

Progetto Eccellenza 2002

Successioni, metodi numerici e metodi dell'algebra lineare

Coordinatori

A. Boiti e M.A. Chimetto

Problema 2

Successioni definite per ricorrenza.

- 1.1 In una successione g_k , con $g_0 = 0$ e $g_1 = 12$, ciascun numero è la media aritmetica dei due numeri precedenti. La successione ha un limite? Qual è? Si può dimostrare? Esiste un'espressione per il termine generico g_k in funzione di k ? Che cosa succede se modifico i primi due elementi? Come cambia il limite?

- 1.2 E' data una popolazione P di individui che sono tutti portatori di uno di due caratteri, u e v , che si escludono mutuamente e rispetto ai quali P può essere ripartita in due sottoinsiemi disgiunti U e V ($P = U \cup V$ e $U \cap V = \Delta$). Il numero complessivo N degli individui di P rimane costante nel tempo. Si suppone, però, che in ciascuno dei due sottoinsiemi U e V , ad intervalli regolari di tempo, si verifichino scambi del carattere, in proporzioni costanti. Una certa percentuale degli elementi di U passa quindi a V e viceversa. Si può parlare, ad esempio, di: abitanti di uno stato che si stabiliscono in una sua regione oppure si trasferiscono fuori di essa; abitanti della città che si trasferiscono in campagna e viceversa; fumatori che smettono l'abitudine al fumo e di non fumatori che iniziano a fumare; persone che trascorrono le vacanze al mare o ai monti e che la stagione successiva cambiano; elettori che votano uno di due partiti politici e che alla elezione successiva possono mantenere o cambiare convinzioni;

Calcolare, con esempi numerici, l'abbondanza degli individui presenti nei due sottoinsiemi U e V in un certo momento ed osservarne l'andamento nel tempo in relazione a diverse scelte delle proporzioni costanti degli scambi del carattere distintivo.

Cercare espressioni generali delle abbondanze dei due sottoinsiemi.

Somma dei termini di successioni.

- 1.3 Considera la seguente somma infinita

$$0,01 + 0,002 + 0,0003 + 0,00004 + 0,000005 + 0,0000006 + 0,00000007 + \dots$$

- a. Scrivi una generica espressione per l' n -esimo addendo.
- b. Calcola, usando un software opportuno, la somma dei primi 5, 10, 20 addendi.
- c. Inverti il numero così ottenuto e rappresentalo in forma approssimata. Che cosa noti?
- d. Quale congettura puoi fare sulla somma infinita rappresentata sopra?
- e. Prova a dimostrare la congettura: la somma degli infiniti addendi si mantiene limitata o cresce indefinitamente?
- f. Prova a generalizzare il risultato ottenuto ad un sistema di numerazione a base diversa da 10.

- 1.4 Considera ora la seguente somma infinita basata sui numeri di Fibonacci.

$$0,01 + 0,001 + 0,0002 + 0,00003 + 0,000005 + 0,0000008 + 0,00000013 + \dots$$

- g. Quanto vale questa "somma infinita"? Si tratta di un numero finito o periodico? E se la base è diversa da 10?

Progetto Eccellenza 2002 - Successioni, metodi numerici e metodi dell'algebra lineare

Obiettivo

Costruire un itinerario didattico nel quale si utilizzino uno o più software tra quelli a disposizione per la didattica della matematica, con lo scopo di indagare su alcune successioni ritenute particolarmente significative, o per i problemi che presentano o per le loro applicazioni

Modalità

Nel formulare l'itinerario didattico da sperimentare in classe l'insegnante deve tenere presente che:

- i problemi hanno lo scopo di incoraggiare gli alunni a sperimentare (possibilmente con l'aiuto di un calcolatore) ed a fare congetture;
- si vuole misurare o, comunque, in qualche modo valutare il valore aggiunto che l'uso del software può fornire all'efficacia della proposta didattica, e quindi al docente, e al miglioramento dell'apprendimento, e quindi al discente;
- si deve articolare la proposta in modo che possa essere spendibile in vari contesti scolastici e a vari livelli, senza dimenticare quello dell'eccellenza;
- si deve privilegiare la metodologia della scoperta attraverso la risoluzione di problemi che possono servire per introdurre l'argomento, o in itinere, o come approfondimento.

Suggerimenti e problemi proposti

Il docente può utilizzare nella formulazione e sperimentazione della propria proposta i problemi che seguono.

Resta ben inteso che l'insegnante deve sentirsi libero di articolare la propria proposta come meglio crede. Pertanto, se in base alle proprie esigenze o a quella della classe a cui l'unità didattica si rivolge, lo ritiene necessario, può proporre nuovi problemi nell'ambito dello stesso tema o utilizzare quelli proposti solo in parte, smontandoli e rimontandoli come vuole. Dunque massima libertà e discrezionalità fermi restando i quattro punti elencati e dettagliati nelle modalità/suggerimenti.

Bibliografia

- [1] *Elementi di analisi matematica per il triennio delle scuole superiori*, Giovanni Prodi - Enrico Magenes, D'Anna ed., Firenze, 1982
- [2] *Guida al volume Elementi di analisi matematica per il triennio delle scuole superiori* a cura di L. Bazzini - A. Pesci - M. Reggiani, D'Anna ed., Firenze, 1985
- [3] *Calcolo: teoria e applicazioni*, Franco Conti, McGraw-Hill Libri Italia, Milano 1993
- [4] *Algebra Lineare e sue Applicazioni*, Gilbert Strang, Liguori ed., Napoli 1981
- [5] Articolo: Sui numeri di Fibonacci e sulle equazioni alle differenze, pubblicato sul sito dedicato alle Olimpiadi della Matematica <http://olimpiadi.ing.unipi.it> e rintracciabile all'url: <http://olimpiadi.ing.unipi.it/modules.php?name=Sections&op=viewarticle&artid=49>

Successioni definite per ricorrenza

a cura di Aldo Boiti, con il contributo di Domingo Paola¹

Problema 2.1

In una successione $\{g_n\}$, con $g_0 = 0$ e $g_1 = 12$, ciascun termine, a partire dal terzo, è la media aritmetica dei due termini precedenti:

$$g_{n+1} = \frac{1}{2}(g_n + g_{n-1}) \quad , \quad n \geq 1 .$$

La successione ha un limite? Qual è? Si può dimostrare? Esiste un'espressione per il termine generico g_n in funzione di n ? Che cosa succede se modifico i primi due elementi? Come cambia il limite?

Strumenti software: foglio di calcolo, Derive.

Collocazione temporale

Nel corso dell'a.s. 2002/2003 il prof. Domingo Paola propose il problema 2.1 in una classe prima di liceo scientifico, aderente al PNI. Con le parole del prof. Paola, la classe era *"formata da alcuni studenti particolarmente motivati, abituati a lavorare in situazioni di problem solving, che avevano già lavorato con successioni definite per ricorrenza, bravi nel maneggiare strumenti come le calcolatrici grafico-simboliche, fogli elettronici, Derive, Cabri, abituati a collaborare via e-mail.* Il prof. Paola ed i suoi studenti avevano già affrontato, a partire dal paradosso di Achille e la tartaruga e in modo soft il problema della somma di una serie (in sostanza avevano visto che non sempre la "somma di infiniti termini" è infinita e come sia possibile determinarla in qualche caso con alcune manipolazioni algebriche apparentemente ardite). Il problema è stato proposto a tutti, ma, nell'atto di proporlo, il prof. Paola ha sottolineato che si trattava di un problema difficile, che, per l'età e la preparazione degli studenti, doveva essere considerata come una sfida intellettuale e che l'eventuale insuccesso non avrebbe dovuto comportare frustrazione. Il problema ha impegnato in prima persona quattro studenti che hanno inviato possibili e parziali proposte risolutive. Il prof. Paola ha risposto una sola volta, con consigli molto generici. Andrea Martinelli, uno degli studenti che hanno lavorato fin dall'inizio al problema, ha inviato il lavoro più completo." Questo è l'unico contributo pervenuto per l'area 2.

Benché l'esperienza riferita provi come il problema possa essere utilizzato con profitto già da una prima classe, in un percorso didattico particolare, dopo avere introdotto le successioni definite per ricorrenza, per la sua fruizione completa sarebbe opportuno riprendere ed approfondire il discorso con gli studenti nel momento in cui si introducono in classe (in quarta o in quinta) i limiti (in particolare i limiti delle successioni).

¹ Docente di Matematica presso il Liceo Issel di Finale Ligure (SV)

Caratteristiche connesse all'uso del software

L'uso di strumenti software come *foglio di calcolo* e *Derive* permette di accostarsi ai problemi in modo sperimentale. Con il *foglio di calcolo* si possono fare rapidamente tutte le prove sulle congetture avanzate, per escludere quelle palesemente erranee. Con *Derive* si verificano le formule ricavate.

Aspetti didattici

L'obiettivo che ci si era prefissi proponendo il problema 2.1, insieme agli altri problemi dell'area 2, era di arricchire l'itinerario didattico utilizzando uno o più software, con lo scopo di incoraggiare gli studenti a sperimentare (con l'aiuto del computer), a fare congetture e ad indagare su alcune successioni ritenute particolarmente significative, per le difficoltà che presentano e per l'interesse delle loro applicazioni. Si voleva offrire uno spunto per presentare i criteri di convergenza delle successioni.

Nodi concettuali

Il problema 2.1 conduce gli studenti a riflettere sul concetto di limite e permette di approfondirlo e di verificarlo in una situazione concreta.

Procedura di soluzione e contributi degli studenti

Riassumo i risultati ottenuti per il problema 2.1 dagli studenti del prof. Paola e particolarmente da Andrea Martinelli.

Il metodo di indagine euristico usato è originale ed ingegnoso e fornisce presto indizi che portano ad una soluzione accettabile. Dalla tabella del *foglio di calcolo* (è allegato un file riveduto) appare evidente che la successione $\{g_n\}$ ha, con le parole di Andrea, un "*punto di stabilità*" (limite) che vale 8: dopo appena 45 termini la differenza tra due termini consecutivi della successione è minore di 10^{-12} .

Gli "*esperimenti con i numeri*" permettono ad Andrea di concludere (meglio "intuire") che, se si modificano i primi due elementi della successione, la variazione del limite è la combinazione lineare (uso questa terminologia, non propria di studenti di una prima superiore, per motivi di sintesi) di $1/3$ della variazione data al primo elemento g_0 e di $2/3$ della variazione data al secondo elemento g_1 . L'influenza del secondo elemento sul limite è dunque doppia di quella del primo.

La congettura di Andrea per determinare il limite della successione in base ai valori dei due primi elementi si riassume nella seguente formula:

$$\frac{2}{3}(g_1 - g_0) + g_0 .$$

Andrea osserva che la formula ha funzionato correttamente in tutti i casi in cui l'ha adoperata. La spiegazione che ne dà è un po' confusa, ma si deve ricordare che frequenta una classe

prima. Anche le perplessità sul significato di limite, espresse negli scambi epistolari elettronici, sono tanto più apprezzabili in quanto provenienti da studenti di una classe prima, quando potrebbero essere già considerate buoni spunti di discussione con studenti di una classe quarta o quinta. Viene infatti messa bene in evidenza l'azione livellatrice della media aritmetica e la progressiva diminuzione della distanza tra i termini consecutivi della successione, che però non si annulla mai.

Detta d_k la differenza $g_k - g_{k-1}$ tra due termini consecutivi della successione, Andrea, sempre osservando attentamente la tabella del *foglio di calcolo*, scopre che ogni differenza si dimezza in valore assoluto rispetto al valore precedente e cambia segno:

$$d_k = -\frac{1}{2} d_{k-1} \quad (k \geq 2) .$$

Quindi ricava

$$d_k = d_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad (k \geq 1)$$

ed esprime il termine generico g_n come somma delle prime n differenze:

$$g_n = g_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n \quad (n \geq 1) .$$

Infine Andrea scrive la formula

$$g_n = 12 \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \quad (n \geq 1) ,$$

che non trascura di verificare attentamente con *Derive* in vari casi (file allegati).

La formula può essere generalizzata includendo la dipendenza dai valori dei primi due termini della successione:

$$g_n = g_0 + (g_1 - g_0) \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \quad (n \geq 1) .$$

Si osserva che la successione delle differenze è una progressione geometrica, di primo termine $d_1 = g_1 - g_0$ e di ragione $-\frac{1}{2}$. Allora si può esprimere g_n preferibilmente con la formula della somma dei termini di una progressione geometrica, nella forma:

$$g_n = g_0 + (g_1 - g_0) \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] \quad (n \geq 1) .$$

In una delle epistole elettroniche di Andrea, reperibili nel sito dell'Eccellenza, c'è una apprezzabile dimostrazione diretta di questa formula, che non riporto per motivi di spazio.

Andrea, osservando la potenza della frazione $-\frac{1}{2}$ presente nella formula, capisce che ogni valore di g_n è solo una approssimazione del "*punto di stabilità*", gli si avvicina moltissimo con l'aumentare di n ma non lo raggiunge mai. Capisce inoltre che, per il gioco dei segni delle potenze, i termini della successione di indice pari tendono a crescere verso il limite partendo da un valore più basso mentre quelli di indice dispari tendono a decrescere verso il limite partendo da un valore più alto (sempre che nelle diverse scelte dei valori iniziali si mantenga la disuguaglianza proposta dal testo del problema, $g_0 < g_1$, altrimenti le considerazioni si devono ribaltare).

Approfondimenti

Sviluppando l'intuizione della formula

$$\frac{2}{3}(g_1 - g_0) + g_0 ,$$

con cui è stata determinata la dipendenza del limite dai due primi elementi della successione, si è portati a calcolare la quantità

$$q_n = \frac{2}{3}(g_{n+1} - g_n) + g_n , \quad n \geq 0 .$$

Tenendo presente che

$$g_{n+1} - g_n = -\frac{1}{2}(g_n - g_{n-1}) ,$$

è facile provare l'uguaglianza

$$\frac{2}{3}(g_{n+1} - g_n) + g_n = \frac{2}{3}(g_n - g_{n-1}) + g_{n-1} ,$$

ovvero

$$q_n = q_{n-1} .$$

Si scopre così che la quantità q_n è un invariante per la successione $\{g_n\}$, ovvero non cambia valore al variare dell'indice n . Dunque procedendo a ritroso si ottiene:

$$q_n = q_0 , \quad \forall n \geq 0 ,$$

perciò è anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = q_0 .$$

Per gli studenti che conoscono i limiti, indicato con l il limite di g_n per n che tende all'infinito [che esiste finito, per il criterio di convergenza di Cauchy (la cui verifica esplicita costituisce un buon esercizio da proporre agli studenti più volenterosi)], si può scrivere

$$q_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} (g_{n+1} - g_n) + g_n \right) = \frac{2}{3} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{n+1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \frac{2}{3} (l - l) + l = l$$

e infine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = l = q_0 = \frac{2}{3} (g_1 - g_0) + g_0 .$$

La costanza della quantità

$$q_n = \frac{2}{3} (g_{n+1} - g_n) + g_n .$$

equivale a quella della quantità

$$g_n + 2g_{n+1} ,$$

che avevo suggerito di considerare nella ricerca di strade diverse per risolvere il quesito.

Commenti

Si può osservare che se non fosse per il fattore $\frac{1}{2}$ nella definizione di g_{n+1} , si avrebbe una successione del tipo di quella di Fibonacci, di cui potrebbe essere interessante indagare sul limite del rapporto tra due termini consecutivi. Un altro sviluppo possibile consiste nel cercare se si presentano casi interessanti per il limite con frazioni diverse da $\frac{1}{2}$.

Allegati

Un file *Excel*, Problema_2.1.

Due file *Derive*, Prova, Esp, dello studente Andrea Martinelli.