, per cercare poi la risposta al problema individuando il vertice più opportuno per il quale far passare la retta richiesta. Non sempre è andata così nelle risoluzioni ricevute.
Esaminiamo brevemente quelle che presenteremo:

-Parrotta Lorenzo, LS “G.C. Vanini”, dopo aver risolto con prontezza il primo quesito, non ha utilizzato subito la trasformazione suddetta nel quadrilatero, ha seguito un percorso meno immediato che ha portato alla risoluzione senza incontrare la difficoltà della scelta del vertice più idoneo.

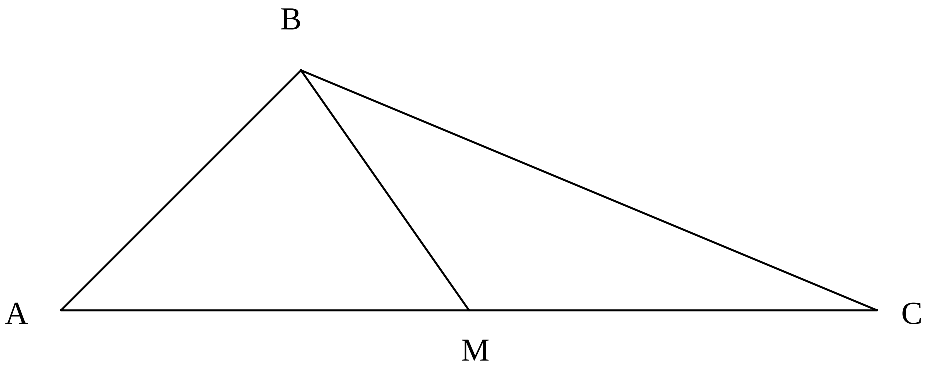
- LST “Berenini”, Nicola Eslava e Gabriele Artusi hanno risolto la prima parte ricorrendo a un ragionamento laborioso e non completamente giustificato. Nella seconda, hanno trasformato subito il quadrilatero in un triangolo individuando la retta cercata, senza chiedersi se la soluzione sia possibile per ogni scelta del vertice. Presenteremo la seconda parte.

- LS “Aristosseno”, gli studenti della classe 2M hanno considerato, nella seconda parte, solo quadrilateri particolari, trovando per i trapezi una interessante costruzione. Proporremo questa parte della loro risposta.

Ci dispiace di non poter presentare alcuna risposta delle scuole medie inferiori, in quanto abbiamo riscontrato in esse varie imprecisioni di procedimento.

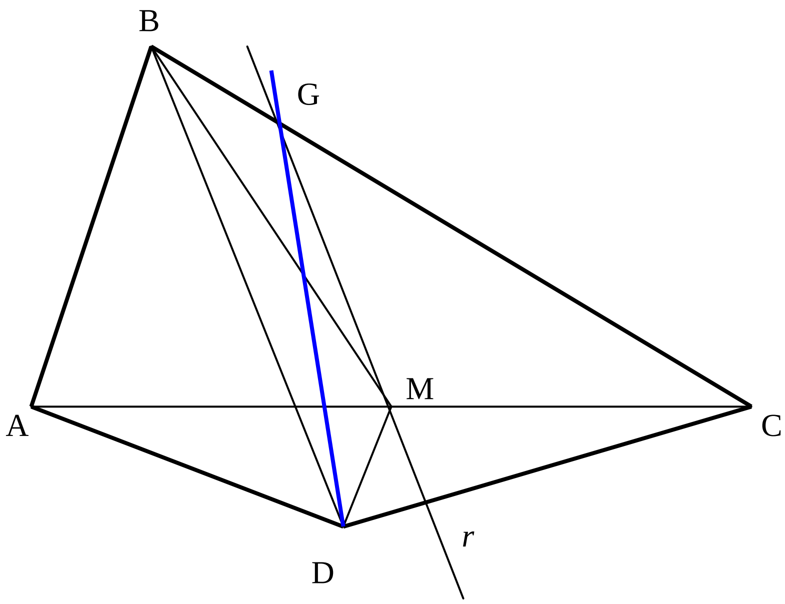
Nota: Con la doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.

Parrotta Lorenzo
Classe 2A Sperimentale
Liceo scientifico "G.C. Vanini", Casarano (LE)



- Per dividere in due parti equivalenti un triangolo è sufficiente tracciare un segmento che va da un vertice qualsiasi al punto medio del lato opposto (la mediana). In tal modo i due triangoli che si formano hanno base ed altezza congruenti, quindi sono equivalenti.

- Per dividere la superficie di un quadrilatero in due parti equivalenti, si estende il ragionamento.



Consideriamo ad esempio un quadrilatero qualunque ABCD, tracciamo la diagonale AC e di quest'ultima il suo punto medio M. Si ha che il triangolo AMD è equivalente al triangolo DMC e il triangolo ABM è equivalente al triangolo MBC per i motivi precedentemente esposti, quindi il quadrilatero ABMD è equivalente al quadrilatero BMDC perché equicomposti.
Tracciamo ora la parallela *r*, passante per M, alla diagonale DB, che incontra CB in G. Il triangolo DMB è equivalente al triangolo DGB: il quadrilatero ABGD è equivalente al quadrilatero ABMD, perché rispettivamente somme tra il triangolo ABD e il triangolo DBG, tra il triangolo ABD e il triangolo DMB. Allo stesso modo il quadrilatero DMBC è equivalente al triangolo DGC perché rispettivamente differenze tra il triangolo DBC e il triangolo DMB, tra il triangolo DBC e il triangolo DBG.
Per transitività il triangolo DGC è equivalente al quadrilatero ABGD.
Il quadrilatero ABCD è stato così diviso in due parti equivalenti, ABGD e DGC mediante la retta cercata DG. Q.E.D.

Gabriele Artusi, Nicola Eslava
Classe 2B, Liceo scientifico tecnologico
ITI "Berenini, Fidenza (PR)

1. [[…]]

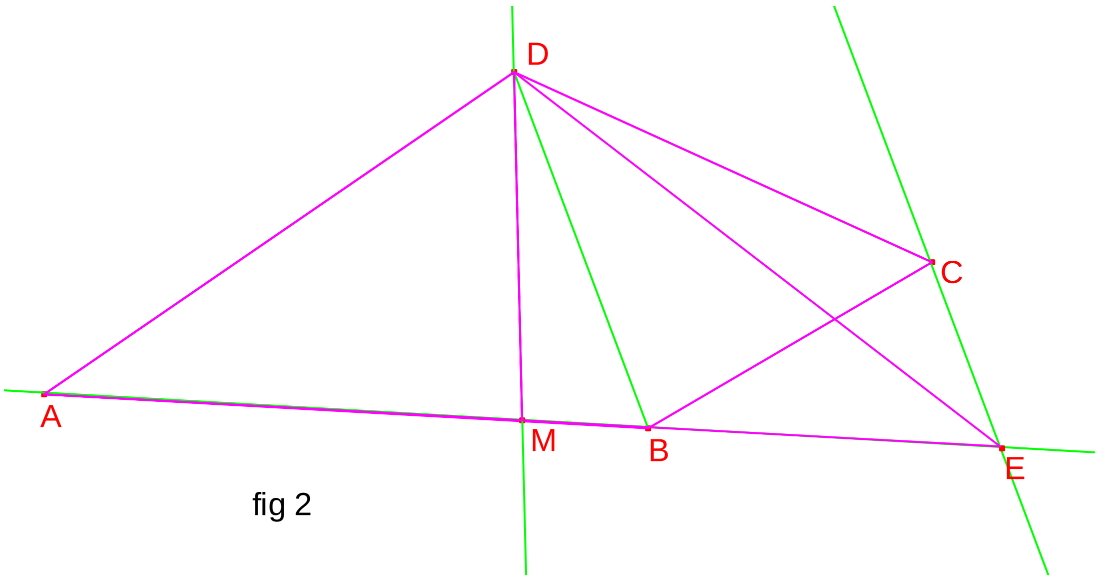


fig 2

2. Se in un quadrilatero ABCD si traccia la diagonale DB e la parallela a DB passante per il vertice C fino a farla incontrare con il prolungamento del lato AB nel punto E, il triangolo AED e il quadrilatero ABCD sono equivalenti. Infatti i due poligoni sono composti dalla parte comune ABD e dai due triangoli BDE e BCD, che sono equivalenti perché hanno la stessa base BD e altezze congruenti (perché i vertici opposti alla base comune stanno sopra una medesima parallela a DB). Si traccia la retta passante per il vertice D che interseca AE nel punto medio M. Quindi per la proprietà transitiva il triangolo AMD e il quadrilatero MBCD sono equivalenti (vedi fig. 2).

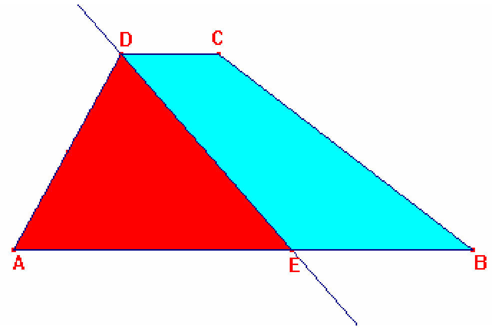
Classe 2M, Liceo scientifico “Aristosseno”
Taranto (TA)

1. [[…]]

2.

[[…]]

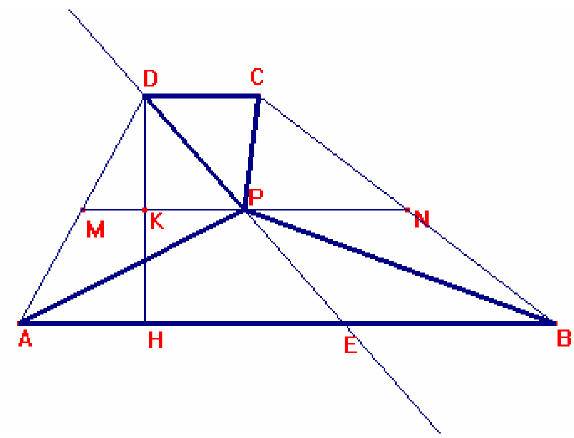
Un trapezio qualunque viene diviso in due parti equivalenti mediante una retta condotta da uno dei suoi vertici e passante per il punto medio del segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui (figura qui sotto)

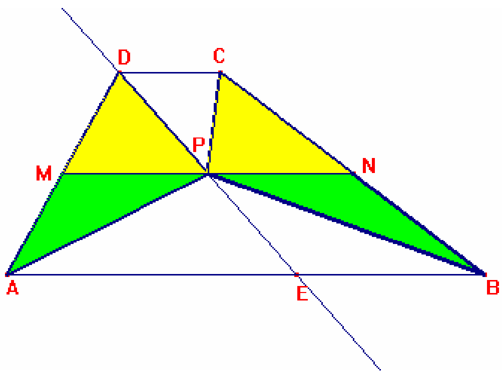


Infatti, tracciato il segmento MN che congiunge i punti medi dei lati obliqui AD e BC, sia P il punto medio di MN. La retta DP divide allora il trapezio in due parti: il triangolo AED ed il quadrilatero EBCD.
Osserviamo che i triangoli CDP ed ABP hanno come basi le basi del trapezio e come altezza la metà dell’altezza del trapezio (questo per il teorema di Talete: DM = MA quindi DK = KH).
La somma delle aree di questi due triangoli è perciò pari alla metà dell’area del trapezio stesso:

$$S(CDP) + S(ABP) = \frac{1}{2} S(ABCD)$$

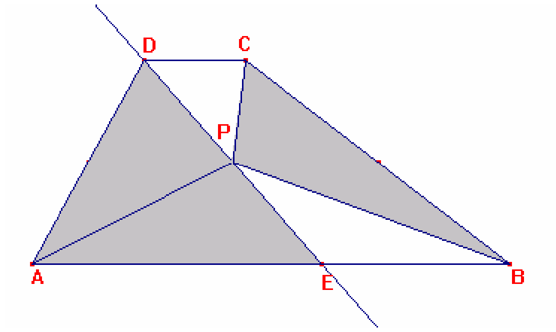
Per differenza allora, la somma delle aree dei triangoli APD e BPC è anch’essa pari alla metà dell’area del trapezio: $S(APD) + S(BPC) = \frac{1}{2} S(ABCD)$





Ma i triangoli APD e BPC sono equivalenti fra loro : APD è infatti composto da APM ed MPD che sono rispettivamente equivalenti ai triangoli BPN ed NPC (avendo basi congruenti e congruenti altezze) che formano BPC.

Inoltre risulta S(APD) = S(AEP) poiché P è punto medio di DE (per il teorema di Talete) e quindi i triangoli hanno basi congruenti e stessa altezza.



In conclusione

$$S(APD)+S(APE)=S(APD)+S(BPC)=\frac{1}{2}\,S(ABCD).$$