Progetto Eccellenza 2002

Le funzioni

Coordinatori
S. Bornoroni e G. Olivieri

S. Bornoroni, ITI A. Volta di Roma G. Olivieri, ITC C. Matteucci di Roma

Problema 3
Rappresentare, per alcuni valori del parametro a, il fascio di curve:

$$x^2 y = a^2(a - y) \tag{1}$$

1. Individuare le caratteristiche comuni.
2. Verificare algebricamente le proprietà (campo di esistenza, continuità, asintoti, punti stazionari, punti di flesso).
3. Rappresentare e studiare la y' e la y'' e, successivamente, verificare le caratteristiche algebriche del fascio.
4. Individuare il luogo dei punti descritti dai flessi.
5. Esaminare il caso $a = 0$ e confrontare il risultato teorico con il grafico ottenuto mediante il software e dare una spiegazione.
6. Per $a > 0$ la curva è la versiera di Gaetana Agnesi ed è soluzione di un noto problema geometrico. Quale?

Il problema è stato ricavato, per la parte riguardante le funzioni, dal problema proposto per la Maturità Scientifica Sperimentale, Sessione suppletiva 1997- Tema 2

Modalità

Nel formulare la sperimentazione in classe l'insegnante deve tenere presente che:

- si vuole misurare o, comunque valutare il valore aggiunto che l'uso del software può fornire all'efficacia della proposta didattica (in relazione al tema proposto possono risultare utili software C.A.S. (Computer Algebra System) come *Derive*;
- si deve articolare la proposta in modo che possa essere spendibile in vari contesti scolastici e a vari livelli, senza dimenticare quello dell' eccellenza;
- si deve privilegiare la metodologia della scoperta attraverso risoluzione di uno o più problemi che possono servire per introdurre l'argomento o in itinere o come approfondimento.

Prerequisiti

Essere in grado di studiare e rappresentare funzioni razionali intere e fratte. Lo studio completo di una funzione è un tema classico di analisi, si colloca pertanto nel triennio, al quarto e/o al quinto anno.

Suggerimenti

Il software, come strumento d'uso corrente, consente di effettuare le rappresentazioni grafiche di funzioni e di famiglie di funzioni in modo molto rapido. Tale capacità può essere sfruttata per abituare lo studente a ragionare in maniera simmetrica rispetto al modo tradizionale, ovvero dal grafico risalire alla ricerca teorica propria dell'Analisi. La rappresentazione può essere occasione per uno studio di funzioni meno meccanico, più ragionato e più volto ai concetti piuttosto che ai calcoli, un'opportunità per promuovere un atteggiamento critico nei confronti del software.

Le funzioni

a cura di Silvana Bornoroni

Rappresentare, per alcuni valori del parametro *a*, il fascio di curve:

$$x^2 y = a^2 (a - y),$$

1. Individuare le caratteristiche comuni
2. Verificare algebricamente le proprietà (campo di esistenza, continuità, asintoti, punti stazionari, punti di flesso
3. Rappresentare e studiare la *y'* e la *y"* e, successivamente, verificare le caratteristiche algebriche del fascio
4. Individuare il luogo dei punti descritti dai flessi

5. Esaminare il caso *a* =0
a) confrontare il risultato teorico con il grafico ottenuto mediante il software e dare una spiegazione.

6. Per *a* > 0 la curva è la versiera di Gaetana Agnesi ed è soluzione di un noto problema geometrico. Quale?

Strumenti software
Derive

Collocazione temporale

Lo studio completo di una funzione è un tema classico di analisi, si colloca pertanto nel triennio, al quarto e/o al quinto anno.

Caratteristiche connesse all'uso del software

Il software consente di:
- privilegiare la metodologia della scoperta
- associare rapidamente rappresentazioni grafiche a concetti astratti come le funzioni con parametro
- motivare la dimostrazione perché la rappresentazione grafica non permette di avere certezze
- promuovere un ruolo attivo dello studente

Aspetti didattici

Il problema non presenta grandi difficoltà concettuali, ma al tempo stesso è completo e offre l'opportunità di approfondire lo studio di fasci di curve in modo meno meccanico, più ragionato, ponendo attenzione ai concetti piuttosto che ai calcoli. L'uso del software, permette di ragionare in modo simmetrico, dal grafico all'equazione cartesiana e viceversa, verificare velocemente l'esattezza dei risultati, abituare alla riflessione critica sul software.

Nodi concettuali

Il problema proposto è incentrato sul concetto di funzione, di fasci di curve, sul ruolo del parametro nel comportamento delle curve, sul legame fra funzioni e derivate prime e seconde in funzione del parametro. Il grafico del fascio in oggetto, nel caso a=0, presenta solo la retta di equazione y=0, come curva degenere, e non disegna la retta x=0. Il comportamento del software è utile per sottolineare il concetto di funzione.

Approfondimenti e collegamenti

Il problema si collega allo studio di fasci di curve; è importante che la proposta di risoluzione non sia isolata, ma inserita in un percorso didattico legato a fasci di curve note come rette e parabole.
Si allegano tre schede di lavoro articolate secondo lo schema metodologico:

- Primo esercizio per osservare il grafico, motivare il comportamento analiticamente, pensare in modo simmetrico dal grafico alla forma analitica e viceversa; dal grafico della y' ***e*** y'' al comportamento della funzione
- Secondo esercizio per sollecitare la riflessione critica sul software
- Terzo esercizio per favorire l'esplorazione autonoma da parte dello studente e la riflessione sui criteri di scelta dei coefficienti in funzione del parametro, in modo che i risultati siano significativi a livello di visualizzazione

Procedura di soluzione

Si rappresenta con *Derive* il fascio di curve per valori positivi e negativi di *a*

Grafico del fascio di curve

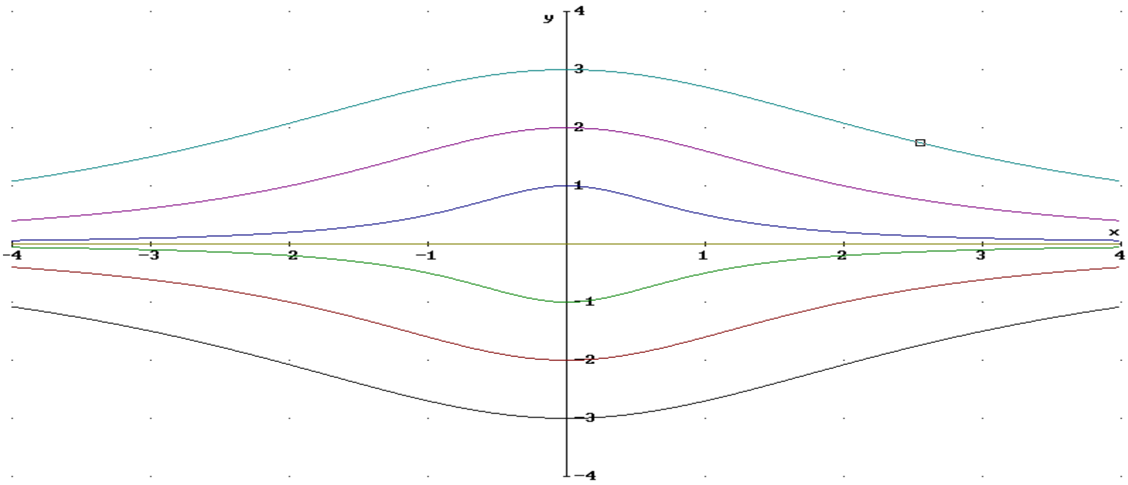

fig. n.1
a=-3,-2,-1,0,1,2,3

Si osserva che tutte le curve del fascio hanno:

1. Campo di esistenza da -∞ a +∞
2. Simmetria rispetto all'asse $x = 0$
3. Asintoto $y = 0$
4. Punto stazionario $x = 0$ indipendentemente dal valore di *a*
5. Flessi a coordinate variabili
6. Concavità in funzione di *a*

Dallo studente ci si aspetta una verifica algebrica di quanto osservato

Si calcola la derivata prima e si rappresenta graficamente il fascio di curve per $a>0$ o $a<0$
Dallo studio della y' si ricostruiscono crescenza , decrescenza e punti stazionari della funzione. Gli zeri del fascio di derivate prime non dipendono dal parametro *a:* è per questo che tutte le curve hanno il massimo per lo stesso valore di *x*, cioè l'origine.

Si calcola la y'' e si verifica che gli zeri sono invece funzione del parametro a, pertanto i flessi variano nelle diverse curve. Si studia il segno della y''per risalire al comportamento della funzione, analizzando sia il caso $a>0$ che $a<0$.

Luogo dei flessi

Si ricava il parametro a dalle coordinate x, y del flesso e si ottengono come luogo le rette $y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}x$

Caso particolare *a*=0

Studiando il fascio di rette si trova che per $a = 0$ le curve degeneri sono $y = 0$ *e* $x = 0$ contata due volte. Se si esegue il grafico con *Derive* si nota che l'unica retta disegnata è l'asse x, il software non disegna l'asse y perché $x = 0$ non è una funzione.

Seconda parte

Per $a>0$ la curva assegnata è la versiera dell'Agnesi ed è soluzione del seguente problema:

" Dato il semicircolo ADC del diametro AC, si ricerca fuori di esso il punto M tale che condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, sia *AB:BD = AC:BM, e perché infiniti sono i punti M che soddisfano il problema se ne dimanda il luogo"*

Contributi degli studenti

I contributi confermano

- la difficoltà di ragionare in modo simmetrico rispetto a quello tradizionale, ovvero dal grafico all'equazione cartesiana anche per quegli studenti che sembrano aver assimilato bene i concetti
- l'importanza di fornire questo tipo di allenamento mentale per migliorare l'apprendimento.

Schede di lavoro predisposte dal docente

Scheda n.1 - Fasci di rette

Esercizio N.1

Dato il fascio di rette

$$y = (k-1)x + (k+2)$$
$$-2 \le k \le 4$$

si chiede:

1. Stampare il grafico
2. Indicare il valore o i valori interi di k che generano:
    a. La retta parallela all'asse x
    b. La retta passante per l'origine
    c. Le rette che passano per il primo e terzo quadrante
    d. Le rette che passano per il secondo e quarto quadrante
    e. Le rette che staccano segmenti positivi sull'asse delle x
    f. Le rette che staccano segmenti negativi sull'asse delle y
3. Verificare la correttezza dei valori scelti tracciando i grafici
4. Indicare su ogni retta del fascio il corrispondente valore di k
5. Individuare le coordinate del centro del fascio e verificare la correttezza attraverso passaggi matematici

Esercizio N.2

Dato il fascio di rette di equazione

$$(k-1)y + kx - (k-3) = 0$$

rappresentare le rette per

$$-3 \leq k \leq 0$$

$$-2 \leq k \leq 2$$

$$+2 \leq k \leq 6$$

1. Stampare i grafici nei tre intervalli
2. Osservare il comportamento dei fasci di rette, in particolare:

Primo intervallo
- Dimostrare analiticamente perché tutte le rette intercettano segmenti positivi sugli assi

Secondo intervallo
- Commentare il messaggio "spiacente, l'espressione selezionata non può essere rappresentata"

Terzo intervallo
- Dimostrare analiticamente perché tutte le rette passano per il secondo e quarto quadrante

Esercizio N. 3

Dato il fascio di rette

$$ky + (k-1)x - k + 2 = 0$$

1. scegliere il valore, o i valori interi, da assegnare al parametro k affinché:
    a. la retta sia parallela all'asse x
    b. tutte rette passino per il primo e terzo quadrante
    c. tutte le rette passino per il secondo e quarto quadrante
    d. tutte le rette individuino segmenti negativi sugli assi
2. Verificare la correttezza dei risultati ottenuti tracciando il grafico
3. Individuare le coordinate del centro del fascio e verificarne la correttezza attraverso passaggi matematici

Scheda n.2 - Fasci di parabole

Esercizio N.1

Dati i fasci di parabole

$$y = (k-1)x^2 + x + 1$$
$$y = x^2 + (k-3)x + 1$$
$$y = x^2 + x + (k+1)$$
$$per \qquad -2 \le k \le 4$$

si chiede, per ogni fascio di curve, di:

1. Stampare il grafico
2. Indicare su ogni parabola del fascio il corrispondente valore di k
3. Indicare, motivando la risposta, se esistono valori di k, appartenenti all'intervallo indicato e non, che:
    a. individuano la conica degenere
    b. generano parabole con la concavità rivolta verso il basso
    c. generano parabole secanti l'asse x
4. Verificare la correttezza dei valori trovati tracciando i grafici, ove possibile
5. Individuare le coordinate di eventuali punti base del fascio e verificarne la correttezza attraverso passaggi matematici

Esercizio N.2

Dato il fascio di parabole di equazione

$$ky + (k-4)x^2 + (k+3)x + k - 5 = 0$$

1. rappresentare le parabole per i seguenti valori di k
$$1 \le k \le 4 \qquad -4 \le k \le 1 \qquad -4 \le k \le -1$$
2. Stampare i grafici nei tre intervalli
3. Osservare il comportamento dei fasci di rette, in particolare:

Primo intervallo

- Dimostrare analiticamente perché le parabole di tale intervallo hanno la concavità verso l'alto e dire a quale valore di k corrisponde la conica degenere

Secondo intervallo

- Commentare il messaggio "spiacente, l'espressione selezionata non può essere rappresentata"

Terzo intervallo

- Dimostrare analiticamente perché per tali valori di k le parabole intersecano tutte il semiasse negativo delle y

Esercizio N. 3

Dato il fascio di parabole

$$(k-6)y - kx^2 - (k+2)x + k - 1 = 0$$

1. scegliere un intervallo di valori interi da assegnare al parametro k affinché:
    a. le parabole del fascio abbiano tutte la concavità verso l'alto
    b. tutte le parabole intersechino il semiasse positivo delle y
    c. tutte le parabole intersechino l'asse delle x
2. Verificare la correttezza dei risultati ottenuti tracciando i corrispondenti grafici
3. Trascrivere su ogni parabola del fascio il corrispondente valore di k
4. Individuare le coordinate dei punti base del fascio e verificarne la correttezza attraverso passaggi matematici

Scheda n.3 - Dallo studio della derivata alla funzione-Aspetti critici del software

Esercizio n.1

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni.

$$y = sinx$$
$$y = |sinx|$$
$$y = \ln x$$
$$y = x^2 - 5x + 6$$

Confrontarlo con quello delle rispettive derivate

$$y' = \cos x$$
$$y' = |\cos x|$$
$$y' = \frac{1}{|x|}$$
$$y' = 2x - 5$$

Risalire dallo studio della derivata allo studio della funzione analizzando di y'

1. campo di esistenza
2. continuità o discontinuità
3. zeri
4. Segno
5. Massimi e minimi

Rispondere ai seguenti quesiti:

1. Se y' ha segno positivo nell'intervallo [$a;b$], allora la F(x) è…………… ..in [$a;b$]
2. Se y' ha segno negativo nell'intervallo [$a;b$], allora la F(x) è……………..in [$a;b$]
3. Gli zeri della y' corrispondono per la F(x) a punti di……………………………..?
4. Se la y' ha segno negativo, poi positivo nell'intorno del suo zero, allora il punto è di …………………………
5. Se la y' ha segno positivo, poi negativo nell'intorno del suo zero, allora il punto è di …………………………

Esercizio n.2

Studiare il grafico della funzione

$$y = \sqrt[3]{x}$$

Tracciare il grafico con *Derive* e motivare il comportamento diverso da quello ottenuto con l'Analisi
Tracciare il grafico della y' e rispondere al seguente quesito:

- Se il campo di esistenza della y' è $(-\infty; x_0) \bigcup (x_0; +\infty)$, allora la sua primitiva F(x) è discontinua nel punto x_0

V **F**

Esercizio n.3

Individuare delle funzioni che studiate con gli strumenti dell'Analisi abbiano un grafico e disegnate con *Derive* abbiano un comportamento diverso cercando di dare una spiegazione

Contributo di Rosanna Guidetti[1]

Rappresentare, per alcuni valori del parametro *a*, il fascio di curve:

$$x^2 y = a^2(a - y),$$

Strumenti software
Derive

Collocazione temporale
Il problema si può collocare in un triennio, al IV o al V anno, perché gli studenti sono in possesso di conoscenze di analisi.

Caratteristiche connesse all'uso del software
Il software consente di verificare immediatamente i risultati, procedere in maniera induttiva dal grafico alle proprietà della funzione

Aspetti didattici
La tematica proposta richiede la conoscenza approfondita dei concetti di analisi: limiti, derivate e studio di funzioni.

Nodi concettuali
Dall'analisi del problema, gli studenti possono:
- determinare il dominio, la continuità, gli asintoti, i punti stazionari, i punti di flesso;
- procedere in maniera induttiva dal grafico allo studio del fascio di curve

Approfondimenti e collegamenti
Il problema è adatto per una IV od una V, perché i ragazzi sono già in possesso di spirito critico e di proprietà logico-deduttive e quindi in grado di poter scegliere il miglior percorso per raggiungere l'obiettivo prefissato, fare i collegamenti più opportuni, ipotizzare e verificare congetture, discutere in modo proficuo

Traccia della soluzione
Dopo aver determinato
- il dominio,
- i punti d'incontro con gli assi,
- la positività,
- la derivata I, la derivata II la derivata III

si passa alla rappresentazione grafica con $a > 0$, $a = 1, 2, 3$; $a < 0$, $a = -1, -2, -3$.

Con $a > 0$ si ha M $(0, a)$, con $a < 0$ si ha M $(0, -a)$

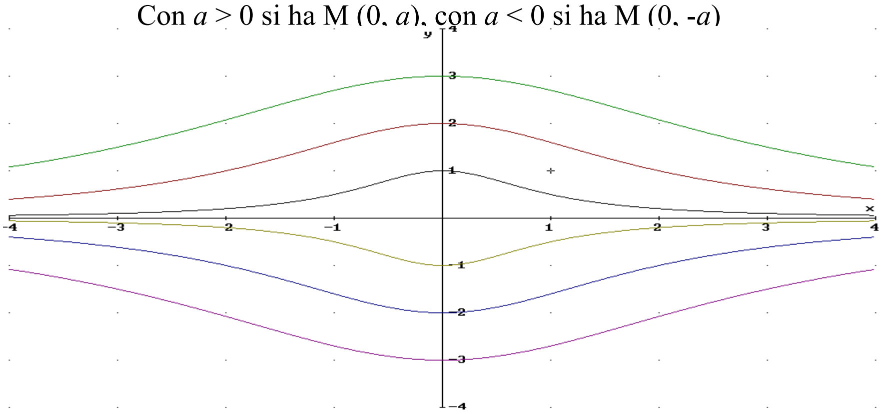

Fig.n.1
a=1;2;3; a=-1;-2;-3

[1] docente di Matematica presso ISIT Bassi Burgatti, Cento (FE)

Si studia la funzione rappresentata dalla derivata prima e si confrontano i grafici della funzione e della derivata prima per $a = 1$

Grafico della funzione

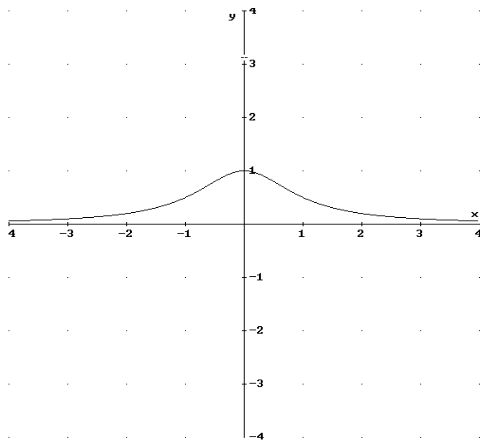

Fig.n.2
per a=1

Grafico della derivata prima

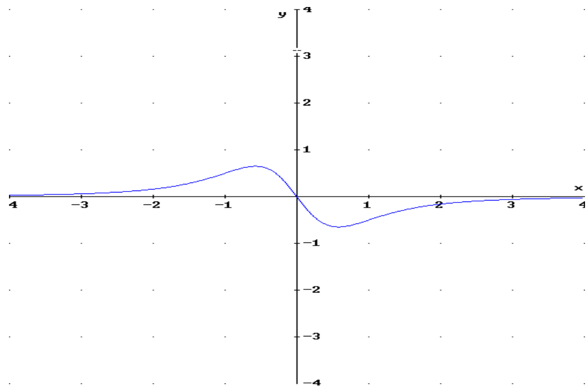

Fig.n.3;
per a=1

Dall'analisi dei grafici si traggono le seguenti conclusioni principali:

- il punto di Massimo diventa l'intersezione con l'origine;
- i punti di flesso diventano Massimi e minimi della funzione derivata prima.

Si costruisce il grafico della derivata II per $a = 1$

Grafico della derivata seconda

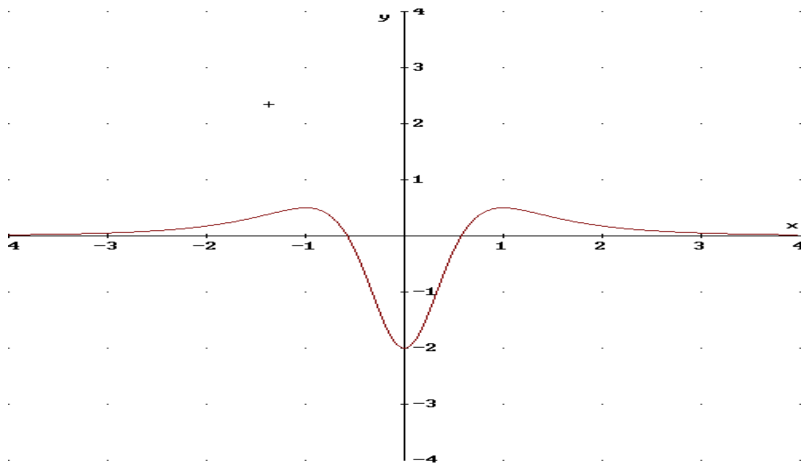

Fig. n. 4
a=1

Il punto d'incontro con l'origine diventa il minimo, i punti di flesso diventano massimi.
Si è ripetuto ogni operazione con $a = -1$ e con $a = \pm 2$; $a = \pm 3$.

Si studia il luogo dei flessi eliminando il parametro dalle coordinate dei flessi; si ottiene

$y = \pm \dfrac{3}{4} x\sqrt{3}$ (rette passanti per 0).

Luogo dei flessi

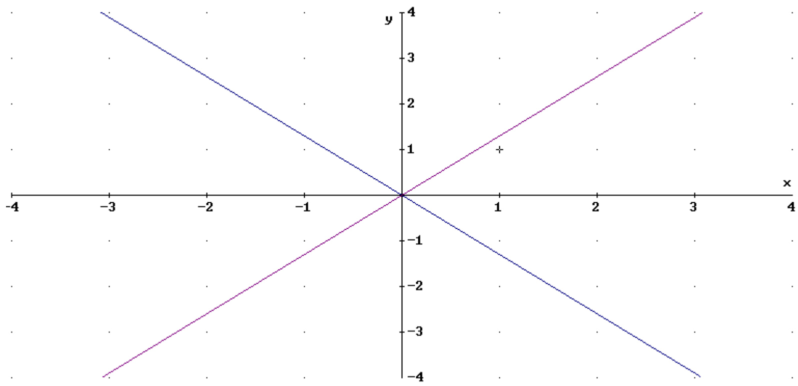

Fig. n.5

Commenti

La risoluzione del problema, senza l'aiuto del computer, richiede allo studente una maggiore abilità di calcolo, con il software lo studente può concentrarsi sui concetti.
Il problema è stato ritenuto, dai ragazzi molto interessante per la trattazione che ne è derivata.

GRAFICI

Grafico della famiglia di curve

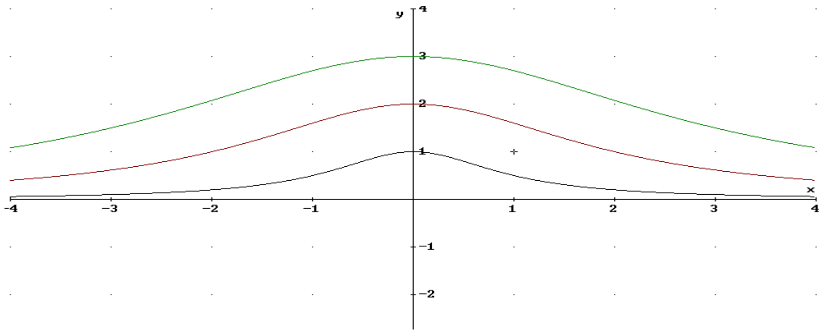

Fig.. n.6
per a=1;a=2;a=3

Grafico della famiglia di derivate prime

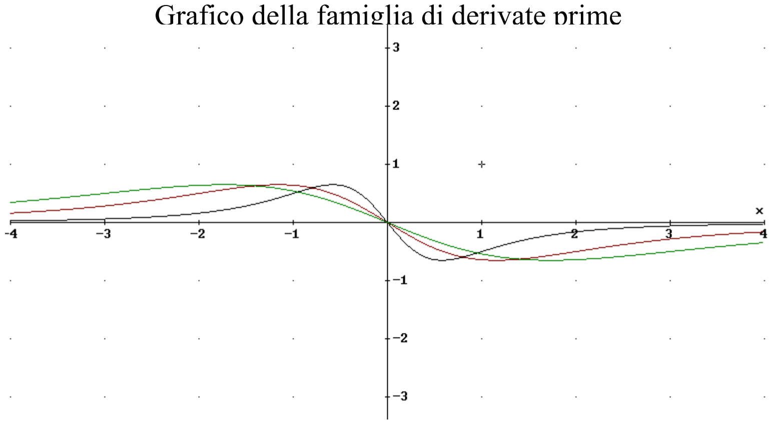

Fig.n.7
per a=1;a=2;a=3

Grafico della famiglia di derivate seconde

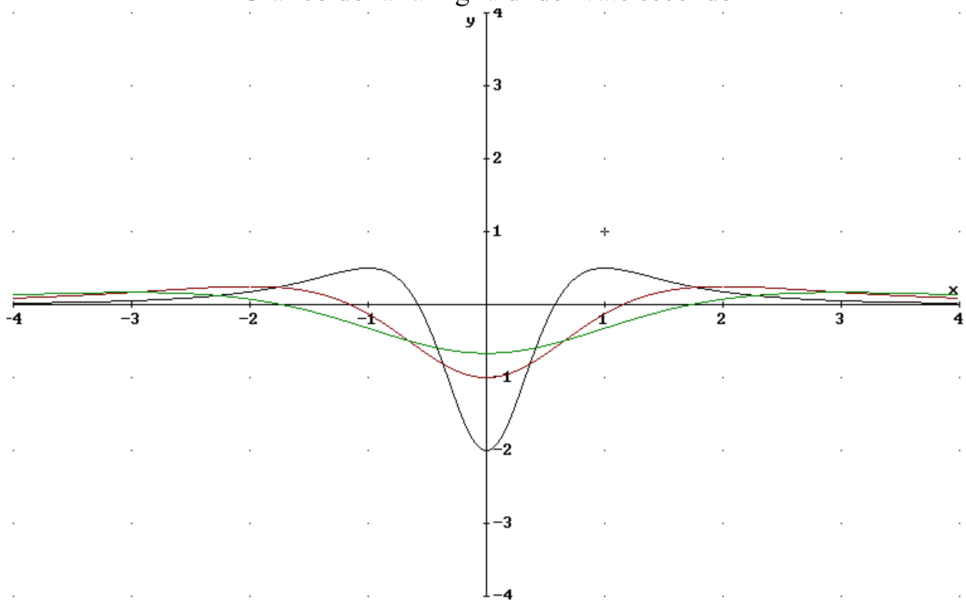

Fig.n.8
per *a*=1;*a*=2;*a*=3

Grafico completo delle famiglie di funzioni, derivate prime e derivate seconde

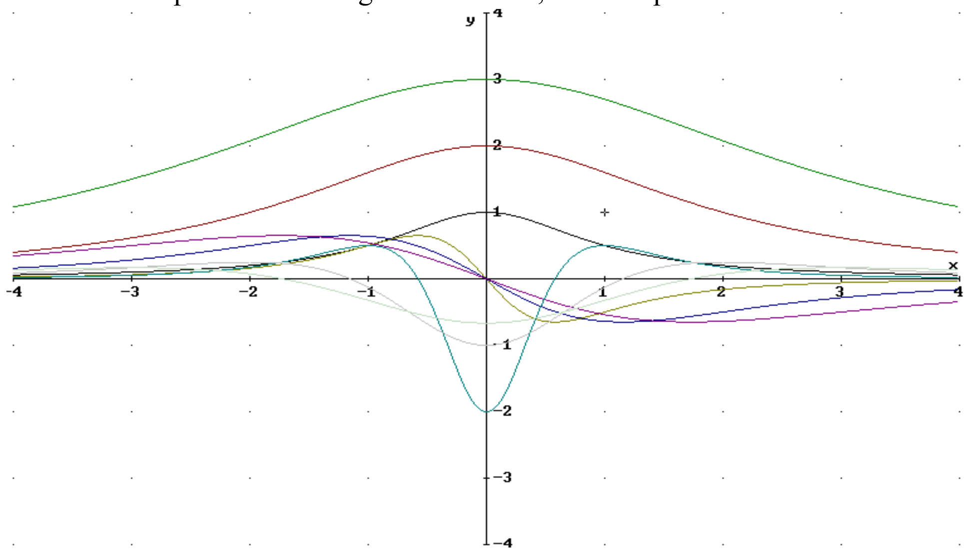

Fig.n.9
per *a*=1; *a*=2; *a*=3

Analogamente si procede per valori negativi del parametro *a.*