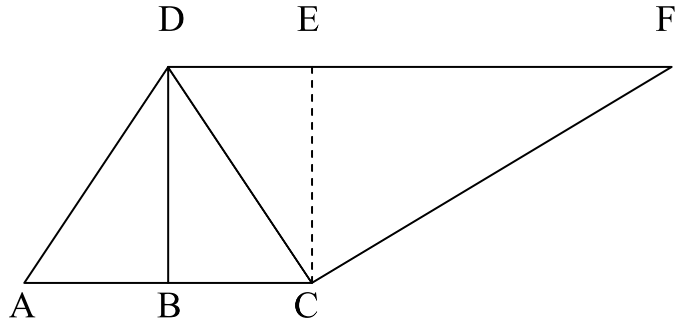
Leone Cesare Cimetta
Classe 1F, LS “Leonardo da Vinci” TV

I Soluzione:

1) [manca la descrizione e relativa giustificazione della figura]
:



2) Siano a e b le misure dei cateti dei due triangoli rettangoli scaleni fra loro congruenti e sia c la misura della loro ipotenusa: $a = \overline{AB} = \overline{BC}$, $b = \overline{BD} = \overline{CE}$, $c = \overline{AD} = \overline{CD}$. Inoltre, $a = \overline{DE} = \overline{BC}$, perché lati opposti del rettangolo BCED. Come si può evincere dalla figura, la misura della proiezione EF si può facilmente ottenere tramite il secondo teorema di Euclide, applicato al triangolo CDF, rettangolo in C per ipotesi: si ha infatti che DE : EC = EC : EF, quindi $a : b = b : \overline{EF}$; dunque, $\overline{EF} = \frac{b^2}{a}$.
Per il teorema di Pitagora,

$$\overline{CF} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{a^2}} = \sqrt{b^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2}} = b \cdot \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{bc}{a}$$

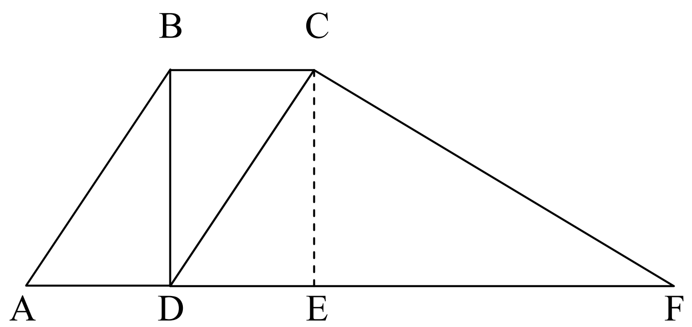
Il rapporto $\frac{\overline{CF}}{\overline{DA}}$ (i lati obliqui del trapezio) è dunque uguale a

$\frac{\frac{bc}{a}}{c} = \frac{b}{a}$, cioè al rapporto fra i cateti dei triangoli rettangoli scaleni congruenti. Tale risultato può anche essere ottenuto avvalendosi delle proprietà della similitudine: dal momento che, in ogni triangolo rettangolo, i due triangoli in cui esso è diviso dall’altezza relativa all’ipotenusa sono simili, è sufficiente osservare che il rapporto di similitudine fra i triangoli DEC ed ECF è pari a CE/DE, cioè a b/a.

3) I lati del trapezio sono AC, CF, FD, DA, e quindi le loro misure, in funzione di a, b e c, sono rispettivamente uguali a $2a$, $\frac{bc}{a}$, $\frac{c^2}{a}$, c. Perché essi siano interi, è innanzi tutto necessario che a, b e c siano una terna pitagorica (intera), inoltre bc e c^2 devono essere divisibili per a. Questo si rivela impossibile per una terna primitiva, dunque quella cercata è una derivata. Poiché le precedenti condizioni siano soddisfatte, tale terna può essere soltanto una derivata che abbia i termini con massimo comune

divisore $\sqrt{a}$: si consideri, per esempio la terna primitiva m, n, p: si moltiplichi ogni membro della terna per m, ottenendo così la nuova terna pitagorica m^2, mn, mp; si assegnino quindi i valori a = m^2, b = mn ed infine c = mp. Risulterà dunque $\frac{bc}{a} = np$, numero naturale per le premesse. Per quanto riguarda il lato che misura $\frac{c^2}{a}$, sappiamo che tale misura è uguale a p^2, intero anch'esso per le premesse.

II Soluzione



Questa variante della figura si può facilmente ottenere tramite una rotazione del trapezio BCFD, rettangolo in BDF ed in CBD, intorno all'asse del lato BD. Il rapporto fra i lati obliqui resta invariato, come resta d'altronde invariata la condizione dei lati, enunciata nella soluzione precedente, necessaria perché essi siano interi; tali lati [AB, BC, CF, AF] misurano, in questa figura, $c, a, \frac{bc}{a}, \frac{a^2+c^2}{a}$.

III Soluzione

[[…]]