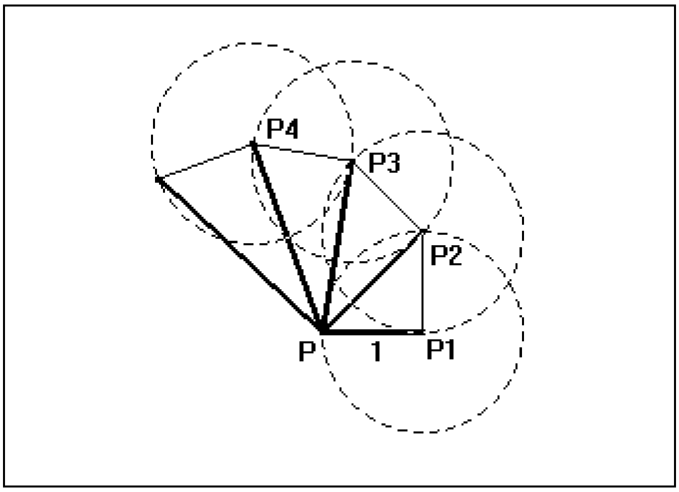
I testi dei problemi

1) Che cosa rimane di un rettangolo?
E’ dato un rettangolo aureo (cioè un rettangolo in cui l’altezza è la sezione aurea della base), che viene disposto su un tavolo con il lato più lungo rivolto verso di noi. Dalla parte sinistra del rettangolo ritagliamo un quadrato, il più grande possibile: si vede che quel che resta del rettangolo è ancora un rettangolo aureo.
Giriamo intorno al tavolo, verso sinistra, in modo da avere di nuovo il lato più lungo rivolto verso di noi e ripetiamo l’operazione. Proseguiamo indefinitamente, ruotando in verso orario intorno al tavolo e tagliando via i successivi quadrati. Sarà “tagliato” così ogni punto del rettangolo tranne uno. Trovare la posizione di questo punto eccezionale.

2) Utilizzando la costruzione riportata sotto, che permette di rappresentare segmenti di lunghezza $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$, determinare il massimo valore di n per cui:

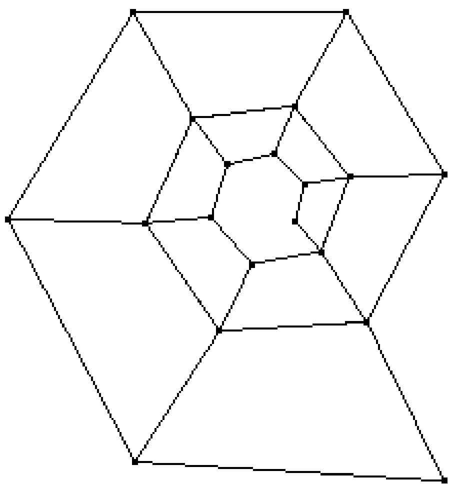
$$\sum_{k=1}^{n} arctg \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\pi$$



3) Siano $x_1, x_2, ..., x_n$ dei numeri positivi tali che $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$, per k =1, 2, …, n
1. Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} < \frac{1}{x_1}$

4) Sia *ABCD* un parallelogramma qualsiasi. Si costruisca il punto P_2 proiettando il suo centro su *AB*, parallelamente a *BC*. Il segmento P_2D incontra la diagonale *AC* in un punto; si costruisca il punto P_3 , proiettando tale punto su *AB*, parallelamente a *BC*. Analogamente si costruiscano i punti P_4, P_5, …, P_n.
Qual è la lunghezza di AP_n , in funzione di *AB* ?

5) Con un quadrilatero qualsiasi si può tassellare il piano. La figura mostra la tassellazione del piano con quadrilateri simili. Ricostruire la figura. Determinare le condizioni che devono essere soddisfatte dal quadrilatero perché la costruzione sia possibile.



6) Si consideri la seguente somma infinita basata sui numeri di Fibonacci.
Dimostrare che il suo reciproco è un numero intero.

0,0	+
0,01	+
0,001	+
0,0002	+
0,00003	+
0,000005	+
0,0000008	+
0,00000013	+
0,000000021	+
…………….	+

7) Nel 1969, dopo dieci settimane di discussioni, i negoziatori per la pace nel Vietnam, riuniti a Parigi, si accordarono finalmente sulla forma che avrebbe dovuto avere il tavolo dei negoziati: un circolo intorno al quale, a uguale distanza uno dall'altro, potevano prendere posto 24 persone. Supponiamo che i cartellini segnaposto di questa tavola contengano 24 nomi diversi e che, ad un

certo punto, ci sia una tale confusione che i 24 negoziatori prendano posto casualmente. Essi scoprono che nessuno è seduto al posto giusto; senza considerare in che modo sono seduti, è possibile ruotare la tavola finché almeno due persone contemporaneamente si trovino di fronte al rispettivo segnaposto?
E nel caso che una persona sia già seduta al posto giusto, è ancora possibile ruotare la tavola finché almeno due persone contemporaneamente si trovino di fronte al segnaposto giusto?

8) Un individuo può avere un certo numero di discendenti diretti: con probabilità p_1 ha un discendente, con probabilità p_2 ha due discendenti, con probabilità p_0 non ha alcun discendente ($p_0+p_1+p_2 = 1$).Ciascun dei discendenti a sua volta dà luogo a propri discendenti (seconda generazione), con la stessa legge di probabilità, e così di seguito, nelle successive generazioni.
Studiare la probabilità di estinzione del processo. (Un modello matematico di questo genere si applica allo studio dei neutroni nei processi a cascata).

9) In un piano sono dati tre punti distinti, *A*, *B* e *F*. Al variare del punto *F*, studiare il luogo del punto *P*, medio del segmento *A'B'*, derivante dalla seguente costruzione:

a) nel semipiano delimitato dalla retta *AB* e non contenente *F*, individuare sulla perpendicolare al segmento *AF*, condotta per *A*, il punto *A*' tale che *AA'* = *AF*;
b) nel semipiano delimitato dalla retta *AB* e non contenente *F*, individuare sulla perpendicolare al segmento *BF*, condotta per *B*, il punto *B*' tale che *BB'* = *BF*.

Analizzare inoltre cosa succederebbe al punto *P* se cadesse il vincolo che i punti *A'* e *B'* devono trovarsi nel semipiano opposto a quello che contiene il punto *F*, rispetto alla retta *AB*.

10) Date due distinte rette parallele e un punto su ciascuna di esse, diciamo *A* e *B*, studiare il luogo individuato dal terzo vertice di uno dei due triangoli equilateri di lato il segmento *AB*, al variare di *A* oppure di *B*. Studiare inoltre la relazione esistente tra i quattro diversi luoghi che possono essere prodotti dai due terzi vertice del triangolo al variare dei punti *A* o *B*.

11) Raccogliere i seguenti dati: credito scolastico degli allievi nelle classi terminali dello scorso anno scolastico e voto riportato all'esame di stato.
Esaminare se esiste una correlazione tra tali dati.

12) Una biglia viene lasciata cadere verticalmente sul terreno da un'altezza di 1 m. L'urto con il suolo provoca una perdita di energia cinetica del 10%.
Si esamini il fenomeno e si determini dopo quanto tempo la biglia si ferma.

13) Di un tetraedro *ABCD* si conosce il vertice $A(-1;2;-2)$. Il piano α della faccia *ABC* passa per l'origine $O(0;0;0)$ del riferimento ortonormato *Oxyz*.

La retta *AB* è parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La retta che contiene i vertici *C* e *D* ha equazione *CD*: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 2+t \end{cases}$

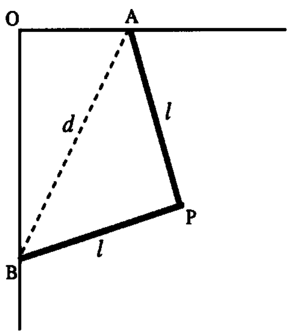
L'angolo $A\hat{B}C$ è di 45°.

La faccia *ABD* ha la stessa area della faccia *ABC*.

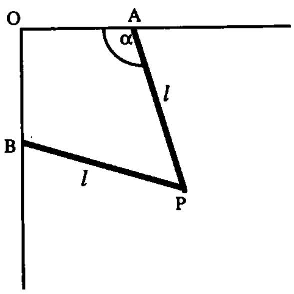
a) Determina l'equazione cartesiana del piano $\alpha = ABC$.
b) determina le coordinate del vertice *C*.
c) determina le coordinate del vertice *B*. Scegli la soluzione più lontana dall'origine;
d) determina le coordinate del vertice *D*.
e) verifica che il tetraedro così ottenuto ha tutte le facce congruenti.

(Maturità scientifica del Liceo di Lugano 2 del giugno 1999)

14) Un paravento, costituito da due pannelli rettangolari identici con base di lunghezza ***l***, viene spiegato verticalmente attorno a un angolo retto di un locale in modo che l'ambiente separato delimitato dal paravento e dalle due pareti sia di area massima. Guardando la situazione "dall'alto" si vedrà ad esempio il quadrilatero *OAPB* seguente:



a) Indichiamo con *d* la distanza tra *A* e *B*. Che valore massimo può avere *d*?
b) Fissata una certa distanza *d* tra *A* e *B*, dimostra che l'area del quadrilatero *OAPB* è massima se $|OA| = |OB|$. (Consiglio: poiché in questo caso l'area del triangolo *APB* è costante, l'area del quadrilatero dipende unicamente dall'area del triangolo rettangolo *OAB*).
c) Sia dunque $|OA| = |OB|$.



Determina, in funzione di *l*, la misura del segmento *OA* in modo che l'area del quadrilatero *OAPB* sia massima.

(Consiglio: sfrutta la congruenza dei due triangoli *OAP* e *OPB* e usa come variabile l'ampiezza α dell'angolo *OAP*).
(Maturità scientifica del Liceo di Lugano 2 del giugno 1999)

15) Costruiti, esternamente al triangolo ABC, i triangoli equilateri ABC', BCA', CAB', si mostri che:

a) I segmenti AA', BB', CC' sono congruenti
b) Le rette AA', BB', CC' passano per uno stesso punto O
c) se il punto O è interno al triangolo ABC, la somma delle sue distanze dai vertici A, B, C è uguale alla lunghezza comune dei segmenti AA', BB', CC'.

16) Il triangolo ABC di baricentro G è inscritto nella circonferenza Γ. Studiare il luogo descritto da G quando uno dei vertici varia su Γ. Stabilire inoltre come viene suddiviso, dai punti in cui incontra il luogo, il lato opposto al punto che varia sulla circonferenza.

17) E' stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:
Vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo *M*, un pino *P* e una quercia *Q*. Da *M* dirigiti in linea retta fino a giungere in *P*. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di *MP*. Pianta in questa posizione un paletto P_1. Quindi ritorna in *M* e da qui dirigiti verso *Q* in linea retta. Giunto in *Q* gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di *MQ*. Pianta in questa posizione un paletto P_2. Il tesoro *T* si trova nel punto medio del segmento P_1P_2.
Problema
Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo *M*. Ci sono *P* e *Q* ma non c'è *M*. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

18) E' dato un quadrilatero *ABCD*. Sui suoi lati costruisci quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Determinati i centri dei quattro quadrati, uniscili per ottenere il quadrilatero *EFGH*. Quali configurazioni può assumere *EFGH*, al variare di *ABCD*?