Progetto Eccellenza 2002

Successioni generate da rotazioni

Coordinatori
M. Puppi e L. Tomasi

Problema 1

Sono dati nel piano un triangolo ABC ed un punto X_0.

1. Si consideri la successione di punti X_k così formata:

$$\begin{cases} X_1 \text{ sia il simmetrico di } X_0 \text{ rispetto al punto } A, \\ X_2 \text{ sia il simmetrico di } X_1 \text{ rispetto al punto } B, \\ X_3 \text{ sia il simmetrico di } X_2 \text{ rispetto al punto } C, \\ X_4 \text{ sia il simmetrico di } X_3 \text{ rispetto al punto } A, \\ X_5 \text{ sia il simmetrico di } X_4 \text{ rispetto al punto } B, \\ X_6 \text{ sia il simmetrico di } X_5 \text{ rispetto al punto } C, \\ \ldots \text{e così via applicando le tre simmetrie centrali nello stesso ordine.} \end{cases} \tag{1}$$

   Si trovi che relazione c'è tra il punto X_{900} ed i punti dati A, B, C e X_0.

2. Si consideri la successione di punti ottenuta applicando ripetutamente il ciclo delle tre simmetrie centrali precedenti, sempre a partire dal punto X_0, ma nell'ordine inverso: prima quella di centro C, poi quella di centro B, quindi quella di centro A. Che relazione c'è tra il 900-esimo punto di questa nuova successione ed i punti dati A, B, C e X_0?

3. Invece di un ciclo di tre simmetrie centrali, applichiamo un ciclo di tre rotazioni antiorarie di 120°, con centro A, B, C, per cui X_1 è ora il trasformato di X_0 nella rotazione antioraria di 120° e di centro A, il punto X_2 è il trasformato di X_1 nella rotazione antioraria di 120° e di centro B, e cosÏ via applicando le tre rotazioni sempre nello stesso ordine. Sotto quali condizioni sui punti dati A, B, C, il punto X_{900} coincide con X_0?

4. La successione X_k sia ora generata con la solita scelta del punto iniziale X_0 e l'applicazione ripetuta di un ciclo di tre rotazioni antiorarie con centro nei punti A, B, C (in quest'ordine), ma con delle nuove ampiezze. La rotazione di centro A sia di ampiezza 90°, la rotazione di centro B sia di ampiezza 60° e la rotazione di centro C sia di ampiezza 120°. Provare che c'è un minimo numero naturale $n > 0$ tale che X_n coincida con il punto X_0 di partenza (la successione è periodica di periodo n). Sotto quali condizioni sui punti dati A, B, C accade che X_3 coincide con il punto X_0? e quando X_6 coincide con il punto X_0?

Modalità e suggerimenti.

Nel formulare la sperimentazione in classe l'insegnante deve tener presente che:

- sarà bene distinguere la rappresentazione matematica dalla rappresentazione informatica del problema;
- la metodologia di problem-solving adottata dovrà evidenziare l'uso del software usato sia come strumento di esplorazione e scoperta che come strumento di analisi;
- si può modificare il testo del problema per adattarlo alle proprie esigenze didattiche, ad esempio sostituendo il triangolo con un poligono di $n > 3$ vertici, e il relativo ciclo di n rotazioni aventi come centro i vertici del poligono.

Prerequisiti

É libera la scelta degli strumenti matematici e informatici (ad esempio: geometria analitica oppure sintetica, software di geometria dinamica o di computer algebra) e del livello (tutta la classe oppure una selezione di studenti).

Riferimenti bibliografici.

[1] *Problem Solving e Calcolatore, Problema 10*, pp. 137-147, a cura di G. Accascina, G. Margiotta, G. Olivieri, 2001 F. Angeli ed.

[2] *Trasformazioni geometriche. Le Isometrie.* Yaglom, Zanichelli.