PROBLEMI
DI PRIMO E SECONDO GRADO
CON ATTENZIONE AI CASI LIMITE

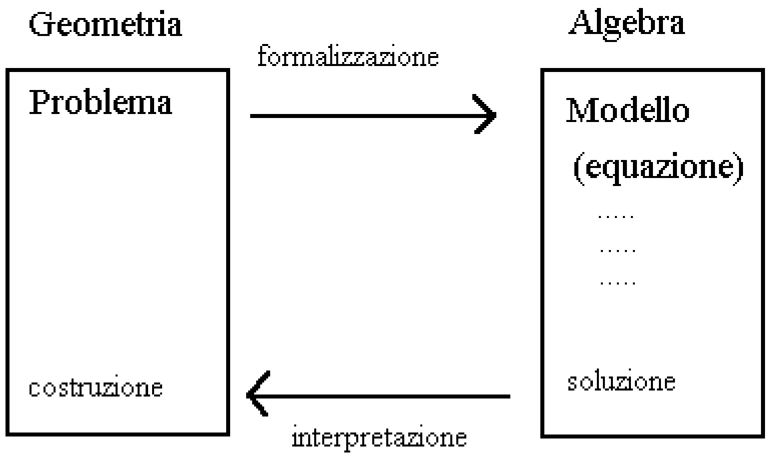
Scuola secondaria di 2º grado
Classe terza

Grazia Landini
Barbara Magnani
Milena Rabbi
Maria Ragagni
Roberto Ricci

Indice

INTRODUZIONE

Si è consolidata, nell'insegnamento attuale della matematica in ogni ordine e grado, la tendenza ad affrontare i problemi geometrici "algebrizzandoli", cioè traducendoli in linguaggio algebrico.



Alternativamente, in modo tradizionale, un problema geometrico può essere risolto direttamente mediante i soli strumenti geometrici:

"......una soluzione completa importa di :

1. *indicare la costruzione degli elementi incogniti richiesti*
2. *dimostrare l'esattezza*
3. *discutere le soluzioni, cioè stabilire i limiti e le condizioni (non contenute esplicitamente nei dati) della loro esistenza, contandone il numero nei singoli casi.*"

(da A. Sabbatini*, Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici,* in F.Enriques*, Questioni riguardanti le matematiche elementari,* Zanichelli, Bologna,1912)

Tale metodo, comunemente detto sintetico, si articola essenzialmente in quello dei luoghi geometrici e quello delle trasformazioni.

Col metodo dei luoghi, qui riproposto con l'uso di Cabri II, si considera separatamente ciascuna delle condizioni imposta dal problema costruendone la figura geometrica rappresentativa: le intersezioni di tali figure forniscono l'insieme delle soluzioni del problema;

"*....nella geometria elementare si considera risolubile un problema le cui soluzioni possono conseguirsi con i soli mezzi di cui si dispone, cioè la riga e il compasso*" (da A. Sabbatini*, Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geo-*

metrici, in F.Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna,1912).
Una costruzione si può tuttavia realizzare anche mediante:

- solo compasso (Mascheroni 1750-1800 mostrò che è equivalente a riga-compasso);
- "piegamento della carta" (è più potente: ad esempio si può risolvere il problema classico della duplicazione del cubo, non risolubile con riga e compasso);
- Cabri vs.1.7;
- Cabri II.

Bibliografia:

Enriques-Amaldi, *Elementi di geometria, Parte prima*, Cap. 6 Zanichelli, 1987 Bologna

idem, *Parte seconda* pag.107: Digressione sui metodi sintetici per la risoluzione dei problemi geometrici

A. Sabbatini, *Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici, in F.Enriques, Questioni riguardanti le matematiche elementari,* Zanichelli, Bologna

Palatini-Faggioli, *Elementi di geometria, vol.2,* Cap.XVII Ghisetti e Corvi,1979 Milano

Vasilyev-Gutenmacher, *Straight lines and curves*, Cap 2 Mir, 1978 Moscow

PRESENTAZIONE

La scelta di questo argomento, che ci risulta non molto trattato nella letteratura di Cabri, consente di approfondire mediante un nuovo strumento informatico un argomento tradizionale: i problemi di geometria piana risolvibili col solo uso di riga e compasso, detti di I e II grado poiché affrontati algebricamente conducono a equazioni di quel grado. Senz'altro il metodo dei luoghi per risolvere problemi geometrici è quello meglio schematizzabile e spesso più praticato con successo.
Consapevoli dell'importanza delle costruzioni geometriche per la risoluzione di problemi geometrici, si vuole perseguire qui l'obiettivo di ridurre le difficoltà che gli studenti incontrano sia a costruire figure sufficientemente generali, sia a individuare gli elementi variabili, sia a visualizzare le relazioni tra questi, sia, infine, in particolare nei problemi con discussione, ad analizzare i casi limiti. Una delle cause principali di tali difficoltà è la limitata capacità di costruirsi una rappresentazione mentale dinamica della figura che descrive il problema, causa che Cabri può senz'altro aiutare a rimuovere.
I materiali che seguono, un canovaccio sulla base del quale il docente interessato può costruire il suo personale lavoro in classe, possono inserirsi in modo organico almeno nei programmi di un liceo; in particolare i riferimenti a conoscenze di geometria analitica possono essere tranquillamente eliminati senza modificarne l'impostazione.
L'interazione docente/discente qui proposta si articola nelle seguenti fasi:

- enunciazione del problema, lavoro all'elaboratore sulla base di una scheda con indicazioni per costruire e visualizzare il luogo mediante la voce `Luogo` oppure mediante l'opzione `Traccia` applicata a uno o più punti,
- proposta di congetture sulla forma del luogo e loro dimostrazione,
- realizzazione di una macro che costruisca il luogo nel caso sia una retta o una circonferenza,
- risoluzione di problemi senza e con discussione con eventuale aiuto ancora di Cabri.

E' consigliabile far precedere le attività descritte da un primo approccio all'ambiente Cabri nel quale esemplificare applicazioni della voce `Luogo` e dell'opzione `Traccia` applicato a un punto, nonché realizzare una macrocostruzione. Tuttavia, per la sua semplicità, l'analisi del primo luogo in questione, opportunamente guidata dall'insegnante, può essere essa stessa occasione per un primo approccio a Cabri.

PROBLEMI DI PRIMO GRADO

1. Qual è il luogo dei punti P tali che PA = PB?

Non si approfondisce il luogo, l'asse di AB, perché già comunemente assai trattato.

2. Qual è il luogo dei punti P tali che d(P,r) = k?

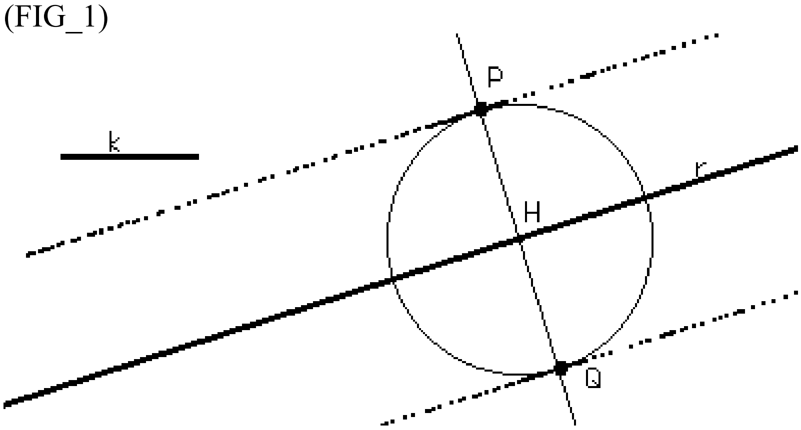
I fase: (in laboratorio)
Si usa Cabri per costruirlo

Scheda con traccia di lavoro
- Crea una retta r e un segmento k, fuori da essa;
- costruisci un punto H sulla retta r e la perpendicolare da H a r;
- costruisci sulla perpendicolare due punti P e Q distanti k da H;
- costruisci ora il luogo dei punti P e Q al variare di H sulla retta r.

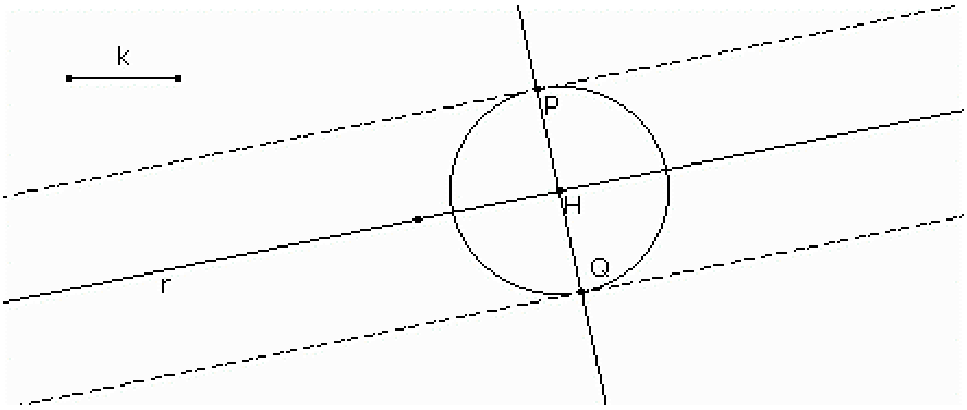
Che tipo di figura ottieni?

Se si disegna il luogo mediante l'opzione `Traccia` applicata ai punti P e Q, si otterranno figure come ad esempio

(FIG_1)

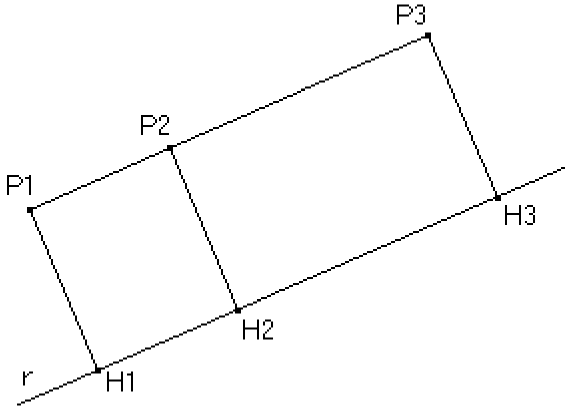


Se invece ci si serve della voce `Luogo`, si potrà ottenere una figura come la seguente:



II fase: dimostrazione

Dai risultati di laboratorio è emerso che il luogo di punti sembra essere costituito da due rette. Sebbene sia piuttosto facile convincersene, si può anche fornire una dimostrazione, come la seguente, che dia completa certezza.



(FIG_2)

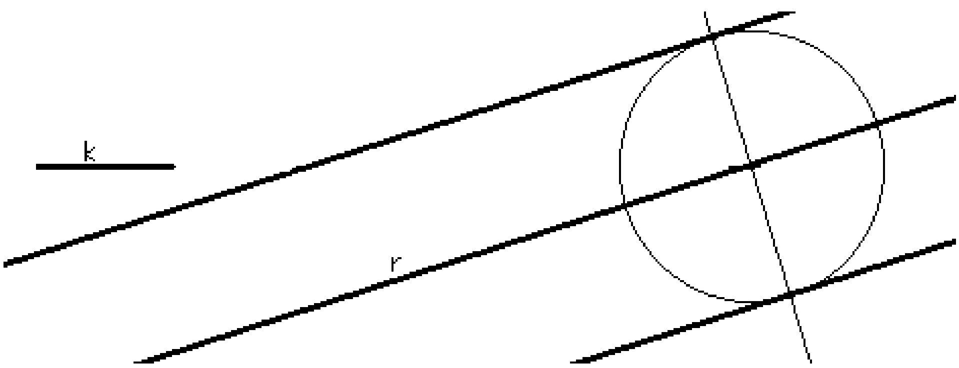
Si considerino tre punti distinti H_1, H_2, H_3 sulla retta r e, sulle perpendicolari da questi a r, si costruiscano in uno stesso semipiano i punti P_1, P_2 e P_3 tali che $P_1H_1 = P_2H_2 = P_3H_3 = k$. Si deve dimostrare che i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati. Si consideri il quadrilatero $P_1H_1H_2P_2$: si tratta di un rettangolo poichè è un parallelogramma con un angolo retto (infatti P_1H_1 e P_2H_2 sono due lati opposti paralleli e congruenti per costruzione; inoltre l'angolo $P_1H_1H_2$ è retto per costruzione). Si consideri poi il quadrilatero $P_1H_1H_3P_3$; analogamente si dimostra che si tratta di un rettangolo. Quindi i tre punti $P_1P_2P_3$ sono allineati.

Scheda con problema a risposta aperta
Prova a eseguire una dimostrazione analitica.
Quale sistema di riferimento conviene scegliere?
Se si sceglie opportunamente il sistema di riferimento il calcolo risulta banale.

III fase: costruzione macro (in laboratorio)

In laboratorio si costruiscono le rette per P e Q parallele a r, verificando poi che il luogo tracciato coincide con quelle.
Si può realizzare una macro che, data una retta r e un segmento di lunghezza k, costruisca le due rette che distano k da r. Con Cabri II, utilizzando la costruzione precedentemente realizzata, la macro non risulta incoerente, diversamente da quanto accade con Cabri vs.1.7 che richiede venga indicato anche il punto H sulla retta r. Questa novità di Cabri II richiede una particolare riflessione.

Scheda con traccia di lavoro
Più appropriatamente, costruisci H come intersezione tra la retta r e, ad esempio, la retta congiungente gli estremi del segmento lungo k (ATTENZIONE: la costruzione fallisce quando retta r e segmento sono paralleli) oppure il suo asse (ATTENZIONE: la costruzione fallisce quando retta r e segmento sono perpendicolari); costruisci poi la perpendicolare da H a r, costruisci sulla perpendicolare i due punti P e Q distanti k da H, costruisci le due rette per P e Q parallele a r; crea la macro indicando la retta r e il segmento lungo k come oggetti iniziali, le due rette parallele a r come oggetti finali.



(FIG_3)

IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

Si utilizzi il luogo per risolvere alcuni problemi.

1. Dati due punti A e B e una retta r determinare i punti equidistanti dai punti dati e aventi una distanza assegnata d dalla retta r. Discutere i vari casi.
2. Costruire un triangolo dati due lati a e b e l'altezza h relativa al lato a. (Consiglio: costruire il luogo dei punti distanti h dalla retta contenente il lato a e intersecarlo con le circonferenze di raggio b e centro nei due estremi del lato a)
3. Qual è il luogo dei vertici C di un triangolo assegnati i vertici A e B e l'area?
4. Qual è il luogo dei centri delle circonferenze di raggio assegnato e tangenti a una retta data?

3. Qual è il luogo dei punti P tali che d(P,r) = d(P,s)?

Non si approfondisce il luogo, le bisettrici delle due rette date, perché già comunemente assai trattato.

4. Qual è il luogo dei punti P tali che d(P,r) + d(P,s) = k?

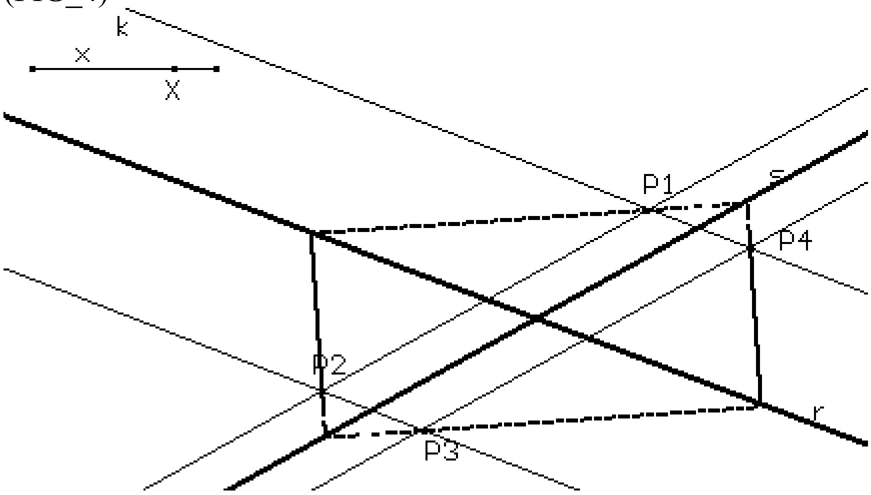
I fase: (in laboratorio)

Scheda con traccia di lavoro
- Crea un segmento AB lungo k e costrusci un punto X su AB;
- costruisci il luogo L_r dei punti distanti AX da r ed il luogo L_s dei punti distanti XB da s (**suggerimento**: usa la macro costruita precedentemente per *il luogo dei punti P del piano tali che d(P,r) = k*);
- al variare di X su AB il luogo dei punti di $L_r \cap L_s$ è il luogo cercato.

Sembra si tratti di un rettangolo!

Si otterrà infatti ad esempio una figura come la seguente

(FIG_4)

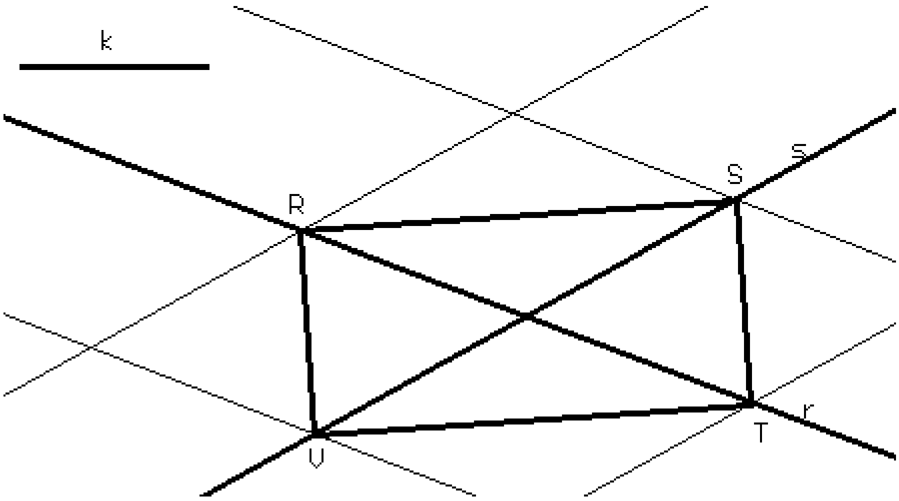


II fase: dimostrazione

Scheda con problema a risposta aperta
Prova a dimostrare che si tratta di un rettangolo trovando l'equazione del luogo in un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale.
Che sistema di riferimento hai scelto?
Quale può essere il sistema più "furbo"?
Se non l'hai gia' fatto, scegli come sistema di riferimento quello in cui l'asse delle ascisse coincide con una delle due rette e l'origine coincide con il loro punto di intersezione.
Come diventa in questo caso l'equazione del luogo?
Hai notato che ci sono due valori assoluti?
Discuti i valori assoluti distinguendo i 4 casi.
Come puoi dimostrare che i segmenti che ottieni appartengono a
rette perpendicolari fra loro?
Trova poi la misura della diagonale del rettangolo in funzione del valore di k e del coefficiente angolare non nullo.

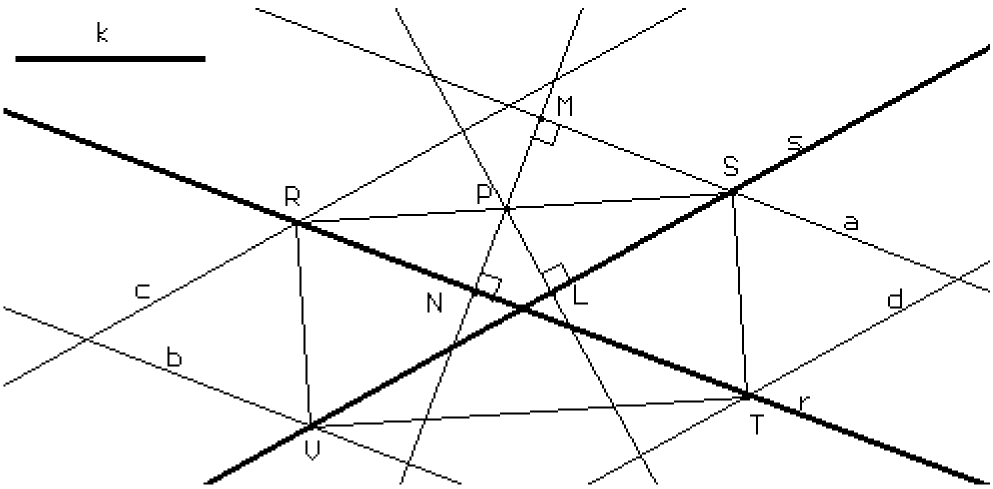
Si dimostra in modo sintetico che il luogo è costituito dai quattro lati di un rettangolo le cui diagonali appartengono alle rette r ed s.

(FIG_5)



Si costruiscano le rette a e b parallele ad r e distanti da essa k. Si indichi con S l'intersezione delle rette a ed s, con V l'intersezione delle rette b ed s. Si costruiscano le rette c e d parallele ad s e distanti da essa k. Si indichi con R l'intersezione delle rette c ed r, con T l'intersezione delle rette d ed r.
Si dimostra ora che il luogo è costituito dai lati del rettangolo RSTV.

(FIG_6)



La retta RS è diagonale di un rombo i cui lati sono a, s, r, c; quindi RS è bisettrice delle rette a e s. Preso dunque un punto P sul segmento SR si traccino da P le perpendicolari ad a, ad r e ad s e si indichino con M, N e L i ripettivi piedi; si ha

PM=PL e quindi PL+PN = MP+PN = MN=k. Si è così dimostrato che tutti i punti del segmento SR soddisfano la condizione di appartenenza al luogo. Analogamente si può dimostrare che i punti dei segmenti ST, TV ed RV appartengono al luogo. Il quadrilatero SRVT è un rettangolo poichè le bisettrici RS e ST sono perpendicolari tra loro, così come le altre coppie di lati.

III fase: costruzione macro (in laboratorio)

Scheda con traccia di lavoro

Costruisci una macro che, dati un segmento lungo k e due rette r e s come oggetti iniziali, produce come oggetti finali i lati del rettangolo luogo geometrico dei punti P tali che d(P,r)+d(P,s)=k.

Ad esempio:

- Costruisci il luogo d(P,r)=k e le intersezioni con s;
- costruisci il luogo d(P,s)=k e le intersezioni con r;
- crea i segmenti congiungenti i vertici del rettangolo così ottenuti.

IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

Esercizi proposti

- Problemi senza discussione

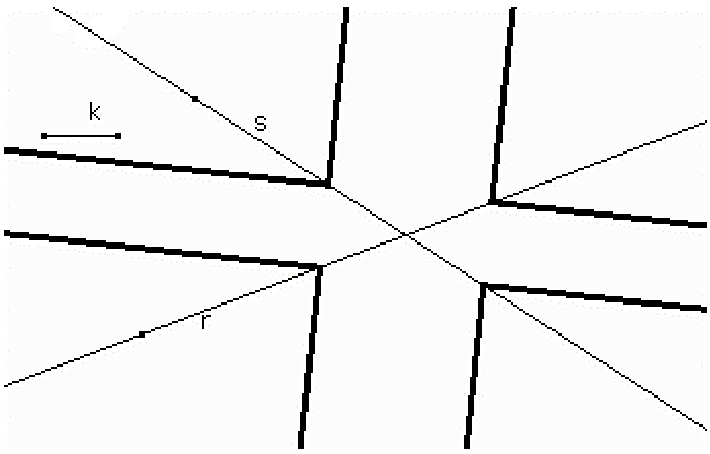
1. Dato il triangolo isoscele ABC con AC= BC= 4u e AB=3u, si prenda sul lato BC un punto P tale che
$$PH + PK = 2\sqrt{3}\,u,$$
dove H e K sono le proiezione di P rispettivamente sui lati AB e AC.
2. Dato un triangolo isoscele ABC con gli angoli alla base di 30° si consideri il punto P sul lato AC = 4u in modo che PH + PK = 3u dove H e K sono le proiezione di P rispettivamente sul lato BC e sul prolungamento di AB.
3. Dato un triangolo rettangolo, a partire da un punto sull'ipotenusa e tracciando le parallele ai cateti, si costruisca un rettangolo di perimetro assegnato.

- Problemi con discussione

1. Dato il triangolo rettangolo ABC retto in A, con AB = 4u e AC = 3u, si determini sull'ipotenusa un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P sui cateti si abbia PH + PK = k, con k > 0.

5. **Qual è il luogo dei punti P tali che |d(P,r) – d(P,s)| = k?**

Le costruzioni sono analoghe alle precedenti ove si costruisca X sulla retta contenente il segmento di lunghezza k. Il luogo è costituito dai prolungamenti dei lati del rettangolo ottenuto come luogo dei punti P tali che d(P,r) + d(P,s) = k .
Per tali prolungamenti, e quindi realizzare una macro in cui siano oggetti finali, si possono costruire da ciascun vertice del rettangolo di cui si è detto, le semirette passanti per i punti simmetrici, rispetto a tale vertice, degli altri due estremi dei lati a cui quel vertice appartiene.



(FIG.7)

6. **Qual è il luogo dei punti P tali che m·d(P,r) =n·d(P,s)?**

I fase: (in laboratorio)

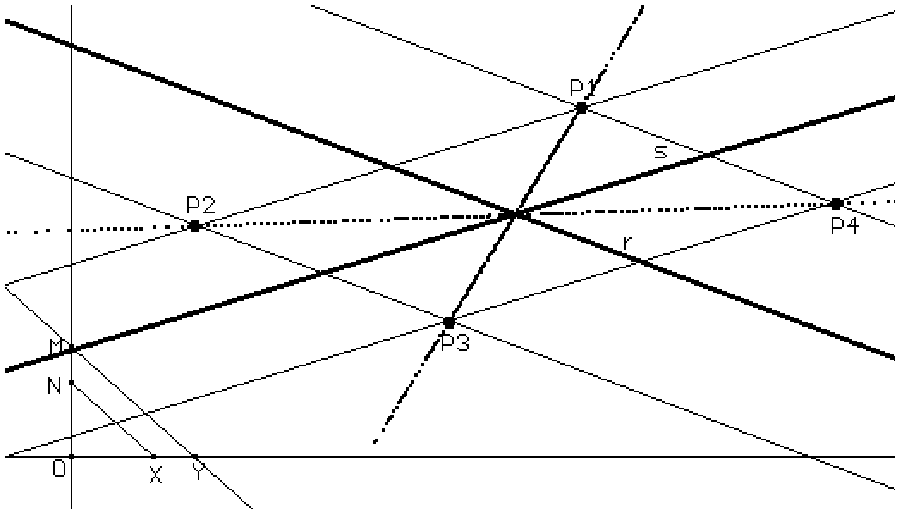
Scheda di lavoro guidato

- Crea le rette r e s;
- costruisci il luogo dei punti che distano d da r;
- costruisci il luogo dei punti che dista md/n da s;
- costruisci le intersezioni P_1, P_2, P_3, P_4 tra questi due luoghi;
- al variare di d il luogo descritto dai punti P_1, P_2, P_3, P_4 lascia traccia del luogo cercato.

Per realizzare il terzo passo del procedimento indicato, si possono seguire le seguenti istruzioni per costruire due segmenti proporzionali ai numeri m ed n:
- Costruisci due rette perpendicolari che si intersecano in un punto O;
- costruisci sulla retta verticale fissa due punti M e N tali che OM=m e ON=n;
- costruisci un punto X variabile sulla retta orizzontale;
- crea il segmento di estremi N e X;
- costruisci la parallela ad esso per M;
- costruisci l'intersezione Y di questa retta con quella rizzontale.

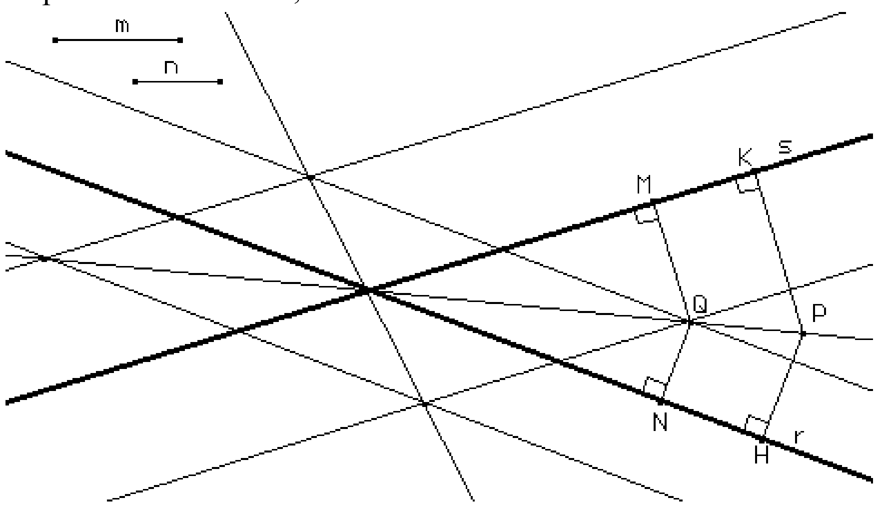
Per il teorema di Talete OX/OY=n/m.

Selezionando l'opzione `Traccia` per i punti P otterrà una figura come la seguente.
Sembrano due rette del fascio a cui appartengono r e s!
(FIG_8)



II fase: dimostrazione

Si vuole dimostrare che il luogo è costituito dalle rette che contengono le diagonali del parallelogramma ottenuto conducendo le due parallele alla retta r, alla distanza n, e le due parallele alla retta s, alla distanza m.
(FIG_9)



Se Q è un vertice del parallelogramma allora, per costruzione, QM=m e QN=n. Se P è allineato con Q e col centro O del parallelogramma allora PH/QN =PO/QO = PK/QM e quindi, come si voleva dimostrare, PH/PK = QN/QM = n/m.

III fase: costruzione macro (in laboratorio)

Scheda di lavoro guidato
Realizza una macro che, date due rette r e s e due segmenti di lunghezza m ed n, costruisca le due rette del luogo precedentemente descritto.
Ad esempio:
- Costruire il luogo d(P,r)=n;
- costruire il luogo d(P,s)=m;
- costruire i punti comuni a questi due luoghi;
- creare le rette diagonali del parallelogramma che ha per vertici i punti così ottenuti.

IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

- Senza discussione.

1. In una circonferenza di raggio 1 inscrivere un rettangolo ABCD in modo che il rapporto fra i lati sia 2.
2. In una circonferenza di raggio 1 tangente a due rette OX e OY perpendicolari fra loro, determinare un punto P tale che $\frac{PH}{PK} = \frac{1}{2}$ dove H e K sono le proiezioni di P rispettivamente su OX e OY.
3. E' dato il quadrato ABCD di lato 1. Determinare sui lati del quadrato i punti P tali che sia 1/2 il rapporto fra la distanza PH dalla diagonale AC e la distanza PK dal lato AB.
4. Nel triangolo equilatero ABC inscrivere un quadrato con un lato su BC.

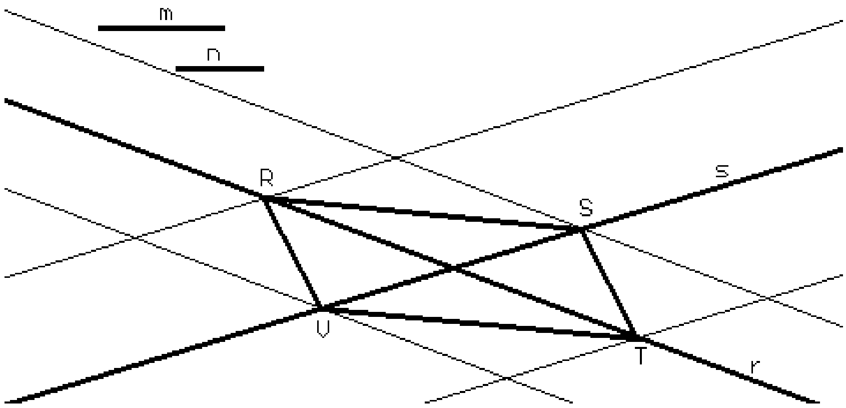
- Con discussione.

1. In una circonferenza di raggio r inscrivere un rettangolo ABCD in modo che il rapporto fra i lati sia k.
2. E' dato il quadrato ABCD. Determinare sui lati del quadrato i punti P tali che sia m/n il rapporto fra la distanza PH dalla diagonale AC e la distanza PK dal lato AB.
3. Internamente al quadrato ABCD, di lato lungo a, trovare un punto P tale che la sua distanza dal vertice D sia doppia di quella dal vertice opposto B e che risulti uguale a k il rapporto delle sue distanze dai due lati consecutivi AB, AD.

7. **Qual è il luogo dei punti P tali che d(P,r)/n + d(P,s)/m = 1?**

A partire dalla costruzione suggerita per la fase di dimostrazione e di realizzazione della macro relativa al luogo precedentemente esaminato, detti R e T i punti di r che distano m dalla retta s, detti S e V i punti di s che distano n dalla retta r, si può osservare che il parallelogramma STVR è il luogo cercato.

(FIG_10)



Infatti i punti P del segmento RS, ad esempio, soddisfano la relazione m·d(P,a) = n·d(P,s) essendo a la parallela ad r per S. Ma allora d(P,r) = n–d(P,a) e quindi md(P,r) = mn–md(P,a) = mn–nd(P,s) da cui la tesi.

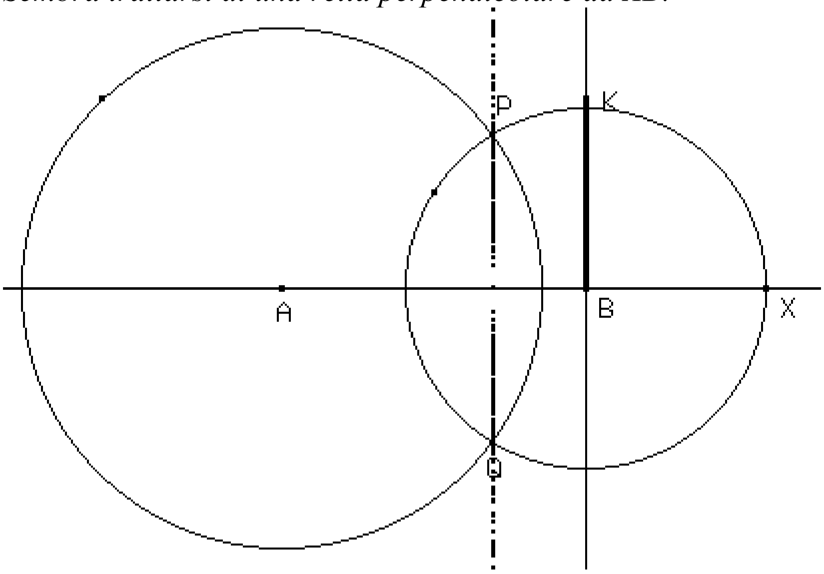
8. **Qual è il luogo dei punti P tali che $PA^2 – PB^2 = k^2$?**

I fase: (in laboratorio)

Scheda di lavoro guidato
Osservando che dovrà essere $PA^2 = k^2+PB^2$ puoi procedere seguendo la costruzione seguente:
- Crea la retta AB;
- costruisci un punto X su questa retta;
- costruisci la perpendicolare da B alla retta AB
- costruisci sulla perpendicolare un punto K (sarà BK=k);
- crea la circonferenza di centro B e passante per X;
- costruisci il quarto vertice del parallelogramma di vertici AXK e diagonale AK;
- costruisci la circonferenza di centro A e raggio lungo XK;
- costruisci i punti P e Q intersezioni tra le due circonferenze.

Al variare di X i punti P e Q descrivono il luogo cercato. Per visualizzarlo puoi selezionare l'opzione `Traccia` per i punti P e Q.

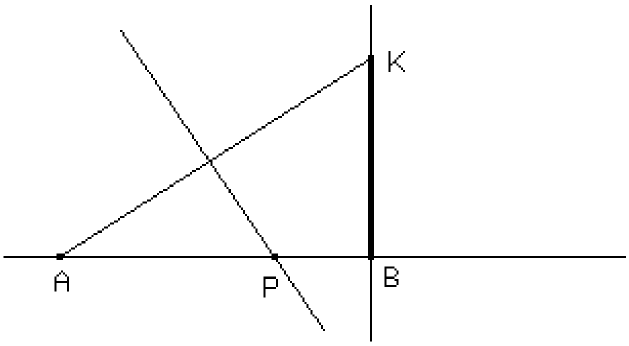
Sembra trattarsi di una retta perpendicolare ad AB.



(FIG_11)

II fase: dimostrazione

Con la geometria cartesiana è facile dimostrare che il luogo è proprio una retta perpendicolare ad AB.
Ci si può servire anche della seguente costruzione:
(FIG_12)



Se BK = k e BK $\perp$ AB, allora, tracciato l'asse del segmento AK e detto P il punto intersezione tra l'asse e la retta AB, si avrà che $PB^2 = PA^2 - BK^2$ e quindi P appartiene al luogo in questione.
Inoltre per ogni punto Q sulla perpendicolare in P ad AB si ha:
$AQ^2 - QB^2 = AQ^2 - PQ^2 - (QB^2 - PQ^2) = AP^2 - PB^2 = k^2$.

III fase: costruzione macro (in laboratorio)

Scheda di lavoro guidato
Realizza una macro. Puoi basarti sulla costruzione precedentemente descritta.

- Crea i punti A e B e il segmento di lunghezza k;
- costruisci la perpendicolare da B alla retta AB;
- costruisci su questa retta un punto K tale che BK=k
- costruisci l'asse di AK;
- costruisci l'intersezione P tra questo asse e la retta AB;
- costruisci la perpendicolare da P alla retta AB (è il luogo cercato).

IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

1. Determinare il luogo dei punti dai quali le tangenti a due circonferenze date sono di uguale lunghezza.
2. Provare che l'altezza dal vertice C di un triangolo ABC è l'insieme dei punti P tali che:
   $PA^2 - PB^2 = CA^2 - CB^2$

PROBLEMI DI SECONDO GRADO
RISOLVIBILI CON CIRCONFERENZE

1. **Qual è il luogo dei punti P tali che PA = k?**

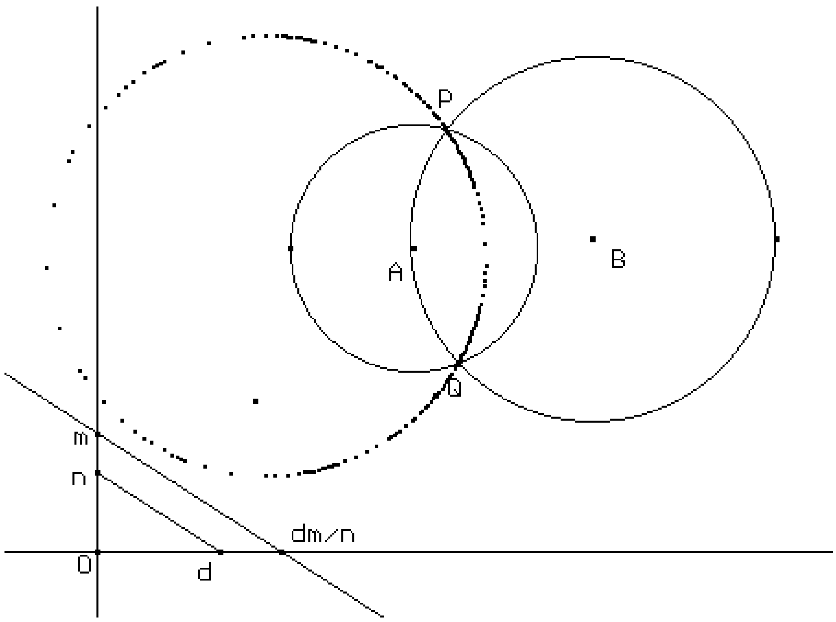
Non si approfondisce il luogo perché già comunemente assai trattato.

2. **Qual è il luogo dei punti P tali che PB/PA = m/n?**

I fase: (in laboratorio)

Scheda di lavoro
Crea i punti A e B, costruisci i punti P tale che PA=d e PB=md/n; tali punti sono le intersezioni delle circonferenze di centri A e B e raggi d e md/n rispettivamente.
Per visualizzare il luogo dei punti puoi selezionare l'opzione `Traccia` per il punto P e variare d.
Che curva si ottiene?

Sembra una circonferenza!
(FIG_13)



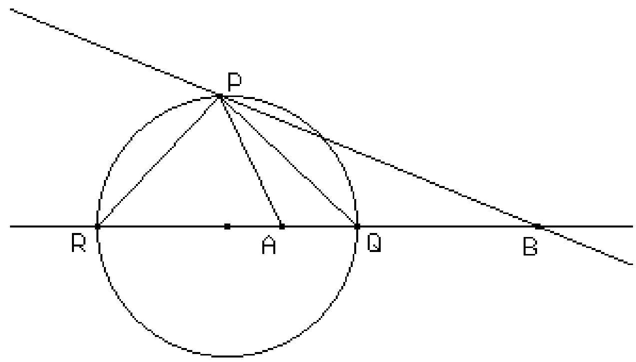
I

I fase: dimostrazione

Per dimostrare che si tratta di una circonferenza si può utilizzare la geometria cartesiana.

Alternativamente si può osservare che, detti R e Q i due punti della retta AB tali che AQ/QB = AR/RB = m/n, il luogo è la circonferenza di diametro RQ.

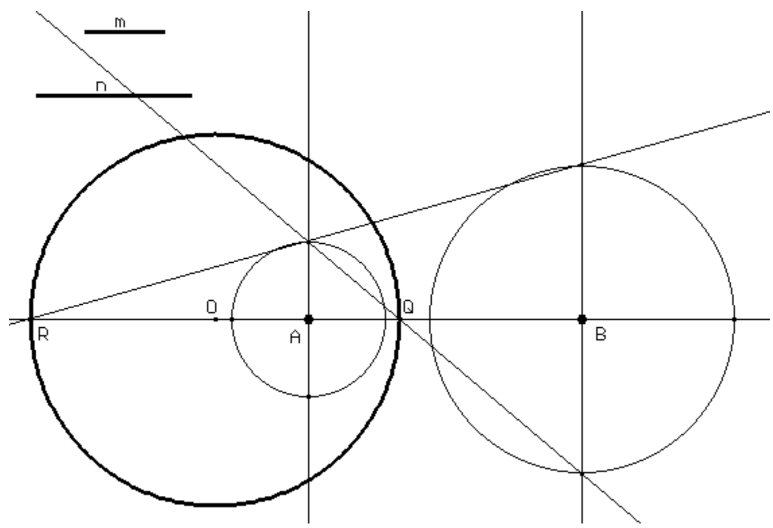
(FIG_14)



Infatti se P appartiene al luogo allora:
PA/PB = AQ/QB = AQ·dist(P,AB) / (QB·dist(P,AB)) = Area(AQP) / Area(BQP)= = PA·dist(Q,PA)/(PB·dist(Q,PB)) da cui dist(Q,PA) = dist(Q,PB) e quindi PQ è bisettrice delle rette PA e PB. Poiché, analogamente, si può mostrare che PR è l'altra bisettrice, RPQ risulterà un angolo retto e quindi P appartiene alla circonferenza di diametro RQ.
Il luogo si chiama circonferenza di Apollonio.

III fase: costruzione macro (in laboratorio)

Per realizzare una macrocostruzione si dovrà dunque costruire i punti R e Q sulla retta AB tali che AQ/QB =AR/RB = m/n.
(FIG_15)



Ad esempio, creati i punti A e B, i segmenti m e n:
- Crea la retta AB;
- costruisci le perpendicolari da A e B ad AB;
- crea le circonferenze di centro A e raggio m e di centro B e raggio n;
- costruisci i punti intersezione tra le circonferenze e i rispettivi diametri perpendicolari a AB;
- crea le rette congiungenti uno dei punti così ottenuti sulla circonferenza di centro A e i due punti analogamente ottenuti sull'altra;
- costruisci le intersezioni Q e R tra queste due rette e la retta AB;
- costruisci il punto medio O di RQ;
- crea la circonferenza di centro O e passante per Q.

IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

1. Determinare un punto M su una semicirconferenza di diametro AB = 2r tale che sia $\frac{MA}{MB} = k$
2. E` dato un triangolo isoscele ABC con l'angolo in A di 120°ed il lato uguale ad un segmento 3a. Si fissino sui lati AB e AC, rispettivamente, i punti M ed N in modo che sia BM = a e CN = 2a. Trovare su BC un punto P tale che sia PN = kPM, con k >0.

3. Sui lati di un angolo retto di vertice O si prendano rispettivamente i punti A e B, con OB =mOA, dove m>0. Sulla bisettrice dell'aangolo retto si trovi un punto P in modo che si abbia PA =kPB, con k >0.

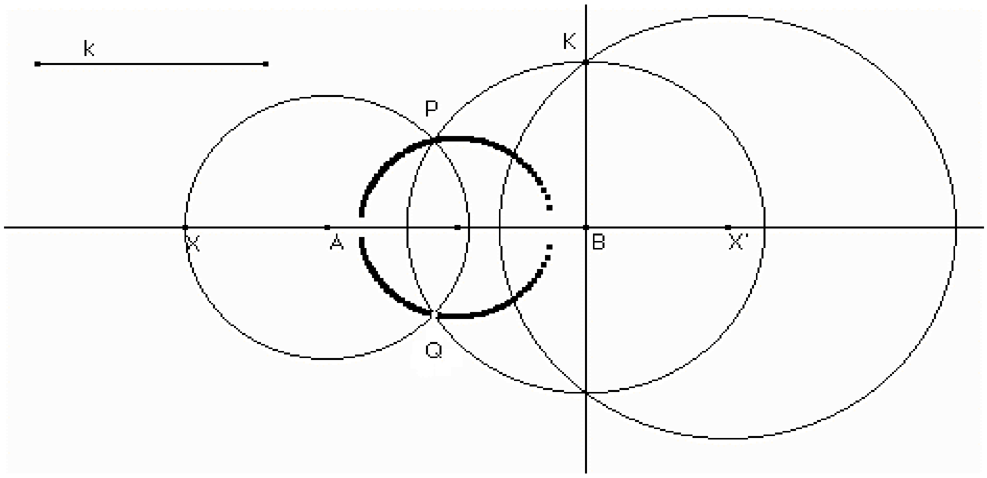
3. Qual è il luogo dei punti P tali che $PA^2 + PB^2 = k^2$?

I fase: (in laboratorio)

Scheda di lavoro
- Crea i punti A e B, il segmento lungo k;
- costruisci i punti sulla retta AB un punto X;
- costruisci un punto X' tale che BX=AX;
- costruisci il triangolo X'BK retto in B e di ipotenusa lunga k;
- costruisci i punti Pe Q che distano XA da A e BK da B;
- visualizza la traccia del luogo dei punti P e Q al variare di X.

Che curva si ottiene?
Sembra una circonferenza!

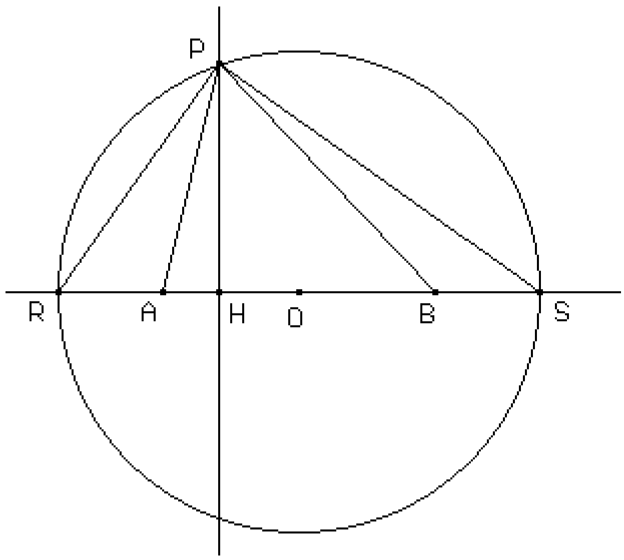
(FIG_16)



II fase: dimostrazione

La dimostrazione cartesiana è anche in questo caso assai semplice.
Alternativamente si dimostra per via elementare che il luogo è la circonferenza di centro nel punto medio di AB e, poiché nel caso particolare di P sull'asse di AB si ha $2 \cdot PA^2 = k^2$ e $PA^2 = r^2 + (AB/2)^2$, di raggio r tale che $(2r)^2 = k^2 - AB^2$.

(FIG_17)



Infatti, qui considerando il caso in cui $k^2/2 -(AB/2)^2 > AB^2$, si può calcolare che:

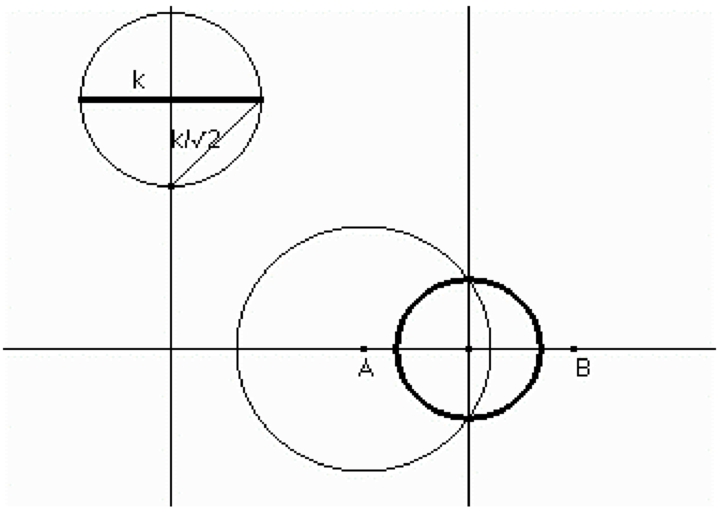
$$AP^2+PB^2 = (PH^2+AH^2)+(PH^2+HB^2) = PR^2-RH^2+AH^2+PS^2-SH^2+HB^2 =$$
$$= PR^2+(AH+RH)(AH-RH)+PS^2+(HB+SH)(HB-SH) =$$
$$= PR^2-(AH+RH)\cdot RA+PS^2-(HB+SH)\cdot BS =$$
$$= (2r)^2-RA\cdot(AH+RH+HB+SH) = (2r)^2-RA\cdot(AB+2r) =$$
$$= (2r)^2 +(AB-2r)\cdot(AB+2r)/2 = ((2r)^2 + AB^2)/2 .$$

III fase: costruzione macro (in laboratorio)

La dimostrazione, in particolare il fatto che $r^2 = k^2/2- (AB/2)^2$ suggerisce una costruzione come la seguente, che può diventare una macro.

- Crea i due punti A e B e il segmento di lunghezza k;
- costruisci un segmento lungo $k/\sqrt{2}$;
- crea la retta AB;
- costruisci l'asse di AB e il punto medio O;
- crea la circonferenza di centro A e raggio $k/\sqrt{2}$;
- costruisci le intersezioni tra la circonferenza e la perpendicolare;
- crea la circonferenza di centro O e per uno di questi punti intersezione (il luogo cercato).

(FIG_18)



IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

1. Sono dati due punti A e B sui lati OX e OY di un angolo retto XOY in modo che OA = 2OB. Determinare un punto P interno all'angolo retto sapendo che l'angolo OPA e' retto e che $OP^2 + PB^2 = k \cdot OB^2$.
2. E' dato un triangolo isoscele ABC con l'angolo al vertice A di 120° e la base BC = 2. Determinare sul lato AB un punto M in modo che sia abbia $CM^2 + MB^2 = k^2$.
3. Dati due segmenti perpendicolari AB e AC entrambi di lunghezza 2, si determini su AB un punto M in modo che si abbia $CM^2 + MB^2 = k^2$.
4. Sul cateto BC di un triangolo rettangolo ABC di date dimensioni costruire un punto P tale che $AP^2+BP^2 = 2k^2$.
5. E' dato un angolo retto XOY e sui lati OX e OY rispettivamente i punti OA e OB tali che OA = a e OB = 2a. Determinare un punto C, interno all'angolo retto, in modo che la somma delle sue distanze dai lati delll'angolo sia k e che $AC^2+BC^2 = 5a^2$.

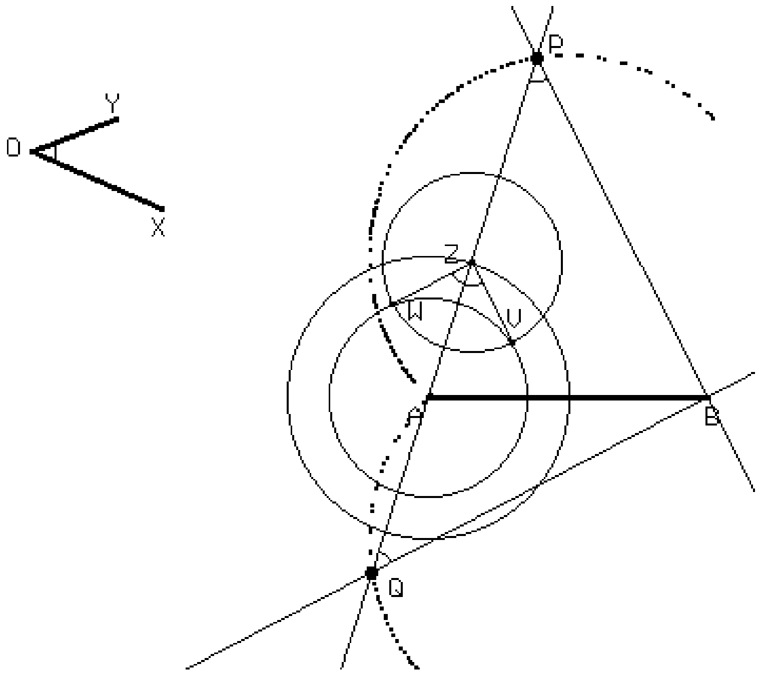
4. Qual è il luogo dei punti P tali che l'angolo APB = α?.

I fase: (in laboratorio)

Scheda di lavoro
- Costruisci i punti A e B e l'angolo XOY di ampiezza α;
- costruisci due circonferenze di centro A, una di raggio OX e l'altra di raggio XY;
- costruisci sulla prima circonferenza un punto Z e poi la circonferenza di centro Z e raggio OY;
- indica con V e W i punti intersezione tra la circonferenza di raggio XY e quella di raggio OY: gli angoli AZW e AZV sono congruenti a quello dato;
- costruisci sulla retta AZ i punti P e Q intersezione con le parallele dal punto B ai segmenti ZV e ZW.

Al variare di Z i punti P e Q lasciano traccia del luogo cercato e qualcosa di più! Cosa c'è di troppo?
Il luogo cercato è costituito da due archi di circonferenza.
Fornisci una dimostrazione sintetica del risultato.

(FIG_19)



I

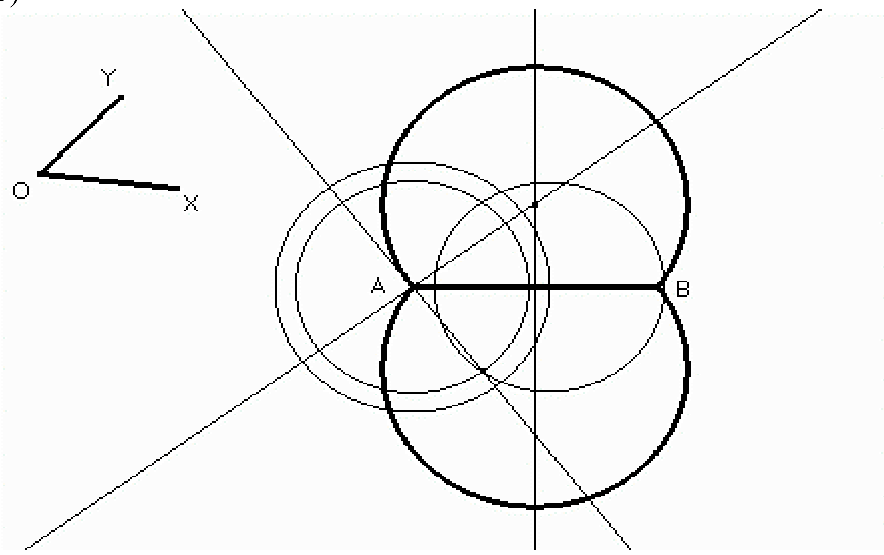
I fase: costruzione macro (in laboratorio)

Scheda di lavoro

Per realizzare una macro i cui oggetti iniziali sono il segmento e l'angolo dati e i cui oggetti finali sono i due archi di circonferenze che costituiscono il luogo si può seguire una costruzione come la seguente.

- Costruisci le circonferenze di centro A, raggio OX e raggio OY;
- costruisci il punto V intersezione tra la prima circonferenza e AB;
- costruisci la circonferenza di centro in questo punto e raggio XY e sue le intersezioni con la circonferenza OY;
- costruisci una retta per A e per uno dei punti precedentemente ottenuti;
- costruisci la perpendicolare a questa retta dal punto A;
- costruisci il punto intersezione tra questa perpendicolare e l'asse di AB;
- costruisci il simmetrico di A rispetto a questo punto;
- costruisci l'arco di circonferenza per A, per il punto precedente e per B;
- costruisci l'arco simmetrico di questo rispetto ad AB.

(FIG_20)



La costruzione è valida solo per angoli acuti. Come procedere per angoli ottusi?

IV fase: esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

1. Dato il triangolo ABC, determinare i punti P del piano tali che il triangolo ABP sia isoscele su AB e con angolo in P di 45°. Se il triangolo ABC è isoscele su AC, discutere il numero di soluzioni al variare dell'altezza relativa ad AC. Come risulta il triangolo ABC quando uno dei punti P coincide con C?
2. Per gli estremi A e B del segmento AB = 18 si conducano, nello stesso senso, due segmenti AC = 4 e BD = 8 perpendicolari ad AB. Determinare graficamente i punti P di AB tali che l'angolo CPD = 90°.
3. Costruire un triangolo ABC di altezza CH = 2AB e con assegnato angolo di vertice C. Discutere al variare dell'ampiezza dell'angolo dato.

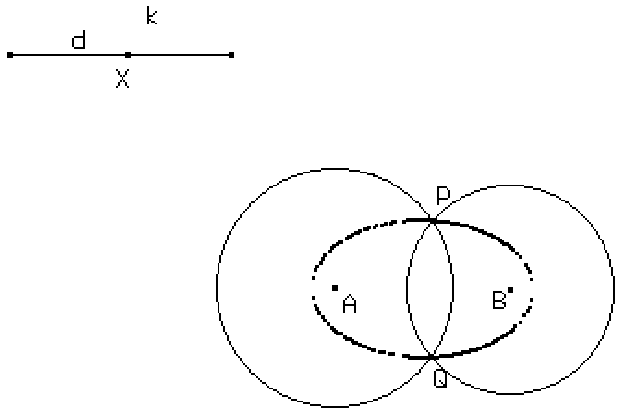
PROBLEMI DI SECONDO GRADO
CHE CONDUCONO AD ALTRE CONICHE

Per completezza si accenna brevemente anche a questi luoghi e a semplici costruzioni per visualizzarli o mediante la voce `Luogo` o mediante l'opzione `Traccia` senza tuttavia realizzarne macrocostruzioni.

1. **Qual è il luogo dei punti P tali che PB+PA = k?**

Scheda di lavoro
L'ellisse di fuochi A e B e asse focale k si può ottenere nel modo seguente:
- costruisci i punti A e B, e il segmento lungo k;
- costruisci un punto X sul segmento lungo k così diviso in due segmenti di lunghezza d e k-d;
- costruisci come intersezione di due circonferenze i punti P tale che PB=d e PA=k–d;
- costruisci la traccia dei punti P al variare di X.

(FIG_21)

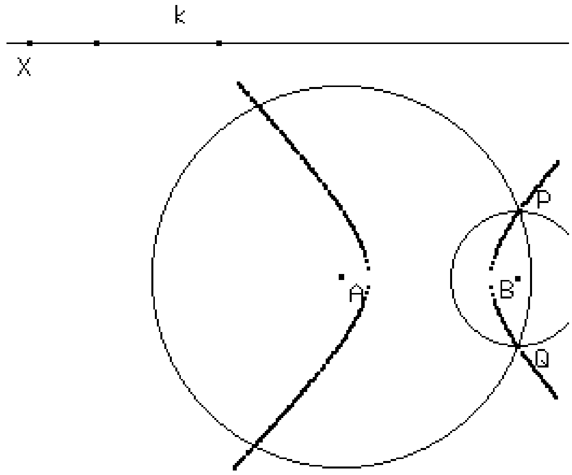


2. **Qual è il
luogo dei punti P tali che |PB–PA| = k?**

Scheda di lavoro
L'iperbole di fuochi A e B e distanza k tra i vertici si può ottenere nel modo seguente:
- costruisci i punti A e B, il segmento lungo k e la retta su cui giace;
- costruisci un punto X sulla retta individuando così due segmenti di lunghezza d e k+d;
- costruisci come intersezione di due circonferenze i punti P tale che PB = d e PA = k+d;

- costruisci la traccia dei punti P al variare di X.

(FIG_22)



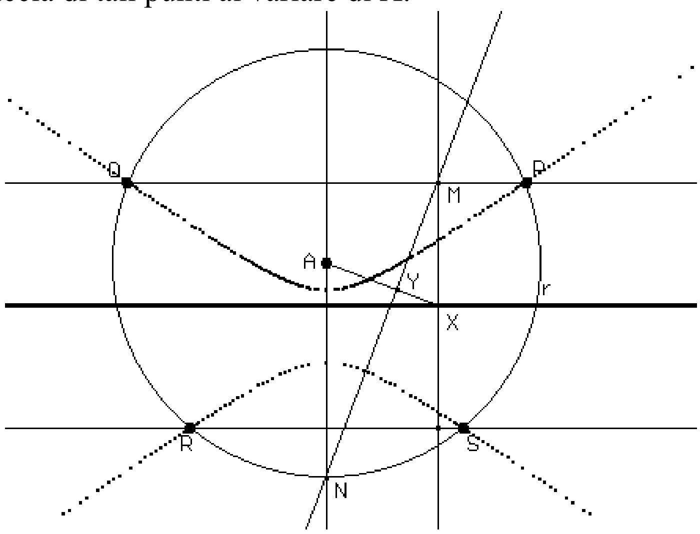
3. **Qual è il luogo dei punti P tali che PA/d(P,r) = m/n?**

Scheda di lavoro

La conica di fuoco A, direttrice d ed eccentricità m/n si può ottenere nel modo seguente:

- Crea il punto A e la retta r;
- costruisci il punto X sulla retta r e il segmento AX;
- costruisci sul segmento AX il punto Y tale che AY/YX=m/n;
- costruisci la perpendicolare per Y a AX e i punti M e N intersezioni di questa rispettivamente con la perpendicolare da X a r e con la perpendicolare da F a r;
- costruisci i punti intersezione tra la circonferenza di centro A e per N con le rette distanti MX da r.
- visualizza la traccia di tali punti al variare di X.

(FIG_23)

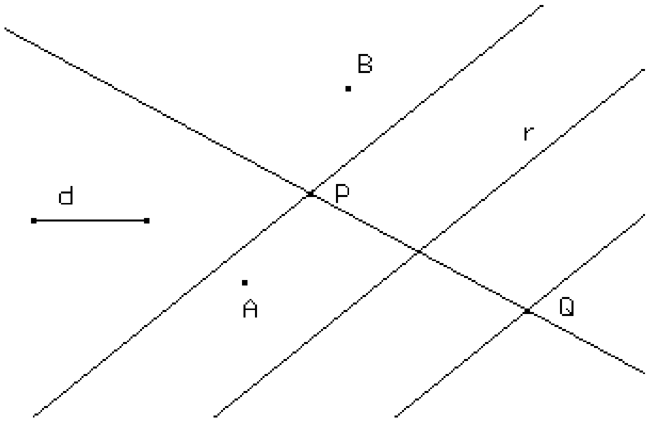


RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI

Nel seguito si mostrano le costruzioni che conducono alle soluzioni di alcuni dei problemi proposti.

Dati due punti A e B e una retta r determinare i punti equidistanti dai punti dati e aventi una distanza assegnata d dalla retta r. Discutere i vari casi.

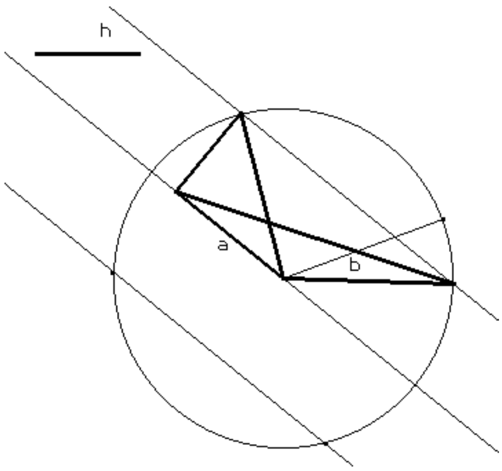
(P_2_1)



Naturalmente se r coincide con l'asse di AB o è parallela ad esso, con distanza diversa da d, non ci sono soluzioni; quando r è parallela all'asse di AB e dista d dall'asse vi sono infinite soluzioni; altrimenti vi sono sempre due soluzioni che in figura sono indicate con P e Q.

Costruire un triangolo dati due lati a e b e l'altezza h relativa al lato a. (Consiglio: costruire il luogo dei punti distanti h dalla retta contenente il lato a e intersecarlo con le circonferenze di raggio b e centro nei due estremi del lato a)

(P_2_2)



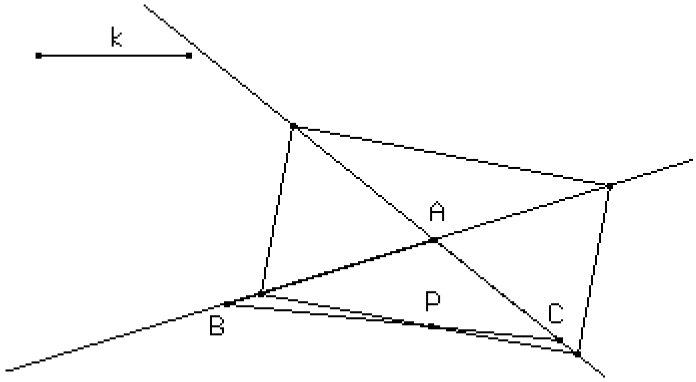
Si osservi che vi è soluzione, due soluzioni, solo quando h ≤ b.

Dato il triangolo equilatero ABC si prenda sul lato BC = 4u un punto P tale che

$$PH + PK = 2\sqrt{3}u,$$

dove H e K sono le proiezione di P rispettivamente sui lati AB e AC.

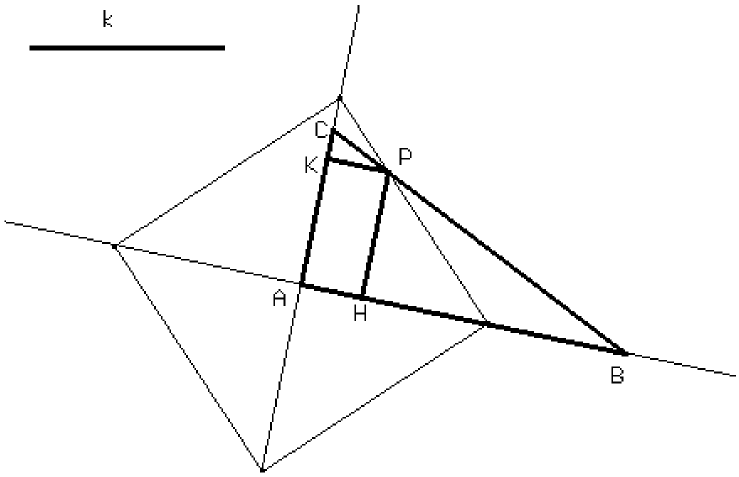
(P_4_1)



Questo problema è qui risolto nel caso più generale di un triangolo qualunque e con PH+PK = k. Si osserva che vi è una sola soluzione se e solo se k è un numero compreso tra le lunghezze di AC e di AB.

Dato il triangolo rettangolo ABC retto in A, con AB = 4u e AC = 3u, si determini sull'ipotenusa un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P sui cateti si abbia PH+PK = k, con k > 0.

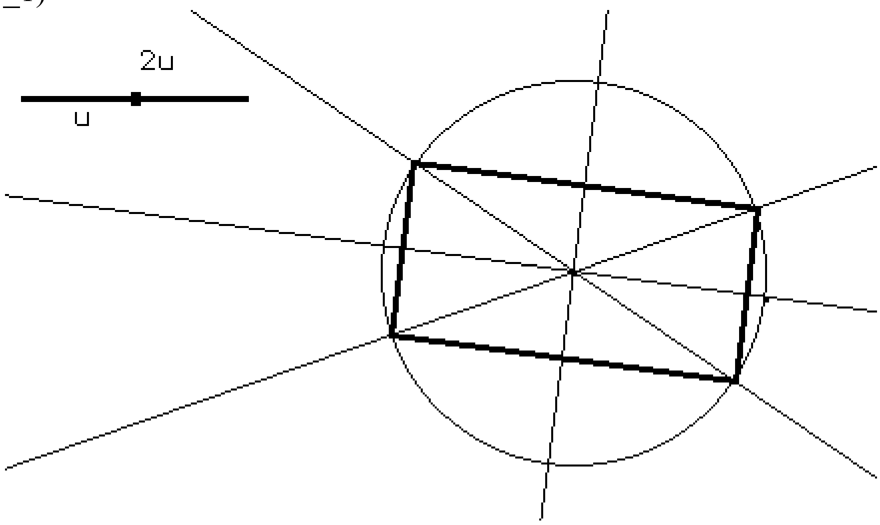
(P_4_4)



Si osserva che vi è una sola soluzione se e solo se k è un numero compreso tra le lunghezze di AC e di AB.

In una circonferenza di raggio 1 inscrivere un rettangolo ABCD in modo che il rapporto fra i lati sia 2.

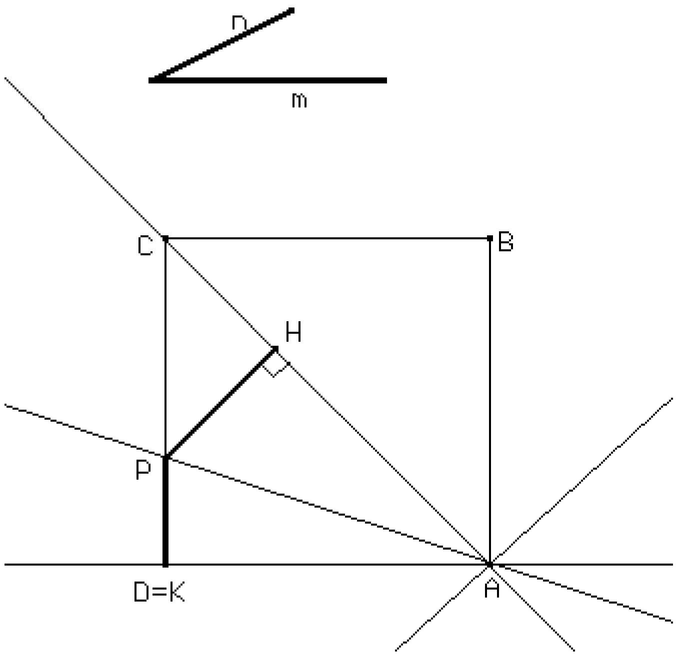
(P_6_1)



Costruiti due diametri ortogonali della circonferenza, si è costruito il luogo dei punti le cui distanze da questi stanno come 1 : 2.

> *E' dato il quadrato ABCD. Determinare sui lati del quadrato i punti P tali che sia m/n il rapporto fra la distanza PH dalla diagonale AC e la distanza PK dal lato AB.*

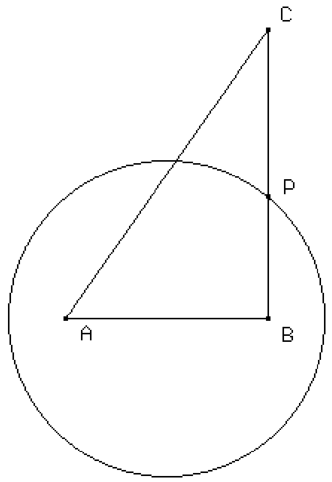
(P_6_3)



Si osserva che vi è sempre una soluzione.

Sul cateto BC di un triangolo rettangolo ABC di date dimensioni costruire un punto P tale che $AP^2 + BP^2 = 2k^2$.

(P2_3_4)

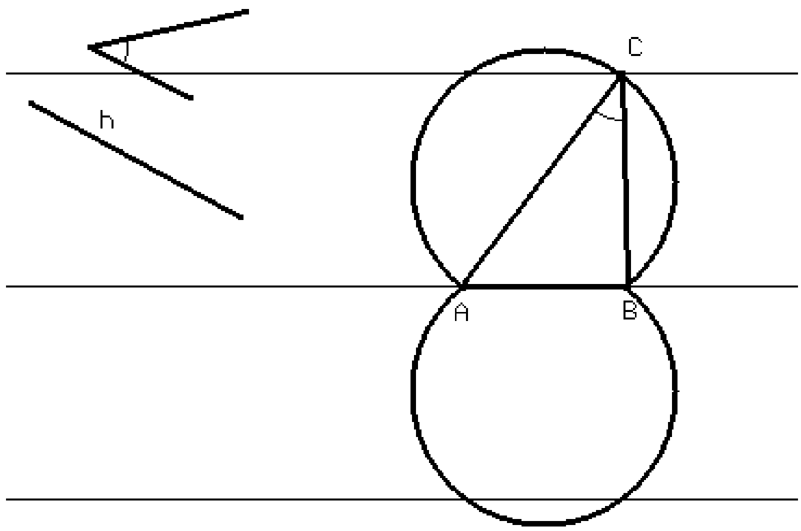


Si osserva che vi è soluzione, una sola, quando:

$$(AB/2)^2 \leq r^2 = k^2 - (AB/2)^2 \leq CB^2 + (AB/2)^2.$$

Costruire un triangolo ABC di altezza CH = 2AB e con assegnato angolo di vertice C. Discutere al variare dell'ampiezza dell'angolo dato.

(P2_4_3)



Si osserva che vi sono soluzioni, quattro tra loro simmetriche, per angoli minori dell'angolo opposto alla base AB del triangolo isoscele di altezza h.

ANNOTAZIONI

Alcuni dei luoghi precedentemente esaminati si possono vedere come casi particolari dei raggruppamenti descritti nel seguito:

1° gruppo: $\sum_i \lambda_i \cdot PA_i^2$ **= k**

- quando $\sum_i \lambda_i = 0$ si ha una retta, l'intero piano oppure l'insieme vuoto.

  Ad es: $PA = PB$ è l'asse di AB

  $PA^2 - PB^2 = k^2$ è l'asse radicale di due circonferenze di raggi r_1 e r_2 tali che $r_1^2 - r_2^2 = k^2$

- quando $\sum_i \lambda_i \neq 0$ si ha una circonferenza, un punto oppure l'insieme vuoto

  Ad es: $PA^2 = k^2$ è la circonferenza di centro A e raggio |k|

  $PA^2 + PB^2 = 2k^2$ è la circonferenza di centro nel punto medio di AB e raggio r con $r^2 = k^2 - (AB/2)^2$

  $PA/PB = k$ è la circonferenza di Apollonio.

2° gruppo: $\sum_i \lambda_i \cdot dist(P, r_i)$ **= k**

Si ha una retta o un segmento di retta, una parte di piano delimitata dalle rette r_i oppure l'insieme vuoto.

Ad es: dist(P,r) = k le rette distanti k da r

dist(P,r) = dist(P,s) le bisettrici degli angoli delimitati da r e s

dist(P,r) = k dist(P,s) le diagonali di un parallelogrammo

dist(P,r)+dist(P,s) = k un rettangolo con diagonali r e s

dist(P,r)–dist(P,s) = k prolungamenti lati rettangolo con diagonali r e s.