

IRRE – Emilia Romagna

MATEMATICA E SOFTWARE DIDATTICI

(Materiali relativi al Progetto Eccellenza – 2000)

a cura di

Aurelia Orlandoni



G. ACCASCINA, P. ANTOGNINI, A. ANZALONE, G. C. BAROZZI, P. BERNESCHI, A. BOITI, R. BONARELLI, S. BORNORONI, P. CARBONI, M. A. CHIMETTO, E. CRESPIA, C. DANÈ, F. DEL VECCHIO, M. DE VITA, A. DI MARCO, M. FRIGENI, R. GUIDETTI, M. C. IPSEVICH, P. MAFFEI, G. MARGIOTTA, L. MONICA, F. NUZZI, G. OLIVIERI, A. ORLANDONI, D. PAOLA, R. PENOLAZZI, E. PONTORNO, M. PUPPI, R. RICCI, F. ROHR, S. ROSSETTO, R. M. ROSSI BUCCIARELLI, S. D. SARTI, M. SPARAPANI, G. SPERANZA, L. TOMASI, G. TONINEL, R. VERDIANI, A. ZANNI, S. ZOCCANTE, M. ZOFFOLI

IMPAGINATO E STAMPATO DA IRRE EMILIA ROMAGNA.

TUTTI I DIRITTI SONO RISERVATI.

**I CONTENUTI DI QUESTO VOLUME POSSONO ESSERE UTILIZZATI CITANDO E-
SPRESSAMENTE LA FONTE**

GENNAIO 2002

Indice

Presentazione	5
Introduzione alle curve di Bézier	9
I testi dei problemi	19
Problema 1	25
Problema 2	43
Problema 4	47
Problema 6	67
Problema 8	83
Problema 9	99
Problema 11	109
Problema 13	115
Problema 14	121
Problema 15	129
Problema 16	137
Problema 17	149
Problema 18	161

Presentazione

Nel 1998 la prof. Anna Maria Arpinati, comandata presso l'IRRSAE Emilia Romagna, ha promosso un'attività seminariale per i docenti di matematica di scuola superiore nell'ambito del progetto pluriennale "Eccellenza nel triennio delle superiori". L'iniziativa si è poi sviluppata nel tempo con il coinvolgimento dell'IRRSAE Lazio, che, ad anni alterni, cura l'organizzazione delle attività e la pubblicazione dei lavori prodotti dai gruppi.

L'attenzione è stata rivolta ad una riflessione sul guadagno formativo legato all'utilizzo di software matematici, come *Cabri*, *Derive*, *Mathematica*, per citare i più conosciuti.¹

La diffusione dell'utilizzo del Laboratorio di Informatica nell'insegnamento della matematica e quella di software specifici per la matematica imponeva, ormai, alcune riflessioni:

- quale spazio dare ai linguaggi di programmazione (Pascal,...),
- quale utilizzo fare dei software matematici,
- come adattare le attività di Laboratorio all'insegnamento della matematica, sia dal punto di vista dei contenuti sia da quello metodologico.

Il primo anno l'attività, dal titolo "Matematica e software didattici", si è svolta in forma seminariale a Bellaria il 22, 23, 24 aprile 1998. L'invito è stato rivolto ad insegnanti di matematica della Scuola Secondaria di 2° grado che utilizzavano già almeno un software matematico fra *Cabri*, *Derive*, *Mathematica*. Prima del seminario è stata loro inviata una collezione di 31 problemi, con l'invito a risolverne almeno due, con uno dei software indicati².

L'esperienza del primo anno ha portato ad alcune modifiche che hanno però lasciato inalterata struttura e obiettivi dell'attività. Il secondo anno i partecipanti, suddivisi in gruppi, si sono confrontati, utilizzando la posta elettronica, sulla soluzione di un certo numero di problemi e hanno poi concordato le relazioni da presentare al seminario conclusivo che si è svolto a Latina (organizzato dall'IRRSAE

¹ Ricordiamo che, in questi anni, l'IRRSAE-ER ha promosso molte iniziative sull'utilizzo del software nell'insegnamento della matematica, alcune delle quali di carattere stabile: il bollettino CABRIRRSAE, il sito Internet Fardicono, FLATlandia, ProbleMATEMATICamente e la lista di discussione Cabrinews.

² I materiali relativi al seminario sono stati pubblicati nel 1999 dall'IRRSAE Emilia Romagna nel volume MATEMATICA E SOFTWARE DIDATTICI, a cura di Giovanni Margiotta.

Lazio) il 22, 23 e 24 aprile 1999. Alla fine del seminario si è discusso su come far proseguire l'iniziativa, soprattutto in relazione al coinvolgimento delle classi e/o di gruppi di studenti. Dopo i lavori di Latina i gruppi hanno rielaborato, alla luce della discussione, i loro materiali e li hanno inviati all'IRRSAE Lazio che ha curato la pubblicazione dei lavori³.

Dal momento che, già a Latina, si era stabilito di dare la possibilità ai docenti di affrontare con gli studenti la risoluzione dei problemi, il tempo fra la proposta e il seminario di discussione è stato molto maggiore: a febbraio sono stati inviati i testi dei problemi ai docenti suddivisi in gruppi, mentre il seminario si è svolto il 21, 22, 23 settembre 2000 a Bellaria. In seguito i coordinatori hanno revisionato le schede relative alle soluzioni proposte e alla descrizione delle eventuali esperienze in classe o con gruppi di studenti, secondo modalità analoghe a quelle dell'anno precedente, per consentirne la pubblicazione nel presente volume da parte dell'IRRSAE-ER.

Questo volume (in formato PDF), insieme a tutti i file allegati alle soluzioni dei problemi (nei formati *Cabri*, *Derive*, *Mathematica*) sono scaricabili dal sito Fardicono dell'IRRSAE-ER: <http://kidslink.scuole.bo.it/fardicono>

Alcune considerazioni e riflessioni sull'attività

Nel corso degli anni si è cercato di creare le condizioni per cui la soluzione di un problema non fosse un fatto episodico, ma ci fosse la possibilità di inserirlo all'interno di un itinerario didattico da sperimentare con gli studenti. In occasione dell'ultimo seminario, in cui solo una parte dei partecipanti ha presentato esperienze svolte in classe, è stato sottolineato che va ulteriormente anticipata l'assegnazione dei problemi ai gruppi per consentire un significativo lavoro in classe e la costruzione di itinerari didattici.

I software utilizzati dai partecipanti sono passati da tre il primo anno a sette nel 2000⁴. Senz'altro questo è un arricchimento, anche se comporta qualche problema di dialogo e di scambio all'interno dei gruppi quando vengono utilizzati ambienti non noti a tutti. L'idea di comporre i gruppi sulla base dei software conosciuti è stata però scartata perché avrebbe fatto perdere uno degli aspetti più importanti dell'esperienza, cioè la riflessione sul guadagno formativo legato all'utilizzo di *quel* software per risolvere *quel* problema.

³ I materiali sono raccolti nel volume *PROBLEM SOLVING E CALCOLATORE*, a cura di Giuseppe Accascina, Giovanni Margiotta e Giovanni Olivieri, Edizione Franco Angeli, IRRSAE del Lazio, Roma 2001

⁴ CabriII, Derive 4 e Derive 5, Mathematica, Mathview, Excel, Maple, Java, Sketchpad, calcolatrici TI92 e TI89

Costante nel tempo è stato lo spazio dedicato alla riflessione sugli effetti prodotti nel processo di insegnamento-apprendimento dall'uso della tecnologia, senza illudersi che essa produca automaticamente qualità maggiore. A questo proposito va ricordato che, talvolta le relazioni dei gruppi hanno sottolineato il fatto che un certo problema poteva essere risolto tranquillamente senza l'uso di strumenti particolari e che quindi era preferibile proporre una soluzione con "carta e penna".

La positiva esperienza di questi anni ci spinge a proseguire ed estendere l'esperienza cercando di ampliare il gruppo di docenti coinvolti, sviluppando in modo sempre più significativo, attività in classe o con gruppi di studenti, tenuto conto che l'obiettivo resta sempre quello di costruire esperienze finalizzate a gruppi di eccellenza.

Va inoltre ricordato che nei documenti di sintesi della Commissione sulla riforma dei cicli della passata legislatura e, in particolare, in quello del gruppo che si occupava della professionalità docente, viene sottolineata la necessità di un arricchimento professionale anche in relazione allo sviluppo delle discipline e agli strumenti resi disponibili dalle nuove tecnologie. In relazione, poi, alla formazione in servizio viene evidenziato il fatto che si debbano privilegiare attività residenziali e che comunque abbiano come obiettivo l'autoformazione indicando, la ricerca metodologico-disciplinare (controllata) come una delle forme di attività da potenziare.

Infine vorrei ringraziare i professori Giuseppe Accascina e Giulio Cesare Barozzi che hanno contribuito in modo significativo alla riuscita dell'esperienza, il professore Giovanni Margiotta dell'IRRE Lazio che, ad anni alterni, si fa carico dell'organizzazione di questo progetto, la professoressa Anna Maria Arpinati a cui si deve l'idea iniziale e la gestione del primo seminario, il professore Giuliano Mazzanti e la professoressa Franca Noè per l'accurata revisione di questo volume. Un ultimo doveroso ringraziamento ai Direttivi dell'IRRE Emilia Romagna e dell'IRRE Lazio che hanno sostenuto l'esperienza in questi anni.

Bologna 20 dicembre 2001

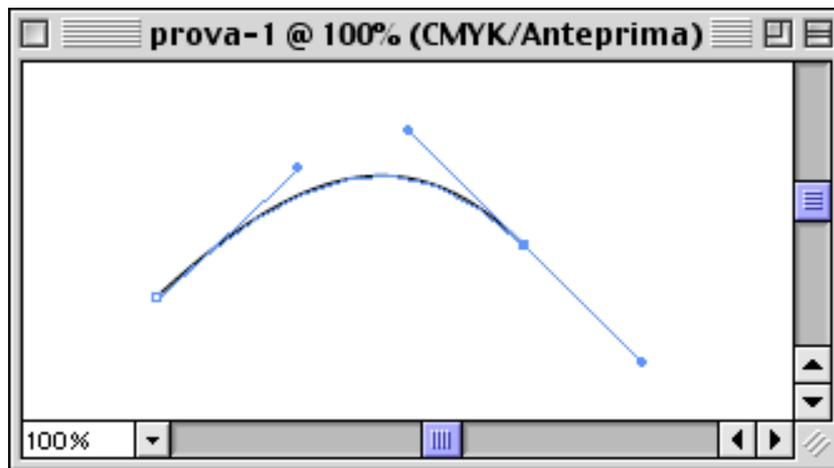
Aurelia Orlandoni
(tecnico IRRE-ER)

Introduzione alle curve di Bézier

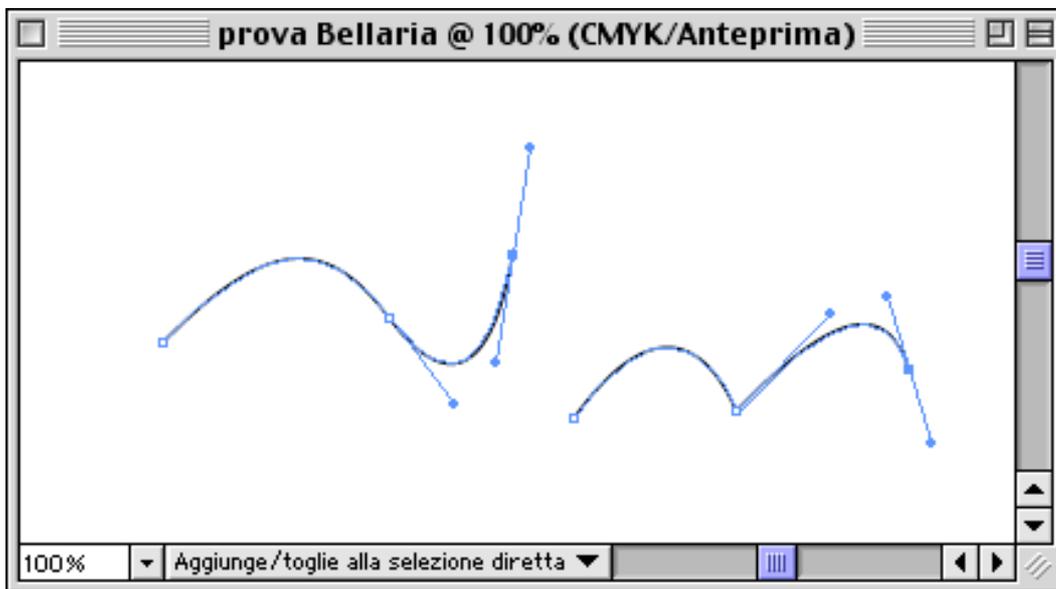
Giulio C. Barozzi
CIRAM - Università di Bologna

e-mail: barozzi@ciram.ing.unibo.it
<http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi>

Tutti i moderni sistemi di disegno al computer che gestiscono la *grafica vettoriale* dispongono della possibilità di tracciare le cosiddette curve di Bézier. Vediamo di che cosa si tratta. Possiamo puntare il cursore in un punto dello schermo (con riferimento alla curva seguente, si tratta del punto a sinistra in basso), trascinarlo e poi rilasciarlo fino a tracciare un segmento: sia il segmento $P1 P2$. Puntiamo poi il cursore in un'altra posizione sia $P3$, e trasciniamo fino alla posizione $P4$ (si tratta del punto in basso a destra); contemporaneamente viene tracciato anche il segmento simmetrico rispetto al punto $P3$. Dal momento in cui cominciamo a trascinare il mouse, (quasi) istantaneamente viene tracciata una curva "dolce", che congiunge $P1$ con $P3$, avendo come tangente nei punti stessi i segmenti $P1 P2$ e $P3 P4$ rispettivamente.



Possiamo poi modificare i segmenti che determinano la forma degli archi tracciati, oppure concatenare due o più archi, sia raccordando gli archi e le tangenti nei punti di congiunzione (figura in basso a sinistra), oppure soltanto raccordando gli archi ma lasciando per così dire "libere" le tangenti.



Vogliamo dare una spiegazione a livello matematico di ciò che accade "dentro" il computer, privilegiando un punto di vista cinematico, cioè considerando le curve in questione come traiettorie percorse da un punto mobile nel piano.

Due punti: un segmento

```
Clear["Global`"]
L[t_] := (1 - t) P1 + t P2
```

Diamo dei valori alle coordinate dei punti iniziale e finale:

```
P1 = {0,0}; P2 = {1,1};
```

Possiamo fare un'animazione:

```
Do[Show[Graphics[{Text[StyleForm[ToString[t], FontSize -> 24],
{0, -.4}],
  {PointSize[0.05], Point[P1]},
  {PointSize[0.05], RGBColor[1,0,0], Point[L[t]]},
  {PointSize[0.05], Point[P2]}},
PlotRange -> {{-.5, 1.5}, {-.5, 1.5}},
AspectRatio -> Automatic
], {t,0,1, .01}]
```

La figura seguente mostra alcuni fotogrammi: il numero stampato in basso a sinistra nel riquadro della figura indica il valore del tempo t .

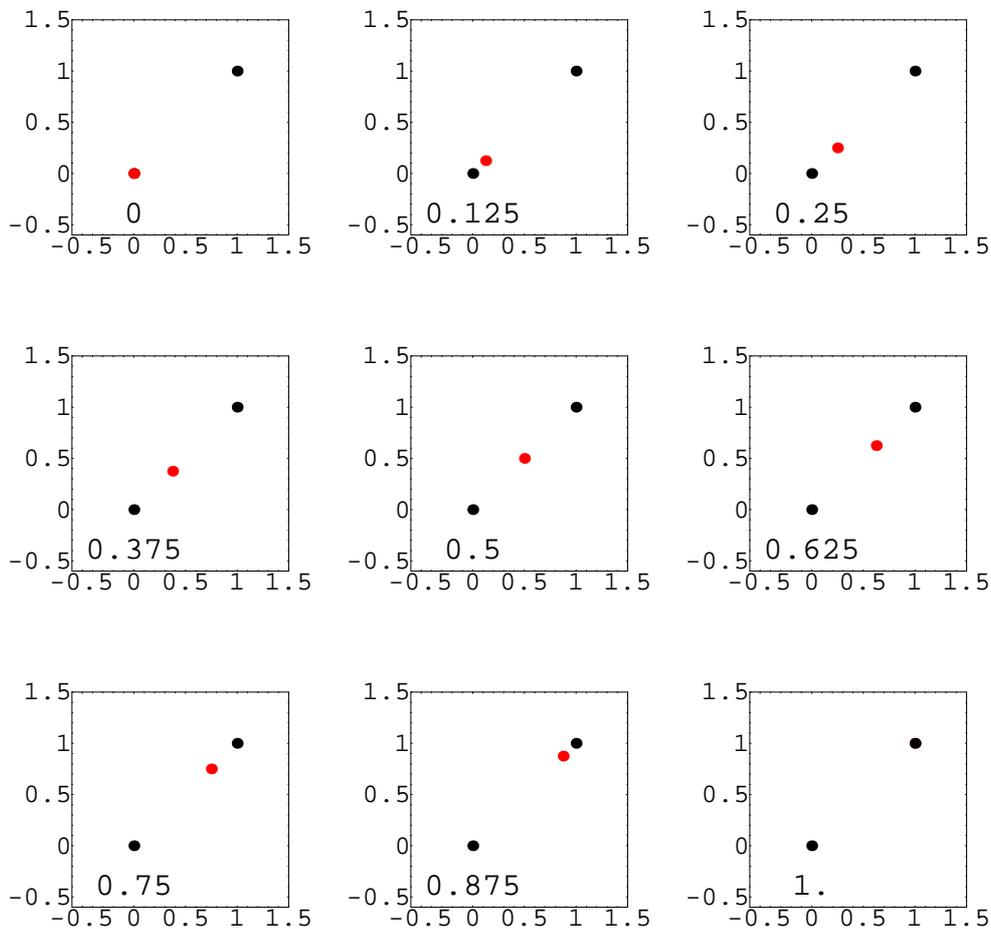


Figura 1

Tre punti: un arco di parabola

Consideriamo ora tre punti: P_1, P_2, P_3 ; vogliamo congiungere il primo col terzo mediante una traiettoria, che abbia come tangente nel punto P il segmento $P_1 P_2$, e come tangente nel punto P_3 il segmento $P_2 P_3$. Torneremo su tale questione nel seguito.

$P_1 = .;$ $P_2 = .$
 $Q[t_] := (1 - t)^2 P_1 + 2t (1 - t) P_2 + t^2 P_3$

Se i tre polinomi utilizzati per la parametrizzazione, sembrano misteriosi, si consideri che essi non sono altro che ciò che si ottiene sviluppando l'identità $1 = 1^2 = ((1-t)+t)^2$. Scegliamo tre punti:

```
P1 = {0,0}; P2 = {1,1}; P3 = {2,.5};
```

Facciamo un'animazione:

```
Do[Show[Graphics[{Text[StyleForm[ToString[t], FontSize -> 24],  
{0, -.4}],  
  {PointSize[0.05], Point[P1]},  
  {PointSize[0.05], RGBColor[1,0,0], Point[Q[t]]},  
  {PointSize[0.05], Point[P2]},  
  {PointSize[0.05], Point[P3]}},  
PlotRange -> {{-0.5,2.5}, {-0.5,1.5}},  
AspectRatio -> Automatic  
1], {t, 0, 1, .01}]
```

... di cui mostriamo alcuni fotogrammi:

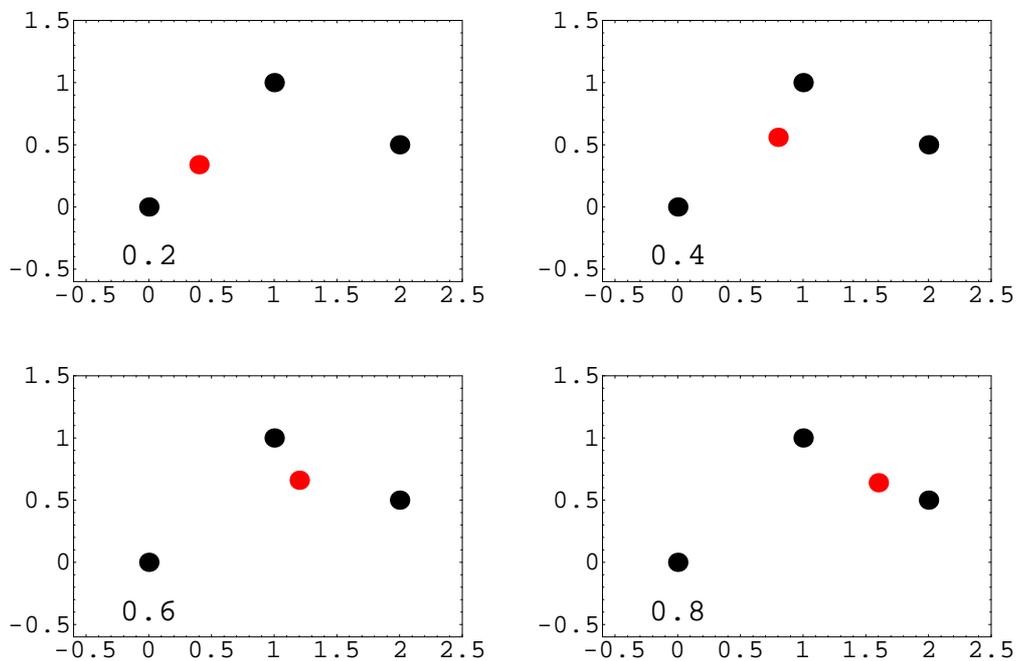


Figura 2

Poi mostriamo i segmenti che congiungono i tre punti:

```
gr1 = ListPlot[{P1,P2,P3}, PlotJoined -> True, AspectRatio ->  
Automatic];
```

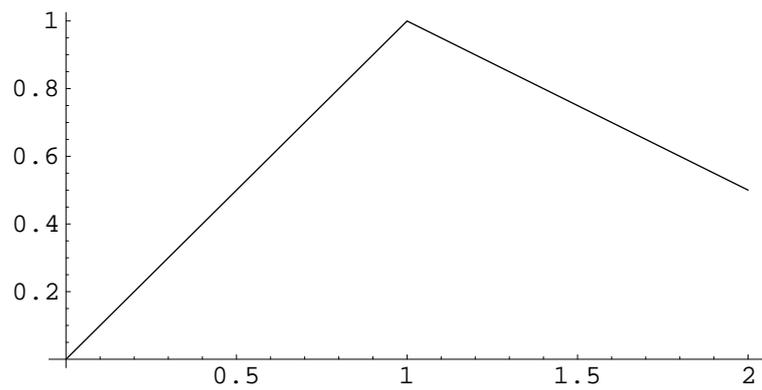


Figura 3

... e la traiettoria:

```
gr2 = ParametricPlot[Q[t], {t, 0, 1}, AspectRatio -> Automatic,
  PlotRange -> All];
```

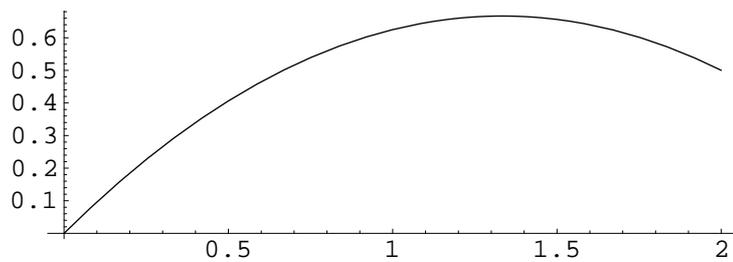


Figura 4

```
Show[{gr1,gr2}, PlotRange -> All];
```

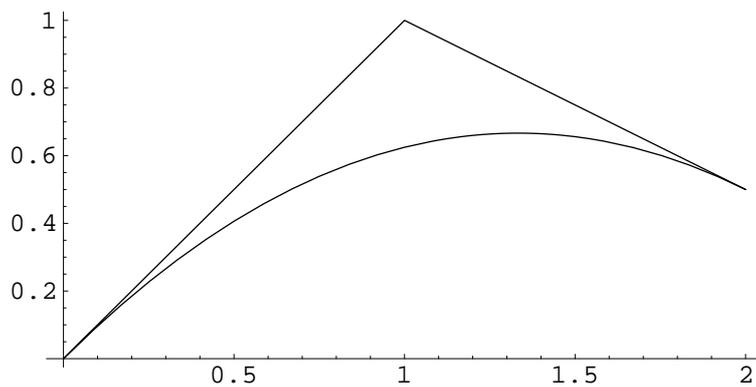


Figura 5

Riesaminiamo la funzione $Q[t]$ e la sua derivata prima:

```
P1=.;P2=.;P3=.
```

```
Q[t]
```

$$P1 (1 - t)^2 + 2 P2 (1 - t) t + P3 t^2$$

$Q'[t]$

$$-2 P1 (1 - t) + 2 P2 (1 - t) - 2 P2 t + 2 P3 t$$

I valori all'inizio e alla fine del percorso:

$$\begin{aligned} \%/ . t \rightarrow 0 \\ -2 P1 + 2 P2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \% / . t \rightarrow 1 \\ -2 P2 + 2 P3 \end{aligned}$$

Conclusione: la velocità iniziale è $2(P2 - P1)$, la velocità finale è $2(P3 - P2)$.

Quattro punti: curve di Bézier

Consideriamo ora quattro punti $P1, P2, P3, P4$. Vogliamo congiungere il primo col quarto in modo che la velocità iniziale sia proporzionale al vettore $P1 P2$, la velocità finale sia proporzionale al vettore $P3 P4$. Si osservi che nel discorso fatto all'inizio il punto terminale si chiamava $P3$, mentre ora si chiama $P4$.

```
Unprotect[C];
C[t_] := (1 - t)^3 P1 + 3t(1 - t)^2 P2 + 3t^2 (1 - t) P3 + t^3 P4
```

Questa volta abbiamo utilizzato come funzioni per la parametrizzazione i termini dello sviluppo $1 = 1^3 = ((1-t)+t)^3$. Scegliamo quattro punti:

$$P1 = \{0, 0\}; P2 = \{1, 1\}; P3 = \{2, 1\}; P4 = \{2.5, -.5\};$$

Facciamo un'animazione:

```
xmin = Min[First[P1], First[P2], First[P3], First[P4]] - 1;
xmax = Max[First[P1], First[P2], First[P3], First[P4]] + 1;
ymin = Min[Last[P1], Last[P2], Last[P3], Last[P4]] - 1;
ymax = Max[Last[P1], Last[P2], Last[P3], Last[P4]] + 1; Do[
  Show[Graphics[{Text[StyleForm[ToString[t], FontSize -> 24], {0,
-.4}],
    {PointSize[0.05], Point[P1]},
    {PointSize[0.05], RGBColor[1, 0, 0], Point[C[t]]},
    {PointSize[0.05], Point[P2]},
    {PointSize[0.05], Point[P3]},
    {PointSize[0.05], Point[P4]}},
  PlotRange -> {{xmin, xmax}, {ymin, ymax}},
  AspectRatio -> Automatic
], {t, 0, 1, .01}];
```

Come sempre, mostriamo alcuni fotogrammi:

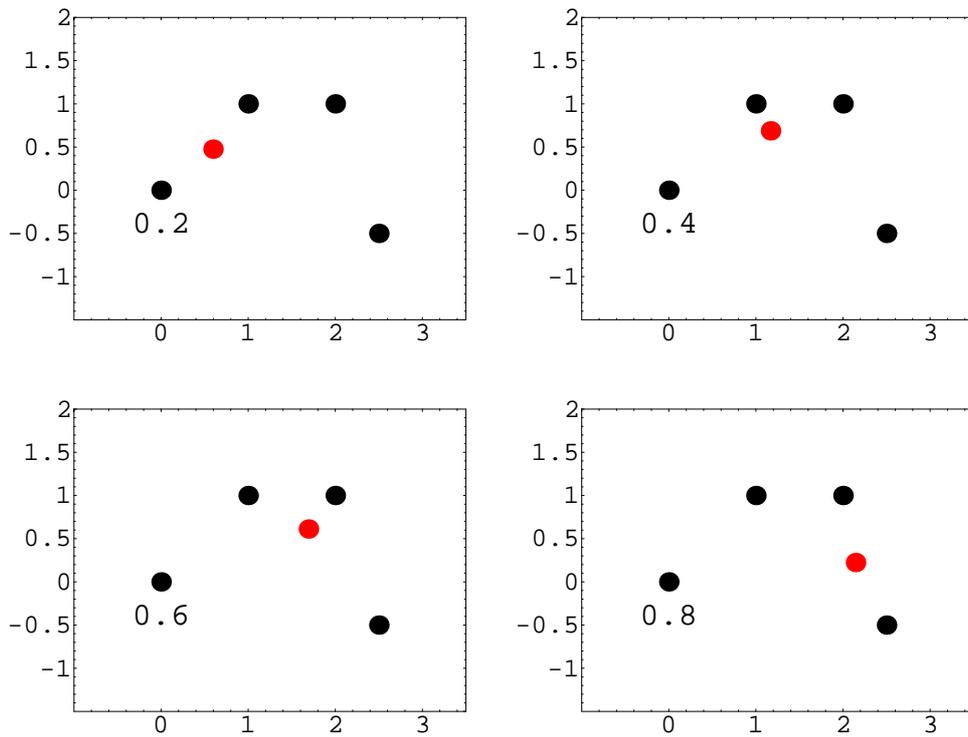


Figura 6

Esaminiamo nuovamente i valori della derivata nei punti iniziale e finale:

$C'[t]$

$$-3 P_1 (1 - t)^2 + 3 P_2 (1 - t)^2 - 6 P_2 (1 - t) t + 6 P_3 (1 - t) t - 3 P_3 t^2 + 3 P_4 t^2$$

$$\% /. t \rightarrow 0$$

$$-3 P_1 + 3 P_2$$

$$\% /. t \rightarrow 1$$

$$-3 P_3 + 3 P_4$$

Conclusione: la costante di proporzionalità a cui accennavamo sopra è 3. Se avessimo scelto come intervallo di parametrizzazione l'intervallo $[0, 3]$, in luogo dell'intervallo $[0, 1]$, avremmo ottenuto come costante di proporzionalità, il valore 1. Tracciamo i grafici delle funzioni peso, cioè quelle utilizzate per la parametrizzazione:

$$fp1[t_] := (1-t)^3$$

$$fp2[t_] := 3t(1-t)^2$$

$$fp3[t_] := 3 t^2 (1-t)$$

```
fp4[t_]:= t^3
```

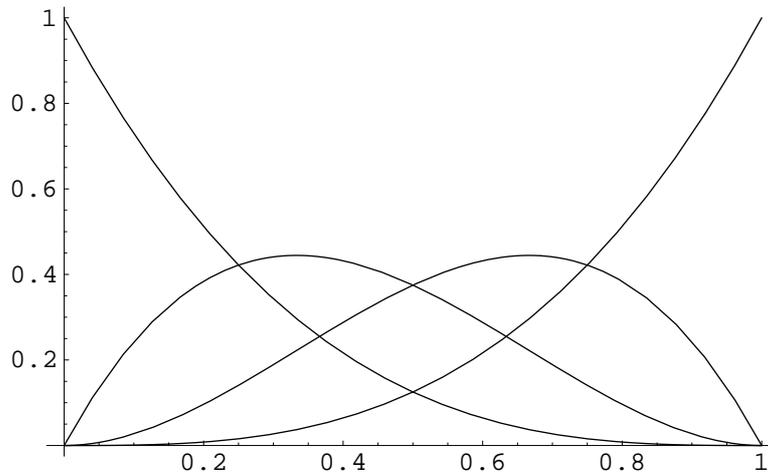


Figura 7

Ciascuna di queste quattro funzioni risolve un problema di interpolazione nel senso di Hermite: ad esempio la prima funzione vale 1 per $t = 0$, la sua derivata prima vale 0 per $t = 0$, essa e la sua derivata prima valgono 0 per $t = 1$. Il lettore faccia verifiche analoghe per le altre tre funzioni.

Valutiamo le ordinate dei punti di massimo:

```
fp2[1/3]
```

4/9

Infine un'identità (ovvia):

```
fp1[t] + fp2[t] + fp3[t] + fp4[t] // Simplify
```

1

Come abbiamo visto, la matematica che entra in gioco nei ragionamenti precedenti non è particolarmente sofisticata: niente che non fosse noto a Leibniz e Newton. Dunque è un po' una sorpresa apprendere che Pierre Bézier era un ingegnere meccanico, responsabile delle macchine a controllo numerico presso le fabbriche Renault. Nato nel 1910, Bézier è deceduto nel dicembre del 1999 (ma non sono riuscito a trovare un suo ritratto).

Mostriamo di seguito i ritratti di due precursori: il russo S. N. Bernstein (1880-1968) e il francese Ch. Hermite (1822-1901).



I testi dei problemi

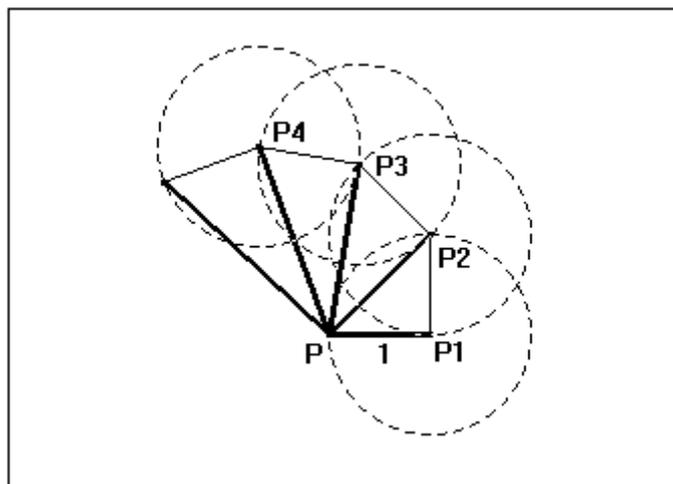
1) Che cosa rimane di un rettangolo?

E' dato un rettangolo aureo (cioè un rettangolo in cui l'altezza è la sezione aurea della base), che viene disposto su un tavolo con il lato più lungo rivolto verso di noi. Dalla parte sinistra del rettangolo ritagliamo un quadrato, il più grande possibile: si vede che quel che resta del rettangolo è ancora un rettangolo aureo.

Giriamo intorno al tavolo, verso sinistra, in modo da avere di nuovo il lato più lungo rivolto verso di noi e ripetiamo l'operazione. Proseguiamo indefinitamente, ruotando in verso orario intorno al tavolo e tagliando via i successivi quadrati. Sarà "tagliato" così ogni punto del rettangolo tranne uno. Trovare la posizione di questo punto eccezionale.

- 2) Utilizzando la costruzione riportata sotto, che permette di rappresentare segmenti di lunghezza $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}$, determinare il massimo valore di n per cui:

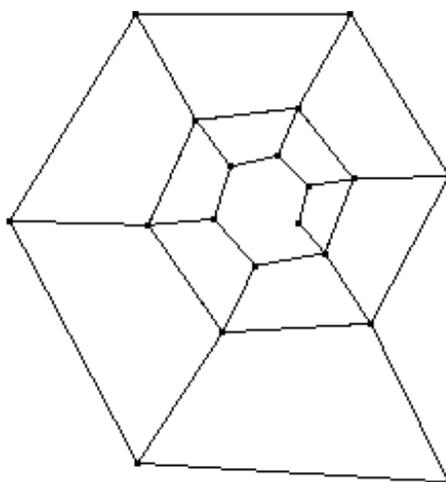
$$\sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\pi$$



- 3) Siano x_1, x_2, \dots, x_n dei numeri positivi tali che $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$, per $k=1, 2, \dots, n$

1. Dimostrare che $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} < \frac{1}{x_1}$

- 4) Sia $ABCD$ un parallelogramma qualsiasi. Si costruisca il punto P_2 proiettando il suo centro su AB , parallelamente a BC . Il segmento P_2D incontra la diagonale AC in un punto; si costruisca il punto P_3 , proiettando tale punto su AB , parallelamente a BC . Analogamente si costruiscano i punti P_4, P_5, \dots, P_n . Qual è la lunghezza di AP_n , in funzione di AB ?
- 5) Con un quadrilatero qualsiasi si può tassellare il piano. La figura mostra la tassellazione del piano con quadrilateri simili. Ricostruire la figura. Determinare le condizioni che devono essere soddisfatte dal quadrilatero perché la costruzione sia possibile.



- 6) Si consideri la seguente somma infinita basata sui numeri di Fibonacci. Dimostrare che il suo reciproco è un numero intero.
- | | |
|-------------|---|
| 0,0 | + |
| 0,01 | + |
| 0,001 | + |
| 0,0002 | + |
| 0,00003 | + |
| 0,000005 | + |
| 0,0000008 | + |
| 0,00000013 | + |
| 0,000000021 | + |
| | + |

- 7) Nel 1969, dopo dieci settimane di discussioni, i negoziatori per la pace nel Vietnam, riuniti a Parigi, si accordarono finalmente sulla forma che avrebbe dovuto avere il tavolo dei negoziati: un circolo intorno al quale, a uguale distanza uno dall'altro, potevano prendere posto 24 persone. Supponiamo che i cartellini segnaposto di questa tavola contengano 24 nomi diversi e che, ad un

certo punto, ci sia una tale confusione che i 24 negozianti prendano posto casualmente. Essi scoprono che nessuno è seduto al posto giusto; senza considerare in che modo sono seduti, è possibile ruotare la tavola finché almeno due persone contemporaneamente si trovino di fronte al rispettivo segnaposto?

E nel caso che una persona sia già seduta al posto giusto, è ancora possibile ruotare la tavola finché almeno due persone contemporaneamente si trovino di fronte al segnaposto giusto?

- 8) Un individuo può avere un certo numero di discendenti diretti: con probabilità p_1 ha un discendente, con probabilità p_2 ha due discendenti, con probabilità p_0 non ha alcun discendente ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$). Ciascun dei discendenti a sua volta dà luogo a propri discendenti (seconda generazione), con la stessa legge di probabilità, e così di seguito, nelle successive generazioni. Studiare la probabilità di estinzione del processo. (Un modello matematico di questo genere si applica allo studio dei neutroni nei processi a cascata).

- 9) In un piano sono dati tre punti distinti, A , B e F . Al variare del punto F , studiare il luogo del punto P , medio del segmento $A'B'$, derivante dalla seguente costruzione:

- a) nel semipiano delimitato dalla retta AB e non contenente F , individuare sulla perpendicolare al segmento AF , condotta per A , il punto A' tale che $AA' = AF$;
- b) nel semipiano delimitato dalla retta AB e non contenente F , individuare sulla perpendicolare al segmento BF , condotta per B , il punto B' tale che $BB' = BF$.

Analizzare inoltre cosa succederebbe al punto P se cadesse il vincolo che i punti A' e B' devono trovarsi nel semipiano opposto a quello che contiene il punto F , rispetto alla retta AB .

- 10) Date due distinte rette parallele e un punto su ciascuna di esse, diciamo A e B , studiare il luogo individuato dal terzo vertice di uno dei due triangoli equilateri di lato il segmento AB , al variare di A oppure di B . Studiare inoltre la relazione esistente tra i quattro diversi luoghi che possono essere prodotti dai due terzi vertice del triangolo al variare dei punti A o B .

- 11) Raccogliere i seguenti dati: credito scolastico degli allievi nelle classi terminali dello scorso anno scolastico e voto riportato all'esame di stato. Esaminare se esiste una correlazione tra tali dati.

- 12) Una biglia viene lasciata cadere verticalmente sul terreno da un'altezza di 1 m. L'urto con il suolo provoca una perdita di energia cinetica del 10%. Si esamini il fenomeno e si determini dopo quanto tempo la biglia si ferma.

13) Di un tetraedro $ABCD$ si conosce il vertice $A(-1;2;-2)$. Il piano α della faccia ABC passa per l'origine $O(0;0;0)$ del riferimento ortonormato $Oxyz$.

La retta AB è parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

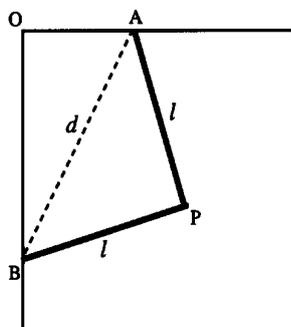
La retta che contiene i vertici C e D ha equazione $CD: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 2+t \end{cases}$

L'angolo $\hat{A}BC$ è di 45° .

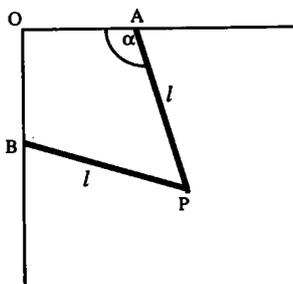
La faccia ABD ha la stessa area della faccia ABC .

- Determina l'equazione cartesiana del piano $\alpha = ABC$.
 - determina le coordinate del vertice C .
 - determina le coordinate del vertice B . Scegli la soluzione più lontana dall'origine;
 - determina le coordinate del vertice D .
 - verifica che il tetraedro così ottenuto ha tutte le facce congruenti.
- (Maturità scientifica del Liceo di Lugano 2 del giugno 1999)

14) Un paravento, costituito da due pannelli rettangolari identici con base di lunghezza l , viene spiegato verticalmente attorno a un angolo retto di un locale in modo che l'ambiente separato delimitato dal paravento e dalle due pareti sia di area massima. Guardando la situazione "dall'alto" si vedrà ad esempio il quadrilatero $OAPB$ seguente:



- Indichiamo con d la distanza tra A e B . Che valore massimo può avere d ?
- Fissata una certa distanza d tra A e B , dimostra che l'area del quadrilatero $OAPB$ è massima se $|OA| = |OB|$. (Consiglio: poiché in questo caso l'area del triangolo APB è costante, l'area del quadrilatero dipende unicamente dall'area del triangolo rettangolo OAB).
- Sia dunque $|OA| = |OB|$.



Determina, in funzione di l , la misura del segmento OA in modo che l'area del quadrilatero $OAPB$ sia massima.

(Consiglio: sfrutta la congruenza dei due triangoli OAP e OPB e usa come variabile l'ampiezza α dell'angolo OAP).

(Maturità scientifica del Liceo di Lugano 2 del giugno 1999)

- 15) Costruiti, esternamente al triangolo ABC , i triangoli equilateri ABC' , BCA' , CAB' , si mostri che:
- I segmenti AA' , BB' , CC' sono congruenti
 - Le rette AA' , BB' , CC' passano per uno stesso punto O
 - se il punto O è interno al triangolo ABC , la somma delle sue distanze dai vertici A , B , C è uguale alla lunghezza comune dei segmenti AA' , BB' , CC' .
- 16) Il triangolo ABC di baricentro G è inscritto nella circonferenza Γ . Studiare il luogo descritto da G quando uno dei vertici varia su Γ . Stabilire inoltre come viene suddiviso, dai punti in cui incontra il luogo, il lato opposto al punto che varia sulla circonferenza.
- 17) E' stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:
Vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M , un pino P e una quercia Q . Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P . Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP . Pianta in questa posizione un paletto P_1 . Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ . Pianta in questa posizione un paletto P_2 . Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P_1P_2 .
Problema
Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M . Ci sono P e Q ma non c'è M . Potrà trovare ugualmente il tesoro?
- 18) E' dato un quadrilatero $ABCD$. Sui suoi lati costruisci quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Determinati i centri dei quattro quadrati, uniscili per ottenere il quadrilatero $EFGH$. Quali configurazioni può assumere $EFGH$, al variare di $ABCD$?

Ogni gruppo ha risolto almeno tre problemi e, dopo il seminario di Bellaria, ha rivisto i materiali e preparato i contributi da inserire in questo volume, sotto la supervisione del coordinatore.

Nella tabella seguente sono indicati i docenti, divisi per gruppi, che hanno partecipato alla stesura delle soluzioni contenute nel volume, il coordinatore e l'elenco dei problemi affrontati dal gruppo. Tra parentesi sono indicati i problemi, le cui soluzioni non sono riportate perché già proposte da altri gruppi.

GRUPPO	COORDINATORE	PROBLEMI TRATTATI
1 P. Antognini, F. Del Vecchio, M. Frigeni, M. Puppi, R. Ricci	Frigeni Maurizio	1, 6, 8, (4)
2 A. Anzalone, R. Bonarelli, E. Crespina,	Crespina Elena	9, 14, 16
3 A. Boiti, M. De Vita, G. Olivieri, R. M. Rossi Bucciarelli,	Olivieri Giovanni	8, 18 (14)
4 P. Carboni, D. Paola, E. Pontorno, G. Toninel	Pontorno Enrico	4, 13, 14, 16
5 P. Maffei, R. Penolazzi, F. Rohr, R. Verdiani, M. Zoffoli	Rohr Ferruccio	1, 17, (2)
6 S. Rossetto, S. D. Sarti, A. Zanni	Rossetto Silvano	1, 4, 8 (15)
7 A. Di Marco, R. Guidetti, M. Sparapani, G. Speranza	Sparapani Marilena	2, 11, 18
8 M. A. Chimetto , C. Danè, M. C. Ipevich, F. Nuzzi, L. Tomasi	Tomasi Luigi	4, 6, 9, 15
9 P. Berneschi, S. Bornoroni, L. Monica, S. Zoccante,	Zoccante Sergio	6, 11, 17

Problema 1

Che cosa rimane di un rettangolo?

E' dato un rettangolo aureo (cioè un rettangolo in cui l'altezza è la sezione aurea della base), che viene disposto su un tavolo con il lato più lungo rivolto verso di noi. Dalla parte sinistra del rettangolo ritagliamo un quadrato, il più grande possibile: si vede che quel che resta del rettangolo è ancora un rettangolo aureo. Giriamo intorno al tavolo, verso sinistra, in modo da avere di nuovo il lato più lungo rivolto verso di noi e ripetiamo l'operazione. Proseguiamo indefinitamente, ruotando in verso orario intorno al tavolo e tagliando via i successivi quadrati. Sarà "tagliato" così ogni punto del rettangolo tranne uno. Trovare la posizione di questo punto eccezionale.

Gruppo di lavoro 1: Piero Antognini, Francesca Del Vecchio, Maurizio Frigeni, Mario Puppi, Roberto Ricci.

Strumenti software

Mathematica 3.0

Collocazione temporale

L'uso del piano affine con l'algebra lineare richiederà una certa maturità matematica negli studenti, diciamo a livello di un quarto o quinto anno in una classe con programma di matematica forte.

Aspetti Didattici

L'approccio al problema è basato sulle trasformazioni geometriche. Esso si caratterizza didatticamente perché permette di spiegare in modo semplice ed elegante le simmetrie del problema e di cogliere relazioni tra soluzioni differenti. Inoltre l'uso delle trasformazioni è davvero appropriato per l'ambiente di programmazione di *Mathematica*, fatto apposta per descrivere ed operare con funzioni. *Mathematica* permette di lavorare a livello formale, facendo uso di trasformazioni simboliche, raggiungendo così un certo livello di generalità, come l'algebra lineare nel piano affine richiede.

Le trasformazioni che saranno oggetto di attenzione sono le similitudini, d'altra parte lo strumento principale di indagine e di calcolo che abbiamo scelto è

l'algebra lineare nel piano affine, e in questo contesto si usano naturalmente le trasformazioni affini e le trasformazioni lineari associate. La strategia adottata consiste nel ridurre un problema a problemi più semplici e sotto diversi punti di vista. Il problema centrale diviene presto la ricerca del punto fisso di una similitudine, e dopo una prima soluzione algebrica nel piano affine, vengono proposte un paio di costruzioni geometriche, le quali sono l'occasione per approfondire proprietà delle omotetie e della loro composizione con rotazioni di 90° . Viene poi citata una soluzione algebrica dello stesso problema del punto fisso nel piano complesso.

Nodi concettuali

Occorre fare attenzione ad alcune sottigliezze presenti quando si lavora nel piano affine con tipi di dati diversi come scalari, punti, vettori. Soprattutto la differenza tra questi ultimi spesso non viene resa esplicita. Con *Mathematica* il problema dei tipi viene superato usando due predicati.

Approfondimenti e collegamenti

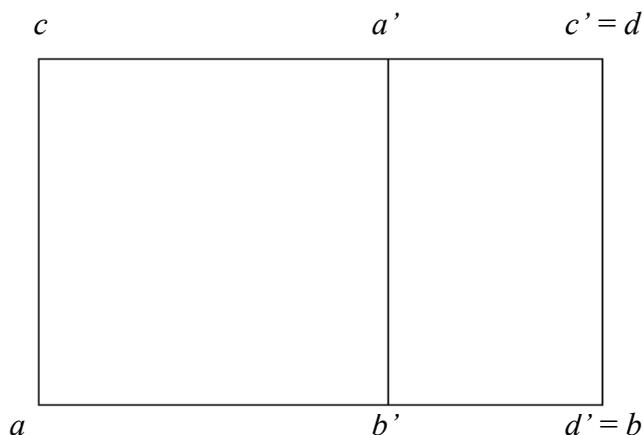
La strategia di risoluzione adottata consiste nel porsi durante il cammino nuovi problemi di carattere più specifico, allo scopo di strutturare meglio ed approfondire gli argomenti particolari. In particolare, si ha l'occasione di porsi problemi sulle omotetie, sulla risoluzione di equazioni nel piano affine e di fare collegamenti con il problema del punto fisso negli spazi metrici o con le similitudini nel piano complesso.

Traccia della procedura di soluzione

E' data una procedura ricorsiva che descrive una successione di rettangoli R_n ; vogliamo formalizzare il procedimento cercando, se esiste, un'affinità f che trasformi il rettangolo R_n nel rettangolo R_{n+1}

Rappresentazione dei dati del problema

Consideriamo un generico rettangolo aureo $R = (a, b, c, d)$ e il rettangolo $R' = (a', b', c', d')$ ottenuto applicando la procedura data;



siano L, h le lunghezze dei suoi lati, k il rapporto aureo:

$$h = k L;$$

scriviamo delle ipotesi su k :

$$\text{Unprotect[Power]; } k^{-1}=1+k; k^2=1-k;$$

servono poi alcune regole sul predicato **NumberQ** per dire che h, k, L sono scalari e che la somma e prodotto di scalari è uno scalare.

Scelta del sistema di riferimento affine: (a, u, v) , il punto a è l'origine, u è il versore del vettore $b-a$ mentre v è il versore del vettore $c-a$; possiamo rappresentare i vertici di R e R' :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a} + L \mathbf{u}; \\ \mathbf{c} &= \mathbf{a} + h \mathbf{v}; \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{c} + h \mathbf{u}; \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{a} + h \mathbf{u}; \\ \mathbf{d} &= \mathbf{c} + L \mathbf{u}; \end{aligned}$$

Cerchiamo, se esiste, un'affinità f che trasformi il rettangolo $\{a, b, c, d\}$ in $\{a', b', d, b\}$

Se f è affinità allora esiste un'unica applicazione lineare g tale che:

$$f(x) = f(a) + g(x-a);$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}__] := \mathbf{a}' + \mathbf{g}[\mathbf{x}-\mathbf{a}]$$

aggiungiamo le condizioni di linearità su g :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}[\lambda _? \text{NumberQ } \mathbf{u}_? \text{VectorQ}] &:= \lambda \mathbf{g}[\mathbf{u}] \\ \mathbf{g}[\mathbf{x}_+ \mathbf{y}_] &:= \mathbf{g}[\mathbf{x}] + \mathbf{g}[\mathbf{y}] \\ \mathbf{g}[\mathbf{0}] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Cerchiamo, se esistono, due vettori $g(u), g(v)$ tali che siano soddisfatte le condizioni:

$$f(b)=b', f(c)=d, f(d)=b:$$

$$\text{Solve} [\{\mathbf{f}[\mathbf{b}]=\mathbf{b}', \mathbf{f}[\mathbf{c}]=\mathbf{d}, \mathbf{f}[\mathbf{d}]=\mathbf{b}\}, \{\mathbf{g}[\mathbf{u}], \mathbf{g}[\mathbf{v}]\}]$$

otteniamo così le condizioni seguenti su g :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}[\mathbf{u}] &= -k \mathbf{v}; \\ \mathbf{g}[\mathbf{v}] &= k \mathbf{u}; \end{aligned}$$

Scomponiamo f per verificare che è una similitudine

Possiamo scomporre g come composizione della trasformazione lineare r tale che

$$r[\mathbf{u}] = -\mathbf{v}, \quad r[\mathbf{v}] = \mathbf{u},$$

e dell'omotetia lineare di rapporto k .

Essendo r una rotazione (di -90°) si ottiene che f è **una similitudine diretta**.

Ora, la successione $f(R_n)$ converge perché f è una contrazione in uno spazio metrico (il rapporto è $k < 1$) e per il teorema del punto fisso converge ad un punto p soluzione dell'equazione $f(x) = x$; dato che f ha un unico punto fisso, basterà risolvere tale equazione per trovare p .

Come si risolvono equazioni lineari nel piano affine?

Scriviamo delle regole per risolvere equazioni lineari nel piano affine. Assumiamo sempre come base del piano vettoriale la coppia di vettori (u, v) .

Una combinazione lineare di vettori $\alpha u + \beta v$ è nulla solo se entrambi i coefficienti α, β sono nulli. Definiamo anche la regola del “trasporto al 1° membro” e usiamo l'operatore predefinito `Collect` per raccogliere i coefficienti di una combinazione lineare rispetto ai vettori di base u, v :

```
risolvi[x_?NumberQ u+y_?NumberQ v == 0, variabili_List] := Solve[{x == 0, y == 0},
variabili]
```

```
risolvi[x_ == y_, variabili_List] := risolvi[Collect[x - y, {u, v}] == 0, variabili]
```

Rispetto al riferimento (a, u, v) il punto p si può scrivere

$$p := a + \alpha u + \beta v$$

Possiamo così risolvere l'equazione del punto fisso di f con il comando

```
risolvi[f[p] == p, {alpha, beta}] //Simplify
```

che ci dà i valori di α e β :

$$\alpha = \frac{L}{2-k}$$

$$\beta = \frac{(2k-1)L}{2-k}$$

2° metodo (omotetie).

Il problema è sempre trovare il punto fisso p della similitudine f , ma vogliamo descrivere una costruzione geometrica per p . Cominciamo con l'osservazione seguente, di carattere generale:

(1) i punti fissi di una trasformazione f sono anche punti fissi di $f^2 = f \circ f$

Nel nostro caso, dal punto di vista geometrico, è più semplice trattare f^2 piuttosto che f . Verifichiamo, infatti, che *la trasformazione f^2 è un'omotetia*

Proveremo la seguente proprietà:

(2) se f è una similitudine, $f(x) = \lambda r(x) + t$, con r rotazione di 90° o -90° , allora f^2 è un'omotetia.

Per dimostrarlo, descriviamo la forma di f e le proprietà che r è lineare e il suo quadrato è la simmetria centrale:

$$f[x_] := \lambda r(x) + t$$

$$\text{NumberQ}[\lambda] = \text{True}; \text{VectorQ}[t] = \text{True};$$

$$r[\lambda_? \text{NumberQ} \ x_? \text{VectorQ}] := \lambda r[x]$$

$$r[x_ + y_] := r[x] + r[y]$$

$$r[r[x_]] := -x$$

Se ora calcoliamo l'espressione $f[f[x]]$ otteniamo come risultato $t - \lambda^2 x + \lambda r[t]$ ciò che prova che f^2 è composizione dell'omotetia lineare di rapporto $-\lambda^2$ con la traslazione di vettore $t + \lambda r(t)$ ed è quindi un'omotetia.

Per trovare il punto fisso di f basterà allora trovare l'unico punto fisso di f^2 (poiché anche f ha un unico punto fisso). Ci siamo ridotti al problema seguente:

Come si trova il punto fisso di un'omotetia?

La costruzione geometrica del punto fisso si basa sulla proprietà seguente:

(3) sia p punto fisso dell'omotetia h e sia x punto tale che $h(x) \neq x$; allora, i punti p , x , $h(x)$ sono allineati.

Nel nostro caso, possiamo considerare i due punti c , d e i loro trasformati per l'omotetia f^2

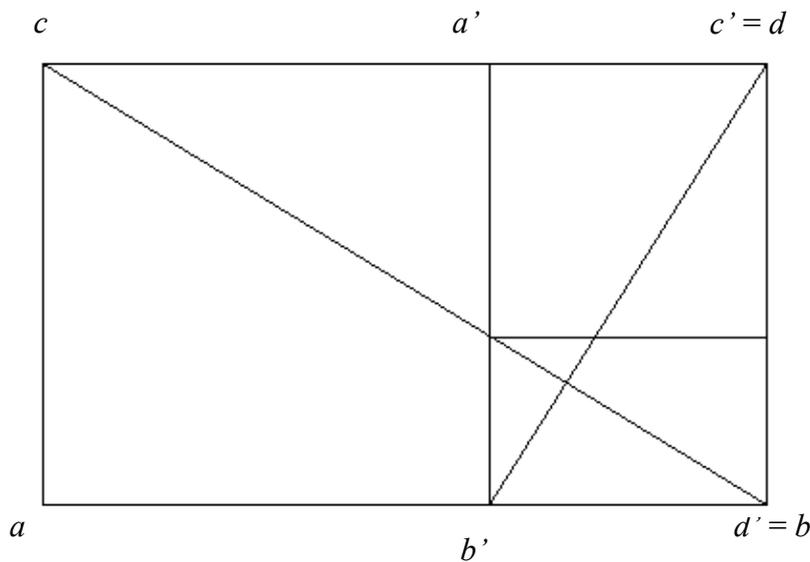
$$b = f^2(c), \quad b' = f^2(d),$$

per ricavare due rette che passano per il punto fisso p di f^2 (e perciò di f):

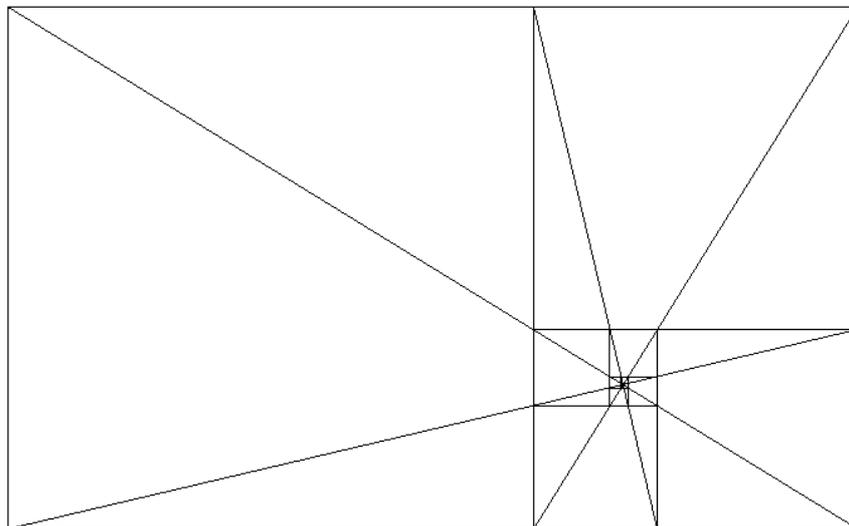
la retta L passante per i punti b , c ;

la retta L' passante per i punti d , b' .

Possiamo concludere che p è l'intersezione di L e L' .



Nota. La proprietà (3) ci dice anche che l'orbita $\{h^n(x)\}$ di un punto x è tutta contenuta in una retta passante per il punto fisso di h . Ciò consente un metodo geometrico per individuare il punto fisso di h (e di f). Nella figura seguente vediamo quattro rette contenenti orbite di f^2 che consistono di vertici dei rettangoli.



3° metodo

La conclusione del metodo precedente suggerisce che possiamo trovare il punto fisso di f ancora con una costruzione geometrica ma questa volta senza passare attraverso f^2 . Ci basterà provare che f ammette due rette L e L' tali che $f(L) = L'$, $f(L') = L$, poiché vale la seguente proprietà generale:

(4) se una trasformazione geometrica f trasforma la retta L nella retta L' e la retta L' nella retta L e le due rette si intersecano in un punto p , allora p è punto fisso di f .

Consideriamo, infatti la retta L passante per i punti c, b e la retta L' passante per i punti d, b' .

Dato che $f(c) = d, f(b) = b'$, si ha $f(L) = L'$; d'altra parte, abbiamo $f(d) = b$ e ci manca solo di provare che $f(b')$ appartiene a L per completare la dimostrazione.

Come si dimostra che un punto q appartiene alla retta L che passa per i punti b, c ?

q appartiene alla retta L se possiamo trovare uno scalare α tale che $q = c + \alpha(b - c)$.

Abbiamo già definito un'operatore **risolvi** per risolvere equazioni nel piano affine, rispetto al riferimento (a, u, v) , e andrà bene anche per risolvere l'equazione $f(b') = c + \alpha(b - c)$ nella variabile α .

Il comando

Risolvi[$f[b'] = c + \alpha (b - c)$, $\{\alpha\}$] //Simplify

ci dà la risposta $\alpha = k$ per cui $f(b') = c + k (b - c)$ è punto di L .

Gruppo di lavoro 5: Prudenza Maffei, Rina Penolazzi, Ferruccio Rohr, Renato Verdiani, Mauro Zoffoli.

Strumenti Software

Cabri II, Matematica 4

Caratteristiche connesse all'uso del software

Cabri viene qui usato solo per realizzare con una certa semplicità un buon disegno, in cui, con l'aggiunta delle diagonali principali dei primi due rettangoli aurei, si fa intuire come trovare la soluzione.

Mathematica oppure un altro CAS possono poi aiutare ad eseguire i calcoli, oppure ad eseguire una figura più accurata ed arricchita da un maggior numero di elementi. Inutile chiedere a *Cabri* le equazioni delle due rette, che sarebbero necessariamente approssimate, ma si può chiedere la posizione approssimativa del punto intersezione, che servirà da controllo per i calcoli successivi.

Collocazione temporale

Si può proporre il problema in una classe del III anno di un liceo scientifico, dopo lo studio della Geometria Analitica della retta.

I rettangoli aurei possono far parte di un piccolo percorso inter o pluri-disciplinare con Storia dell'Arte (ad esempio quando si studia la similitudine).

Aspetti didattici

Il docente presenta il problema alla classe, facendosi aiutare da una immagine (sul testo oppure creata ad hoc) dei successivi rettangoli aurei. Ma, dopo aver lasciato un po' di tempo alla discussione, aggiungerà anche le due diagonali indicate in figura, invitando la classe a motivare ciò che la figura suggerisce. Successivamente in laboratorio gli studenti si organizzeranno a gruppi, con carta, matita ed il software *Cabri*.

Solamente in una fase finale si farà uso di un software di algebra simbolica, per verificare i risultati ottenuti (ed eventualmente rifare la figura indicando tutti gli elementi ricavati).

Nodi concettuali

Difficilmente gli studenti penseranno ad un metodo con uso della Geometria Analitica, se non viene suggerito loro di tracciare le diagonali indicate, d'altra parte è meglio che questo suggerimento giunga dopo un po' di tempo, in cui la classe è stata lasciata a discutere su una figura iniziale strettamente coerente con il testo del problema.

Le dimostrazioni di geometria euclidea sono importanti anche perché giustificano l'uso della geometria analitica nella determinazione del punto soluzione.

Approfondimenti e collegamenti

Ricorsione. Definizione ricorsiva della successione di Fibonacci. Concetto di limite.

La successione di Fibonacci ed il rapporto aureo, l'architettura dell'antica Grecia. Il rapporto aureo nelle Scienze Naturali.

Traccia della procedura di soluzione

Come primo passo costruiamo un rettangolo aureo, togliamo un quadrato, poi un altro e così via secondo le indicazioni del problema. La Figura 1 dà un buon indizio sulla convergenza del problema, la Figura 2, ottenuta tracciando opportune diagonali dei primi due rettangoli dà un'ulteriore indizio sulla posizione del punto soluzione.

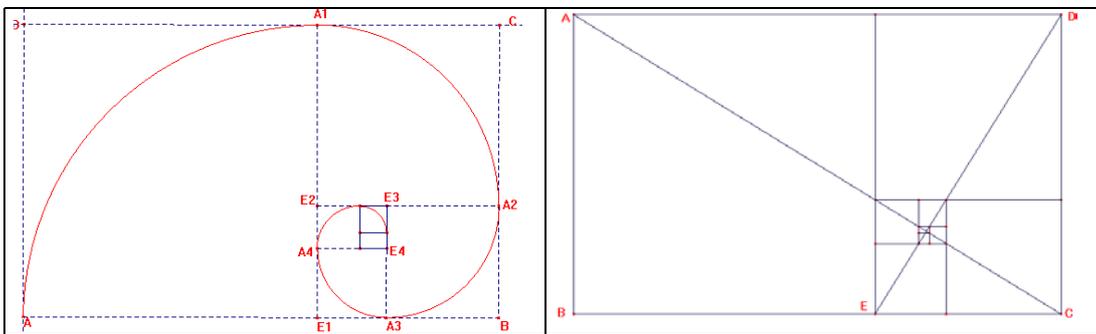


Figura 1

Figura 2

La Figura 2 suggerisce alcune proprietà che verranno in seguito dimostrate:

1) Tutti i rettangoli aurei “di ordine dispari” (il 1°, il 3°, il 5°,) hanno due vertici opposti sulla diagonale più lunga AC , mentre tutti i rettangoli aurei “di ordine pari” (il 2°, il 4°, il 6°,) hanno anch’essi due vertici opposti che stanno su una diagonale, ma questa volta la DE .

2) A mano a mano che vengono tolti i quadrati (come indicato dal testo del problema) , le due diagonali, AC dei rettangoli dispari, DE dei rettangoli pari, vengono “mangiate” un poco alla volta ai loro estremi.

Si può concludere allora che l’unico punto che rimarrà, dopo le “infinite sottrazioni” è l’intersezione P di tali diagonali.

Premettiamo i seguenti teoremi:

a) *Se da un rettangolo aureo togliamo il quadrato di lato la dimensione minore, la figura rimasta è ancora un rettangolo aureo.*

IPOTESI:

($ABCD$) rett. Aureo ($BC : AB = AB : EC$)

TESI:

($ECDO$) è rett. Aureo

($OE : EC = EC : FE$)

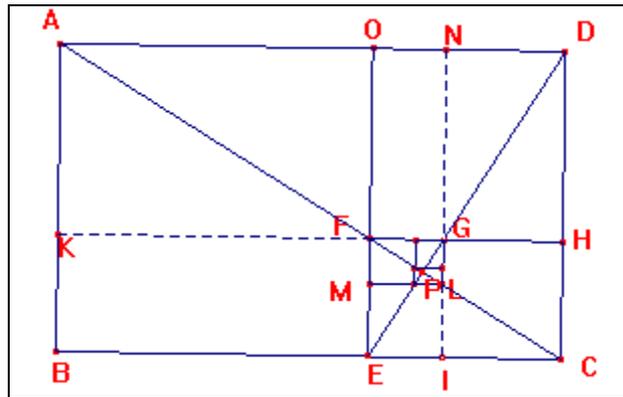


Figura 3

Dall'ipotesi $BC : AB = AB : EC$, applicando la proprietà dello scomporre, si ha:
 $(BC - AB) : AB = (AB - EC) : EC$, ma, essendo $AB = BE = OE$ e $EC = OD = OF$,
 si ha:
 $(BC - BE) : OE = (OE - OF) : OF$ ovvero $EC : OE = FE : OF$, essendo $OF = EC$,
 ne segue la tesi.

- b) *Se da un punto qualsiasi della diagonale di un rettangolo si tracciano le parallele ai lati si ottengono due rettangoli equivalenti e due rettangoli simili (fra loro, ma simili anche al rettangolo dato).*

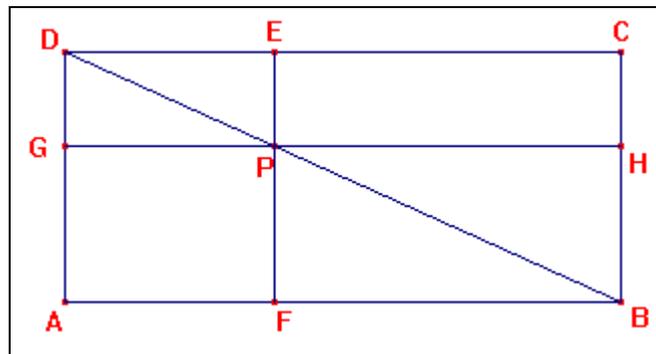


Figura 4

La seconda parte del teorema è immediata. Per stabilire che i due rettangoli $ECHP$ e $GPFA$ sono equivalenti, basta osservare che si ottengono per sottrazione dai triangoli ABD e BCD (equivalenti) togliendo coppie di triangoli equivalenti.

Ciò premesso dimostriamo il *TEOREMA*

Il punto P, che rimane dopo aver tolto gli infiniti quadrati successivi, è l'intersezione delle diagonali dei primi due rettangoli aurei .

IPOTESI:

$$BC = AD ; AB = CD$$

$$AB < BC; BC : BE = BE : EC; BE = AB$$

TESI:

$$AC \cap DE = P \text{ (punto cercato)}$$

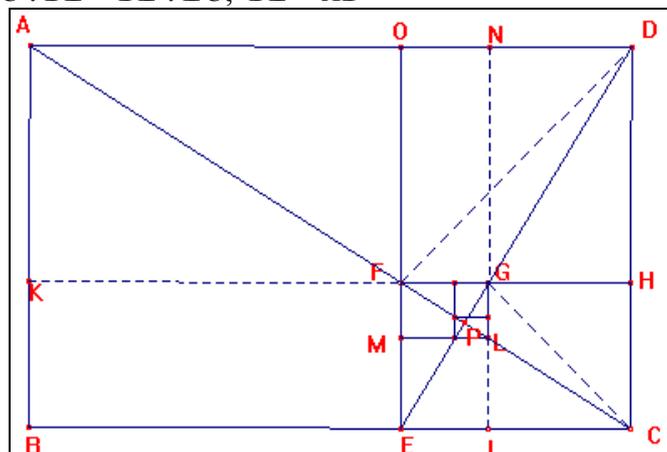


Figura 5

DIMOSTRAZIONE:

Tracciata la diagonale AC , esiste certamente un punto F su AC tale che, condotta la parallela OE al lato AB , il quadrilatero $ABEO$ risulta un quadrato.

Si conduca da F la parallela HK al lato BC . Dimostriamo che $FO = FH$.

Per il teorema a), usato inversamente, il rettangolo $OECD$ è aureo, mentre per il teorema b), il rettangolo $FECH$ è anch'esso aureo, essendo simile al rettangolo iniziale $ABCD$.

Allora, per ottenere dal rettangolo aureo $OECD$ un nuovo rettangolo aureo $FECH$, occorre aver sottratto un quadrato: $OFHD$. Quindi $FO = FH$.

Tale ragionamento può essere ripetuto partendo dal rettangolo aureo $FECH$, prendendo il punto L sulla diagonale FC (con $FC = AC - AF$).

Così procedendo, alla diagonale AC vengono sottratti, alternativamente ai suoi estremi, dei segmenti sempre più piccoli che, al limite, lasciano non sottratto soltanto il punto P .

La stessa logica applicata alla diagonale DE porta alle conclusioni già note: il punto P è dato dall'intersezione delle diagonali AC e DE .

NOTA:

Per costruire il punto F , si intersechi la bisettrice dell'angolo retto in D con la diagonale AC : infatti non solo $(OFHD)$ sarà un quadrato, ma lo sarà anche $(ABEO)$.

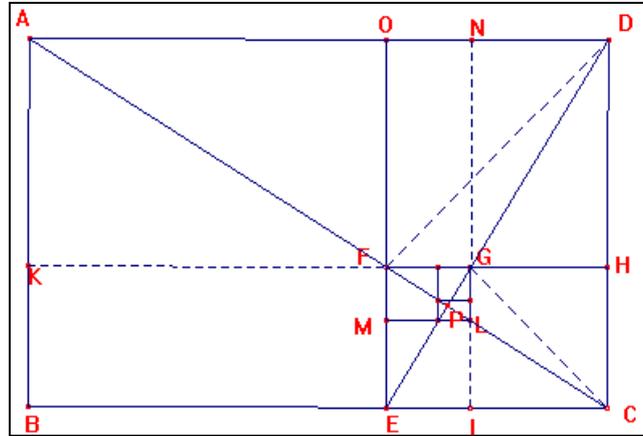


Figura 6

Infatti, in base alla costruzione di F , $FODH$ è un quadrato, $FHCE$, per il teorema $b)$ è aureo e per il teorema $a)$ anche $ODCE$ non può essere che aureo. Segue allora che, essendo aureo $ABCD$, anche $ABEO$ deve essere quadrato.

Altra costruzione, più immediata, si ottiene osservando che le diagonali AC e DE sono ortogonali, infatti, dalla similitudine dei triangoli rettangoli ABC e ECD segue che gli angoli DAP e PDA sono complementari, il che comporta che l'angolo APD risulta retto. Per la determinazione della soluzione P è sufficiente allora tracciare la diagonale AC del rettangolo aureo $ABCD$ e dal vertice D condurre la perpendicolare ad AC , fino ad intersecarla in P .

L'ultimo teorema ci permette, utilizzando la geometria analitica, di ricavare, in un opportuno sistema di riferimento, le coordinate del punto P soluzione. Posto $AB = 1$, supponiamo di avere un sistema di riferimento con l'origine coincidente con A , l'asse x con AB , l'asse y con AD .

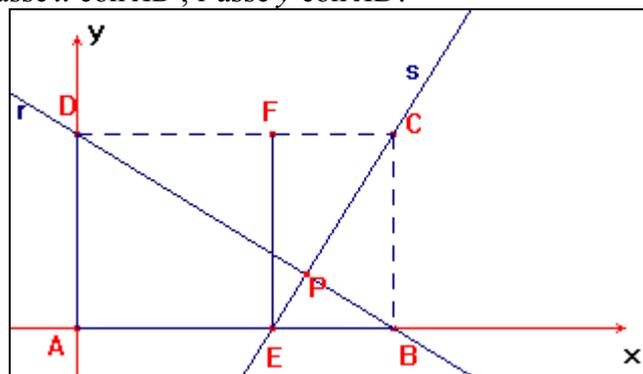


Figura 7

Sia $D\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ e $B(1,0)$, il rettangolo $ABCD$ risulta aureo. Il punto P soluzione del problema è dato dall'intersezione delle rette r e s (tra loro perpendicolari) rispettivamente di equazioni: $y = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $y = 2(\sqrt{5}+1)x - 1$.

Si può calcolare la posizione di P anche per via algebrica. I quadrati rotanti si trovano a sinistra del polo solo una volta ogni 4 giri di $\frac{1}{4}$ a sinistra. Le misure dei loro lati formano una progressione geometrica di ragione $(\sqrt{5}-1)/2$

$$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, \dots$$

$$(\sqrt{5}-1)/2, ((\sqrt{5}-1)/2)^2, ((\sqrt{5}-1)/2)^3, ((\sqrt{5}-1)/2)^4, \dots$$

$$x_p : l_1, l_1+l_5, l_1+l_5+l_9, l_1+l_5+l_9+l_{13}, \dots$$

$$y_p : l_4, l_4+l_8, l_4+l_8+l_{12}, l_4+l_8+l_{12}+l_{16}, \dots$$

se il numero dei quadrati che approssimano x_p ed y_p tende all'infinito allora abbiamo una somma di termini in progressione geometrica di ragione

$$q = ((\sqrt{5}-1)/2)^4$$

$S = a_1/(1-q)$ dove a_1 è il primo termine, quindi

$$\begin{aligned} x_p &= l_1 + l_5 + l_9 + l_{13} + l_{17} + \dots + l_{4n+1} + \dots = l_1 / (1-t^4) = ((\sqrt{5}-1)/2) / (1 - ((\sqrt{5}-1)/2)^4) = \dots = \\ &= (5+\sqrt{5})/10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p &= l_4 + l_8 + l_{12} + l_{16} + \dots + l_{4n} + \dots = (\sqrt{5}-1)/2 \cdot (2^4 / (2^4 - (\sqrt{5}-1)^4)) = \dots = \\ &= (3\sqrt{5}-5)/10 \end{aligned}$$

$$x_p = (\sqrt{5}+5)/10 \quad y_p = (3\sqrt{5}-5)/10$$

$$P((\sqrt{5}+5)/10 ; (3\sqrt{5}-5)/10)$$

Gruppo di lavoro 6: Silvano Rossetto, Stefano Daniele Sarti, Angelo Zanni

Strumenti software:

Cabri II, Derive.

Collocazione temporale:

Primo e secondo anno di Scuola Secondaria Superiore.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe:

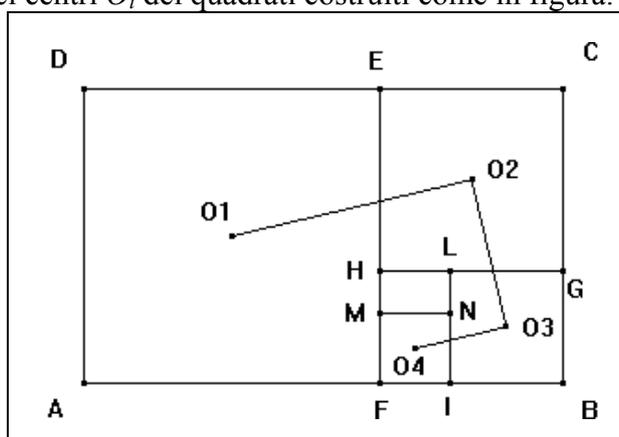
Il problema si può affrontare con semplici strumenti di geometria euclidea: similitudine di triangoli rettangoli. L'intervento del software (*Cabri*) può proporre nuovi problemi, ad esempio la realizzazione di una macro che prolunghi un segmento di una parte proporzionale.

Approfondimenti e collegamenti:

Un esempio di luogo geometrico che induca l'utilità del passaggio dal piano euclideo (*frame* sintetico) al piano cartesiano (*frame* analitico)

Tracce della procedura di soluzione

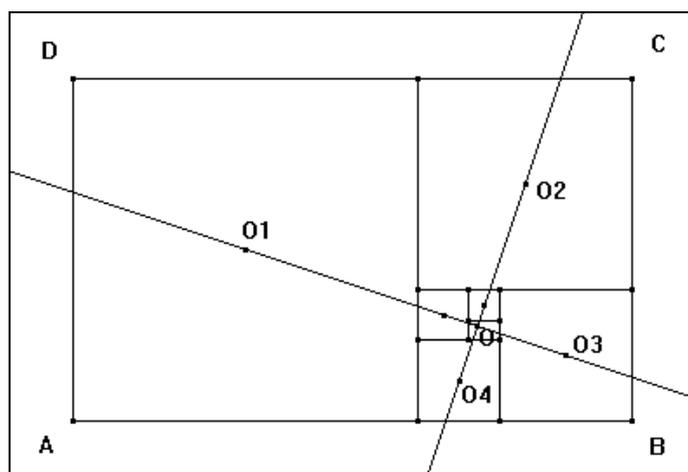
Problema 1. La soluzione del problema è chiaramente il punto al quale converge la successione dei centri O_i dei quadrati costruiti come in figura.



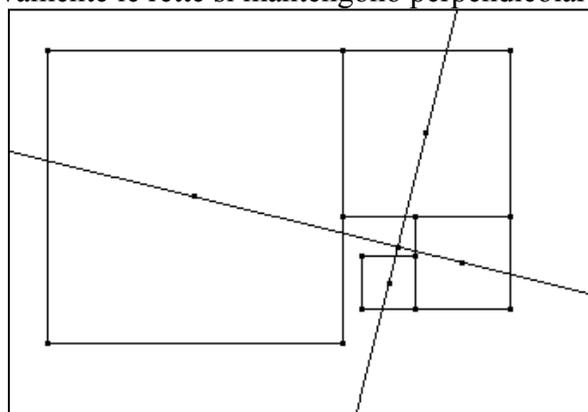
Si possono fare le seguenti osservazioni:

1. i triangoli O_1EO_2 , O_2GO_3 sono simili (in questo caso di rapporto aureo) e sono retti in E e in G ; di conseguenza: l'angolo $O_1O_2O_3$ è retto e i segmenti O_1O_2 e O_2O_3 sono nelle stesso rapporto (aureo).
2. I due triangoli $O_1O_2O_3$ e $O_2O_3O_4$ sono simili e retti: si può ricavare da questo il fatto che i due lati O_1O_3 e O_2O_4 sono tra loro perpendicolari.

Il processo si itera per i centri dei quadrati successivi e quindi si può concludere che i centri dei quadrati si trovano alternativamente sulle due rette O_1O_3 e O_2O_4 che sono tra loro perpendicolari.



Ci si può ora chiedere se il fatto che le rette passanti per i centri dei quadrati sono tra loro perpendicolari dipende dal rapporto aureo tra i lati dei quadrati: la risposta è negativa, come risulta evidente dalla dimostrazione precedente che non fa riferimento al rapporto aureo. Infatti possiamo costruire una analoga successione di quadrati, nella quale sia costante il rapporto tra i lati di quadrati consecutivi, e osservare che effettivamente le rette si mantengono perpendicolari.

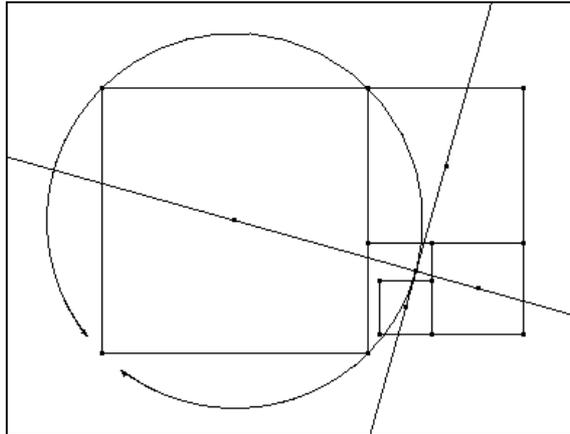


Naturalmente in generale la sequenza dei quadrati non riempie un rettangolo: ciò succede quando $1 + k + k^2 = 1$ (prendendo 1 come lunghezza del lato del quadrato iniziale), ossia quando $k + k^2 = 1$.

La soluzione positiva dell'equazione è $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, che è proprio il valore del rapporto aureo.

Come varia l'intersezione delle due rette al variare di k ?

Siamo rimasti piuttosto sorpresi nell'osservare che il luogo di tale punto "sembra" essere la circonferenza circoscritta al quadrato originale.



Una dimostrazione del fatto che effettivamente questo luogo è la circonferenza circoscritta al quadrato iniziale si può forse cercare meglio per via analitica. Procediamo con *Derive* definendo per prima cosa le funzioni relative alla retta (righe #1, #2 e #3).

$$\begin{aligned} \#1: \quad M(p, q) &:= \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1} \\ \#2: \quad RT(m, p) &:= m \cdot (x - p_1) + p_2 \\ \#3: \quad RETTA(p, q) &:= RT(M(p, q), p) \end{aligned}$$

Centriamo ora il primo quadrato nell'origine e con i vertici nei punti $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$ e $D(-1,1)$. Le coordinate dei centri successivi sono $O_2(1+k, 1-k)$; $O_3(1+2k-k^2, 1-2k-k^2)$. Possiamo ora esprimere l'equazione della retta passante per O_1O_3 (righe #7 e #8) e della sua perpendicolare passante per O_2 (riga #10). Mettendo a sistema le due equazioni si trova l'espressione parametrica del punto d'intersezione P (riga #12).

$$\#4: \quad o1 := [0, 0]$$

$$\#5: \quad o2 := [1 + k, 1 - k]$$

$$\#6: \quad o3 := [1 + 2 \cdot k - k^2, 1 - 2 \cdot k - k^2]$$

$$\#7: \quad y = \text{RETTA}(o1, o3)$$

$$\#8: \quad y = \frac{x \cdot (k^2 + 2 \cdot k - 1)}{k^2 - 2 \cdot k - 1}$$

$$\#9: \quad y = \text{RT}\left(-\frac{1}{M(o1, o3)}, o2\right)$$

$$\#10: \quad y = -\frac{x \cdot (k^2 - 2 \cdot k - 1) + 2 \cdot (k^2 + 1)}{k^2 + 2 \cdot k - 1}$$

$$\#11: \quad \text{SOLVE}\left(\left[y = \text{RETTA}(o1, o3), y = \text{RT}\left(-\frac{1}{M(o1, o3)}, o2\right)\right], [x, y]\right)$$

$$\#12: \quad \left[x = -\frac{k^2 - 2 \cdot k - 1}{k^2 + 1} \quad y = -\frac{k^2 + 2 \cdot k - 1}{k^2 + 1} \right]$$

Ricavando il parametro k dalla prima delle due si ottengono due soluzioni per k . Sostituendo ciascuna di queste nella seconda, si ottengono le due forme esplicite del luogo: la riga #16 mostra la prima.

$$\#13: \quad \text{SOLVE}\left(x = -\frac{k^2 - 2 \cdot k - 1}{k^2 + 1}, k\right)$$

$$\#14: \quad \left[k = \frac{\sqrt{(2 - x^2)} + 1}{x + 1}, k = \frac{1 - \sqrt{(2 - x^2)}}{x + 1} \right]$$

$$\#15: \quad y = -\frac{\left(\frac{\sqrt{(2 - x^2)} + 1}{x + 1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{(2 - x^2)} + 1}{x + 1} - 1}{\left(\frac{\sqrt{(2 - x^2)} + 1}{x + 1}\right)^2 + 1}$$

$$\#16: \quad y = -\frac{\sqrt{(2 - x^2)} \cdot (x + 2) - x^2 + 2}{\sqrt{(2 - x^2)} + x + 2}$$

Possiamo ora elevare a quadrato i due membri dell'espressione #16 e poi espandere: il risultato è proprio l'equazione implicita della circonferenza attesa.

$$\#17: \left(y = - \frac{\sqrt{(2-x^2)} \cdot (x+2) - x^2 + 2}{\sqrt{(2-x^2)} + x + 2} \right)^2$$

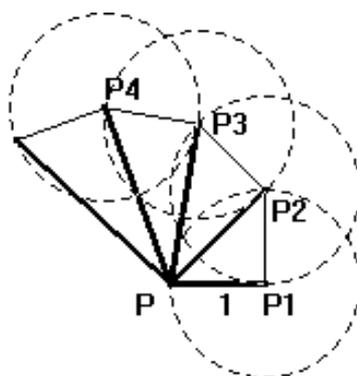
$$\#18: y^2 = 2 - x^2$$

Questo dimostra il fatto che il luogo di P , al variare di k , è la circonferenza passante per i punti A, B, C e D .

Problema 2

Utilizzando la costruzione riportata sotto, che permette di rappresentare segmenti di lunghezza $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., \sqrt{n} , determinare il massimo valore di n per cui:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\pi$$



Gruppo di lavoro 7: Amelia Di Marco, Rosanna Guidetti, Marilena Sparapani, Gaetano Speranza

Strumenti software

Cabri II, Derive, LiveMath

Collocazione temporale

Classe terza o quarta superiore

Aspetti didattici

Il problema può essere affrontato in classe a vari livelli di approfondimento e utilizzando diversi ambienti software:

1. Costruzione della figura in *Cabri*, molto semplice, anche se gli aspetti trigonometrici risultano meno evidenti per gli alunni. Riformulando il pro-

blema in maniera equivalente senza l'ausilio della sommatoria e la funzione goniometrica inversa si può presentare il problema anche al biennio.

2. Ricerca della soluzione mediante il calcolo in *Derive* e la visualizzazione del risultato con un grafico diverso dalla figura in *Cabri*.
3. Trattazione del problema in *LiveMath* nel piano complesso:
 - è possibile sfruttare la struttura algebrica moltiplicativa del campo complesso per evitare complicazioni della rappresentazione con metodo analitico tradizionale,
 - si perviene ad una formula relativamente semplice per individuare la successione dei punti P_1, P_2, \dots, P_n ,
 - si ricavano diversi insiemi di formule ricorsive per la soluzione numerica del problema.

Il problema è stato proposto agli alunni di una quarta Liceo Scientifico, che hanno fatto una certa fatica a capire il nesso tra la Figura e la sommatoria data (lacune in trigonometria!). Poi con *Derive* hanno realizzato una soluzione semplice, ma efficace.

Nodi concettuali

Illustrare con un esempio particolarmente semplice dal punto di vista costruttivo una costruzione ricorsiva in ambito geometrico ed eventualmente far sì che, ove sia possibile per il livello di conoscenze della classe, tale procedimento si traduca in formule ricorsive.

Traccia della procedura di soluzione

La Figura 1 è una prima soluzione grafica del problema in *Cabri*, in cui ogni passo è stato ottenuto con una macro:

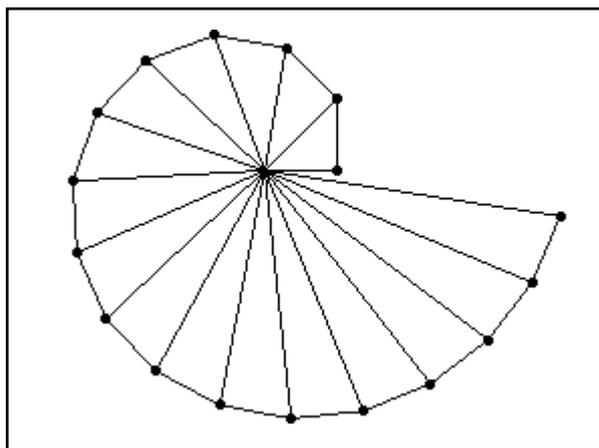


Figura 1

La soluzione proposta dagli alunni nella sperimentazione in classe con *Derive* è molto semplice. Definita la funzione:

$$F(n) := \sum_{k=1}^n ATAN\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

si calcolano i valori di $F(1), F(2), F(3), \dots, F(16), F(17)$ (per esempio usando il comando `VECTOR(F(n),n,1,17)`), che approssimati sono 0.78539, 1.40087, 1.92447, ..., 6.12873, 6.36667; quindi il massimo valore intero di n tale che $F(n) \leq 2\pi$ è 16. Una rappresentazione grafica della soluzione è data nella Figura 2:

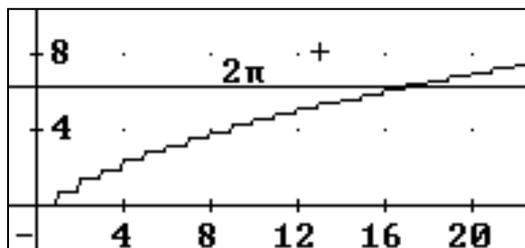


Figura 2

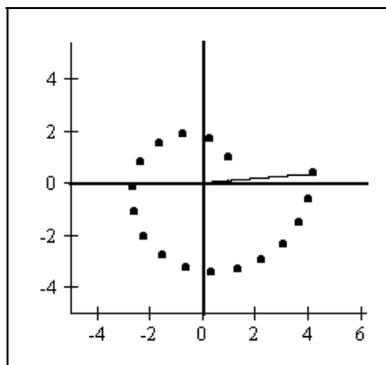
La soluzione in *LiveMath* prende il via dalla determinazione di una formula che esprime il generico punto P_n :

$$\square \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \left(\cos \left[\arctan \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \right] + i \sin \left[\arctan \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \right] \right)$$

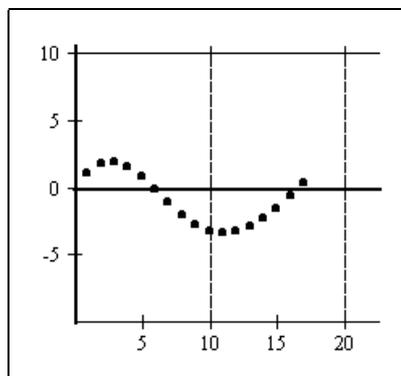
la quale si semplifica in:

$$\square \prod_{k=1}^n 1 + \frac{i}{\sqrt{k}}$$

Quindi è immediata la rappresentazione grafica (non ricorsiva):



La successiva figura mostra la parte immaginaria di P_n , con n da 1 a 17:



Infine si perviene a formule ricorsive, come per esempio quelle del seguente notebook:

Poniamo :

$$\tau(n) := \tan \left(\sum_{k=1}^n \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right)$$

La formula ricorsiva che definisce τ (ricavabile agevolmente dalla formula di addizione per la funzione \tan (tangente)) è :

$$\tau(m) = \begin{cases} 1 & (m = 1) \\ \frac{1 + \tau(m-1)\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \tau(m-1)} & (m > 1) \end{cases}$$

Upon **Simplify** transform $\tau(1)$ into 1.

Upon **Simplify** transform $\tau(m)$ into $\frac{1 + \tau(m-1)\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \tau(m-1)}$.

Valori di $\tau(n)$ per $n = 1, \dots, 17$

Tabulate τ with 

	Save	Load	Copy	Paste
domain:	1	...	17	
points:	17		inc: 1	
range:	-9.4039	...	5.8284	
$\tau(1)$	= 1			
$\tau(2)$	= 5.8284			
$\tau(3)$	= -2.7085			
$\tau(4)$	= -0.9381			
$\tau(5)$	= -0.34581			
$\tau(6)$	= 0.054717			
$\tau(7)$	= 0.44182			
$\tau(8)$	= 0.94261			
$\tau(9)$	= 1.8605			
$\tau(10)$	= 5.288			
$\tau(11)$	= -9.4039			
$\tau(12)$	= -2.4538			
$\tau(13)$	= -1.2951			
$\tau(14)$	= -0.76354			
$\tau(15)$	= -0.42212			
$\tau(16)$	= -0.15569			
$\tau(17)$	= 0.083681			

Ad ogni passaggio da un quadrante al successivo la tangente cambia segno . Pertanto i valori di $\tau(n)$ per $n=1,\dots,16$ corrispondono ad angoli di misura crescente fra 0 e 2π . Per $n = 17$ l'angolo cade nuovamente nel primo quadrante . Pertanto il massimo n per cui $\sum_{k=1}^n \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ non supera 2π è 16 .

Problema 4

Sia $ABCD$ un parallelogramma qualsiasi. Si costruisca il punto P_2 proiettando il suo centro su AB , parallelamente a BC . Il segmento P_2D incontra la diagonale AC in un punto; si costruisca il punto P_3 , proiettando tale punto su AB , parallelamente a BC . Analogamente si costruiscano i punti P_4, P_5, \dots, P_n . Qual è la lunghezza di AP_n , in funzione di AB ?

Gruppo di lavoro 6: Silvano Rossetto, Stefano Daniele Sarti, Angelo Zanni

Strumenti software

Cabri II

Collocazione temporale:

Classe terza

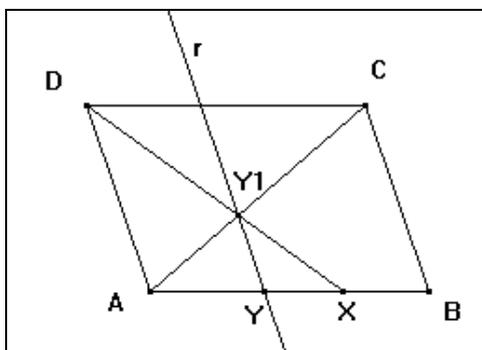
Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe:

È un'applicazione (molto semplice) della similitudine e della dimostrazione per induzione.

La costruzione della figura (con *Cabri II*) aiuta ad intuire il percorso dimostrativo. Può essere un'occasione per una esercitazione con altri software anche di calcolo simbolico.

Tracce della procedura di soluzione

È dato il parallelogramma $ABCD$. Si traccia la diagonale AC . Preso un punto X sul lato AB , si traccia il segmento DX che interseca AC in Y_1 . Per Y_1 si porta la retta r parallela ad AD . La retta r interseca AB in Y .



Cerchiamo di esprimere AY in funzione di AX , poi usiamo la relazione per calcolare la successione richiesta dal problema.

Per la similitudine tra triangoli possiamo scrivere le proporzioni:

- $AD : AX = Y_1Y : YX$

- $BC : AB = Y_1Y : AY$.

Eliminando tra le due equazioni il termine Y_1Y si ottiene:

$$(AD \cdot XY) / AX = (BC \cdot AY) / AB.$$

Poiché $AD = BC$, questa equazione si riduce alla proporzione $XY : AX = AY : AB$.

Convien esprimere le misure dei segmenti rispetto all'unità AB . La proporzione precedente si scrive allora nella forma $x-y : x = y : 1$.

Da questa relazione si ottiene $y = x / (1+x)$

La relazione di ricorrenza della successione cercata è quindi: $a_{n+1} = a_n / (1 + a_n)$

Partendo con $a_1 = 1$ si ottiene $a_n = 1/n$

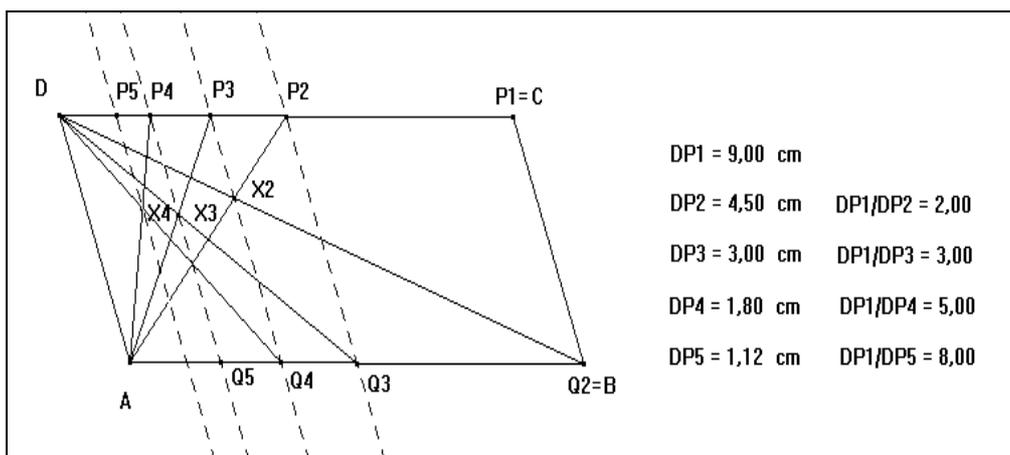
Dimostrazione per induzione:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+n}$$

Una discussione del problema si trova in internet all'indirizzo:

<http://www.nctm.org/mt/1997/01/vol90-no1-euclid1.htm> (Euclid, Fibonacci, and Sketchpad by Dan Litchfield and Dave Goldenheim) Nel sito si mostra anche la seguente costruzione (simile a quella proposta) che produce i reciproci dei numeri di Fibonacci:



Gruppo 4: Paolo Carboni, Domingo Paola, Enrico Pontorno, Gustavo Toninel.

Strumenti software

Cabri II, Derive 5

Collocazione temporale

Il problema potrebbe essere proposto al termine del biennio per indurre gli studenti a ricercarne una soluzione “ingenua”, servendosi di *Cabri* sia in fase di congettura sia in quella di controllo, sfruttandone la calcolatrice. Potrebbe altresì essere presentato alla fine di una classe terza di liceo scientifico per introdurre gli allievi al concetto di successione e al principio di induzione. In entrambi i casi il prerequisito principale è la conoscenza del concetto di similitudine.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Gli obiettivi che si possono cogliere proponendo il problema alla fine della seconda classe sono:

- consolidare la capacità di costruire figure che soddisfino a certi requisiti;
- avviare o consolidare la pratica alla dimostrazione delle proprietà delle figure per via sintetica;
- superare la prassi degli esercizi a corredo della teoria, a vantaggio di una didattica orientata al “problem solving”;
- coltivare il gusto della scoperta nel fare matematica;
- far riflettere gli studenti sulla necessità di un controllo di una congettura formulata, quando si passa dal caso particolare a quello generale;
- rafforzare le abilità nell’uso di *Cabri*

Se proposto invece al termine di una terza, oltre a consentire il recupero di conoscenze acquisite nel biennio e il conseguimento degli obiettivi sopra elencati, il problema permette agli studenti di comprendere l’importanza della dimostrazione come conferma definitiva della scoperta.

Nodi concettuali

In una classe seconda una difficoltà è senz’altro costituita dal concetto di proiezione di un punto su di una retta secondo una direzione assegnata. Per questo motivo la soluzione del problema prospettata fa riferimento ad un rettangolo anziché ad un parallelogramma generico: il vantaggio è quello di lavorare con proiezioni ortogonali, che in genere sono più familiari agli studenti.

Altra difficoltà, sempre presente in problemi di questo tipo, è quella di “vedere” i triangoli simili che consentono di risolvere il problema stesso.

Infine la verifica della congettura realizzata sfruttando le capacità metriche di *Cabri*, va sempre accompagnata dall’avvertenza che si tratta appunto di una congettura e non di una dimostrazione.

In una classe terza questa stessa avvertenza potrebbe essere lo spunto per indurre gli allievi a ricercare una dimostrazione basata sul principio di induzione, introdotto precedentemente mediante semplici esempi.

L'impiego di *Cabri* è essenziale in entrambe le classi nella fase di analisi del problema e di formulazione di una ipotesi di soluzione. La dimostrazione per induzione realizzata servendosi di un computer richiede un software capace di calcolo simbolico, come, ad esempio, *Derive*.

Nel file allegato se ne propone una realizzata con semplici conoscenze del software e quindi alla portata di studenti che lo abbiano usato con regolarità nei tre anni.

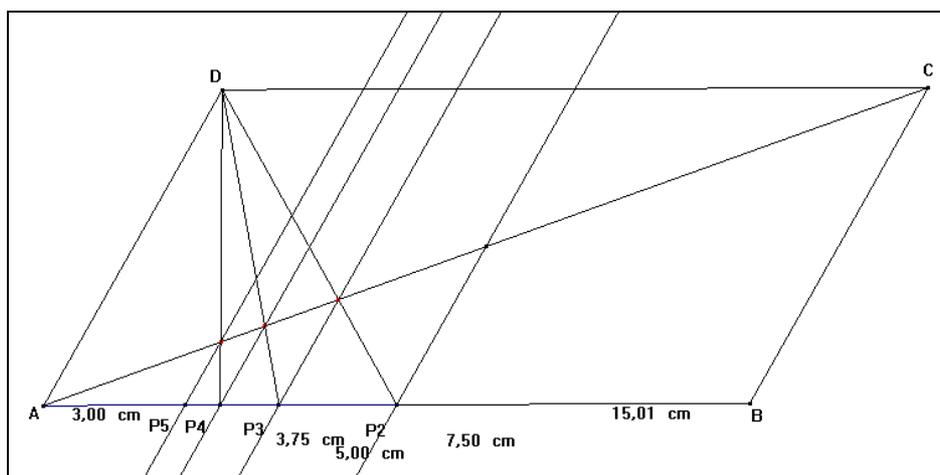
Approfondimenti e collegamenti

I collegamenti che sorgono spontanei sono col concetto di successione e con quello intuitivo di limite: il problema stesso risolto alla fine della terza classe, come proposto sopra, potrebbe essere "ripescato" in quinta per introdurli in contesti diversi.

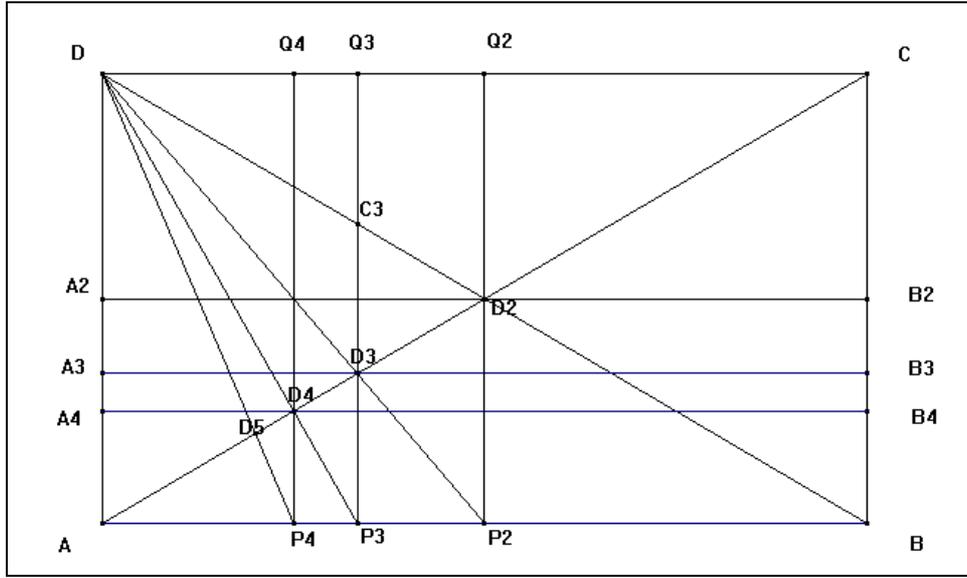
Tracce della procedura di risoluzione

La sua articolazione può evolversi in più fasi successive.

In una prima fase lo studente è chiamato a scoprire la regolarità della disposizione di punti tramite una costruzione degli stessi con un software adatto (*Cabri*).



Nella fase successiva si può tentare un approccio ad una dimostrazione matematica rigorosa aiutandosi con una costruzione fatta con *Cabri*.



Considero i triangoli simili AP_2D_3 e DD_3C . Si ha che $P_3D_3 : D_3Q_3 = AP_2 : DC$. Poiché $AP_2 : DC = 1 : 2$ ne segue che $D_3Q_3 = 2P_3D_3$.

Allora abbiamo $Q_3C_3 = C_3D_3 = D_3P_3$. Analogamente, considerando DD_3A e $D_3D_2P_2$, abbiamo che $A_3D_3 = 1/3A_3B_3$. Quindi $AP_3 = 1/3AB$. Viene il sospetto che

$$AP_n = 1/nAB.$$

Proviamo per induzione (la base è già stata verificata). Supponiamo che $AP_n = AB/n$. Dimostriamo, sotto tale ipotesi, che $AP_{n+1} = AB/(n+1)$. Ragioniamo sulla figura data, in particolare sui triangoli AP_3D_4 ; DD_4C ; AD_4P_4 ; AP_3D_3 . Facciamo però conto di essere all'ennesima suddivisione, ossia identifichiamo $P_3, D_3, Q_3, P_4, D_4, Q_4$, rispettivamente con $P_n, D_n, Q_n, P_{(n+1)}, D_{(n+1)}, Q_{(n+1)}$. Per la similitudine dei triangoli $AD_{(n+1)}P_n$ e $DD_{(n+1)}C$, abbiamo:

$$DC : Q_{(n+1)}D_{(n+1)} = AP_n : D_{(n+1)}P_{(n+1)}$$

Poiché abbiamo $AB = DC$, la (1) diventa: $AB : Q_{(n+1)}D_{(n+1)} = AP_n : D_{(n+1)}P_{(n+1)}$. Permutando i medi abbiamo:

$$AB : AP_n = Q_{(n+1)}D_{(n+1)} : D_{(n+1)}P_{(n+1)}.$$

Applicando il comporre abbiamo:

$$(AB + AP_n) : AP_n = \{Q_{(n+1)}D_{(n+1)} + D_{(n+1)}P_{(n+1)}\} : D_{(n+1)}P_{(n+1)}.$$

Ossia

$$(1) \quad (AB + AB/n) : AB/n = AD : D_{(n+1)}P_{(n+1)},$$

dove abbiamo utilizzato l'ipotesi che $AP_n = AB/n$ e il fatto che

$$Q_{(n+1)}D_{(n+1)} + D_{(n+1)}P_{(n+1)} = AD.$$

Consideriamo ora i triangoli simili $AP_{(n+1)}D_{(n+1)}$ e AP_nD_n . Abbiamo:

$$(2) \quad AP_n : AP_{(n+1)} = P_nD_n : P_{(n+1)}D_{(n+1)}.$$

dalla (1) abbiamo che

$$P_{(n+1)}D_{(n+1)} = AD/(n+1).$$

Sostituendo nella (2) otteniamo:

$$(3) \quad AB/n : AP_{(n+1)} = P_nD_n : AD/(n+1)$$

Abbiamo, però, che se $AP_n = AB/n$ (ipotesi induttiva, allora $P_n D_n = AD/n$. Infatti il rapporto $AP_n/P_n D_n$ è uguale al rapporto AB/AD) Quindi la (3) diventa

$$AB/n : AP_{(n+1)} = AD/n : AD/(n+1).$$

Infine $AP_{(n+1)} = AB/(n+1)$ che è ciò che si voleva dimostrare. La dimostrazione non cambia nel caso di un parallelogramma, mantenendosi le similitudini fra i triangoli considerati.

Un altro approccio alla dimostrazione può essere fatto con *Derive*.

#1: Il sistema tra la retta P2D e la diagonale AC dà il punto P3' da cui si proietta, parallelamente al lato BC, il punto P3

#2: SOLVE $\left[\left[y = \frac{b}{a} \cdot x, y - b = \frac{2 \cdot b}{-c - \frac{c-a}{2}} \cdot (x + c) \right], [x, y] \right]$

#3: P'3 ha coordinate $(-a/3, -b/3)$

#4: $\left[\left[x = -\frac{a}{3}, y = -\frac{b}{3} \right] \right]$

#5: Il sistema tra la retta parallela a BC e passante per P'3 e la retta $y=-b$, dà le coordinate di P3

#6: SOLVE $\left[\left[y + \frac{b}{3} = \frac{2 \cdot b}{a - c} \cdot \left(x + \frac{a}{3} \right), y = -b \right], [x, y] \right]$

#7: coordinate di P3

#8: $\left[\left[x = \frac{c - 2 \cdot a}{3}, y = -b \right] \right]$

#9: Abbiamo quindi: $AB = c+a$; $AP2 = ((c-a)/2+a) = (c+a)/2$; $AP3 = ((c-2a)/3+a) = (c+a)/3$

#10: Troviamo il punto P4', di intersezione tra P3D e la diagonale AC

#11: SOLVE $\left[\left[y + b = -\frac{2 \cdot b}{\frac{c - 2 \cdot a}{3} + c} \cdot \left(x - \frac{c - 2 \cdot a}{3} \right), y = \frac{b}{a} \cdot x \right], [x, y] \right]$

#12: $\left[\left[x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2} \right] \right]$

#13: Il sistema tra la retta parallela a BC e passante per P'4 e la retta $y=-b$, dà le coordinate di P4

#14: SOLVE $\left[\left[y + \frac{b}{2} = \frac{2 \cdot b}{a - c} \cdot \left(x + \frac{a}{2} \right), y = -b \right], [x, y] \right]$

#15: $\left[\left[x = \frac{c - 3 \cdot a}{4}, y = -b \right] \right]$

#16: Abbiamo quindi: $AB = c+a$; $AP2 = ((c-a)/2+a) = (c+a)/2$; $AP3 = ((c-2a)/3+a) = (c+a)/3$;
 $AP4 = (c-3a)/4+a = (c+a)/4$

#17: Si può congetturare che $APn = AB/n$

#18: Dimostriamolo per induzione

#19: La proprietà vale per $n=2$. Infatti $AP2 = AB/2$

#20: Supponiamo che $APn = AB/n$, il che equivale a dire che $Pn((c-(n-1)a)/n, -b)$

#21: Determiniamo il punto $P'(n+1)$ come intersezione tra la retta PnD e la diagonale AC

#22: SOLVE $\left[\left[y - b = \frac{2 \cdot b}{-c - \frac{(c - (n - 1) \cdot a)}{n}} \cdot (x + c), y = \frac{b}{a} \cdot x \right], [x, y] \right]$

#23: $\left[\left[x = \frac{a \cdot (1 - n)}{n + 1}, y = \frac{b \cdot (1 - n)}{n + 1} \right] \right]$

#24: Il punto $P(n+1)$ viene determinato come intersezione tra la parallela per $P'(n+1)$ a BC e la retta $y=-b$

#25: SOLVE $\left[\left[y - \frac{b \cdot (1 - n)}{n + 1} = \frac{2 \cdot b}{a - c} \cdot \left(x - \frac{a \cdot (1 - n)}{n + 1} \right), y = -b \right], [x, y] \right]$

#26: $\left[\left[x = \frac{c - a \cdot n}{n + 1}, y = -b \right] \right]$

#27: Abbiamo quindi che $AP(n+1) = (c-an)/(n+1)+a = (c-an+na+a)/(n+1) = AB/(n+1)$ che è ciò che si voleva dimostrare

Commenti

Una soluzione del problema è circolata nella Rete un paio d'anni fa'. Era opera di due giovanissimi studenti americani ed è stata segnalata su "La Stampa" da Federico Peiretti, che l'aveva rilevata dal sito del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM – www.nctm.org). Segnaliamo la notizia come occasione di fare didattica raccogliendo stimoli "esterni" all'ambiente scolastico: la consultazione delle rubriche o degli inserti dedicati alla scienza sui quotidiani, le riviste di didattica e la "visita" ai siti delle organizzazioni educative dei paesi più sensibili ai problemi dell'istruzione scientifica possono essere occasione di divertenti e utili divagazioni.

Gruppo di lavoro 8: Maria Angela Chimetto, Cristiano Dané, Maria Cristina Ipsevich, Franco Nuzzi, Luigi Tomasi.

Strumenti software

Cabri II, Derive 4, calcolatrice TI92

Collocazione temporale

Il quesito può essere presentato all'inizio di una classe terza, o addirittura alla fine della seconda, dopo aver affrontato i triangoli simili nel biennio e trattato la retta e i sistemi di equazioni di primo grado nel piano cartesiano.

Aspetti didattici ed eventuali sperimentazioni in classe

Il problema così come è stato formulato è un problema aperto, non si suggerisce infatti il risultato della costruzione geometrica richiesta. La prima fase del lavoro didattico sarà quindi la scoperta di tale risultato da parte degli studenti; in questa fase l'utilizzo di *Cabri* facilita enormemente la sperimentazione, rende possibile una corretta comprensione del problema e la formulazione di una congettura risolutiva da parte di tutti gli allievi, divisi in gruppi. Quindi il primo obiettivo è quello di stimolare la curiosità degli studenti, sfidandoli a rispondere alla richiesta del problema, inducendoli alla scoperta e alla deduzione.

Una volta che gli allievi sono arrivati a concludere che $AP_n = \frac{1}{n} AB$ occorrerà dimostrare tale affermazione, per farlo si può seguire la via della geometria sintetica, oppure introdurre un sistema di riferimento cartesiano e seguire la via algebrica.

La dimostrazione geometrica, come spesso accade, non è banale e non tutti gli studenti saranno in grado di "inventarla", si può pervenire ad essa mediante una lezione dialogata, cercando di accettare i suggerimenti di tutti gli studenti e di pervenire insieme alla formulazione corretta.

La dimostrazione algebrica è più semplice, si tratta di una procedura standard basata sull'intersezione tra rette e la soluzione di sistemi lineari. Solo i calcoli possono essere un po' complicati, non tanto per la loro difficoltà, quanto per il fatto che entrano in gioco parecchie variabili e costanti. Il tutto è semplificato dall'utilizzo di *Derive* o della *TI92* che permettono di focalizzare l'attenzione sul processo risolutivo più che sui calcoli in sé.

Per completare la dimostrazione, in entrambi i casi, è necessario effettuare una dimostrazione per induzione. Anche questa volta è decisamente più semplice se si opera nel piano cartesiano. In ogni caso la dimostrazione non è delle più facili, pertanto questa fase può essere omessa in un biennio e anche nel triennio può essere affrontata solo quando gli allievi hanno acquisito una certa confidenza con l'induzione, dopo altre dimostrazioni più facili.

Trattandosi di un problema di suddivisione di un segmento in n parti, il contesto più naturale in cui inserirlo è all'interno della trattazione del teorema di Talete e

dei triangoli simili. Se si vuole accentuare invece l'aspetto algebrico il problema può essere presentato all'interno dello studio della retta in geometria analitica.

Il problema della divisione di un segmento in parti congruenti ha avuto numerose soluzioni, un approfondimento possibile può essere quindi lo studio di tali soluzioni e il confronto tra di esse. Modificando lievemente la costruzione proposta (vedi figura 1) si ottiene una successione di segmenti tali che il rapporto tra la loro lunghezza e quella del segmento base è l'inverso dei numeri di Fibonacci, l'analisi di tale successione e i suoi innumerevoli legami con l'arte e la realtà possono essere oggetto di un ulteriore studio.

Il problema è stato affrontato in due classi seconde di liceo scientifico in epoche e circostanze diverse:

1. Quattro anni fa è stato proposto come lavoro di approfondimento e ricerca: la costruzione è stata effettuata nel 1995 da due studenti americani David Goldenheim e Dan Litchfield¹, e prende il nome di "GLaD construction". Pervenuta la notizia di tale novità è stato fornito agli allievi un articolo di giornale in cui veniva descritta tale costruzione, la cosa ha suscitato immediatamente l'interesse della classe. Accennato alla soluzione in classe, si sono divisi gli studenti in gruppi e si è lavorato in collaborazione con l'insegnante di Disegno e Storia dell'Arte, utilizzando *Cabri 1.7*. Ciascun gruppo ha analizzato nei dettagli i seguenti aspetti: la costruzione e le sue dimostrazioni, altre costruzioni per dividere un segmento in n parti, la variante alla costruzione e la successione di Fibonacci, la successione di Fibonacci in arte, i diagrammi di Villard (architetto francese del 13° sec., che ha in parte anticipato la costruzione). Le conclusioni dei loro lavori sono state esposte da ciascun gruppo ai compagni, in alcuni casi sono state scritte come tesine o presentate con *Power Point* e in ogni caso regolarmente valutate.
2. Nell'a.s. 1999/2000, il problema è stato invece posto così come è stato formulato in questa sede, alla fine del secondo quadrimestre. Gli studenti hanno scoperto facilmente la soluzione in laboratorio con *Cabri II*. La dimostrazione è stata quindi proposta come esercizio per casa: come previsto nessuno è stato in grado di svilupparla in modo completamente corretto, ma mettendo assieme le varie idee si è giunti alla dimostrazione geometrica, sorvolando però sulla dimostrazione per induzione. Una volta risolto il problema gli studenti avevano a disposizione due metodi per dividere il segmento in parti congruenti: il "teorema di Talete" e la "GLaD construction". Su tale argomento è stato fatto un test di verifica dal quale è emerso che se gli studenti erano liberi di utilizzare l'una o l'altra costruzione (ad es. per costruire il segmento $AP = \frac{2}{3} AB$), non hanno generalmente sfruttato la "GLaD construction" (solo

¹ Dan Litchfield, Dave Goldenheim, "Euclid, Fibonacci, and Sketchpad" in *The Mathematics Teacher*, NCTM, vol. 90, n.1, gennaio 1997

una ragazza in una classe di 27 allievi), probabilmente perché abituati ad utilizzare l'altra costruzione sia nella scuola media sia nelle lezioni di Disegno.

Nodi concettuali

Gli aspetti su cui occorrerà insistere e prestare particolare attenzione, perché agli occhi degli allievi non risultano così evidenti ed importanti, sono:

- l'indipendenza della costruzione dal parallelogramma di lato AB : ciò si osserva muovendo i vertici C e D del parallelogramma con *Cabri* ed osservando che i punti P_1, P_2, \dots restano fissi
- la necessità di dimostrare le congetture fatte: si tratta di un aspetto molto importante, se questa esigenza è sentita dagli allievi è il primo passo per riuscire nella dimostrazione
- il fatto che con questa costruzione si ottengono segmenti sempre più piccoli (la cui lunghezza tende a zero se n tende all'infinito), ma mai nulli
- la "ricorsività" della costruzione che risolve il problema: è importante osservare che per trovare il segmento di lunghezza $1/3$ di AB si è trovato prima quello che ne è la metà e poi si è proseguita la costruzione analogamente a quanto fatto in precedenza. Questo non avviene ad es. utilizzando il teorema di Talete, in tal caso la costruzione che rende il segmento $1/3$ di quello dato è indipendente da quella che permette di ottenere quello che ne è la metà.
- La scelta del sistema di riferimento: è questa una buona occasione per ribadire i legami tra geometria sintetica e analitica nonché l'importanza di scegliere il sistema di riferimento che rende più semplici i calcoli
- La diversità delle variabili e delle costanti nel calcolo algebrico, essa è resa evidente dall'uso dei CAS. Si dovranno risolvere sistemi in cui sceglieremo come incognite x e y e come costanti a e b , sia con *Derive* che con la *TI92* è necessario specificare quali tra queste lettere sono le incognite del sistema.

Approfondimenti e collegamenti

Modificando la costruzione richiesta come effettuato in figura si ottiene la successione degli inversi dei numeri di Fibonacci, non è qui il caso di soffermarsi sulle notevoli applicazioni e conseguenze di tale successione.

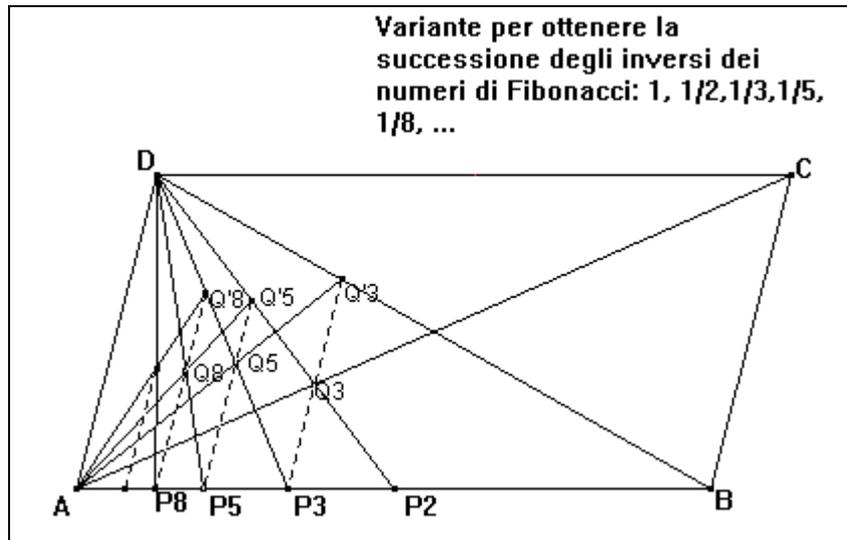


Figura 1

Altra fonte di studio è il collegamento con le altre costruzioni che portano a dividere un segmento in n parti congruenti. Senza soffermarci su quella standard presentiamo a titolo di esempio la “SaRD construction”:

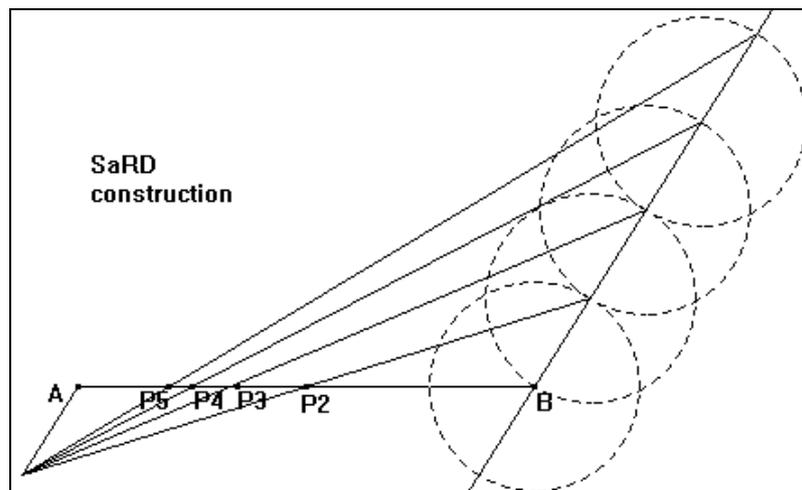


Figura 2

Ci sono poi altre varianti alla costruzione richiesta dal problema che permettono di ottenere le divisioni del segmento AB in sottomultipli pari o dispari:

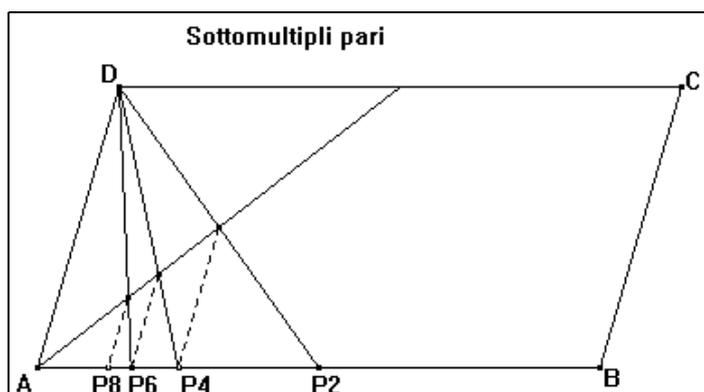


Figura 3

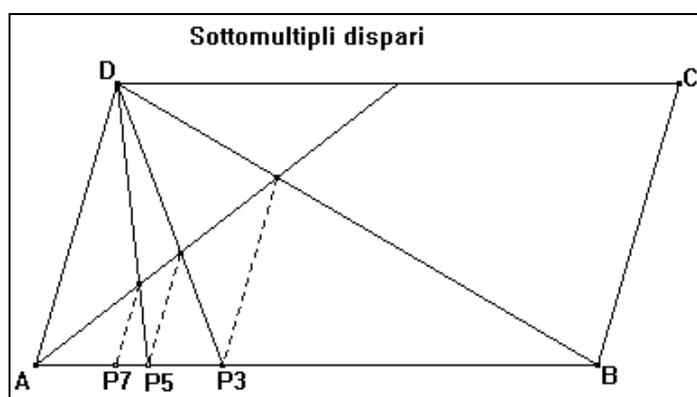


Figura 4

Tracce della procedura di soluzione

Costruzione geometrica:

Per risolvere il problema la prima cosa da fare è effettuare la costruzione, farlo con *Cabri* è molto semplice, basterà seguire le istruzioni fornite nel testo dell'esercizio, si perviene quindi alla figura seguente:

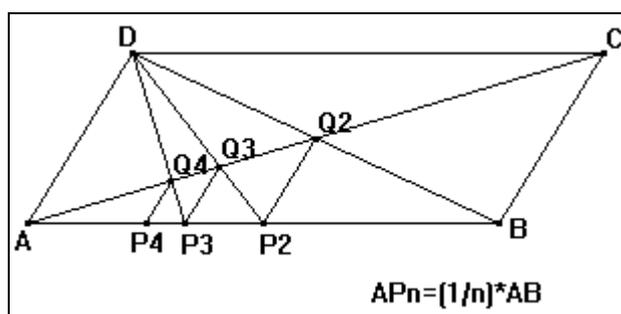


Figura 5

Muovendo C e D si vede che i punti P_2, P_3, P_4, \dots rimangono fissi, se la figura non basta si può ricorrere alla misura dei segmenti, utilizzando il comando Distanza e lunghezza per poter affermare che $AP_n = \frac{1}{n} AB$.

Non ci soffermiamo qui sulla dimostrazione geometrica, già illustrata nei lavori degli altri gruppi, proponiamo invece la dimostrazione algebrica effettuata con la calcolatrice TI92:

Dimostrazione algebrica

Visto che la costruzione vale per qualsiasi parallelogramma $ABCD$, ci mettiamo nel caso in cui esso sia un rettangolo e scegliamo un sistema di riferimento con origine in A e tale che l'asse x contenga AB e l'asse y contenga AD .

La dimostrazione sarebbe identica, con esattamente gli stessi calcoli nel caso in cui $ABCD$ non fosse un rettangolo, basterebbe mettersi in un analogo sistema di riferimento, ma non ortogonale.

Se si vuole continuare l'esplorazione con *Cabri* si possono introdurre gli assi e utilizzando il comando Ridefinizione di un oggetto far coincidere A con l'origine, imporre che B sia su un asse e che C sia su una retta parallela all'asse y .

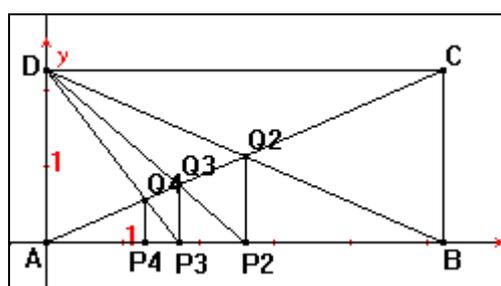


Figura 6

Utilizzando la notazione in figura possiamo determinare le ascisse dei punti P_2, P_3, \dots come segue:

La retta AC ha equazione: $y = \frac{d}{b}x$, ovvero $dx - by = 0$

La retta DB ha equazione: $y = -\frac{d}{b}x + d$, ovvero $dx + by = bd$

Intersecando le due rette si ottiene $Q_2\left(\frac{b}{2}, \frac{d}{2}\right)$, è così dimostrato che $AP_2 \cong \frac{1}{2}AB$

La retta DP_2 ha equazione: $y = -\frac{2d}{b}x + d$, ovvero $2dx + by = bd$

Intersecando le rette DP_2 e AC si ottiene $Q_3\left(\frac{b}{3}, \frac{d}{3}\right)$, è così dimostrato che

$$AP_3 \cong \frac{1}{3} AB,$$

anche il passo induttivo non è complicato, come si può vedere nella figura 7, che descrive la soluzione effettuata con la *TI92*.

Il comando simult della *TI92* è molto potente, ma non semplicissimo da usare per gli studenti: dando come argomenti le matrici dei coefficienti e quella dei termini noti di un sistema ne fornisce la soluzione. Osserviamo che a differenza di quanto accade con *Derive* non è necessario esplicitare quali sono le variabili e quali le costanti del sistema, ciò risulta chiaro perché lavorando con le matrici dei coefficienti si immettono solo le costanti:

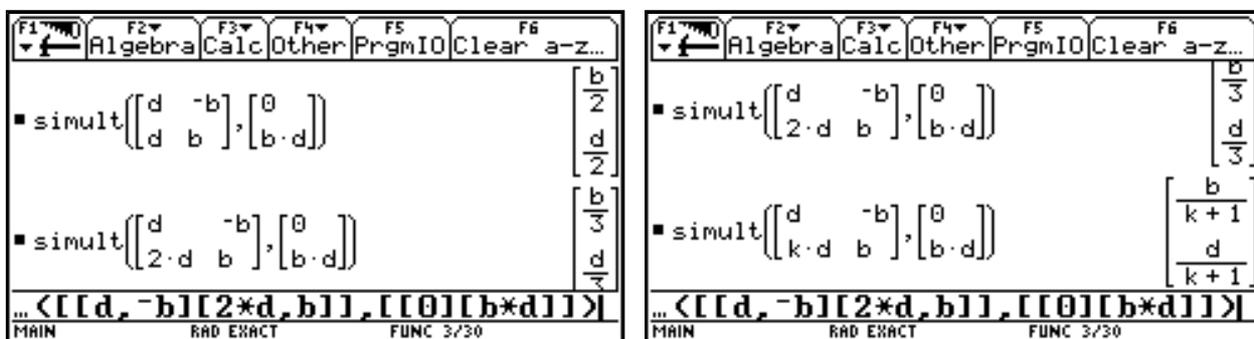


figura 7

Gruppo di lavoro 1: Piero Antognini, Francesca Del Vecchio, Maurizio Frigeni, Mario Puppi, Roberto Ricci.

Strumenti software

Derive, Cabri II

Collocazione temporale

Terzo anno liceo scientifico.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Il problema è stato utilizzato in una terza classe di Piano Nazionale Informatica, proponendolo come attività di approfondimento per piccoli gruppi di alunni di livello medio-alto, in contemporanea con attività di recupero per i gruppi di alunni più deboli. A ciascun gruppo sono stati affidati compiti differenti, con differenti spunti di lavoro e di approfondimento teorico. Poiché la programmazione disciplinare prevedeva: geometria analitica, trigonometria, trasformazioni geometriche, utilizzo del *Derive*, si è scelto di costruire soluzioni che utilizzassero tali "strumenti" matematici. Inoltre il problema è stato utilizzato per introdurre il principio di induzione matematica, previsto solo come approfondimento per i ragazzi più esperti.

Il software *Cabri*, già noto ai ragazzi dal precedente anno scolastico, è stato utilizzato da un gruppo in fase esplorativa e successivamente nella dimostrazione sintetica. Il *Derive* nella costruzione di due differenti algoritmi risolutivi, affidati a due differenti gruppi. Un ultimo gruppo ha curato una presentazione del principio di induzione e di sue applicazioni, comunque studiato da tutti i partecipanti al lavoro. Le attività si sono sviluppate nel periodo di Maggio-Giugno e si sono concluse con la presentazione alla classe, da parte di ciascun gruppo, del lavoro svolto e con la discussione collegiale delle soluzioni individuate, per un confronto fra esse. Durante i lavori la docente ha assunto un ruolo di "collaboratore esperto" inserendosi in vari momenti del lavoro di ciascun gruppo con spunti di riflessione e proposte di ricerca.

Obiettivi comportamentali e didattici: potenziare la motivazione allo studio della disciplina; accrescere e consolidare conoscenze e competenze metodologiche e tecniche di matematica (dimostrazione per induzione, utilizzo di invarianti per trasformazioni geometriche, risoluzione di problemi per via analitica, ecc.) e di informatica (utilizzo di software specifici); sperimentare modalità collaborative di costruzione del sapere; acquisire abilità nell'organizzare e gestire una presentazione a carattere scientifico.

Nodi concettuali

1. Il problema è interessante perché richiede l'utilizzo contemporaneamente di diversi strumenti e metodi matematici, in particolare di: semplici elementi di

- geometria analitica e di trigonometria, principio di induzione matematica, proprietà invarianti per trasformazioni geometriche, conoscenze di informatica
2. Nel lavoro con *Cabri* si sottolinea l'opportunità pratica e anche didattica di definire una macro per iterare la costruzione
 3. Il lavoro con *Derive* allena i ragazzi a lavorare con equazioni di rette in forma implicita, a distinguere fra i concetti di funzione e di equazione (in due o più variabili), ad utilizzare più parametri contemporaneamente e a distinguere fra i concetti di variabile e di parametro
 4. La costruzione degli algoritmi con *Derive* è sufficientemente complessa: è dunque un buono strumento per fare pratica del software e per consolidare le conoscenze di geometria analitica.

Approfondimenti e collegamenti

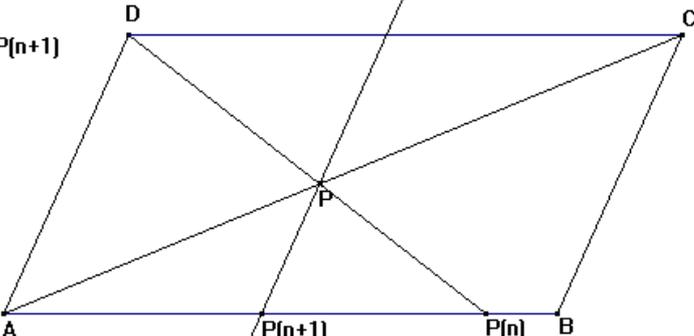
Nel cercare soluzioni per via sintetica, sfruttando il fascio di rette parallele e le similitudini fra triangoli, è possibile una interessante generalizzazione del problema che conduce ad una formula ricorsiva, come illustrato sotto.

I triangoli $ADP(n)$ e $PP(n)P(n+1)$ sono simili, come pure ACB e $APP(n+1)$; ne segue:

$$AP(n) : (AP(n) - AP(n+1)) = AD : PP(n+1)$$

$$PP(n+1) : BC = AP(n+1) : AB$$

Quindi, eliminando $PP(n+1)$:

$$AP(n+1) = 1 / (1/AP(n) + 1/AB)$$


Puoi modificare la posizione di $P(n)$ su AB .
 In particolare per $P(1)=B$ risulta $P(2)$ punto medio di AB come richiesto dal problema.
 In questo caso dalla formula per ricorrenza individuata si ricava: $AP(n)=AB/(n+1)$

N.B.:muovendo il segmento AB o i punti D o B puoi modificare il parallelogramma. In particolare osserva come al variare di D i punti $P(n)$ e $P(n+1)$ rimangono fissi.

Tracce della procedura di risoluzione

L'attività didattica può essere articolata per gruppi, come già illustrato, o seguendo la sequenza qui indicata:

- si esplora il problema mediante una figura *Cabri*: dopo aver costruito il parallelogramma ed il punto P_2 la costruzione della successione di punti P_i viene effettuata mediante la macro: Costruzione di $P(n+1)$ (Figura 1);

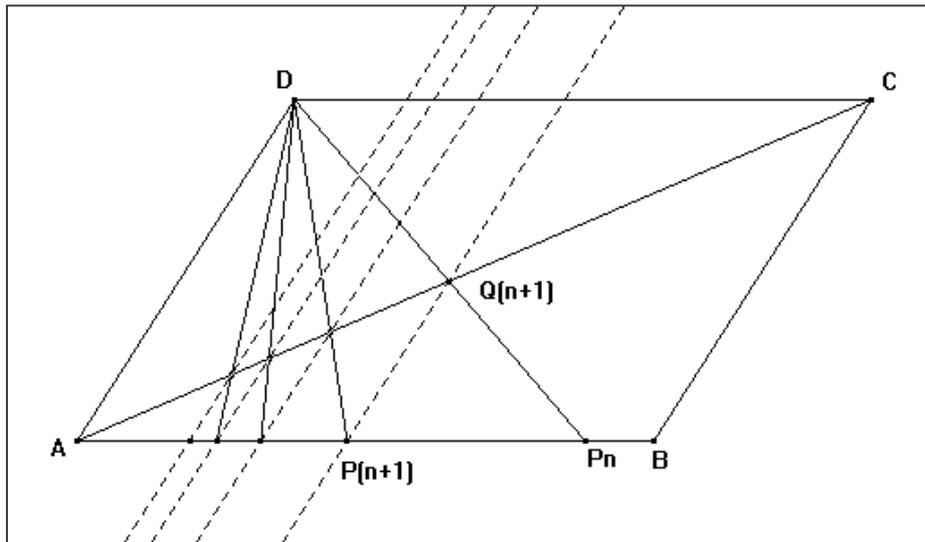


Figura 1

- si costruisce una figura con *Cabri* che consenta di esplorare cosa accade alla successione dei punti P_i al variare del parallelogramma, muovendo tre dei vertici. Sempre come prima esplorazione si possono anche misurare i segmenti e calcolare i rapporti in modo "empirico". Inoltre è importante evidenziare il fascio di rette parallele tagliato dalle trasversali AB e AC .

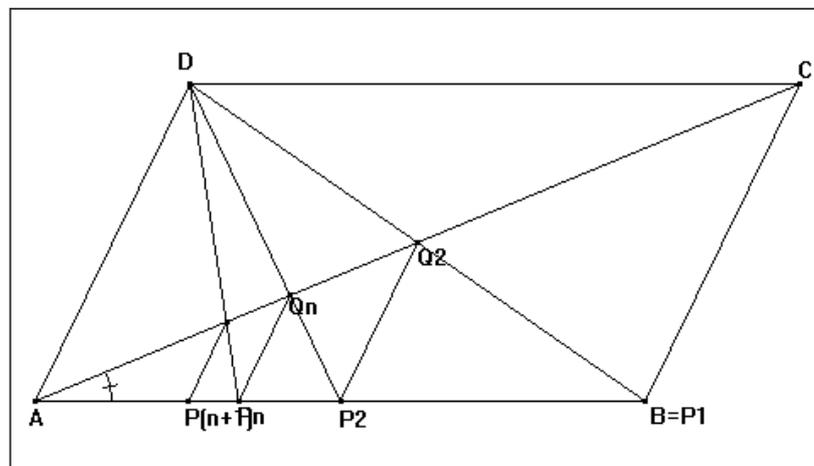


Figura 2

- si risolve il problema utilizzando la geometria analitica ed alcuni elementi di trigonometria: con la versione di *Derive* 4.0 un possibile procedimento è il seguente:
 1. si indicano con $b > 0$, $h > 0$ e φ rispettivamente le misure della base AB e dell'altezza del parallelogramma e l'angolo fra AB e la diagonale AC

2. si fissa un riferimento cartesiano (Oxy) con origine in A e tale che risulti: $B(b;0)$, $C(h*\cotg \varphi;h)$, $D(h*\cotg \varphi - b ; h)$
 3. si definisce la funzione RETTA2PUNTI($(x_1, y_1, x_2, x, y) = (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)$) che uguagliata a zero fornisce l'equazione implicita della retta passante per due punti dati
 4. si utilizza RETTA2PUNTI, imponendo in essa il passaggio per A e per C , per determinare la funzione DIAGONALE($(b, h, \varphi, x, y) = RETTA2PUNTI(0, 0, h*\cotg \varphi, h, x, y)$) che uguagliata a zero fornisce l'equazione della diagonale AC
 5. si impone in RETTA2PUNTI il passaggio per D ed un generico punto $P(p; 0)$ appartenente alla base AB per ottenere la funzione FASCIOD($(p, \varphi, x, y) = RETTA2PUNTI((p, 0, h*\cotg \varphi - b, h, x, y)$) che uguagliata a zero fornisce l'equazione di una retta passante per D e intersecante la base AB in P
 6. si definisce la funzione FASCIO_IMPROPRIO($(x_1, y_1, m, x, y) = (y - y_1) - m(x - x_1)$) con $m = h*\sin\varphi / (h \cos\varphi - b \sin\varphi)$ coefficiente angolare della retta BC
 7. posto $P_1 = B$ si determina l'intersezione Q_2 della diagonale AC e della retta DP_1 risolvendo il sistema composto mediante le equazioni DIAGONALE = 0 e FASCIOD($(b, \varphi, x, y) = 0$
 8. si determina la proiezione P_2 di Q_2 su AB , parallelamente a BC , risolvendo il sistema composto mediante le equazioni FASCIO_IMPROPRIO($(x_{q2}, y_{q2}, m, x, y) = 0$ e $y = 0$
 9. l'ascissa di P_2 rappresenta la misura di AP_2 in funzione di AB e risulta $AP_2 = b/2$
 10. si ripete tutto il procedimento sostituendo $P_1 = B$ con il punto P_2 determinato e si ottiene il punto $P_3(b/3; 0)$
 11. poiché i primi due passi della costruzione lasciano intravedere come possibile risultato $AP_n = AB/n$ si procede alla dimostrazione per induzione: a tal fine si ripete il procedimento utilizzando il punto $P_n(b/n; 0)$;
- ricordando che i rapporti fra segmenti paralleli sono invarianti per affinità si osserva che non si perde di generalità trasformando il parallelogramma in un rettangolo (o anche di un quadrato, riducendo il numero dei parametri da utilizzare nella costruzione). L'algoritmo risolutivo risulta decisamente più semplice (i calcoli possono essere svolti rapidamente anche senza l'ausilio del PC!):
1. i vertici del rettangolo sono: $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; h)$ e $D(0; h)$ e $\tg\varphi = 1$ (eventualmente si assume per maggiore semplicità $b = h$)
 2. l'equazione della diagonale AC è semplicemente: $hx - by = 0$
 3. l'equazione del fascio di rette DP_i è: $hx + py - hp = 0$
 4. non occorre più effettuare la proiezione parallela P_i dei punti Q_i su AB in quanto la lunghezza dei segmenti AP_i è data semplicemente dall'ascissa dei punti Q_i ;

- si cerca una soluzione di tipo sintetico, sfruttando il fascio di rette parallele e i rapporti fra lati di triangoli simili: al confronto risulta essere decisamente la soluzione più semplice ed elegante!

Si cerca infine una possibile generalizzazione del problema che conduce ad una formula ricorsiva.

Commenti

Il principio di induzione matematica era già stato programmato ad inizio anno come approfondimento per l'area di eccellenza, dunque non era stato trattato nella didattica ordinaria in classe: il gruppo dei ragazzi "eccellenti" è stato incaricato di studiarlo autonomamente, sotto la guida dell'insegnante, e poi di esporlo alla classe (prima di presentare le soluzioni del problema) mediante l'utilizzo di lucidi, preparando a tal fine esempi e controesempi per chiarirne le possibilità di impiego.

L'utilizzo dello strumento informatico nella risoluzione del problema si giustifica soprattutto nella prima traccia di risoluzione analitica, decisamente pesante nei calcoli. La seconda soluzione analitica e la soluzione sintetica sono invece di più agevole esecuzione con carta e penna.

La seconda soluzione analitica e la soluzione sintetica sono sicuramente le più semplici ed eleganti e coinvolgono importanti proprietà geometriche. Tuttavia la soluzione analitica mediante Derive sul parallelogramma, anche se meno elegante e più faticosa, è l'unica a giustificare l'impiego del software e costituisce un ottimo esercizio di "montaggio" di una procedura risolutiva articolata. Inoltre, come detto in precedenza, costringe gli studenti a puntualizzare, distinguere ed utilizzare concetti che spesso risultano poco chiari quali: funzione ed equazione (in due e più variabili); variabile e parametro; equazione di retta in forma implicita.

Problema 6

Si consideri la seguente somma infinita basata sui numeri di Fibonacci.

$$\begin{array}{r} 0,0 \\ 0,01 \\ 0,001 \\ 0,0002 \\ 0,00003 \\ 0,000005 \\ 0,0000008 \\ 0,00000013 \\ 0,000000021 \\ \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Dimostrare che il suo reciproco è un numero intero.

Gruppo di lavoro 9: Patrizia Berneschi, Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Sergio Zoccante.

Strumenti software

Derive 4.11

Collocazione temporale

La parte relativa allo studio della successione di Fibonacci e delle sue proprietà, così come delle successioni generalizzate di Fibonacci, può essere affrontata in base alla nostra esperienza in un secondo o terzo anno, quando si affrontano i concetti di successione, di progressione geometrica, di legge ricorsiva o induttiva (con possibili collegamenti alla sezione aurea e ai rettangoli aurei). La soluzione del problema nel suo insieme si colloca invece in un quarto o quinto anno di Liceo Scientifico o di un Istituto Tecnico, assumendo come prerequisiti un po' di teoria degli errori ed una conoscenza dei concetti fondamentali sulle serie e sulla convergenza delle stesse.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Il problema si presta ad una didattica che stimoli l'intuizione senza rinunciare al rigore: si può progettare il lavoro in due fasi, la prima, di contatto con il

problema, di esplorazione e di congetture; la seconda di elaborazione della dimostrazione.

La soluzione proposta è stata scelta perché

- non presuppone *approfondite* conoscenze sulla successione di Fibonacci (che a questo livello scolastico sarebbero eccessive), se non la sua definizione ricorsiva,
- sfrutta in modalità *euristica* e non pesante le capacità di calcolo del software - che quindi potenzia ma non sostituisce l'interazione proficua tra alunni ed insegnante,
- si presta *naturalmente* ad essere estesa ad altre situazioni.

A livello teorico il problema permette di approfondire il concetto di successione, la sua definizione in forma diretta e ricorsiva, il concetto di limite e di serie. In laboratorio, si esplora con *Derive* il problema proposto, si approfondisce il grado di approssimazione dei dati e dei risultati e viceversa - assegnato l'ordine di grandezza dell'errore dei risultati, si individua l'approssimazione dei dati. L'analisi con il software permette di congetturare la corretta soluzione, ma non sembra fornire altre idee che portino ad una *dimostrazione* del risultato. A questo punto però la curiosità suscitata permette all'insegnante di intervenire e mostrare come giungere alla soluzione, fornendo nuovi strumenti.

Prima parte

A tavolino si può facilmente vedere che la successione delle somme ridotte:

$$S_1 = 0,01 \quad S_2 = 0,011 \quad S_3 = 0,0112 \quad S_4 = 0,01123 \quad \dots$$

è crescente e viceversa il reciproco delle ridotte:

$$\frac{1}{S_1}, \frac{1}{S_2}, \frac{1}{S_3}, \dots, \frac{1}{S_n}, \dots$$

è decrescente, con massimo pari a 100.

Con *Derive* si può ampliare e approfondire il campo di esplorazione. Si può comprendere meglio la definizione di limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S} :$$

preso un $\epsilon > 0$ si può trovare in corrispondenza un n_ϵ tale che per ogni $n > n_\epsilon$ si ha

$$1) \quad \left| \frac{1}{S} - \frac{1}{S_n} \right| < \epsilon$$

Che la successione $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ converga ad un intero è un dato del problema: a questo

punto il software permette di congetturare che tale successione converga a $\frac{1}{S} = 89$.

Usando *Derive* si deve tenere conto che ogni somma parziale è calcolata in modalità approssimata perciò, prendendo il valore $\frac{1}{S_n^*}$ approssimato di $\frac{1}{S_n}$ si commette sia un errore teorico sia un errore di troncamento (complessivamente la somma degli errori deve essere $< \varepsilon$ secondo la relazione:

$$\left| \frac{1}{S} - \frac{1}{S_n^*} \right| = \left| \frac{1}{S} - \frac{1}{S_n^*} + \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_n} \right| \leq \left| \frac{1}{S} - \frac{1}{S_n} \right| + \left| \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_n^*} \right| \leq E_n(a) + E_n^*(a) \leq \varepsilon$$

dove il primo è l'errore teorico ed il secondo l'errore di troncamento).

Si può riflettere sul ruolo dell'approssimazione dei dati e dei risultati, si può individuare un valore di ε ed in corrispondenza un n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ si verifichi la (1); viceversa, fissato il grado di approssimazione desiderato per ε , si possono sfruttare le potenzialità di *Derive* per valutare l'approssimazione dei dati e trovare in corrispondenza n_ε in modo da verificare la (1).

Nel caso specifico, assegnata la precisione dei dati dell'ordine 10^{-6} si ottiene $\frac{1}{S_n} = 89,0001$. Preso un $\varepsilon = 0,0001$, il valore $n_\varepsilon = 6$ è tale che per ogni $n > 6$,

$$\left| \frac{1}{S_n} - 89 \right| < 0,0001. \text{ Viceversa, fissando il valore di } \varepsilon, \text{ si individua il grado di approssimazione dei termini della successione } \left\{ \frac{1}{S_n} \right\} \text{ e } n_\varepsilon \text{ in modo che per ogni}$$

$n > n_\varepsilon$ sia soddisfatta la (1). *Derive* inoltre consente di manipolare le strutture ricorsive, verificarne la correttezza in modo rapido, rendere concreto il concetto di limite e di serie attraverso un'esplorazione più ampia e meno astratta, trovare risultati che propongono la dimostrazione come strumento per filtrare e/o giustificare il risultato.

Il programma nella sua interezza concentra lo studente sulla strategia di costruzione dei numeri proposti e focalizza l'attenzione sull'ordine di grandezza dei dati e dei risultati, su strategie di dimostrazione che giustifichino i valori numerici trovati.

I commenti e le annotazioni lungo il percorso, abitano lo studente a sintetizzare e a formalizzare i contenuti.

Seconda parte

Resta ora da spiegare come *dimostrare* il risultato. Prerequisito a questa parte dell'attività, come già detto è una conoscenza dei concetti di base sulle progressioni geometriche, sulle serie e sulla convergenza delle stesse.

Indicato con F_n l' n -simo termine della successione di Fibonacci e con a_n l' n -simo termine della successione del testo, si può riscrivere $a_n = F_n \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$, o più in generale $a_n = F_n \cdot x^{n+1}$.

Si calcola ora la somma S della serie di termine generale a_n , per $x=1/10$; di S poi si prenderà in considerazione il reciproco.

Intanto, la convergenza, prevista dal calcolo numerico, è convalidata dal criterio del rapporto: infatti

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{F_n \cdot x^{n+1}}{F_{n-1} \cdot x^n} = \frac{F_n \cdot x}{F_{n-1}} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x, \text{ quindi la serie converge per } |x| < \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cong 0,61..$$

(Questo permette di estendere il risultato ad altri valori di x , perciò si possono immaginare formulazioni diverse del problema).

Nota: si potrebbe anche usare più facilmente il criterio del confronto con una serie geometrica, per concludere che converge almeno per $|x| < 1/2$.

Per il calcolo effettivo di S si può usare lo stesso metodo utilizzato per determinare la somma di una serie geometrica.

Si pone dapprima

$$S = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \dots ;$$

poi, ricorrendo alla formula ricorsiva $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, si ha

$$S = F_0 x + F_1 x^2 + (F_0 x^3 + F_1 x^3) + (F_1 x^4 + F_2 x^4) + \dots$$

e quindi, raccogliendo e riordinando i termini entro parentesi:

$$S = F_0 x + F_1 x^2 + x^2 (F_0 x + F_1 x^2 + \dots) + x (F_1 x^2 + F_2 x^3 + \dots) .$$

Delle due serie in parentesi, la prima è S , e la seconda è $S - F_0 x$, per cui si ottiene:

$$S = F_0 x + F_1 x^2 + x^2 S + x \cdot (S - F_0 x)$$

e infine, poiché $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$:

$$S = \frac{x^2}{1 - x - x^2}$$

Per $x = 1/10$, $S = 1/89$, che conferma la correttezza della congettura precedente.

Nodi concettuali

I punti delicati sono:

- scrivere i termini della successione indicata gestendo le strutture ricorsive di *Derive*,

- comprendere che il testo richiede il calcolo del reciproco della somma e non della somma dei reciproci,
- valutare il ruolo dell'approssimazione dei dati e dei risultati: operare in modo diretto e inverso,
- ricostruire dopo la manipolazione dei dati numerici con diversi gradi di approssimazione la generalità della definizione di limite,
- generalizzare il problema per vederlo come caso particolare di una serie di potenze,
- comprendere come sfruttare la ricorsione per il calcolo della somma della serie nella dimostrazione.

Approfondimenti e collegamenti

Il problema si può collegare alla legge di Induzione matematica, all'approssimazione dei dati e dei risultati, allo studio dei limiti e allo studio delle serie. Inoltre, avendone il tempo, si possono approfondire le proprietà della successione di Fibonacci in particolare della regola di Dodgson (Lewis Carroll, 1832-1898) che lega i termini consecutivi della successione presi a tre a tre:

$$F_n^2 = F_{n-1} * F_{n+1} + (-1)^n$$

e delle proprietà che possono o non possono estendersi alla successione generalizzata che si ottiene prendendo valori iniziali diversi da 1.

Il rapporto costante fra un termine ed il precedente della serie di Fibonacci da un certo n in poi, che cambia in funzione dei dati iniziali, legato al numero aureo, consente un'interpretazione geometrica dei termini della successione prendendoli a due a due e collegandoli con i rettangoli aurei e a tre a tre con la sezione aurea.

Traccia della procedura di soluzione

Prima parte

- Si determinano in modo ricorsivo le potenze di base a ed esponente k .
- Si determinano in modo ricorsivo, utilizzando l'operatore logico *or*, i termini della successione di Fibonacci.
- Si determinano in modo ricorsivo i termini della successione $succ_1 = 0,01$; $succ_2 = 0,001$, $succ_3 = 0,0002$;...utilizzando i numeri di Fibonacci
- Si calcolano le ridotte n -esime di tale successione
 $S_1 = 0,01$; $S_2 = 0,011$; $S_3 = 0,0112$; $S_4 = 0,01123$;...
- Si calcola il reciproco delle ridotte $\frac{1}{S_n} = somma_cercata(n)$.
- Si verifica il comportamento della successione $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ per $n \rightarrow \infty$.
- Si sperimenta il ruolo dell'ordine di grandezza dei dati e dei risultati in relazione all'obiettivo richiesto.

- Viceversa, fissato il valore di ε , si individua il grado di approssimazione dei dati affinché si verifichi l'asserto.

Di seguito viene riportato il file *Derive* che illustra la soluzione:

```

#1: Il reciproco della somma infinita basata sui numeri di Fibonacci
#2: 0,0+0,01+0,001+0,0002+0,00003+0,000005+0,0000008+0,00000013+..
#3:  $\hat{S}$  un numero intero
#4: Calcolo dei termini della successione successione di Fibonacci
      FIB(k) :=
      If k = 1  $\vee$  k = 2
#5:      1
      FIB(k - 1) + FIB(k - 2)
#6: Verifica della correttezza della formula precedente
#7: VECTOR(FIB(k), k, 1, 8)
#8: [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21]
#9: Calcolo dei termini della successione SUCC(1)=0,01; SUCC(2)=0,001; SUCC(3)=0,0002;..
#10: SUCC(k) := FIB(k)·10-k - 1
#11: Verifica della correttezza della formula precedente
#12: Mi pongo in modalità approssimata per avere risultati più leggibili
#13: Precision := Approximate
#14: VECTOR(SUCC(k), k, 1, 7)
#15: [0.01, 0.001, 0.0002, 3·10-5, 5·10-6, 8·10-7, 1.3·10-7]
#16: Calcolo delle ridotte S(1)=0,01; S(2)=0,011; S(3)=0,0112 ottenute dalla successione
      SUCC(k)
#17: S(n) :=  $\sum_{k=1}^n$  SUCC(k)
#18: Verifica della correttezza della formula precedente
#19: VECTOR(S(n), n, 1, 6)
#20: [0.01, 0.011, 0.0112, 0.0112299, 0.011235, 0.0112357]
#21: VECTOR(S(n), n, 1, 10)
#22: [0.01, 0.011, 0.0112, 0.0112299, 0.011235, 0.0112357, 0.0112359, 0.0112359, 0.0112359,
      0.0112359]

```

```

#22: [0.01, 0.011, 0.0112, 0.0112299, 0.011235, 0.0112357, 0.0112359, 0.0112359, 0.0112359,
      0.0112359]

#23: Calcolo di  $1/S(n) = \text{SOMMA\_CERCATA}(n)$  a partire dalla espressione  $S(n)$ 

#24:  $\text{SOMMA\_CERCATA}(n) := \frac{1}{S(n)}$ 

#25: Calcolo dei primi  $n$  termini della formula precedente con grado di precisione di 6 cifre
      decimali - ricordare che in tutto le cifre sono 8

#26: PrecisionDigits := 8
#27: VECTOR(SOMMA_CERCATA(n), n, 1, 10)
#28: [100, 90.90909, 89.285714, 89.047195, 89.007565, 89.001228, 89.000198, 89.000032, 89, 89]
#29: Preso un  $\hat{i}=0,0001$  si pu' trovare un  $n(\hat{i})=6$  tale che per ogni  $n>6$   $1/S(n)=89$ 
#30: Viceversa fissato  $\hat{i}=0,00000001$  si individua il grado di approssimazione delle cifre
#31:  $n=10$  ed un corrispondente  $n(\hat{i})=12$  tale che per ogni  $n>12$  si abbia  $1/S(n)=89$ 
#32: PrecisionDigits := 10
#33: Precision := Mixed
#34: VECTOR(SOMMA_CERCATA(n), n, 1, 13)
#35: [100, 90.9090909, 89.28571428, 89.04719501, 89.00756564, 89.00122821, 89.00019847,
      89.00003212, 89.00000519, 89.00000084, 89.00000013, 89.00000002, 89]

```

Seconda parte

- Si generalizza la serie del testo ad una serie di potenze.
- Opzionale: se ne calcola l'insieme di convergenza.
- Si calcola la somma della serie sfruttandone la definizione ricorsiva.
- Si osserva che il reciproco della somma infinita basata sui numeri di Fibonacci è un numero intero.

Gruppo di lavoro 8: Mariangela Chimetto, Cristiano Dané, Maria Cristina Ipsevich, Franco Nuzzi, Luigi Tomasi

Strumenti software

Maple V, Derive, calcolatrici TI89 o TI92

Collocazione temporale

L'argomento si presta ad essere introdotto in una classe terza o quarta di un liceo o di un istituto tecnico, dopo aver affrontato le progressioni geometriche, oppure può essere considerato un'attività introduttiva al concetto di limite e ai metodi e ai problemi dell'analisi matematica. A un livello più semplice, potrebbe essere affrontato anche in una classe seconda, come approfondimento, dopo aver ripreso il problema delle rappresentazioni decimali (finite o periodiche) dei numeri razionali. Infatti alcune tecniche di dimostrazione usate sono molto simili a quelle che riguardano il problema della funzione generatrice di un numero decimale periodico e del limite della somma di una progressione geometrica, quando esso esiste.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe:

Il problema si può vedere da punti di vista diversi. Può essere visto come un approfondimento sulla successione di Fibonacci, della quale svela uno tra i numerosi interessanti aspetti, ma si può anche vedere come una attività di esplorazione sul concetto di limite di una successione. Ancora, potrebbe essere usato come esercizio di approfondimento sulla rappresentazione dei numeri reali visti come allineamenti decimali. Infine può fornire uno spunto per introdurre gli alunni in modo elementare ad una tecnica, quella delle funzioni generatrici, che sembra essere molto attuale e utile per descrivere e generare successioni in modo algoritmico. Può quindi essere svolto a livelli diversi in una seconda particolarmente curiosa, oppure in una terza o in una quarta di un Liceo Scientifico o di un Istituto Tecnico. Se l'argomento viene affrontato attraverso le funzioni generatrici, sarà opportuno riprenderlo in modo più rigoroso, se si tratteranno i polinomi di Taylor e gli sviluppi in serie. A seconda della classe in cui viene svolto si doseranno in modo opportuno intuizione e rigore, privilegiando dei procedimenti puramente euristici nelle classi di biennio.

Uno degli obiettivi che ci si propone è lo studio della convergenza di particolari serie anche con l'ausilio del mezzo informatico al fine di formulare congetture. Si considerano prerequisiti: lo studio delle serie di potenze; il concetto di ricorsione e quello di funzione generatrice o in alternativa quello relativo alle equazioni lineari alle differenze finite.

Il lavoro in classe potrebbe essere sviluppato nel modo seguente:

- a) presentazione del problema da parte dell'insegnante;
- b) riepilogo dei prerequisiti, con eventuale discussione e chiarimenti;
- c) lavoro a gruppi per la risoluzione del problema anche con il supporto di *Maple* o altri software come *Derive* o *Mathematica*.

Nodi concettuali

- Rappresentazione decimale di un numero.
- Concetto intuitivo di limite di una successione.
- Proprietà della successione di Fibonacci

Va prestata particolare attenzione allo studio della convergenza sulla quale è possibile ricavare alcune congetture attraverso la costruzione di tabelle e l'uso di opportuni grafici. In seguito però è necessario trarre conferma attraverso lo studio analitico della serie. In prima battuta, per non *forzare* l'apparato teorico è auspicabile partire dalla formula di Binet legittimandola con alcune verifiche. Successivamente, con l'uso delle funzioni generatrici si può darne una dimostrazione.

Tracce della procedura di soluzione

In classe, il problema può essere presentato con la seguente sequenza didattica:

- Esplorazione del problema attraverso il calcolo dei reciproci delle somme parziali con un sistema per il calcolo simbolico. In questo caso la soluzione è proposta con *MAPLE*, ma qualsiasi "Computer Algebra System" può andare altrettanto bene.

- Formulazione di una congettura: sembra che le somme parziali tendano al reciproco di 89.

- Prima dimostrazione: si enuncia la formula di Binet e si verifica che effettivamente la formula genera la successione dei numeri di Fibonacci. Si dimostra quindi che la somma proposta dal problema è il reciproco di 89 utilizzando il "pacchetto" software scelto (il programma *MAPLE* va bene, ma funzionano anche *Derive* e le calcolatrici *TI89* e *TI92*: si tratta di calcolare la somma di progressioni geometriche).

- Seconda dimostrazione: a questo punto però ci si chiede:

Perché proprio 89? Tutto ciò ha o no qualcosa a che fare con le proprietà note della successione di Fibonacci? Potevamo ricavare lo stesso risultato in altro modo, magari con tecniche simili a quelle che si usano per la funzione generatrice di un numero decimale periodico? Proviamo a riscrivere la somma in questione, aiutandoci con una tabella, per incolonnare i termini dello stesso "ordine di grandezza".

- Chiediamoci ora, un po' alla buona: se questa somma (chiamiamola S) rappresenta un numero, chi è l'inverso di S ? Chiaramente sarà quel numero che moltiplicato per S dà 1. Andiamo ora per approssimazioni: è facile ottenere "quasi 1", basta moltiplicare per 100

$$S = 0,0 + 0,01 + 0,001 + 0,0002 + 0,00003 + 0,000005 = 0,012\dots$$

$$S \cdot 100 = 1 + 0,1 + 0,002 + 0,0003 + 0,0005 + \dots = 1,12\dots$$

100 è un po' troppo grande, ma si può migliorare per tentativi: non abbiamo ancora sfruttato la proprietà dei numeri di Fibonacci:

$$\begin{array}{rcl}
S \cdot 100 = & 1+ & 0,1+ & 0,02+ & 0,003+ & 0,0005+ & \dots & + F_n \cdot 10^{(-n+1)} & + \dots \\
S \cdot 10 = & & 0,1+ & 0,01+ & 0,002+ & 0,0003+ & \dots & + F_{n-1} \cdot 10^{(-n+1)} & + \dots \\
S = & & 0,0+ & 0,01+ & 0,001+ & 0,0002+ & \dots & + F_{n-2} \cdot 10^{(-n+1)} & + \dots
\end{array}$$

Osserviamo che se calcoliamo termine a termine l'espressione $100 \cdot S - 10 \cdot S - S$, tutti i termini si elidono, tranne il numero 1. Abbiamo quindi sfruttato la proprietà dei numeri di Fibonacci e trovato che l'inverso di S è 89; quindi la somma richiesta è:

$$S = \frac{1}{89}.$$

Approfondimenti e collegamenti

Il concetto di funzione generatrice può essere utilizzato per la risoluzione di altri problemi di natura combinatoria. Inoltre è possibile pervenire alla formula di Binet anche attraverso il concetto di equazione alle differenze finite.

Si può osservare che il procedimento utilizzato è una variante elementare della dimostrazione che la somma infinita $F_0 \cdot x + F_1 \cdot x^2 + F_2 \cdot x^3 + F_3 \cdot x^4 + \dots$ equivale al reciproco del polinomio $1 - x - x^2$, cioè che:

$$F_0 + F_1 \cdot x + F_2 \cdot x^2 + F_3 \cdot x^3 + \dots = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Questa proprietà si esprime dicendo che $\frac{x}{1 - x - x^2}$ è la "funzione generatrice" dei coefficienti di Fibonacci.

E' interessante poi vedere che la divisione $\frac{x}{1 - x - x^2}$ genera effettivamente i coef-

ficienti di Fibonacci, in un certo senso allo stesso modo in cui la frazione $\frac{4}{33}$ ge-

nera, nella divisione 4:33, la successione 0; 1; 2; 1; 2....

Se si esegue la divisione tra polinomi (quella che si impara al biennio) tra x e $1 - x - x^2$, ordinando dividendo e divisore per potenze crescenti della variabile, anziché per potenze crescenti, si ottiene, passo dopo passo, la somma $F_0 + F_1 \cdot x + F_2 \cdot x^2 + F_3 \cdot x^3 + \dots$.

L'algoritmo della divisione "al contrario", che si può eseguire anche con carta e penna, è abbastanza semplice da realizzare con il linguaggio delle calcolatrici TI89 e TI92, che può utilizzare nella programmazione la potenza del calcolo simbolico (si veda, a questo proposito, l'articolo di G. C. Barozzi su "Polinomi e liste" nel sito: <http://matematica.uni-bocconi.it/matetec/barozzi.htm>)

Descrizione sintetica dell'algoritmo:

Premessa: essendo dividendo e divisore ordinati per potenze crescenti della variabile, i coefficienti del "quoziente" generato si ottengono dividendo i termi-

ni di grado minimo, cioè i termini noti. Si utilizza quindi una “*function*” per calcolare il termine noto, che semplicemente calcola il valore del polinomio per $x = 0$. I parametri in ingresso della funzione che implementa il nostro algoritmo sono dividendo, divisore e numero di coefficienti che vogliamo generare (l’algoritmo in sé non termina). I passi sono:

1. divido i termini noti e trovo il primo quoziente parziale (nell’algoritmo presentato vengono generati solo i coefficienti, sotto forma di lista)
2. moltiplico il quoziente parziale per il divisore e sottraggo quanto trovato dal dividendo
3. il resto così trovato diventa il nuovo dividendo e l’operazione si ripete.

L’immagine qui sotto mostra che la funzione calcola i primi sette numeri di Fibonacci

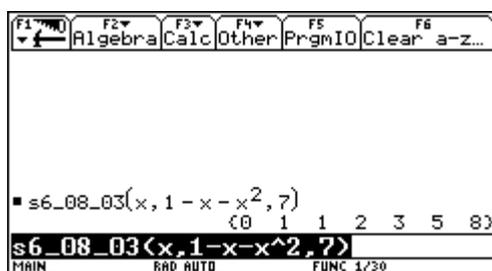


Figura 1

Nella figura 2, la stessa “*function*” applicata alle funzioni generatrici di $\frac{1}{1-x}$ e

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

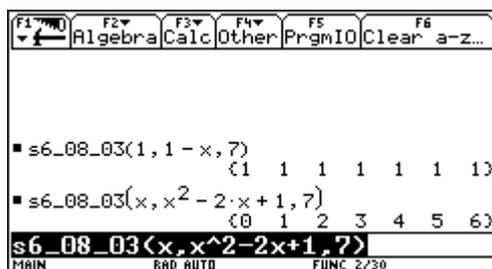


Figura 2

Appendice

Listato della soluzione del problema 6 con *MAPLE V*

Viene dapprima generata la formula di Binet che fornisce l'ennesimo numero di Fibonacci

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

RESTART;

tau:=(1+sqrt(5))/2;

mu:=(1-sqrt(5))/2;

fibo:=1/sqrt(5)*(tau^n-mu^n);

fibo:=fibo/10^(n+1);

Viene ora generato l'ennesimo numero della successione in esame:

$$fibo := \frac{1}{5} \sqrt{5} \frac{\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)}{10^{n+1}}$$

Il comando che segue UNAPPLY trasforma l'espressione precedente fibo nella corrispondente funzione:

fibo:=UNAPPLY(%n);

$$fibo := n \rightarrow \frac{1}{5} \sqrt{5} \frac{\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)}{10^{n+1}}$$

Scriviamo ora (senza valutare) la somma della successione:

s:=Sum(fibo(n), n=1..m);

Si ottiene:

$$s := \sum_{n=1}^m \frac{1}{5} \sqrt{5} \frac{\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)}{10^{n+1}}$$

Costruiamo ora la funzione somma parziale m -esima che verrà successivamente valutata (EVALF) in corrispondenza di uno specifico valore di m . Il comando @ di *MAPLE* compone semplicemente il comando EVALF con il comando UNAPPLY.

parsum:=EVALF@UNAPPLY(s, m); si ottiene quindi:

$$parsum := evalf @ (m \rightarrow \sum_{n=1}^m \frac{1}{5} \sqrt{5} \frac{\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)}{10^{n+1}})$$

A questo punto calcoliamo le somme parziali nel caso $m = 6$ in modo da ottenere una successione (SEQ) di dati visualizzabili mediante un'opportuna funzione a gradini. Si considera il reciproco delle somme parziali 1/parsum.

points:=[SEQ([[i,1/parsum(i)],[i+1,1/parsum(i)]],i=1..6)];

Per ottenere il grafico dei dati è necessario trasformare (MAP(op, points)) il risultato precedente in una lista di punti.

```
points:=MAP(op,points);
points := [[1, 100.0000000], [2, 100.0000000], [2, 90.90909091], [3, 90.90909091], [3,
89.28571429], [4, 89.28571429], [4, 89.04719501], [5, 89.04719501], [5, 89.00756564],
[6, 89.00756564], [6, 89.00122822], [7, 89.00122822]]
```

Con il comando PLOT(CURVES(points)) si ottiene:

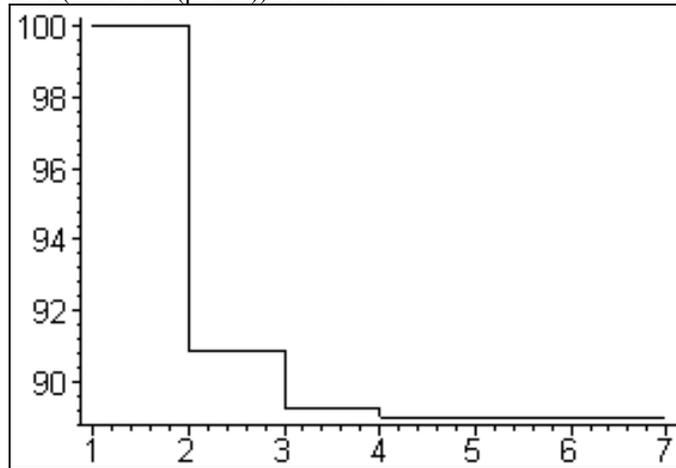


Figura 3

La successione dei reciproci sembra convergere abbastanza rapidamente ad un valore prossimo a 89. Vediamo ora di trarre conferma di questo fatto usando un metodo analitico. Studieremo la successione precedente come differenza delle due:

$$fibo2 := n \rightarrow \left(\frac{1}{10} \mu\right)^n \quad fibo2 := n \rightarrow \left(\frac{1}{10} \tau\right)^n$$

```
fibo3:=n->sqrt(5)/50*(fibo1(n)-fibo2(n));
```

Valutiamo ora le due somme s_1 ed s_2 .

```
s1:=sum(fibo1(n),n=1..k);
```

$$s1 := 20 \frac{\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \sqrt{5}\right)^{k+1}}{-19 + \sqrt{5}} - 20 \frac{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} \sqrt{5}}{-19 + \sqrt{5}}$$

Quindi il limite di s_1 è:

```
l1:=LIMIT(s1,k=INFINITY);
```

$$l1 := -\frac{1 + \sqrt{5}}{-19 + \sqrt{5}}$$

```
s2:=sum(fibo2(n),n=1..k);
```

E il limite di s_2 :

I1:=LIMIT(s2,k=INFINITY);

$$I1 := \frac{1-\sqrt{5}}{19-\sqrt{5}}$$

e quindi della differenza:

I3:=LIMIT(s1-s2, k=INFINITY);

La risposta è:

$$I3 := \frac{1}{50} \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{-19+\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{19+\sqrt{5}} \right) \sqrt{5}$$

Semplificando, si ottiene:

SIMPLIFY(1/%)

EXPAND(%); 89

Lo stesso problema è stato affrontato costruendo i numeri di Fibonacci attraverso la loro definizione ricorsiva:

RESTART:

fibonacci:=PROC(n)

option remember;

IF n<2 THEN

RETURN(n);

FI;

fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);

END:

fibonacci:=n->1/10^(n+1)*fibonacci(n);

$$fibonacci := n \rightarrow \frac{fibonacci(n)}{10^{n+1}}$$

fibonacci(3); 1/5000

SIMPLIFY(ADD(fibonacci(n),n=1..10)); 224719099/20000000000

EVALF(1/%); 89.00000084

La somma dei primi 10 termini della successione fornisce un valore assai prossimo a 89.

Osservazioni didattiche di Piero Antognini (gruppo 1)

Ho proposto questo problema in una terza scientifica (nel Canton Ticino), cioè a ragazzi 18-enni a un anno dall'esame di maturità. Per quel che concerne le conoscenze presupposte, il momento era azzeccato, in quanto avevamo appena trattato successioni e serie. Purtroppo si era alla fine dell'anno scolastico e i ragazzi, abbastanza stanchi, non avevano voglia di impegnarsi in esercizi difficili.

Uno studente, che usa spesso e volentieri Visual Basic, ha però presentato ai compagni in aula di informatica una soluzione che ha avuto il merito di incuriosire la classe che ha poi seguito volentieri la **soluzione “con carta e penna”**.

Non ho avuto più tempo per proporre una soluzione con *Mathematica*.

Resta vero che l'uso dell'informatica per questo problema non è indispensabile: per un docente di matematica la soluzione teorica è pienamente soddisfacente, per i ragazzi, meno preoccupati del rigore delle dimostrazioni, anche una soluzione empirica con il computer può inizialmente bastare.

L'uso di uno software come *Mathematica* permette comunque di ampliare il contesto del problema e mette a disposizione uno strumento di indagine potente.

Problema 8

Un individuo può avere un certo numero di discendenti diretti: con probabilità p_1 ha un discendente, con probabilità p_2 ha due discendenti, con probabilità p_0 non ha alcun discendente ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$). Ciascuno dei discendenti a sua volta dà luogo a propri discendenti (seconda generazione), con la stessa legge di probabilità, e così di seguito, nelle successive generazioni. Studiare la probabilità di estinzione del processo. (Un modello matematico di questo genere si applica allo studio dei neutroni nei processi a cascata).

Gruppo di lavoro 3: Aldo Boiti, Mauro De Vita, Giovanni Olivieri, Rossana M. Rossi Bucciarelli

Strumenti software

Derive

Collocazione temporale

Questo tipo di problemi possono essere analizzati e affrontati a livello di triennio, quando sono in qualche modo in fase di consolidamento le capacità di analizzare situazioni e di costruire modelli di situazioni aleatorie. Una semplice analisi preliminare, corrispondente a quanto effettuato nella prima parte della traccia della procedura di soluzione può anche essere proposta a fine biennio.

Aspetti didattici

Il problema tratta di un processo con caratteristiche aleatorie, la cui descrizione può essere effettuata utilizzando lo strumento delle funzioni ricorsive, in modo semplice o più articolato, a seconda delle ipotesi iniziali che vengono fatte sulle modalità con cui si evolve il processo.

Le proprietà del modello relativo alla situazione indicata da questo problema possono essere "agevolmente" analizzate con carta e matita; si pone quindi in questo caso con "forza" la riflessione sull'effettivo aiuto che l'uso di un ambiente automatico di elaborazione può dare per costruire la risoluzione di problemi di questo tipo.

Nodi concettuali

A seconda del punto di vista, che dipende dalle ipotesi inizialmente adottate, i concetti correlati all'analisi della situazione descritta sono:

- concetto generale di probabilità;
- definizione induttiva o ricorsiva di una funzione;
- funzioni esponenziale e logaritmica e relative proprietà;
- successioni e limite di una successione;
- serie e limite di una serie.

Traccia della procedura di risoluzione

Analisi preliminare

L'ipotesi sotto la quale lavorare è quella per cui ogni individuo genera discendenti una sola volta. In base a questo fatto il processo si estingue quando il numero di discendenti generato è nullo, ovvero quando non vi sono più nuove generazioni.

Se una popolazione di individui è composta inizialmente da h individui, allora il processo si estingue quando il numero dei discendenti generati è minore di 1.

Una popolazione iniziale composta da h individui genera un numero h_1 di discendenti uguale a:

$$h_1 = 0 \cdot h \cdot p_0 + 1 \cdot h \cdot p_1 + 2 \cdot h \cdot p_2 = h(p_1 + 2p_2)$$

Una popolazione composta da h_1 individui genera un numero h_2 di discendenti uguale a:

$$h_2 = 0 \cdot h_1 \cdot p_0 + 1 \cdot h_1 \cdot p_1 + 2 \cdot h_1 \cdot p_2 = h_1(p_1 + 2p_2)$$

o anche

$$h_2 = h(p_1 + 2p_2)(p_1 + 2p_2) = h(p_1 + 2p_2)^2$$

Iterando più volte questo processo, indicando con $F(n)$ il numero di discendenti generati al periodo n , si può scrivere la seguente legge ricorsiva di generazione:

$$\begin{cases} F(0) = h \\ F(n) = F(n-1) \cdot (p_1 + 2p_2) \end{cases}$$

Una legge ricorsiva di questo tipo corrisponde a una funzione esponenziale, che, nel caso specifico, ha equazione:

$$y = h(p_1 + 2p_2)^n$$

I valori interi di questa funzione costituiscono una successione e rappresentano il numero di discendenti generati in ogni successiva fase del processo.

Se $h = 1$, il processo si estingue quando la successione tende a 0, cioè se il numero dei discendenti che vengono via via generati diventa 0. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_1 + 2p_2)^n = 0 \quad \text{se e solo se} \quad p_1 + 2p_2 < 1$$

Dallo sviluppo della disuguaglianza deriva che

$$p_1 < 1 - 2p_2$$

Osserviamo che deve comunque essere $p_2 < 1/2$, dato che la probabilità p_1 non può ovviamente assumere valori negativi.

Dato che $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, possiamo sostituire nella precedente disuguaglianza, ottenendo

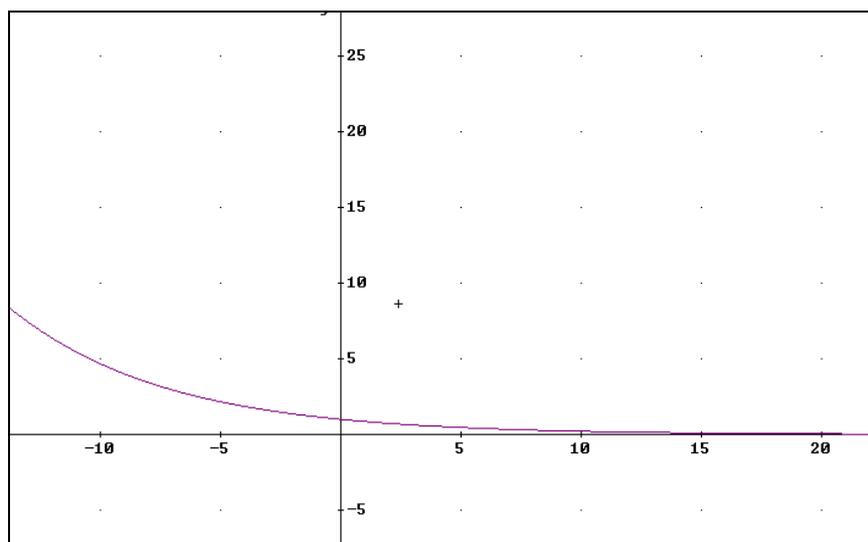
$$p_1 < p_0 + p_1 + p_2 - 2p_2 \quad \text{da cui} \quad p_0 > p_2$$

Le condizioni per cui il processo si estingue sono quindi definite dalla seguente coppia di disuguaglianze:

$$\begin{cases} p_0 > p_2 \\ p_1 < 1 - 2p_2 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad p_1 < 1 - 2p_0 < 1 - 2p_2$$

Sotto queste condizioni la probabilità di estinzione del processo è 1!

Il vettore di probabilità $(3/7, 2/7, 2/7)$ soddisfa le condizioni e l'esponentiale è infatti decrescente.



Il vettore $(2/7; 2/7; 3/7)$ non soddisfa invece le condizioni e la successione diverge.

Per una popolazione iniziale di h individui, con $h > 1$, ci si può chiedere sotto quali condizioni il processo si estingue dopo n generazioni. In pratica, non ci sono più discendenti, quando il numero degli individui è tale che, statisticamente, si dovrebbe generare un numero di individui strettamente minore di 1. Deve essere:

$$h(p_1 + 2p_2)^n < 1 \rightarrow n < \frac{-\ln(h)}{\ln(p_1 + 2p_2)}$$

Affinché il valore della frazione sia positivo deve essere $\ln(p_1 + 2p_2) < 0$ e, quindi, $p_1 + 2p_2 < 1$. Questa è esattamente la condizione di estinzione del processo.

Traccia della soluzione

La generazione al tempo $t = 0$ è costituita da un solo capostipite.

Il numero massimo di discendenti diretti della generazione 1 è 2. Se ciascuno di questi due individui genera due propri discendenti diretti, alla generazione 2 ci sono 4 individui, e così via raddoppiando di generazione in generazione.

Se ad ogni nuova generazione ogni "nuovo" individuo genera il massimo numero possibile di discendenti diretti, alla n -esima generazione saranno presenti 2^n "nuovi" individui.

Il numero di discendenti diretti alla n -esima generazione può dunque variare tra 0 e 2^n .

Detto $G_{n,k}$ l'evento "alla generazione n sono presenti k nuovi discendenti diretti", gli eventi $G_{n,0}, G_{n,1}, G_{n,2}, \dots, G_{n,2^{n-1}}, G_{n,2^n}$ sono mutuamente **esclusivi** ed anche **esaustivi**.

La probabilità di avere m discendenti diretti alla generazione n può essere ricavata dalla formula

$$p[G_{n,m}] = \sum_{k=k_{\min}}^{2^{n-1}} p[G_{n,m} | G_{n-1,k}] \cdot p[G_{n-1,k}] \quad (*)$$

che costituisce una definizione ricorsiva di $p[G_{n,m}]$.

Occorre precisare però che $p[G_{n,m}] = 0$ se $m > 2^n$. I valori ammissibili di m sono $0 \leq m \leq 2^n$.

Nella formula (*), il termine $p[G_{n,m} | G_{n-1,k}]$ indica la probabilità che dalla $(n-1)$ -esima generazione, composta da k individui, si passi alla generazione successiva (n -esima), composta da m nuovi discendenti diretti.

Il numero di discendenti di k individui può essere al massimo il doppio $2k$. Non si può passare da una generazione di k individui ad una generazione di m individui se $2k < m$. Per questo motivo i termini $p[G_{n,m} | G_{n-1,k}]$ con $2k < m$ devono essere nulli per definizione.

È ora possibile precisare il valore k_{\min} indicato nella formula (*). La somma si intende eseguita solo per quei valori di k per i quali $2k \geq m$. Dunque k_{\min} è il numero

intero uguale alla metà di m se m è pari, l'immediato seguente della metà di m se m è dispari. Tale numero è indicato come il "tetto" ("ceiling") di m .

Per trovare una espressione dei termini $p[G_{n,m} | G_{n-1,k}]$ non nulli, si osserva che se tra i k individui della $(n - 1)$ -esima generazione k_0 evaporano senza lasciare discendenti diretti, k_1 generano ciascuno un discendente e k_2 generano ciascuno due discendenti, si ha

$$k_0 + k_1 + k_2 = k$$

ed anche

$$k_1 + 2 \cdot k_2 = m ,$$

essendo m il numero di individui della generazione n -esima immediatamente successiva.

Riscrivendo le equazioni e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = k \cdot k_0 \\ k_1 + 2k_2 = m \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} k_1 = 2(k \cdot k_0) \cdot m \\ k_2 = m(k \cdot k_0) \end{cases}$$

Si ha in ogni caso

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_0 \leq k , \\ 0 &\leq k_1 \leq k , \\ 0 &\leq k_2 \leq k . \end{aligned}$$

e sostituendo k_1 e k_2 si ha anche

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \cdot (k - k_0) - m \leq k , \\ 0 &\leq m - k + k_0 \leq k . \end{aligned}$$

Si ricava

$$\begin{aligned} k - m &\leq 2 \cdot k_0 \leq 2 \cdot k - m , \\ k - m &\leq k_0 \leq 2 \cdot k - m . \end{aligned}$$

naturalmente con

$$0 \leq k_0 \leq k .$$

Il numero k_0 dipende da k e da m . Il minimo valore possibile di k_0 è dunque il maggiore tra 0, il "tetto" di $(k - m)/2$ e $k - m$, in altri termini è $\max[0, k - m]$ (infatti se $k < m$, k_0 può anche essere nullo, ma se $k > m$, almeno $k - m$ individui devono evaporare senza lasciare discendenti diretti).

Il massimo valore possibile di k_0 è il minore tra k , $2 \cdot k - m$, il "pavimento" ("floor") di $(2 \cdot k - m)/2$, ovvero il numero intero che è uguale alla metà $2 \cdot k - m$ se tale numero è pari, l'immediato precedente se invece $2 \cdot k - m$ è dispari.

È facile verificare che questo valore minimo è il "pavimento" di $(2 \cdot k - m)/2$.

Fissato un valore di k_0 compreso tra $\max[0, k - m]$ e $(k - \text{floor}[m/2])$ e determinati i valori corrispondenti di k_1 e k_2 , si hanno le terne ammissibili ammissibile di k_0 , k_1 e k_2 .

La probabilità $p[G_{n,m} | G_{n-1,k}]$ si ricava sommando sulle terne ammissibili ammissibile di k_0, k_1 e k_2 i coefficienti multinomiali $k! / (k_0! \cdot k_1! \cdot k_2!)$ moltiplicati per le potenze delle probabilità $p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$. In particolare $p[G_{n,0} | G_{n-1,k}] = p_0^k$.

Infine la probabilità di estinzione della popolazione precisamente alla generazione n è data dalla formula

$$p[G_{n,0}] = \sum_{k=k_{\min}}^{2^{n-1}} p[G_{n,0} | G_{n-1,k}] \cdot p[G_{n-1,k}] \quad (**)$$

Per concludere, la probabilità di estinzione del processo è data dalla somma delle probabilità della formula (**) per tutti i valori di n da 1 a infinito:

$$p_{\text{estinzione}} = \sum_{n=1}^{\infty} p[G_{n,0}]$$

Resta da esprimere ancora il fattore di moltiplicazione del numero di individui da una generazione alla successiva. Tale fattore è il rapporto tra le speranze matematiche, che indicano il numero atteso di individui presenti ad una generazione.

Con Derive si ottiene $2(1 - p_0) - p_1$, che è uguale a $p_1 + 2p_2$.

Commento

Nel testo del problema si fa riferimento allo studio dei neutroni nei processi a cascata come esempio di generazioni di individui. Per non ingenerare negli allievi pericolose "misconception", che ad esempio un neutrone possa svanire nel nulla o che possa trasformarsi in due neutroni, è opportuna una breve digressione sulla fissione nucleare.

Il fenomeno chiamato fissione (Hahn e Strassmann, 1939) è il processo più spettacolare e di più grande importanza pratica tra i processi nucleari. Esso consiste nella rottura di un nucleo pesante, ad esempio di uranio, spontanea (rara, possibile solo per l'effetto "tunnel" della meccanica quantistica) oppure provocata da un bombardamento con vari proiettili, che forniscono l'energia di attivazione per la reazione di fissione. Il nucleo di uranio si spezza in due grandi frammenti, più frequentemente disuguali, ad esempio nuclei di bario e cripto, che si allontanano con una energia media di circa 170 MeV. Il processo è accompagnato da evaporazione (emissione istantanea) di neutroni. Il numero medio di neutroni emessi per fissione dipende dall'energia di eccitazione del nucleo spezzato, perché ogni neutrone evaporato porta via una certa quantità di energia e ne deve restare abbastanza per permettere l'evaporazione di un altro neutrone. Il fenomeno, interpretato in modo semplificato, si descrive dicendo che ogni fissione può essere accompagnata, con varie probabilità, dall'emissione di diversi numeri di neutroni. Ad esempio, le probabilità di emissione di 0, 1, 2, 3, 4 e 5 neutroni per fissione di un nucleo di uranio 235 bombardato con neutroni di energia 80 keV sono rispettivamente 0.01, 0.17, 0.36, 0.31, 0.12 e 0.03 ed il numero medio di neutroni emessi per fissione (la speranza matematica) è 2.45. Le energie dei neutroni emessi sono distribuite su uno spettro di valori differenti, per cui è possibile indicare, con una formula semiempirica, soltanto la probabilità che un neutrone emesso abbia un particolare valore di energia.

Se si provoca una fissione iniziale in una massa di materiale fissile, i neutroni generati possono stimolare ulteriori fissioni. Il processo è chiamato reazione a catena. Un apparato in cui del materiale fissile è accumulato in modo che si sviluppi una reazione a catena è chiamato reattore.

Per "generazione" di neutroni si intende l'insieme dei processi dalla produzione di un neutrone al suo assorbimento finale. Per "durata di una generazione" τ si intende il tempo richiesto per questa successione di processi. Naturalmente i neutroni individuali hanno storie di vita diverse. In una

generazione e nella sua durata τ si considerano medie opportune su tutti i neutroni. Si chiama "costante di moltiplicazione" k il numero di neutroni prodotti da un singolo neutrone nella durata di una generazione, in un mezzo materiale fissile che si estende all'infinito in tutte le direzioni. La densità n dei neutroni nel mezzo varia allora secondo l'equazione

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n(k-1)}{\tau},$$

la cui soluzione è

$$n(t) = n(0)e^{(k-1)t/\tau}.$$

Se $k > 1$ la reazione a catena si dice divergente, il numero di neutroni cresce allora esponenzialmente, se $k < 1$ la reazione si dice convergente, il numero di neutroni decresce tendendo a zero, se infine $k = 1$ la reazione si dice critica o autosostenentesi.

In un reattore il materiale fissile, chiamato combustibile nucleare, non è mai puro, ma è mescolato con un materiale inerte, chiamato moderatore, necessario per rallentare i neutroni alla velocità a cui è più probabile che possano essere assorbiti da un nucleo fissile e provocarne la fissione. Questo processo è chiamato termalizzazione dei neutroni. Prima di raggiungere questo stato di grazia, un neutrone deve evitare molti pericoli: può essere assorbito dai materiali strutturali del reattore, dai sistemi di controllo della reazione, dai prodotti di fissione, dal moderatore, dal combustibile stesso (ma per risonanza, senza produrre neutroni di fissione), o ancora può uscire dalle pareti del reattore, che ovviamente ha dimensioni finite, ed essere perso.

Si comprende da questa breve nota (liberamente tratta da *Nuclei and Particles*, E. Segrè, Benjamin, New York, 1965) che la situazione presentata nel problema 8 non è un modello della realtà ma soltanto una idealizzazione molto semplificata. Il problema rappresenta comunque una buona occasione di praticare l'interdisciplinarietà tra matematica e fisica.

Gruppo di lavoro 1: Piero Antognini, Francesca Del Vecchio, Maurizio Frigeni, Mario Puppi, Roberto Ricci.

Alcune osservazioni sul problema

La soluzione esatta.

È possibile ricavare la soluzione (senza bisogno di alcun software) secondo le linee di ragionamento esposte qui di seguito. La conoscenza di questa soluzione è interessante per confrontare con essa i risultati ottenuti con altri metodi. Indichiamo con $P(n)$ la probabilità che n individui si estinguano "prima o poi". Possiamo immaginare di suddividere l'insieme di n individui in due sottoinsiemi disgiunti, che evidentemente non si influenzano a vicenda per quanto riguarda la probabilità di estinzione; l'insieme complessivo di individui si estingue se si estinguono entrambi i gruppi in cui è stato diviso. Si ha perciò la regola:

$$P(m+n) = P(m) P(n)$$

ed in particolare:

$$P(n+1) = P(n) P(1),$$

da cui si ricava subito:

$$P(n) = P(1)^n.$$

A noi però interessa proprio $P(1)$; per determinarlo, osserviamo che un singolo individuo può dare origine, nella generazione successiva, a 0, 1 o 2 individui, con probabilità rispettive p_0 , p_1 e p_2 , quindi possiamo scrivere:

$$P(1) = p_0 + p_1 P(1) + p_2 P(2),$$

cioè:

$$P(1) = p_0 + p_1 P(1) + p_2 P(1)^2.$$

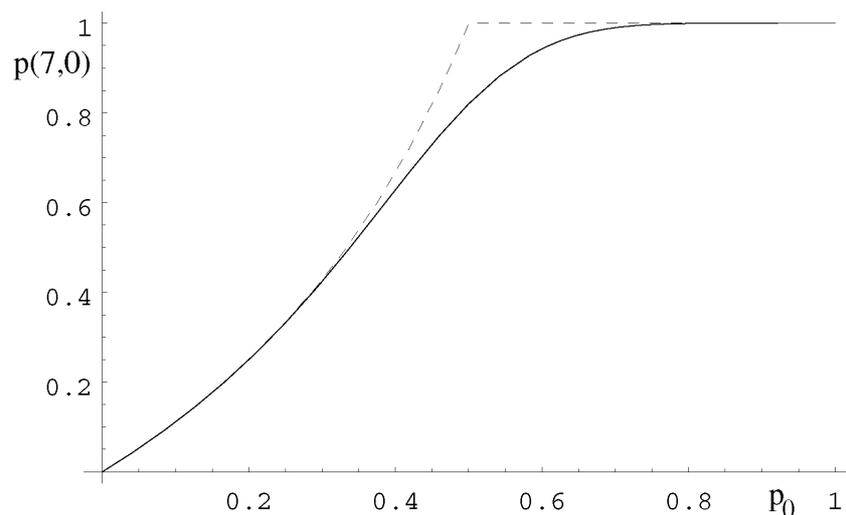
Questa è un'equazione di secondo grado in $P(1)$ (se $p_2 > 0$) e tenendo conto che $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, troviamo le due soluzioni:

$$P(1) = p_0/p_2 \quad \text{e} \quad P(1) = 1.$$

Per $p_0 = 0$ la probabilità di estinzione si deve annullare e quindi per p_0 vicino a zero la soluzione corretta è la prima: $P(1) = p_0 / p_2$. Tale soluzione non ha però senso per $p_0 > p_2$ quindi in tale caso bisogna prendere la seconda soluzione: $P(1) = 1$. I casi particolari si trattano agevolmente: se $p_2 = 0$ si ha $P(1) = 1$ finché $p_0 > 0$, altrimenti $P(1) = 0$, come ovvio, se $p_0 = p_2 = 0$.

Notiamo che la soluzione non dipende dal valore di p_1 ; se per esempio fissiamo $p_1 = 0$, si avrebbe: $P(1) = p_0/(1 - p_0)$ per $0 \leq p_0 \leq 1/2$ e $P(1) = 1$ per $p_0 > 1/2$.

Possiamo ora confrontare i risultati ottenuti con la soluzione già esposta nell'intervento precedente, che dà la probabilità $p(k, 0)$ di estinzione dopo k generazioni. Per visualizzare le due soluzioni fissiamo un valore per p_1 e facciamo quindi un grafico di $p(k, 0)$ al variare di p_0 fra 0 e $1 - p_1$. Scegliamo ad esempio $p_1 = 0$ e prendiamo la probabilità di estinzione dopo sette generazioni $p(7, 0)$. Nello stesso grafico sovrapponiamo per confronto (in tratteggio) il risultato ottenuto dalla soluzione esatta.



Come si vede la differenza più marcata si ha per valori di p_0 vicini a $1/2$. L'accordo migliorerebbe passando alle generazioni successive alla settima ma, come già osservato nell'intervento precedente, i calcoli coinvolti sono gravosi per qualunque software di manipolazione simbolica ed è praticamente impossibile effettuare il calcolo per un numero molto elevato di generazioni, come sarebbe auspicabile.

Ottenere la soluzione con una simulazione.

Un metodo ancora più semplice e diretto di affrontare il problema è quello di simularlo usando un linguaggio di programmazione ed un generatore di numeri pseudo-casuali. Questo non richiede le competenze nel calcolo combinatorio necessarie con l'approccio visto in precedenza e quindi è alla portata anche di alunni dei primi anni di corso, purché istruiti nei rudimenti di un linguaggio di programmazione. Inoltre la “sperimentazione diretta” che questo metodo consente è di grande valore didattico e può consentire una migliore comprensione dei concetti tipici di una situazione probabilistica. Nel nostro caso abbiamo usato Mathematica per implementare la simulazione, ma qualunque altro linguaggio di programmazione sarebbe adatto.

Sappiamo che un singolo individuo può avere 0, 1 o 2 discendenti con probabilità p_0 , p_1 o p_2 . Per simulare questo comportamento, possiamo generare un numero pseudo-casuale compreso fra 0 e 1 e con distribuzione uniforme (generatori di questo tipo sono di solito predefiniti in tutti i linguaggi di programmazione o pos-

sono comunque essere facilmente costruiti). È evidente che il numero generato sarà compreso fra 0 e p_0 con probabilità p_0 , fra p_0 e $p_0 + p_1$ con probabilità p_1 , fra $p_0 + p_1$ e 1 con probabilità p_2 . Possiamo quindi scrivere una semplice procedura che trova, in modo casuale, il numero di discendenti generati da un individuo:

```

genera il numero casuale  $x$  nell'intervallo (0, 1)
  se  $x < p_0$  restituisci 0
    altrimenti, se  $x < p_0 + p_1$  restituisci 1
      altrimenti restituisci 2

```

Questa procedura può essere incorporata in una funzione **figli**(p_0, p_1), che date in ingresso le probabilità p_0 e p_1 (notiamo che p_2 non serve, essendo $p_2 = 1 - p_0 - p_1$) dà come risultato 0, 1 o 2 con le giuste probabilità.

Supponiamo che siano presenti ad un certo stadio 100 individui; possiamo simulare il numero di individui presenti alla generazione successiva ripetendo 100 volte la funzione **figli** e sommando tutti i risultati ottenuti. Ecco ad esempio una lista di 100 numeri ottenuta in questo modo, nel caso $p_0 = p_1 = p_2 = 1/3$:

```

{2, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 0,
 2, 2, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 2, 0,
 1, 0, 1, 2, 2, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 0, 0}

```

Se sommiamo tutti i numeri di questa lista, otteniamo 99 che è il numero di discendenti nella generazione successiva. Anche questo esempio si traduce subito in una procedura che dato il numero n di individui nella generazione k trova in modo casuale il numero di individui nella generazione $k+1$; possiamo chiamare **nuovagen** (p_0, p_1, n):

```

nuovagen ( $p_0, p_1, n$ ) = somma figli ( $p_0, p_1$ ) per  $n$  volte

```

Ecco un esempio di applicazione di questa funzione, ottenuto a partire da 20 individui ed iterando il procedimento per 10 volte, sempre nel caso $p_0 = p_1 = p_2 = 1/3$:

```

{20, 19, 22, 25, 31, 33, 40, 32, 36, 30, 38}

```

Per valutare empiricamente la probabilità di estinzione, possiamo procedere così: partendo con 1 individuo iteriamo **nuovagen** finché otteniamo zero oppure finché il numero di individui supera un certo valore limite n_{soglia} al di sopra del quale possiamo ritenere la probabilità di estinzione trascurabile. Ripetiamo questa procedura un numero n_{iter} (sufficientemente elevato) di volte; il numero di volte che abbiamo ottenuto zero, diviso per il numero totale di prove, ci darà una stima della probabilità di estinzione cercata. Questa stima sarà tanto migliore quanto maggiori sono i valori di n_{soglia} e di n_{iter} ; il valore ottimale va determinato per tentativi e risulterà da un compromesso fra l'accuratezza dei risultati e la velocità dell'esecuzione.

Ecco come appare la procedura: il ciclo While continua ad iterare **nuovagen** (partendo con $n = 1$) finché otteniamo zero oppure un numero di individui maggiore di

n_{soglia} ; il ciclo Do ripete il tutto un numero n_{iter} di volte. La variabile n_{zeri} viene incrementata di una unità ogni volta che **nuovagen** dà come risultato zero, quindi conta il numero di estinzioni che si sono verificate.

```

valore iniziale:  $n_{zeri} = 0$ 
ripeti  $n_{iter}$  volte:
   $n = 1$ 
  ripeti finché  $n = 0$  oppure  $n > n_{soglia}$  :
     $n = \text{nuovagen}(p_0, p_1, n)$ 
    se  $n = 0$  aumenta  $n_{zeri}$  di 1
  ritorna il valore  $n_{zeri} / n_{iter}$ 

```

I valori di n_{soglia} e di n_{iter} influiscono entrambi sul risultato. Gli studenti possono sperimentare che cosa succede variando questi parametri e farsi quindi un'idea di quali siano i valori ottimali da usare. Idealmente, ripetendo più volte la valutazione della probabilità di estinzione si dovrebbero trovare valori vicini fra loro. Vediamo alcuni esempi, prendendo per fissare le idee $p_0 = 1/10$ e $p_1 = 0$; ecco una prima lista di valori per la probabilità di estinzione, ottenuti ponendo $n_{soglia} = 10$ e $n_{iter} = 100$:

{0.06, 0.1, 0.12, 0.12, 0.05, 0.14, 0.09, 0.1, 0.07, 0.09}

ed ecco una lista analoga ottenuta invece per $n_{soglia} = 10$ e $n_{iter} = 1000$:

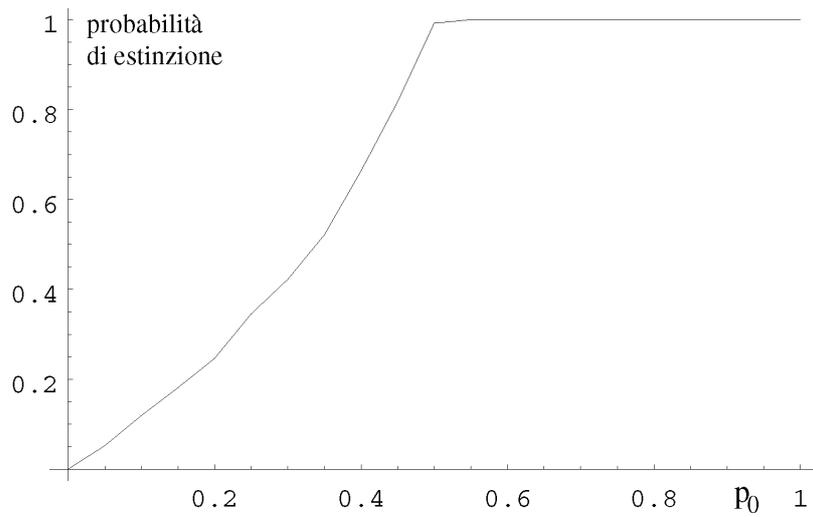
{0.1, 0.105, 0.115, 0.098, 0.123, 0.091, 0.106, 0.107, 0.115, 0.122}

ed infine per $n_{soglia} = 100$ e $n_{iter} = 1000$:

{0.124, 0.095, 0.137, 0.11, 0.135, 0.116, 0.098, 0.119, 0.098, 0.114}

Come si vede, nel terzo caso i risultati ottenuti sono più stabili; è chiaro che aumentando ulteriormente i valori di n_{soglia} e n_{iter} si può migliorare l'affidabilità della stima, ma questo naturalmente si può fare solo se si dispone di un'implementazione abbastanza veloce.

Già per $n_{soglia} = 100$ e $n_{iter} = 1000$ si ottengono tuttavia stime abbastanza precise; tenendo fissi ora questi valori, possiamo variare p_0 e p_1 e studiare le probabilità risultanti. Se in particolare poniamo $p_0 = 0$, come avevamo fatto nella discussione precedente, possiamo riportare in un grafico i valori ottenuti e confrontarlo con i grafici analoghi ottenuti in precedenza:



Notiamo che c'è un'ottima corrispondenza con il grafico della soluzione “esatta” ottenuta all'inizio. Naturalmente, ripetendo più volte la procedura si otterranno grafici leggermente diversi e questo può indurre sulle prime una certa confusione; d'altra parte, la sperimentazione diretta (anche se simulata via software) è un modo eccellente per capire nel profondo i concetti della probabilità e come essi si applicano al mondo reale.

Gruppo di lavoro 6: Silvano Rossetto, Stefano Daniele Sarti, Angelo Zanni

Strumenti software

Derive , Javascript

Collocazione temporale

Biennio, se la soluzione è basata su un approccio intuitivo alla probabilità e come applicazione dei prodotti notevoli.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

La soluzione analitica non è semplice ed è probabilmente adatta solo ad un corso di approfondimento. Il processo presenta invece aspetti interessanti per una simulazione in un linguaggio di programmazione.

Tracce della procedura di soluzione

La soluzione completa si trova a pag. 102 del libro di N. Pintacuda *Primo corso di probabilità*, Muzzio, 1983. I risultati sono i seguenti.

Si considera la probabilità $Q(n)$ che il processo sia estinto alla generazione n (successione crescente). Attraverso un ragionamento probabilistico si riesce a determinare una formula ricorsiva che esprime $Q(n+1)$ in funzione di $Q(n)$. La formula ricorsiva e la condizione iniziale $Q(1) = p_0$ permettono di calcolare il limite di $Q(n)$ per n tendente all'infinito.

- 1) Se $p_0 = 0$, ovviamente il processo non si estingue mai; ovvero $Q(n) = 0$ per ogni n ;
- 2) Se $p_0 > 0$, allora
 - se $p_2 \leq p_0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = 1$. I valori $Q(1), Q(2), \dots$ risultano crescenti e si avvicinano indefinitamente a 1; l'estinzione del processo risulta così sempre più certa.
 - se $p_2 > p_0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{p_0}{p_2} < 1$. I valori $Q(1), Q(2), \dots$ risultano ancora crescenti, ma si avvicinano a un limite < 1 .

Il problema si presta ad una interpretazione semplificativa. Si può chiedere semplicemente per quali valori di p_1 e p_2 la popolazione *tende* a crescere, è stabile oppure diminuisce. In questo caso la soluzione si può così esprimere: se $p_1 + 2p_2 > 0$ la popolazione tende a crescere, se $p_1 + 2p_2 = 0$ la popolazione è stabile, se $p_1 + 2p_2 < 1$ la popolazione diminuisce.

Il problema offre l'occasione di scrivere semplici programmi per cercare una conferma *sperimentale* di questa congettura. Mostriamo due esempi scritti con *Javascript*, in una pagina web, e con *Derive*.

La pagina in codice html contiene sia la funzione che genera la nuova popolazione, secondo i parametri del problema, sia la presentazione del testo, dei dati e del

risultato in pagina web. In questo modo, gli studenti possono usare un ambiente per loro familiare e accattivante anche per descrivere e controllare semplici algoritmi. Qui di seguito è descritto il codice della pagina web: la funzione è contenuta tra i tag `<script>` e `</script>`.

```

<html>
<head>
<title>PROBLEMA ITERATIVO</title>
<script>
function CALCOLA(p2_,p1_,n_)
{
var p2=Math.abs(p2_)
var p1=Math.abs(p1_)
var n=Math.abs(parseInt(n_))
var p0=1
var i=0
var g=0
var p=0
p0=1-p1-p2
while (i<n)
  { g=Math.random()
    if (g<p0)
      {}
    else
      {if (g<p0+p1)
        {p=p+1}
      else
        {p=p+2}
      }
    i=i+1
  }
return p;
}
</script>
</head>
<body>
<h3><center>Problema 8</center></h3>
<form name=dati>
<pre>

```

Un individuo può avere un certo numero di discendenti diretti:

con probabilità $p_2 =$ può avere due figli,

$p_1 =$ può avere un figlio e

$p_0 =$ nessun figlio.

In questo modello si possono variare p_2 e p_1 , mentre $p_0 = 1 - p_2 - p_1$.

Data una popolazione di $P(n) = \langle \text{input type=text name=d4 value=100 size=10} \rangle$, la popolazione della generazione successiva sarà di $\langle \text{input type=text name=d5 value=0 size=10} \rangle$.

Il pulsante calcolo produce la nuova generazione, il pulsante aggiorna rende attuale la nuova generazione.

```

</pre>
<input type=button value=calcolo
  onClick="dati.d5.value = CALCOLA(dati.d1.value, dati.d2.value, dati.d4.value)">
<input type=button value=aggiorna
  onClick="dati.d4.value = dati.d5.value">
</form>
</pre>

```

Si osserva che la popolazione tende a salire quando $2 \cdot p_2 + p_1 > 1$, mentre tende a diminuire quando $2 \cdot p_2 + p_1 < 1$.

```

</pre>
</body>
</html>

```

Quando si legge la pagina web con un browser si possono modificare i valori di p_2 e p_1 , mentre p_0 viene calcolato in modo che la somma delle tre probabilità sia 1. Inserendo anche il valore iniziale della popolazione, se ne può osservare l'evoluzione nel tempo.

Mostriamo ora un foglio di *Derive* che ci permette di visualizzare graficamente alcune simulazioni dell'andamento delle popolazioni in condizioni diverse.

```

FINT(a, b, x) :=
  If x ≤ a
#1:      1
      If x < b
        2
        3

#2: PR1(p0, p1) := FINT(p0, p1, RANDOM(1)) - 1
#3: PR2(p0, p1, n) := Σ(VECTOR(PR1(p0, p1), i, 1, n))
#4: PR3(p0, p1, n, m) := ITERATES(PR2(p0, p0 + p1, x),
      x, n, m)

#5: PUNTI(v) := VECTOR([i, v_i], i, 1, DIMENSION(v))
#6: PUNTI(PR3(0.12, 0.76, 1000, 100))

```

La funzione $\text{FINT}(a,b,x)$ (riga #1) restituisce l'intervallo di appartenenza di x rispetto ad a e b . Supposto $0 < a < b < 1$, restituisce 1 se x appartiene $[0, a]$, 2 se appartiene ad $]a, b[$ altrimenti 3.

La funzione $\text{PR1}(p_0,p_1)$ estrae un numero a caso in $[0,1[$ e restituisce l'intervallo di appartenenza rispetto a p_0 e p_1 .

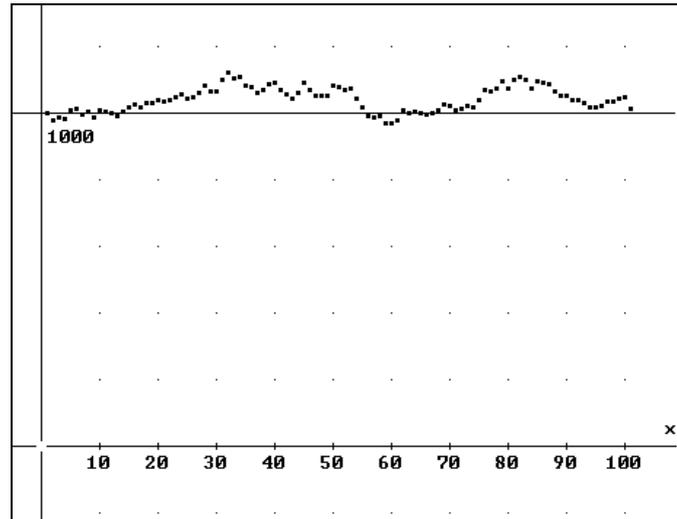
La funzione $\text{PR2}(p_0,p_1,n)$ ripete n volte l'estrazione dell'intervallo. In questo modo ogni estrazione è una simulazione del problema per un individuo stabilendo se

si estingue, sopravvive o da luogo a due individui. La somma del vettore dei risultati conta gli individui della generazione successiva.

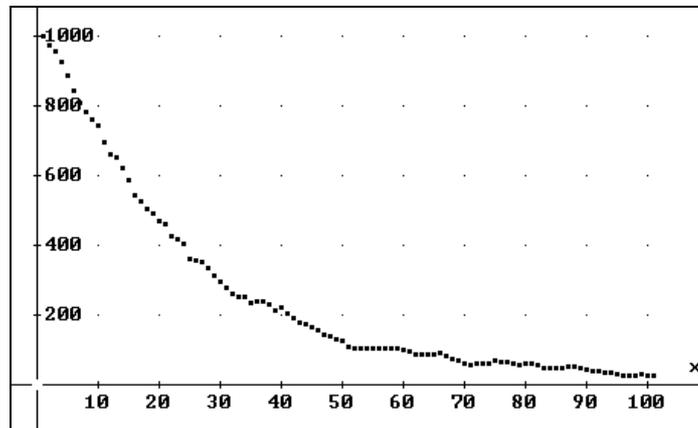
La funzione $PR3(p_0, p_1, n, m)$ simula l'evoluzione nelle condizioni del problema, a partire da una popolazione di m individui per n generazioni.

Con *Derive* si possono anche ottenere dei grafici disegnando i punti di coordinate $[i, v_i]$ del vettore delle generazioni. Pur tenendo conto del fatto che 100 generazioni e 1000 individui non sono ancora numeri *sufficientemente grandi*, i grafici che si ottengono sono significativi.

Due andamenti con $p_0 = 0,12$, $p_1 = 0,76$ e $p_2 = 0,12$ – popolazione *stabile* (I° figura),



con $p_0 = 0,14$, $p_1 = 0,76$ e $p_2 = 0,1$ – popolazione *decescente* (II° figura).



Problema 9

In un piano sono dati tre punti distinti, A , B e F . Al variare del punto F , studiare il luogo del punto P , medio del segmento $A'B'$, derivante dalla seguente costruzione:

- nel semipiano delimitato dalla retta AB e non contenente F , individuare sulla perpendicolare al segmento AF , condotta per A , il punto A' tale che $AA' = AF$;
- nel semipiano delimitato dalla retta AB e non contenente F , individuare sulla perpendicolare al segmento BF , condotta per B , il punto B' tale che $BB' = BF$.

Analizzare inoltre cosa succederebbe al punto P se cadesse il vincolo che i punti A' e B' devono trovarsi nel semipiano opposto a quello che contiene il punto F , rispetto alla retta AB .

Gruppo di lavoro 2: Antonino Anzalone, Roberta Bonarelli, Elena Crespina

Strumenti software

Cabri II

Collocazione temporale

Così come è posto il problema appare complesso, perché occorre dominare diverse configurazioni possibili. Tuttavia le conoscenze necessarie si limitano a quelle della geometria del biennio, dunque può essere proposto a partire dal terzo anno.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Una prima finalità che si può perseguire è relativa all'acquisizione di capacità generali di ricerca e di indagine, e all'attivazione di processi legati al "problem solving"; in secondo luogo si può raggiungere, o consolidare, la capacità di saper porre congetture; infine si può lavorare per far acquisire la capacità di costruire una dimostrazione. In particolare, si può ipotizzare che gli studenti riescano a dimostrare qualche caso particolare, come viene indicato nella procedura di soluzione n. 2.

Nodi concettuali

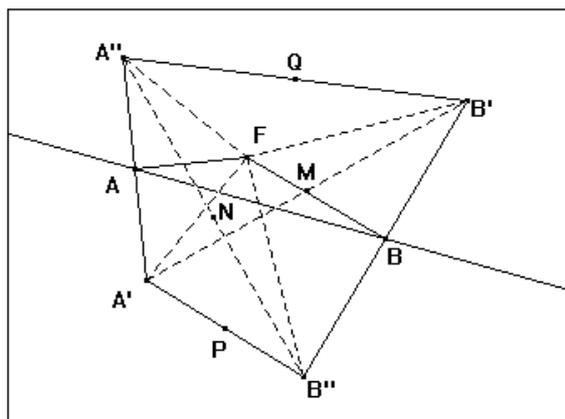
I concetti coinvolti sono quelli relativi ai teoremi di geometria piana e alla congruenza dei triangoli, ma in particolare va prestata attenzione al concetto di rotazione, con riguardo all'orientamento degli angoli.

Approfondimenti e collegamenti:

Il problema può offrire spunto per determinare analiticamente le equazioni della rotazione di centro l'origine e ampiezza $\pi/2$ (positivo o negativo).

Tracce della procedura di soluzione n. 1:

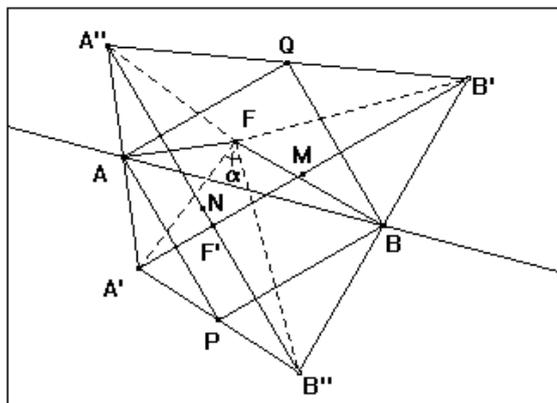
Non tutte le costruzioni che possono essere generate seguendo il testo del problema permettono di studiare il luogo del medesimo punto. Infatti se il segmento AF , o in modo simmetrico BF , forma con la retta AB un angolo acuto, per ottenere i due punti A' e B' entrambi nel semipiano opposto ad F oppure entrambi nello stesso semipiano di F , occorre tracciare angoli retti orientati in verso opposto. Se invece l'angolo è ottuso i due angoli retti devono avere lo stesso verso. Prendendo allora in esame i 4 angoli retti costruibili, si individuano 4 punti (due possibili posizioni per A' e due possibili posizioni di B')¹ e ci si pone nella situazione più generale analizzando il quadrilatero $A'A''B''B'$. Se dunque il triangolo ABF è acutangolo oppure ottusangolo, lo stesso segmento



$A'B'$ risulta essere rispettivamente un lato $A'B''$ o una diagonale $A'B'$ del quadrilatero esaminato e i punti medi dei lati (in figura P e Q) possono essere scambiati con i punti medi delle diagonali (in figura M ed N).

L'esplorazione significativa eseguita con *Cabri* mette in evidenza il fatto che P e Q sono fissi mentre M ed N variano e che inoltre i punti fissi sono i vertici del quadrato avente come diagonale AB .

¹ Le posizioni del punto B' non rispettano il testo del problema



Si passa dunque alla dimostrazione del fatto che, nel caso del triangolo acutangolo, il luogo richiesto si riduce ad un punto.

Qualunque sia la posizione di F , i triangoli $FA'B'$ e $FA''B''$ sono uguali: perché hanno due lati uguali e l'angolo compreso risulta essere pari alla somma (o differenza) di un angolo retto e un angolo α comune.

Dunque le diagonali del quadrilatero in questione sono uguali. Si dimostra poi che sono perpendicolari. Indicando con F' il loro punto di incontro (F' è il simmetrico di F rispetto ad AB), si ha:

$$\alpha = \pi - \pi/2 - \angle FA'B' - \angle FB'A' \quad \text{nel triangolo } A'FB',$$

come pure:

$$\alpha = \pi - \angle FA'B' - \angle FB'A' - \angle F'A'B'' - \angle F'B''A' \quad \text{nel triangolo } A'FB'',$$

dunque

$$\pi/2 = \angle F'A'B'' + \angle F'B''A' \quad \text{cioè il triangolo } A'F'B'' \text{ è rettangolo.}$$

In definitiva, poiché il quadrilatero $A'A''B''B'$ ha diagonali uguali e perpendicolari, congiungendo i punti medi dei suoi lati, si ottiene un parallelogramma che risulta essere un quadrato. Ma nel quadrilatero suddetto sono fissi A e B , che sono i punti medi di due lati opposti, quindi sono fissi anche gli altri due vertici del quadrato, cioè P e Q .

Commenti

E' da sottolineare che nella soluzione di questo problema *Cabri* non dà il luogo cercato, perché il punto F non appartiene ad una curva ma può variare a piacere nel piano. Quello che sembra essere un limite del software risulta in realtà un vantaggio didattico, perché si ha una maggiore spinta verso la ricerca e verso la formulazione di congetture.

Tracce della procedura di soluzione n. 2

Si può pensare di presentare in classe il problema limitandosi al caso in cui A' e B' si trovino nel semipiano non contenente F e l'angolo che AF forma con

AB sia acuto. In tal caso il problema può essere proposto anche nel primo quadrimestre di una terza, quando si ha da poco "abbandonato" la trattazione della geometria euclidea per iniziare quella analitica; la dimostrazione geometrica che segue può essere infatti di aiuto per quella analitica che, in modo semplice, dimostra l'invarianza di P . Individuando inoltre nella costruzione di A' e B' alcune rotazioni di ampiezza $\pi/2$ (positivo o negativo), se ne possono ricavare le equazioni senza avere ancora trattato la goniometria.

Si disegni il segmento AB ed il punto F , si costruiscano i punti A' , B' e P e si proiettino ortogonalmente F , A' e B' sul segmento AB , indicando rispettivamente con H , A'' e B'' tali proiezioni (Figura 1). Si dimostra che $AA'' = BB''$: infatti i triangoli AFH e $AA'A''$ sono congruenti, come i triangoli FBH e $BB'B''$ (e tutti simili fra loro), da cui $AA'' = FH = BB''$ e quindi A'' e B'' sono equidistanti dall'asse di AB . Dalla proiezione parallela di Talete fra le rette $A'A''$, $B'B''$ e l'asse di AB si deduce che P appartiene all'asse di AB .

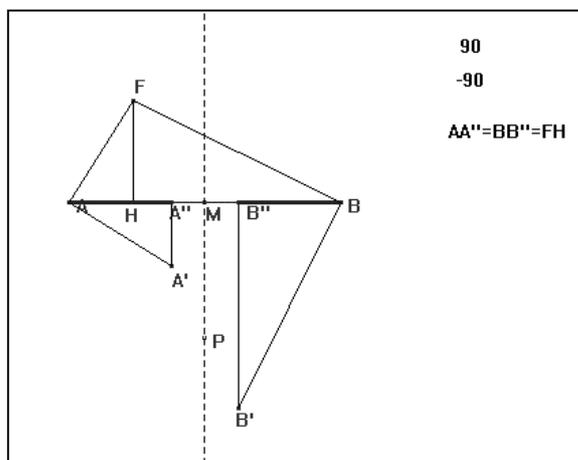


Figura 1

Effettuando poi una rotazione del segmento AB di centro A e ampiezza 90° in modo che il trasformato B_0 di B si trovi nello stesso semipiano di A' e B' (Fig2), si può ripetere la proiezione ortogonale di A' e B' su tale segmento (indicando A'_0 e B'_0 le proiezioni). Si dimostra così che $AA'_0 = B_0B'_0$: infatti $FHA = AA'A'' = AA'A'_0$ e quindi $AH = AA'_0$; $HB = A'_0B_0$ per differenza, $AB'_0 = B'B'' = HB$, da cui $AB'_0 = B_0A'_0$, A'_0 e B'_0 sono pertanto equidistanti dall'asse di AB_0 . In maniera analoga si determina una corrispondenza parallela di Talete quindi P appartiene anche all'asse di AB_0 , appartiene cioè all'intersezione di due assi ed è pertanto un punto fisso.

Gruppo di lavoro 8 : Mariangela Chimetto, Cristiano Dané, Maria Cristina Ipsevich, Franco Nuzzi, Luigi Tomasi

Strumenti software

Cabri II, Derive, TI 92

Collocazione temporale

Il problema si presta ad essere affrontato in momenti diversi e con strumenti diversi, utilizzando metodi classici, oppure - il che è preferibile - le trasformazioni geometriche del piano (isometrie e similitudini), alla fine del biennio o nel triennio successivo. Può essere ripreso nel triennio utilizzando la geometria analitica, oppure il calcolo vettoriale o anche i numeri complessi.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Questo problema è particolarmente adatto ad essere studiato utilizzando le trasformazioni geometriche del piano, che permettono di analizzarlo e risolverlo in modo completo e particolarmente semplice (si ricorda però che semplice non significa necessariamente facile). Si può risolvere anche per via analitica, oppure con i vettori, o i numeri complessi, utili per descrivere la rotazione attorno ad un punto qualsiasi.

In definitiva, si tratta di un problema che potrebbe essere ripreso in momenti diversi, con strumenti diversi. A parere del gruppo di lavoro si tratta però di un problema non facile, che tende anche, per certi aspetti, ad ingannare.

Nodi concettuali

Il nodo concettuale più rilevante che sembra emergere, dal punto di vista matematico, è quello di angolo orientato. Riguardo all'uso dello strumento software è sembrato particolarmente interessante il problema di rappresentare, utilizzando *Cabri-géomètre*, la situazione descritta dal quesito con le parole “ nel semipiano delimitato dalla retta AB e non contenente F ”. Questa richiesta del problema, infatti, costringe a costruire o utilizzare una macro-costruzione di *Cabri* di tipo “logico”. Per ulteriori esempi vedi le macro-costruzioni quelle proposte nel sito di AbraCAdaBRI: <http://www.cabri.net/abracadabri>

Approfondimenti e collegamenti

Il metodo delle trasformazioni nella soluzione di problemi di geometria. Composizione di rotazioni di centro diverso e determinazione del centro della rotazione prodotto nel caso in cui gli angoli non siano opposti. Studio in un caso concreto, particolarmente stimolante, delle rotoomotetie (anche attraverso la rappresentazione con i numeri complessi).

Tracce della procedura di soluzione

Occorre distinguere nella soluzione del problema due situazioni diverse. Si consideri la striscia limitata dalle due perpendicolari a e b al segmento AB condotte rispettivamente per A e per B (vedi Figura 1).

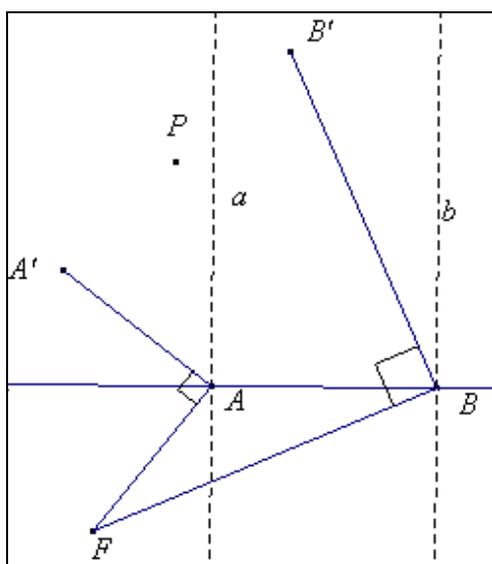


Figura 1

1) Se F è interno a tale striscia, e A' e B' appartengono entrambi al semipiano opposto a quello contenente F (ma anche se appartengono entrambi allo stesso semipiano di F) gli angoli orientati FAA' e FBB' sono entrambi retti, ma hanno verso opposto.

In tal caso, al variare di F , il punto medio P del segmento $A'B'$ non cambia. Questo si dimostra rapidamente con la composizione di isometrie. Infatti consideriamo la rotazione attorno ad A che porta A' su F e poi quella attorno a B che porta F su B' . Si tratta di due rotazioni di un angolo di 90° nello stesso verso attorno a centri distinti. Il loro prodotto di composizione (che porta A' su B') è una rotazione di 180° , cioè una simmetria centrale. E' possibile evidenziare questo fatto anche attraverso una costruzione: prendendo sulle rette a e b , nel semipiano opposto a F , due punti C e D tali che $AC = AB = BD$, si evidenzia la configurazione in figura.

$ABDC$ è un quadrato. I triangoli $AA'C$, AFB , $DB'B$ sono congruenti (per il primo criterio) e i punti C, A', B, B' sono vertici di un parallelogramma. Il punto medio di $A'B'$ è anche il punto medio di BC , quindi non dipende da F .

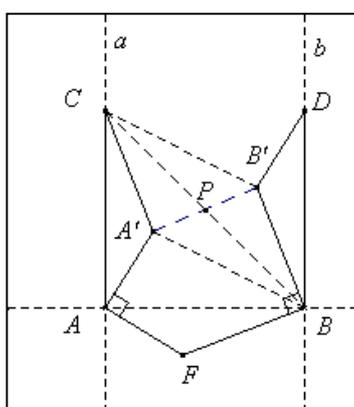


Figura 2

2) Se F non è interno alla striscia, affinché A' e B' siano entrambi sul semipiano opposto a F o entrambi sullo stesso semipiano occorre che gli angoli orientati FAA' e FBB' siano entrambi retti, ma dello stesso verso.

In questo caso non possiamo più utilizzare l'argomentazione usata nel punto precedente, perché la composizione della rotazione che porta A' su F e di quella che porta F su B' essendo il prodotto di due rotazioni di angoli orientati opposti, non è più una rotazione, ma una traslazione (si può controllare che, spostando F , il segmento $A'B'$ viene traslato) e quindi il punto P varia al variare di F , come si può vedere anche dalla costruzione. In questo caso, per poter applicare il primo criterio di congruenza ai tre triangoli, bisogna prendere C e D da parte opposta rispetto ad AB . C, B, B', A' sono ancora vertici di un parallelogramma, di cui però $A'B'$ non è più diagonale, ma un lato.

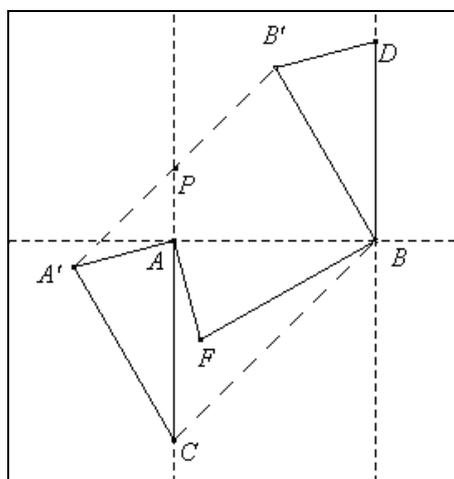


Figura 3

Quale relazione lega ora F a P ? Si può provare a risolvere il problema per via analitica o vettoriale. Il calcolo mostra che chiamato M il punto medio tra A e B , anche MP e MF sono perpendicolari e di uguale lunghezza; questo si può evidenziare anche osservando la figura seguente.

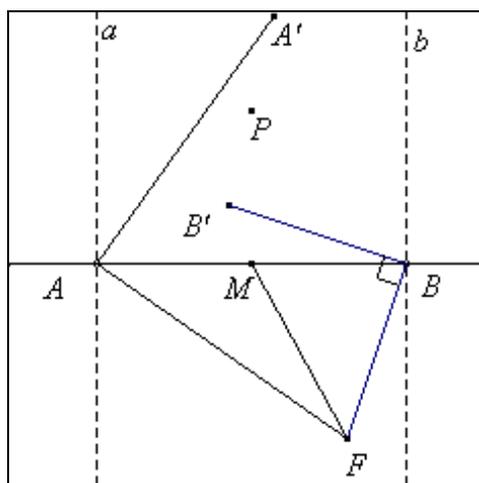


Figura 4

Per una dimostrazione sintetica, ancora una volta ci viene in aiuto il metodo delle trasformazioni geometriche. In questo caso infatti esiste un'unica trasformazione geometrica (una similitudine) che fa corrispondere A ad A' e contemporaneamente B a B' . Si tratta di una rotoomotetia il cui centro, questa volta, è F : la composizione di una rotazione di 45° attorno a F e di una omotetia di centro F e di costante $\sqrt{2}$. La stessa rotoomotetia porterà la retta AB sulla retta $A'B'$ e il punto medio tra A e B nel punto medio tra A' e B' .

Questo significa che, ad esempio, il luogo descritto da P quando F si muove nel quadrante limitato dalle rette a e AB , “in basso a sinistra, esternamente alla striscia”, si ottiene ruotando tale quadrante di un angolo retto in verso orario rispetto a M . Si otterrà così il quadrante superiore sinistro, limitato da r e dalla retta CC' . Analoghi ragionamenti si possono applicare agli altri quadranti.

In definitiva, il luogo cercato è costituito complessivamente dalla parte di piano esterna alla striscia delimitata dalle rette r e s .

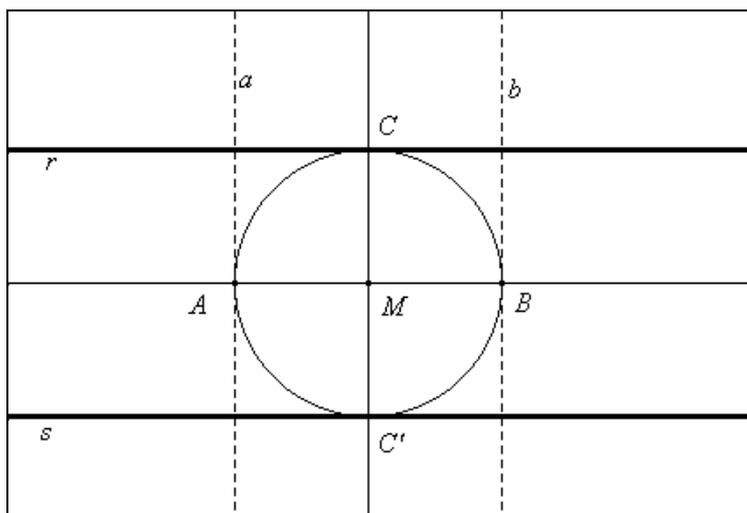


Figura 5

Commenti

Il problema tende ad ingannare, anche per il modo con il quale il testo viene presentato. Infatti l'espressione "il luogo dei punti" indurrebbe, in un primo momento, ad aspettarsi tutto il piano, oppure, nella migliore delle ipotesi, una curva. L'esplorazione condotta tramite *Cabri*, che è dinamica, ma costruita pur sempre a partire da una figura "tipo disegno", sembra suggerire che si tratti di un unico punto. Invece la situazione è un po' più complicata e difficile da esaminare, soprattutto se non si fa uso delle trasformazioni geometriche.

Qualcosa di analogo si ritrova anche analizzando il problema per via analitica o vettoriale (come scegliere A' e B' in modo che appartengano al semipiano opposto a F ?). Si tratta di un problema piuttosto impegnativo: dal punto di vista didattico occorre riflettere se sia opportuno presentarlo ad una classe "così com'è" oppure individuare dei sottoproblemi di quello proposto, suddividendolo nel caso 1) e nel caso 2), oppure sostituendo le informazioni iniziali sui semipiani con quelle sul verso delle rotazioni.

Il problema non è stato sperimentato in classe, ma si ritiene che la sua completa analisi con gli allievi richieda un tempo notevole.

PROBLEMA 11

Raccogliere i seguenti dati: credito scolastico degli allievi nelle classi terminali dello scorso anno scolastico e voto riportato all'esame di stato.

Esaminare se esiste una correlazione tra tali dati.

Gruppo di lavoro 9: Patrizia Berneschi, Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Sergio Zoccante.

Strumenti software

Excel, TI92 Plus

Collocazione temporale:

Il problema è stato proposto in un quarto anno di Liceo Scientifico, ma può ugualmente porsi ad una classe terza. Prerequisiti per la trattazione del problema sono infatti i concetti fondamentali di statistica univariata, che di norma i ragazzi possiedono già dal biennio (es. teoria degli errori). Solo la parte relativa agli approfondimenti richiede una qualche conoscenza di calcolo vettoriale.

Caratteristiche connesse con l'uso del software

Il problema può essere proficuamente trattato con l'uso di un qualsiasi foglio elettronico: in effetti, in questo caso, il software è utilizzato in modo puramente strumentale: abbrevia i tempi di calcolo e fornisce significative rappresentazioni grafiche.

Aspetti didattici

Il problema è stato usato per introdurre i primi elementi di statistica bivariata, su un tema di interesse degli alunni. Per molti è stata la prima volta che esplicitamente veniva analizzata una situazione concreta per ricavarne informazioni statistiche.

Si è anche approfittato dell'occasione (e dell'indisponibilità in quel periodo scolastico delle *TI92*) per riprendere confidenza con *Excel*, che ha mostrato di possedere una vera miniera di formule per il calcolo statistico.

Il lavoro di elaborazione al computer è stato preceduto da un ripasso della statistica univariata, mentre la bivariata è stata affrontata via via che se ne presentava la necessità.

Un'interessante attività è nata dall'osservazione che le formule della deviazione standard e della covarianza assomigliano alle formule del modulo di un vettore e del prodotto scalare. Questo ha permesso di riprendere alcuni algoritmi sviluppati in *Java* per il calcolo vettoriale ed estenderne il campo di applicazione anche alle elaborazioni statistiche, e di fornire una chiara interpretazione geometrica del coefficiente di correlazione (cfr. Approfondimenti).

Nodi concettuali

I principali nodi emersi sono:

- Analisi delle rappresentazioni grafiche delle serie statistiche a 2 variabili;
- Ricerca dei modelli matematici più idonei a rappresentare sinteticamente la serie;
- La retta dei minimi quadrati: teoria; la covarianza;
- La correlazione lineare;
- La previsione in base al modello.

Approfondimenti e collegamenti

Ognuno degli argomenti elencati nel punto precedente si presta ad approfondimento, in particolare il secondo, sulla scelta del modello matematico, e l'ultimo, sulla possibilità di previsione, argomento che in classe non è stato approfondito perché oltrepassa gli ambiti del programma e la disponibilità di tempo.

Come detto, è emerso un collegamento inaspettato con il calcolo vettoriale. Questo è stato possibile perché in classe terza la geometria analitica è affrontata dal punto di vista vettoriale, e quindi la classe conosceva le formule per il calcolo del modulo di un vettore e del prodotto scalare in funzione delle componenti scalari nel caso di dimensione 2 e 3. Inoltre, in quarta alcuni concetti erano stati ripresi in Informatica, in quanto gli spazi vettoriali forniscono un buon esempio di *classe di oggetti*, e tale classe era stata implementata in *Java*. È stato quindi naturale, quando se ne è presentata l'occasione, come accennato, estendere tale classe in modo da poter gestire il calcolo della media di un vettore, della covarianza e della deviazione standard.

La conclusione è stata ancora più interessante, in quanto è risultato che il coefficiente di correlazione lineare $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ tra due variabili statistiche X e Y è formal-

mente identico a $\frac{\vec{X} \circ \vec{Y}}{\|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{Y}\|}$, ossia al coseno dell'angolo tra i due vettori \mathbf{X} e \mathbf{Y}

(formula già incontrata in terza). Risulta quindi facile spiegare (e capire) perché il coefficiente di correlazione varia nell'intervallo tra -1 e 1 ed il suo significato. Ed è così che gli alunni ricordano senza confusione la formula per il coefficiente di correlazione.

Traccia della procedura di soluzione

La soluzione è presentata nei file allegati: il primo analizza in dettaglio i risultati di una classe, il secondo rappresenta con diagrammi a dispersione la situazione dei tre indirizzi della nostra scuola.

Ecco i dati sintetici della classe analizzata (5 Ci):

<i>media cred</i>	<i>media voto</i>		<i>devSt cred</i>	<i>devSt voto</i>	<i>covarianza</i>	
16,6667	87,4286		2,5135	11,2443	25,4762	
RETTE DI REGRESSIONE						
		<i>esami rispetto a credito</i>		<i>credito rispetto a esami</i>		<i>coeff di correlazione</i>
		m= 4,032663		m'= 0,201496		0,9014236
		q= 20,21752		q'= -0,94982		

Si riportano qui alcuni commenti emersi dall'analisi dei vari dati:

Retta di regressione del voto d'esame rispetto al credito:

ci dà i voti che si può presumere di prendere prima degli esami: essi dipendono esclusivamente dal credito scolastico

Retta di regressione del credito rispetto al voto d'esame:

ci dà i crediti che, in mancanza di altre informazioni, si può presumere di avere avuto, conoscendo solo il voto d'esame.

Differenza tra voto d'esame e voto previsto:

viene comunemente interpretata dagli insegnanti come la colonna che rivela l'ingiustizia dell'esame nei confronti dell'impegno scolastico e della valutazione che essi ne hanno dato: è tanto più accettabile quanto più i valori sono in valore assoluto piccoli.

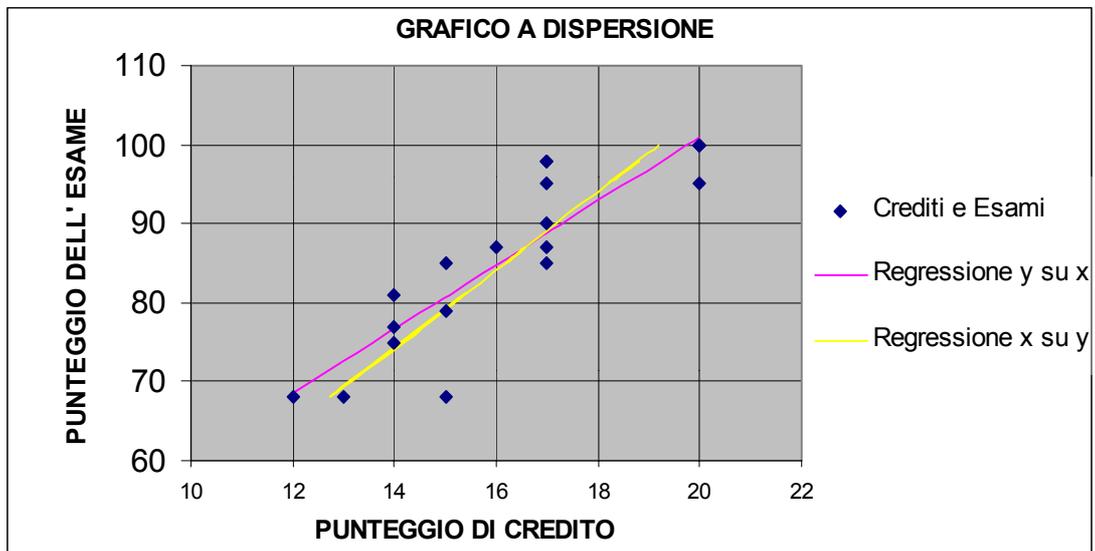
Gli alunni prendono questi numeri con atteggiamento *concorde* con il segno dei numeri stessi.

Differenza tra punteggio di credito e credito presunto in funzione del voto d'esame:

se negativa, è interpretata dagli alunni come prova del fatto che gli insegnanti li hanno sottovalutati durante il corso di studi: avrebbero meritato un maggiore punteggio di credito.

Se positiva, prudentemente tacciono.

Segue il grafico:



Gruppo di lavoro 7: Amelia Di Marco, Rosanna Guidetti, Marilena Sparapani, Gaetano Speranza

Strumenti software

Excel

Collocazione temporale

Il problema si può collocare in un triennio del superiore, in possesso di conoscenze di base di statistica e di analisi di un campione.

Aspetti didattici

I ragazzi traggono il vantaggio che, operando su dati raccolti, sono più interessati ad ottenere il risultato ed affrontano il problema con impegno, cercando di utilizzare al massimo le nozioni apprese. La tematica proposta richiede la conoscenza approfondita dell'argomento, la scelta migliore delle formule atte alla risoluzione e saperle applicare in maniera logica.

Il problema è stato proposto dalla Prof. Rosanna Guidetti in una classe 5^a ITC Programmatori, progetto Mercurio ed è diventato argomento di una tesina d'esame.

Nodi concettuali

Dall'analisi iniziale del problema, gli studenti possono stabilire come trattare l'argomento, le fasi di attuazione e le diverse modalità da seguire che possono essere così riassunte:

- utilizzare per la rielaborazione dei dati le funzioni statistiche predefinite di *Excel* ed esaminare i risultati;
- costruire le formule e ottenere i risultati passo passo, approfondendo le teorie statistiche e costruendo le tabelle e i grafici che portano alla risoluzione del problema.

Commenti

Nella risoluzione del problema, senza l'aiuto del computer, è richiesta allo studente una maggior abilità di calcolo. Il problema è adatto per una quinta, perché i ragazzi sono già in grado di discutere e scegliere il percorso migliore da seguire per raggiungere l'obiettivo prefissato. La discussione è sempre molto utile e produttiva nel corso della realizzazione di un argomento.

Approfondimenti e collegamenti

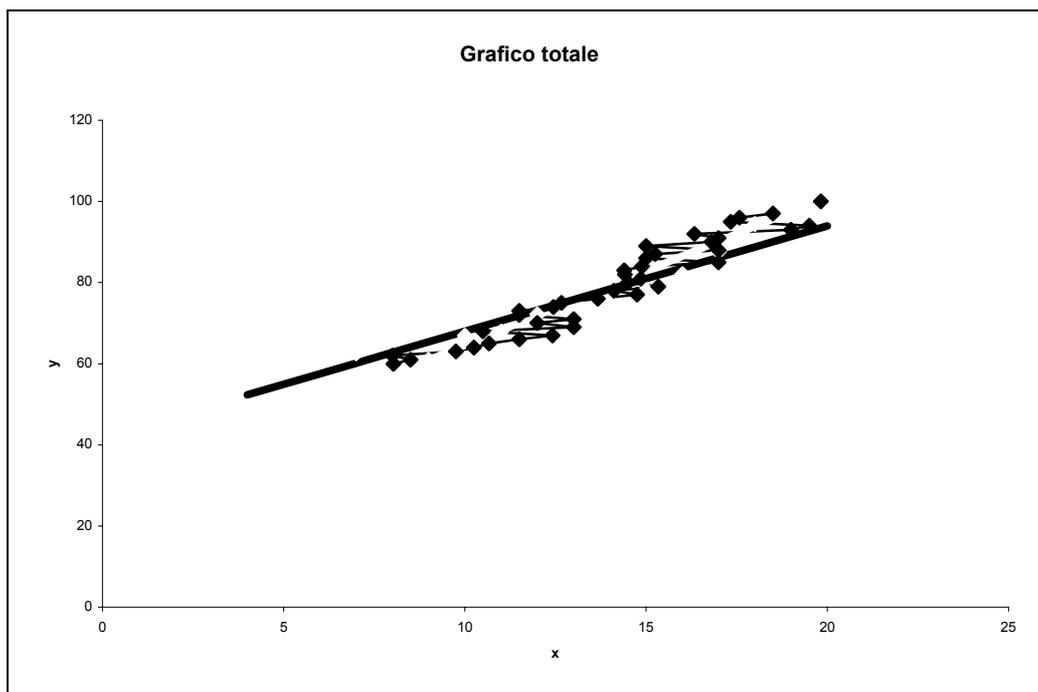
Il problema è stato ritenuto interessante dai ragazzi e per la tematica proposta e per la trattazione che ne è derivata.

Traccia della procedura di soluzione

Assegnate le variabili X : Credito, Y : Voto d'esame, si è costruita la tabella a doppia entrata e si è calcolato il valore medio ponderato di X , di Y ; si è costruita

la nuova tabella con $x - \hat{x}$, $y - \hat{y}$, da cui si è ricavato il valore di b_1 , b_2 e di r . Per la costruzione delle linee di regressione si sono costruite le tabelle \hat{x}, y ; x, \hat{y} ; per le rette si sono usate le formule: $y - \hat{y} = b_1(x - \hat{x})$, $x - \hat{x} = b_2(y - \hat{y})$. Il valore di r è dato dalla $\sqrt{b_1 b_2}$.

Lo studio condotto nella sperimentazione in classe su un campione di 297 ragazzi di Cento (FE) ha portato al risultato di $r = 0,84305$ che si evidenzia dal grafico seguente:



PROBLEMA 13

Di un tetraedro $ABCD$ si conosce il vertice $A(-1,2,-2)$.
Il piano α della faccia ABC passa per l'origine $O(0,0,0)$ del riferimento ortonormato $Oxyz$.

La retta AB è parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La retta che contiene i vertici C e D ha equazione $CD: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 2 + t \end{cases}$.

L'angolo \hat{ABC} è di 45° . La faccia ABD ha la stessa area della faccia ABC .

- Determina l'equazione cartesiana del piano α ;
- determina le coordinate del vertice C ;
- determina le coordinate del vertice B . Scegli la soluzione più lontana dall'origine;
- determina le coordinate del vertice D ;
- verifica che il tetraedro così ottenuto ha tutte le facce congruenti.

Gruppo 4: Paolo Carboni, Domingo Paola, Enrico Pontorno, Gustavo Toninel.

Strumenti software

Mathematica 3.0

Collocazione temporale

Il problema e la sua relativa soluzione richiedono che lo studente abbia acquisito una discreta conoscenza dei concetti di vettore e delle principali operazioni con i vettori in R^2 ed R^3 , di equazione vettoriale e parametrica di una retta in R^2 ed R^3 , di equazione cartesiana di un piano e che sappia come determinare le condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette e piani e tra piani nello spazio.

Tali requisiti ci portano a collocare la presentazione del problema negli ultimi mesi di una classe quarta di un liceo scientifico ad indirizzo P.N.I o Brocca (sempre supponendo che l'insegnante sia riuscito ad introdurre alcuni di questi concetti nella classe terza).

Aspetti didattici

Il problema proposto, come tutti i problemi di geometria solida, non è affatto semplice per uno studente di liceo, anche in considerazione del fatto che richiede l'uso di strumenti matematici (coordinate in R^3 e vettori) che spesso o non vengono affatto trattati dall'insegnante o, se trattati, vengono digeriti con difficoltà dagli studenti.

La difficoltà di rappresentazione di una figura nello spazio e di conseguenza la mancanza di un riscontro grafico, mettono in ulteriore difficoltà gli allievi.

L'uso di *Mathematica* ci permette di risolvere almeno l'ultima delle difficoltà elencate in precedenza.

D'altra parte, come è noto, l'uso di tale software necessita tempi di apprendimento più lunghi, rispetto ad altri strumenti informatici quali *Cabri* e *Derive*, e richiede che si siano create in precedenza le necessarie condizioni di conoscenza.

Questo obiettivo potrebbe essere conseguito, per esempio, mediante corsi di approfondimento, da proporre già alla fine della terza classe e nel primo quadrimestre della quarta per un gruppo ristretto di allievi, che rivelino adeguate attitudini per la matematica e siano interessati a conoscere uno strumento di calcolo simbolico, che potrebbe rivelarsi utile nel corso dei successivi studi universitari.

Il lavoro da fare sul problema proposto potrebbe essere impostato in più momenti successivi:

- proposta del problema alla classe e risoluzione a casa con carta e penna;
- discussione in classe con l'intervento dell'insegnante sulle soluzioni proposte;
- richiesta di intervento degli "specialisti" di *Mathematica* per produrre una soluzione automatica con relativa rappresentazione dei vari oggetti del problema nello spazio cartesiano (essi potrebbero lavorare al pomeriggio, assistiti dallo stesso insegnante);
- visione in classe del lavoro prodotto dagli specialisti.

Nodi concettuali

Dal punto di vista matematico, le difficoltà più rilevanti nascono dall'utilizzo, come già detto, di strumenti di calcolo nuovi, molto potenti, e dalla necessità di lavorare in tre dimensioni con un riferimento cartesiano.

Dal punto di vista informatico le istruzioni usate per la trattazione algebrica e per la parte grafica possono rientrare tra quelle che si dovrebbero impartire in un corso introduttivo su *Mathematica*.

Approfondimenti

Dal punto di vista informatico, una volta risolto il problema, potrebbe essere interessante produrre delle animazioni che sfruttino le potenzialità di *Mathematica* nel rappresentare i grafici in **3D** da diversi punti di vista.

Traccia della procedura di soluzione

Soluzione algebrica:

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta AB , passante per A e parallela al vettore \vec{v} :

$$AB : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2 \end{cases}$$

ed un suo punto $P(-2,3,-2)$ (esso si ottiene dando a t valore 1), determiniamo l'equazione del piano α che passa per O e a cui appartiene la retta AB . Per far ciò è sufficiente risolvere il sistema che si ottiene imponendo che le coordinate dei punti O , A e P verifichino l'equazione $ax+by+cz+d=0$.

La soluzione del sistema si può ottenere automaticamente con *Mathematica* mediante l'istruzione:

```
Solve[{piano $\alpha$  == 0 /. {x -> PO[[1]], y -> PO[[2]], z -> PO[[3]]},  
      piano $\alpha$  == 0 /. {x -> A[[1]], y -> A[[2]], z -> A[[3]]},  
      piano $\alpha$  == 0 /. {x -> PuntoP[[1]], y -> PuntoP[[2]], z -> PuntoP[[3]]}},  
      {a, b, c, d}]
```

Dove piano α , PO, A e P sono variabili che contengono l'equazione cartesiana generica di un piano e le coordinate dei punti O, A e P rispettivamente.

La soluzione è:

$$\text{piano } \alpha: 2x+2y+z = 0$$

A questo punto è possibile trovare le coordinate del punto C intersecando il piano α con la retta CD . Con *Mathematica* possiamo ottenere automaticamente le coordinate di C con le seguenti istruzioni:

```
Solve[  
  piano $\alpha$  == 0 /. {x -> rettaCD[[1]], y -> rettaCD[[2]], z -> rettaCD[[3]]}, t];  
PC = rettaCD /. Flatten[sol]
```

dove *rettaCD* è una variabile che contiene le equazioni parametriche della retta CD .

La soluzione è: $C(-2,2,0)$.

Con i dati sin qui ottenuti siamo in grado di determinare le coordinate di B sfruttando le seguenti condizioni:

- 1) l'appartenenza di B alla retta AB ;
- 2) l'ampiezza dell'angolo $ABC = 45^\circ$.

Con *Mathematica* avremo:

```
vettBA = A - rettaAB;  
vettBC = PC - rettaAB;  
sol =  
  Solve[vettBA . vettBC == Modulo[vettBA] * Modulo[vettBC] * Cos[ $\pi/4$ ], t]
```

a cui soluzione è:

{{t → -1}, {t → 0}, {t → 2}}

Sostituendo tali valori di t nell'equazione parametrica della retta AB ricaviamo:

$$B_1(0,1,-2); B_2(-1,2,-2) = A; B_3(-3,4,-2)$$

Scartato B_2 resta da individuare tra B_1 e B_3 quale sia il punto che stiamo cercando.

Poiché il problema dice di scegliere il punto B più lontano dall'origine, non resta che confrontare le distanze B_1O e B_3O .

Poiché $B_1O = \sqrt{5}$, mentre $B_3O = \sqrt{29}$ la scelta ricade su B_3 ; pertanto:

$$B(-3,4,-2).$$

Per determinare l'ultimo vertice del tetraedro (D), innanzitutto, calcoliamo l'area della faccia ABC . Con *Mathematica* scrivendo:

```
AreaABC = 1 / 2 * (dist2P[A, B] * dist2P[B, C] * Sin[π / 4])
```

si ottiene 3.

A questo punto, sapendo che D appartiene alla retta CD e che la faccia ABD ha la stessa area della faccia ABC , possiamo determinare le coordinate del punto D mediante le seguenti istruzioni:

```
vettBD = rettaCD - B;  
vettBA = B - A;  
sol = Solve[1 / 2 * (Modulo[vettBD] * Modulo[vettBA] * Sqrt[  
1 - ((vettBD . vettBA) / (Modulo[vettBD] * Modulo[vettBA])) ^ 2]) ==  
AreaABC,  
t]
```

da cui si ottengono i seguenti valori di t :

{{t → -4}, {t → -2}}

che, sostituiti nell'equazione parametrica della retta CD ci conducono a:

$$D_1(-4,2,-2) \text{ e } D_2(-2,2,0) = C \quad \text{Scelto } D_1 \text{ si ha: } D(-4,2,-2).$$

Per completare il problema resta ancora da verificare che il tetraedro ha tutte le facce congruenti. Tale verifica diventa semplice con *Mathematica* calcolando le lunghezze di tutti gli spigoli del tetraedro.

Realizzazione delle figure 3D

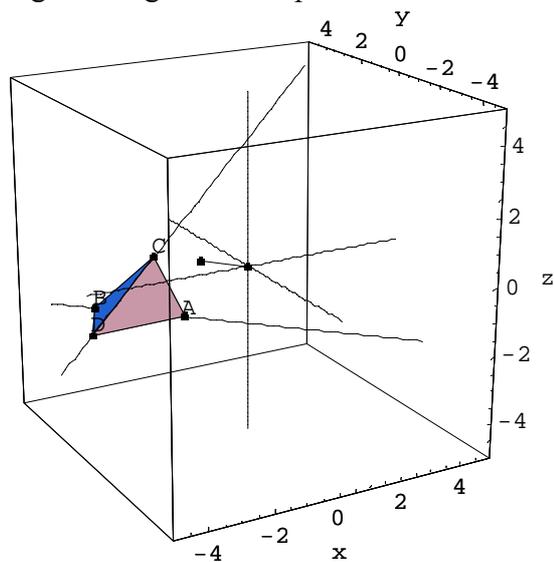
La realizzazione delle figure tridimensionali con *Mathematica* si ottiene sfruttando le notevoli potenzialità delle istruzioni per la grafica 3D in dotazione al programma. Ne riportiamo in particolare una, quella con la quale si ottiene la rappresentazione del tetraedro:

```

g9 = Graphics3D[Polygon[{A, B, PC, A}]];
g10 = Graphics3D[Polygon[{A, PC, PD, A}]];
g11 = Graphics3D[Polygon[{B, PC, PD, B}]];
g12 = Graphics3D[Polygon[{A, B, PD, A}]];
Show[g1, g2, g3, g4, g6, g7, g8,
g9, g10, g11, g12, ViewPoint -> {-2.250, -4.000, 1.580},
DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> 1,
PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}, {-5, 5}}]

```

che dà luogo alla seguente figura nello spazio:



PROBLEMA 14

Un paravento, costituito da due pannelli rettangolari identici con base di lunghezza l , viene spiegato verticalmente attorno ad un angolo retto di un locale in modo che l'ambiente separato delimitato dal paravento e dalle due pareti sia di area massima. Guardando la situazione "dall'alto" si vedrà ad esempio il quadrilatero $OAPB$ seguente:

- a) Indichiamo con d la distanza tra A e B . Che valore massimo può avere d ?
 - b) Fissata una certa distanza d tra A e B , dimostra che l'area del quadrilatero $OAPB$ è massima se $|OA| = |OB|$. (Consiglio: poiché in questo caso l'area del triangolo APB è costante, l'area del quadrilatero dipende unicamente dall'area del triangolo rettangolo OAB).
 - c) Sia dunque $|OA| = |OB|$. Determina, in funzione di l , la misura del segmento OA in modo che l'area del quadrilatero $OAPB$ sia massima.
(Consiglio: sfrutta la congruenza dei due triangoli OAP e OPB e usa come variabile l'ampiezza α dell'angolo OAP).
- (Maturità scientifica del Liceo di Lugano 2. Giugno 1999)

Gruppo 4: Paolo Carboni, Domingo Paola, Enrico Pontorno, Gustavo Toninel.

Strumenti software

Mathematica 3.0

Collocazione temporale

Il problema è, di norma, proponibile in classi che abbiano conoscenza degli strumenti della trigonometria e dell'analisi, quindi in linea di massima nelle ultime classi del triennio.

Tuttavia la natura del problema è tale da potere essere proposto anche alla fine del biennio, in classi particolarmente vivaci e recettive. Per la soluzione bastano infatti conoscenze di geometria ed algebra elementare (proprietà dei triangoli, teorema di Pitagora, radicali ed equazioni di II grado), che bisogna però padroneggiare con disinvoltura.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Interessante la duplice possibilità di affrontare il problema sia dal punto di vista sintetico che analitico.

Nessuna sperimentazione in classe.

Nodi concettuali

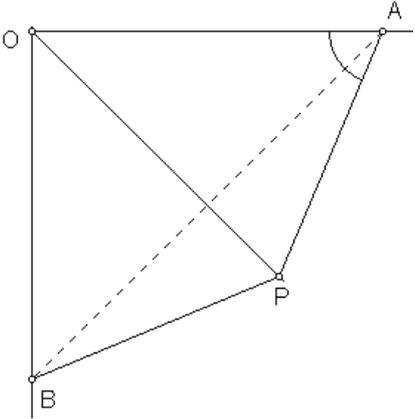
Lettura ed interpretazione corretta del testo. Geometria del triangolo. Condizioni di esistenza, massimi e minimi.

Approfondimenti e collegamenti

Il problema potrebbe essere proposto anche in una classe di biennio, come applicazione dell'algebra alla geometria. Prerequisiti sono: geometria del triangolo, teorema di Pitagora, radicali ed equazioni di II grado (Figura 2).

Tracce della procedura di risoluzione

La procedura è descritta nel notebook. Di seguito due variazioni sulla soluzione del quesito c).

<p><i>Soluzione "semi-sintetica"</i></p> <p>c) Il triangolo OAP, di base costante l, avrà area massima se è isoscele, cioè se $OP=OA$, da cui $\alpha=67.5^\circ$ (Figura 1). Quindi $\frac{l}{2} = OA \cos \alpha$ e $OA = \frac{l}{2 \cos 67.5^\circ}$</p>	 <p>Figura 1</p>
---	---

Soluzione algebrica.

Ovviamente valgono le stesse premesse dell'altra soluzione in merito al fatto che il triangolo AOP è isoscele e quindi $OP \perp AB$. Con riferimento alla Figura 2 si ha: $OA = OP = x$, $OY = AY = y$, $AP = l$, $YP = x - y$. Allora risulta $x = \sqrt{2}y$ e dal teorema di Pitagora applicato al triangolo APY: $y^2 + (x - y)^2 = l^2$. Eliminando y dal sistema

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}y \\ 2y^2 + x^2 - 2xy = l^2 \end{cases}$$

si ottiene la soluzione $x = OA = \frac{l}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

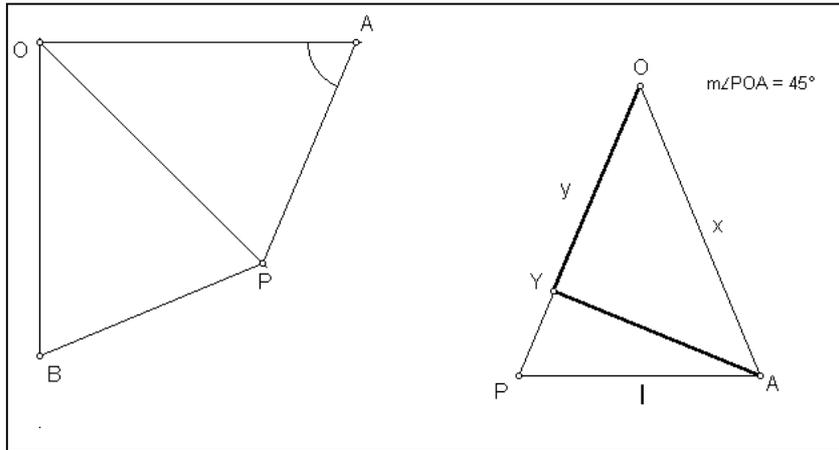


Figura 2

Gruppo di lavoro 2: Antonino Anzalone, Roberta Bonarelli, Elena Crespina

Strumenti software

Cabri II, Derive 4

Collocazione temporale

Il problema può essere affrontato dopo aver trattato la trigonometria e lo studio di funzioni.

Negli ITG pertanto si può inserire verso la fine del quarto anno.

Aspetti didattici e sperimentazione in classe attuata da Roberta Bonarelli

L'aspetto interessante ed innovativo è stato fornito dall'approccio ad un problema di massimo tramite *Cabri* e quindi attraverso un modello geometrico che, pur non fornendo risultati precisi, consente di "toccare" il problema e far acquisire maggiore consapevolezza su procedure analitiche che spesso rimangono sterili. Spesso infatti nel risolvere problemi di questo tipo, si realizza un'abitudine quasi meccanica a ricercare immediatamente i valori in corrispondenza dei quali la derivata si annulla.

Il testo, di facile comprensione per ragazzi di un ITG, mi ha offerto lo spunto per introdurre problemi di massimo o di minimo, argomento che non sempre riesco ad includere nella programmazione delle classi quarte ad indirizzo tradizionale dell'ITG "Pacinotti" di Bologna, ove attualmente insegno. Il problema è stato proposto ad un gruppo (5 - 6) di alunni del quarto anno interessati e con buone competenze, alla fine di questo anno scolastico, mentre la parte restante della classe era impegnata in attività di recupero. Il lavoro si è svolto interamente in laboratorio, in due incontri di quasi due ore ciascuno ed il gruppo di ragazzi aveva a disposizione un computer con buone potenzialità.

Per la risoluzione del problema è stata seguita la traccia fornita, utilizzando in prima battuta *Cabri* per rappresentare le varie situazioni problematiche in modo dinamico, "avvicinarsi" sia con il disegno che con le misure di questo software ai risultati cercati, individuare le variabili indipendenti, dipendenti e le costanti e determinare le limitazioni per le variabili. Successivamente con *Derive* sono stati svolti alcuni calcoli e rappresentate le funzioni di cui si richiedeva il massimo. Sono inoltre stati confrontati i risultati ottenuti con i due software.

E' stato necessario fornire alcuni suggerimenti, sia per la costruzione delle figure che per alcuni calcoli che sono stati effettuati senza l'uso del software. Ritengo comunque che i ragazzi abbiano svolto il lavoro con buona consapevolezza dei risultati che man mano andavano ottenendo.

Nodi concettuali

- Costruzione di particolari figure con *Cabri*.
- Relazione fra gli elementi indipendenti in *Cabri* e le incognite scelte.
- Variabili indipendenti, dipendenti e costanti.
- Concetto di massimo e minimo di una funzione.

Approfondimenti e collegamenti

Questo problema mi ha permesso di :

- riprendere *Cabri* in una quarta e utilizzarne anche l'aspetto analitico,
- rivedere argomenti di geometria euclidea e di trigonometria (importanti in un ITG),
- analizzare funzioni goniometriche che altrimenti non verrebbero trattate,
- approfondire il concetto di funzione come modello della dipendenza.

Tracce della procedura di soluzione

Le figure di *Cabri* sono state inserite in un opportuno sistema di riferimento per poter confrontare i risultati ottenuti analiticamente con "carta e penna" o tramite *Derive*. Seguendo la traccia del testo sono stati seguiti i seguenti passi:

- a) E' stata costruita una prima figura (Figura 1) in modo che, scelto arbitrariamente un segmento di lunghezza l , i due segmenti consecutivi di lato l abbiano gli estremi variabili A e B vincolati a muoversi sui due semiassi positivi. Facendo variare tali estremi si possono dedurre i valori che può assumere la distanza $AB = d$ in funzione di l :

$$d = 0 \text{ se } A = B = 0,$$

$$d = 2l \text{ se i segmenti diventano adiacenti.}$$

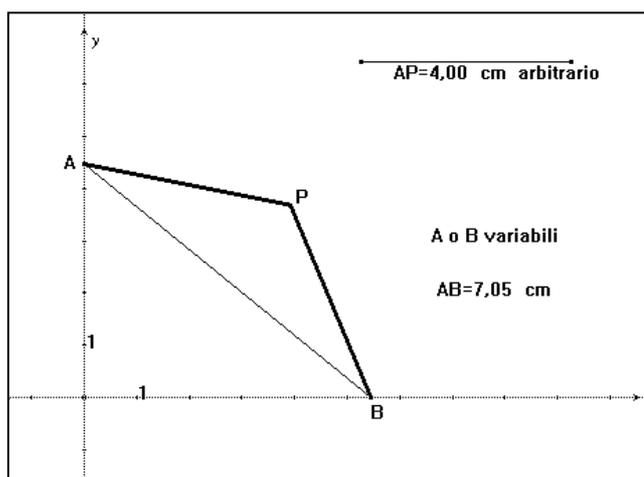


Figura 1

- b) E' stata costruita la Figura 2 in cui viene fissata anche la distanza $AB = d$. Al variare di A , il triangolo APB mantiene costante la sua area mentre varia quella del triangolo ABO , avendo osservato inoltre come la posizione di B dipenda da quella di A , quindi l'ascissa di B dipende dall'ordinata di A :

indicando con x la misura di OA e utilizzando il teorema di Pitagora, si determina $OB = \sqrt{(d^2 - x^2)}$, in funzione di x . L'area del triangolo rettangolo risulta essere

$$A(x) = \frac{x\sqrt{(d^2 - x^2)}}{2} \text{ con } 0 \leq x \leq d.$$

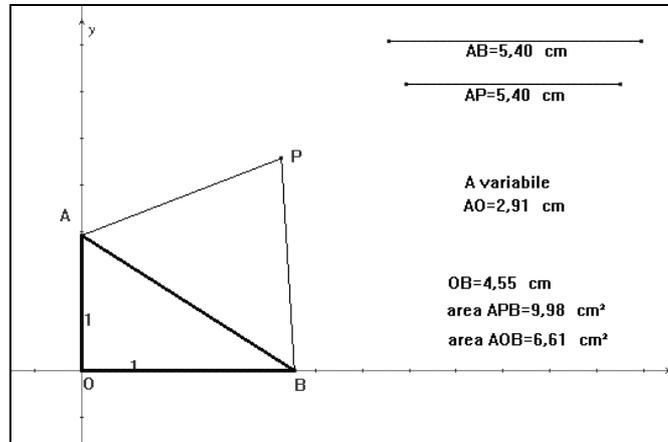


Figura 2

Utilizzando *Derive* è stata calcolata la derivata prima per la determinazione del punto di max: $x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$. La relazione fra il cateto x e l'ipote-

nusa d ha permesso di dedurre che l'area è massima quando il triangolo rettangolo AOB è isoscele.

Utilizzando *Derive* è stato disegnato il grafico della funzione $A(x)$, fornendo come valore numerico di d , la misura del segmento AB che era stato scelto arbitrariamente in *Cabri*. Sono stati confrontati i valori dell'area determinati da *Cabri* con quelli sul grafico della funzione in *Derive* facendo variare il punto A in *Cabri* e il quadratino sul grafico in *Derive* (Figura 3).

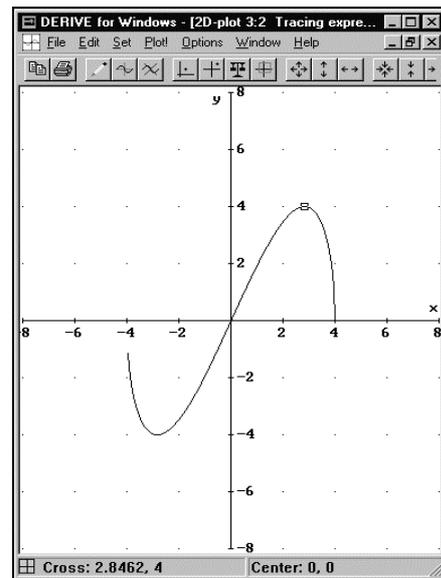
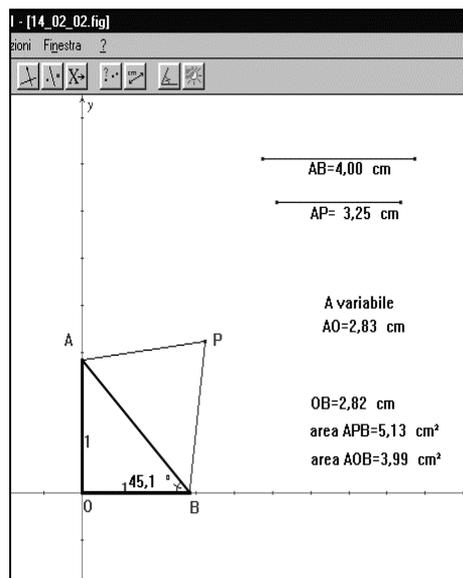


Figura 3

- c) E' stata quindi costruita la Figura 4, tenendo conto che $OA=OB$, $AP=BP$, quindi O e P appartengono all'asse di AB e quindi P appartiene alla bisettrice del vertice O nel triangolo isoscele AOB . Si determinano due deltoidi $OAPB$ e $OA'PB'$ ma solo il primo viene preso in esame essendo la sua area sempre maggiore.

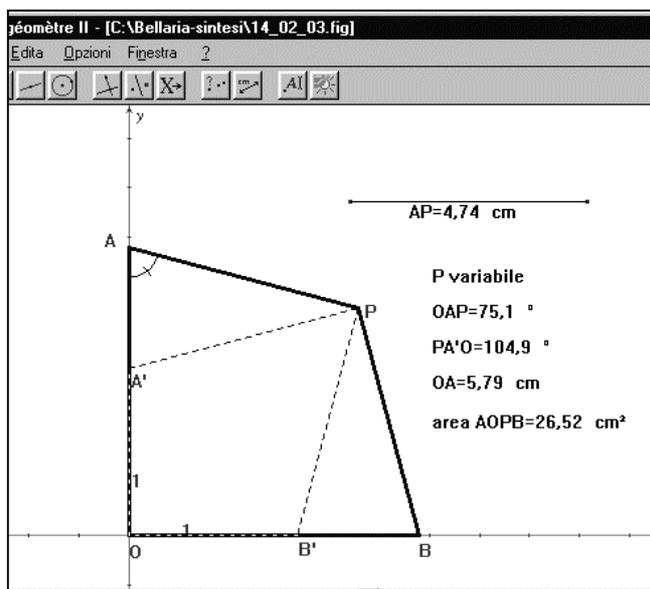


Figura 4

Utilizzando il suggerimento del testo si è scelta come incognita x l'angolo OAP , con $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ed è stato sufficiente lavorare sul triangolo OAP , essendo OPB congruente ad esso.

Facendo variare P , varia l'angolo x , il segmento AO e quindi l'area di

$$AOP = \frac{AO \cdot OP}{2} \sin x. \text{ Dal teorema dei seni si è ricavato } AO =$$

$l(\cos x + \sin x)$, da cui l'area

$$B(x) = l^2 \sin x (\cos x + \sin x).$$

Anche in questa fase si è ricorso a *Derive* per determinare il grafico di $B(x)$ e individuare il massimo cercato. Si è fissato per l la stessa misura del segmento AP , scelto arbitrariamente in *Cabri* e sono stati, anche in questo caso confrontati i valori ottenuti con i due software (Figura 5).

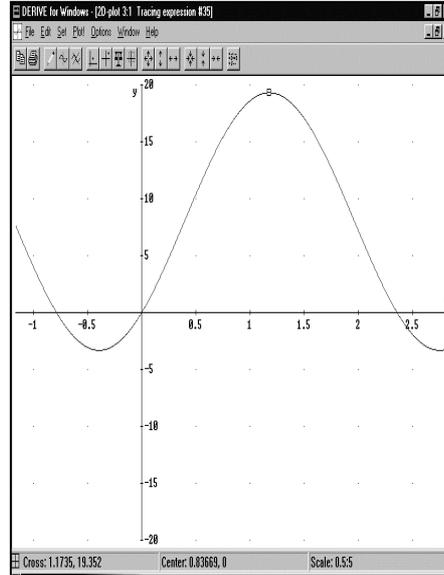
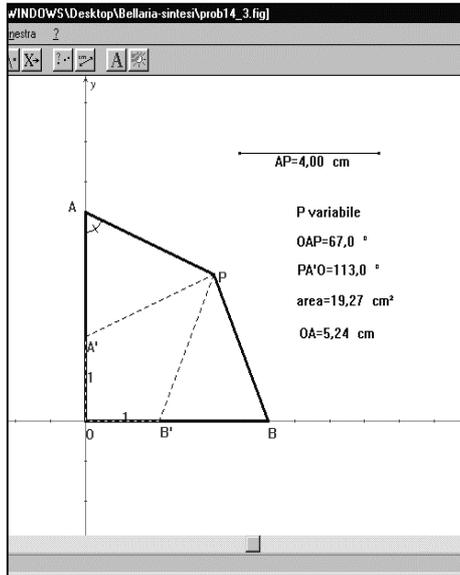


Figura 5

Successivamente si è utilizzato *Derive* per derivare la funzione $B(x)$:

$B'(x) = l^2(\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x) = l^2(\sin 2x + \cos 2x)$ e calcolare il punto di massimo

$$x = \frac{\pi}{8} = 67,5^\circ.$$

Sostituendo tale valore nella formula di OA si ricava la misura richiesta :

$$OA = l\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)}.$$

PROBLEMA 15

Costruiti, esternamente al triangolo ABC , i triangoli equilateri ABC' , BCA' , CAB' , si mostri che:

- a) I segmenti AA' , BB' , CC' sono congruenti
- b) Le rette AA' , BB' , CC' passano per uno stesso punto O
- c) Se il punto O è interno al triangolo ABC , la somma delle sue distanze dai vertici A , B , C è uguale alla lunghezza comune dei segmenti AA' , BB' , CC' .

Gruppo di lavoro 8: Mariangela Chimetto, Cristiano Dané, Maria Cristina Ipsevich, Franco Nuzzi, Luigi Tomasi

Strumenti software

Cabri II

Collocazione temporale

Il problema può essere presentato nel secondo anno di scuola superiore e ripresentato anche nel triennio per eventuali approfondimenti, ad esempio per presentare il “teorema di Napoleone”, che è quasi equivalente al problema stesso, oppure per introdurre un celebre problema di minimo che si può risolvere senza l’uso dell’analisi matematica (problema di Fermat). Il problema, quindi, è molto ricco di suggestioni e si presta particolarmente ad essere risolto con l’uso delle trasformazioni geometriche del piano; può quindi essere ripreso in diversi momenti e a diversi livelli di approfondimento. L’uso di un software di geometria dinamica come *Cabri* non fa che esaltare ed ampliare ulteriormente la valenza didattica di questo classico problema.

Aspetti didattici

Uno degli obiettivi che ci si propone è l’applicazione di argomenti studiati nel corso del biennio ed in particolare delle isometrie del piano. Si considerano come prerequisiti i seguenti argomenti: somma degli angoli interni di un triangolo; criteri di congruenza dei triangoli; angoli al centro e alla circonferenza; poligoni inscritti in una circonferenza.

Il lavoro in classe potrebbe essere sviluppato nel modo seguente:

- a) presentazione del problema da parte dell’insegnante;
- b) riepilogo dei prerequisiti, con eventuale discussione e chiarimenti;

- c) lavoro a gruppi per la risoluzione del problema anche con il supporto di *Cabri*;
- d) realizzazione conclusiva;
- e) approfondimenti ed ulteriori sviluppi (teorema di Napoleone; problema di Fermat,...).

In appendice si presenta anche una soluzione del problema con l'uso dei numeri complessi; è chiaro che tale soluzione potrà essere presentata soltanto se la classe ha nel suo percorso di matematica lo studio dei numeri complessi ad un livello significativo; in questo caso occorre una buona conoscenza del legame tra geometria e piano complesso ed in particolare tra le trasformazioni geometriche e le operazioni con i numeri complessi.

Nodi concettuali

Nello studio di questo problema si deve prestare particolare attenzione alle proprietà della figura, man mano che si aggiungono elementi alla costruzione, per ricavare informazioni utili alla dimostrazione successiva; è particolarmente significativo l'aspetto di 'scoperta' legato all'uso del software *Cabri*, che costituisce anche un'occasione per rivedere in modo dinamico ed interattivo alcuni argomenti, ed in particolare il tema delle trasformazioni geometriche del piano (le isometrie).

Approfondimenti e collegamenti

Il problema può essere ripreso nel triennio e risolto, per quanto riguarda l'ultimo punto, anche per via trigonometrica; fornisce anche l'opportunità di un ripasso di argomenti del biennio, che spesso vengono dimenticati e sono invece fondamentali nella risoluzione di diversi tipi di problemi; possono essere fatte osservazioni anche sulla similitudine e su alcuni teoremi connessi.

Questo problema, si presta ad alcuni approfondimenti che sono molto importanti dal punto di vista storico.

Problema di Fermat (1601-1665) o di Torricelli (1608-1647)

Dato il triangolo ABC, trovare il punto O tale che la somma delle sue distanze da A, B, C sia minima.

Se il triangolo non ha alcun angolo che supera 120° , si vede subito che il punto O coincide con il punto di incontro di AA' , BB' e CC' di cui all'enunciato iniziale. Il punto O si chiama anche *punto di Fermat* (o di *Torricelli*) e "vede" ciascun lato del triangolo secondo un angolo di 120° .

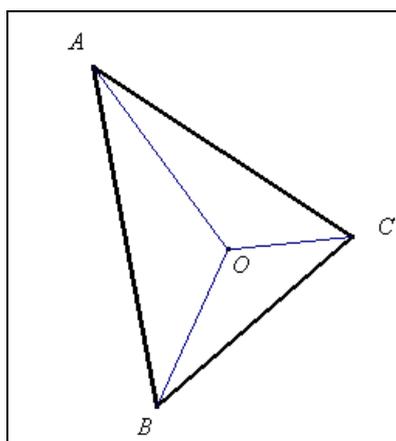


Figura 1. Punto di Fermat

Nel caso in cui il triangolo abbia un angolo, ad esempio $\hat{A}CB$, uguale a 120° , il punto di Fermat coincide con il vertice C stesso di tale angolo.

Teorema di Napoleone

Un altro approfondimento collegato a questo problema è attribuito a Napoleone Bonaparte (1769-1821), il quale aveva un interesse notevole per la matematica. L'enunciato del cosiddetto "teorema di Napoleone" è il seguente:

Dato un triangolo, si costruisce all'esterno di ogni lato un triangolo equilatero. Le circonferenze circoscritte ai tre triangoli equilateri costruiti sui lati del triangolo passano tutte per uno stesso punto e i loro centri sono, a loro volta, i vertici di un triangolo equilatero.

Si osserva che il punto di incontro delle tre circonferenze non è altro che il punto di Fermat. Il teorema di Napoleone rimane valido anche se i triangoli equilateri si costruiscono non all'esterno del triangolo; anche in questo caso i centri dei triangoli equilateri formano a loro volta un triangolo equilatero.

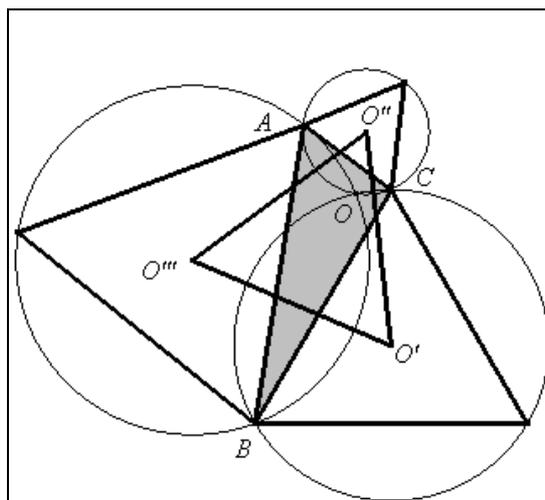


Figura 2 Teorema di Napoleone

Traccia della procedura di soluzione

Per la risoluzione si fa riferimento alla Figura 3.

- a) Si prendono in considerazione i triangoli ABA' e CBC' : essi sono congruenti per il I criterio di congruenza perché AB è congruente a BC' , BC è congruente ad $A'B$ e l'angolo $\hat{A}BA'$ è congruente all'angolo $\hat{C}BC'$. Ne segue che tutti gli elementi dei due triangoli sono congruenti, in particolare lo sono gli angoli $\hat{B}AA'$ e $\hat{B}C'C$.

Lo stesso vale per le altre due coppie di triangoli che si formano in modo analogo: $AB'B$ e $AC'C$, $AA'C$ e $BB'C$.

Per dimostrare la congruenza dei triangoli ABA' e CBC' si può anche utilizzare una rotazione attorno al punto B (vedi Figura 3).

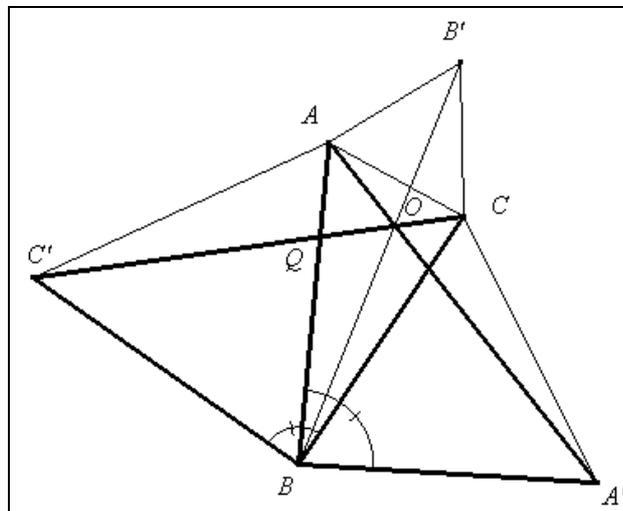


Figura 3

- b) I triangoli AOQ e $C'QB$ sono simili perché sono congruenti gli angoli $\hat{B}AA'$ e $\hat{B}C'C$ (vedi il punto precedente), gli angoli $\hat{B}QC'$ e $\hat{O}QA$ perché opposti al vertice. Ne consegue che anche la congruenza tra loro degli angoli $\hat{C}'BA$ e $\hat{C}'OA$, entrambi di 60° .

I punti A e C' “vedono” il segmento BO sotto lo stesso angolo; quindi O sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo BAC' ; lo stesso vale per i triangoli CAB' e BCA' . Quindi O “vede” i lati del triangolo sotto angoli di 120° . Ne segue che le rette AA' , BB' e CC' passano tutte per il punto O .

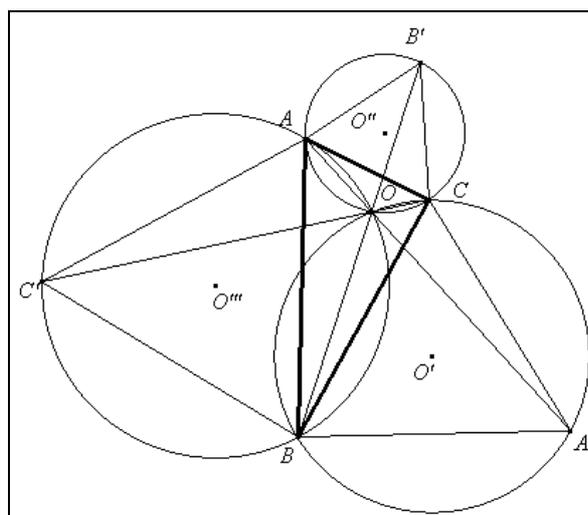


Figura 4

- c) Prendendo in considerazione uno dei tre quadrilateri inscritti nelle circonferenze, formati dal punto O con i tre triangoli equilateri, ad esempio $OA'BC$, si può dimostrare che

$$\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA'}$$

Per dimostrarlo, si riporta OC su OA' e si ottiene il triangolo equilatero OCH ; poiché risultano congruenti i triangoli $A'CH$ e OBC , si ha la tesi, ovvero che:

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

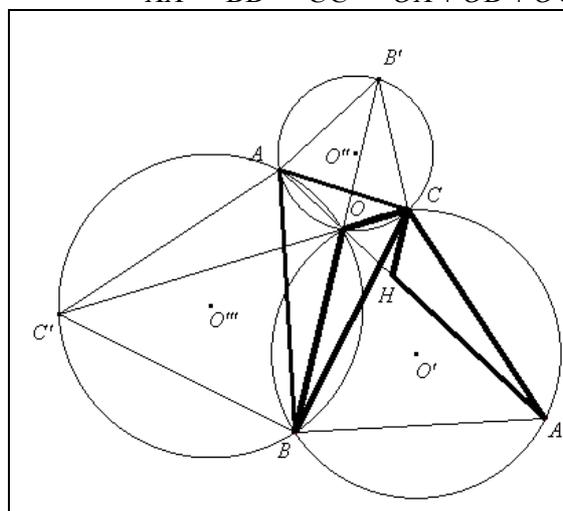


Figura 5

Procedura di costruzione della figura in *Cabri*:

- si costruiscono i tre punti A, B, C e si disegna il triangolo;
- si disegnano i tre triangoli equilateri ABC', ACB', BCA' ;
- si congiunge A con A' , B con B' , C con C' ;
- si tracciano le tre circonferenze circoscritte ai tre triangoli equilateri;

- e. per la dimostrazione dell'ultimo punto si fa ruotare di 60° il segmento OC intorno al punto O .

Appendice

Soluzione del problema nel piano complesso

Si propone qui una soluzione algebrica del problema, con l'uso dei numeri complessi. Sembra importante, soprattutto in classi particolarmente preparate, far vedere le applicazioni dei numeri complessi anche in campo geometrico.

E' chiaro che sono necessari dei prerequisiti riguardanti le operazioni in \mathbb{C} e loro significato geometrico che sembrano proponibili in una classe quarta liceo scientifico. Il tutto serve ad integrare la soluzione sintetica del problema, tanto più che oggi ci sono dei software dove è possibile lavorare in \mathbb{C} disegnando i punti nel piano di Gauss. Considerato il triangolo equilatero fondamentale di vertici $1, \omega,$

ω^2 vale la seguente uguaglianza: $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, dove $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\omega^3 = 1$ (Figura 6).

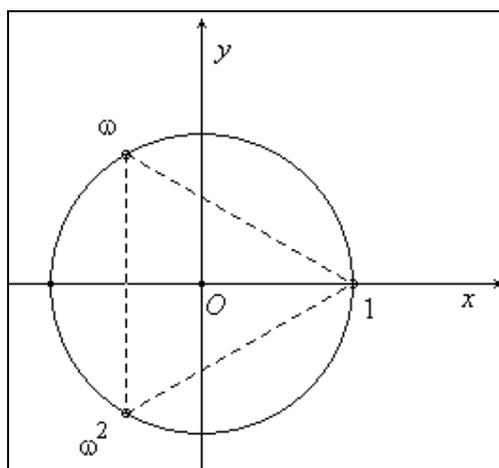


Figura 6

Inoltre, in riferimento alla figura 7, anche per i tre triangoli ABC', ACB', BCA' valgono le seguenti uguaglianze:

$$w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0 \quad (1)$$

$$z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0 \quad (2)$$

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0 \quad (3)$$

dove i vettori sono applicati nell'origine O .

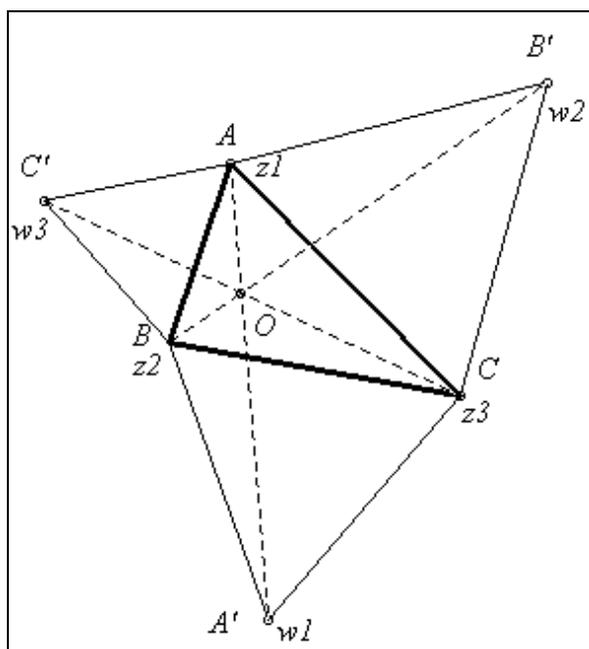


Figura 7

Ora poiché $\omega^3=1$, moltiplicando la (3) per ω si ottiene:

$$\omega z_2 + \omega^2 z_1 + w_3 = 0 \quad (3')$$

Sottraendo dalla (2) la (3') si ha la relazione:

$$z_3 - w_3 = \omega (z_2 - w_2)$$

Lavorando in modo analogo con le relazioni (1), (2) e (3), si ottengono le seguenti relazioni:

$$z_1 - w_1 = \omega^2 (z_2 - w_2) \quad (4)$$

$$z_1 - w_1 = \omega (z_3 - w_3) \quad (5)$$

analoghe alla precedente:

$$z_3 - w_3 = \omega (z_2 - w_2) \quad (6)$$

Passiamo ora a rispondere ai tre quesiti:

- a) Per dimostrare la prima affermazione basta prendere i moduli delle equazioni, ad esempio:

$$|z_1 - w_1| = |\omega^2 (z_2 - w_2)| = |\omega| |\omega| |z_2 - w_2|$$

ma $|\omega| = 1$ e quindi

$$|z_1 - w_1| = |z_2 - w_2| \text{ cioè } AA' = BB' \text{ e così via.}$$

- b) Scriviamo le equazioni delle rette per AA' , CC' , BB' (\underline{z} è il complesso coniugato di z)

$$\underline{z} (\underline{z}_1 - \underline{w}_1) - \underline{z} (z_1 - w_1) + z_1 \underline{w}_1 - \underline{z}_1 w_1 = 0 \quad \text{retta per } z_1 w_1 \quad (7)$$

$$\underline{z} (\underline{z}_2 - \underline{w}_2) - \underline{z} (z_2 - w_2) + z_2 \underline{w}_2 - \underline{z}_2 w_2 = 0 \quad \text{retta per } z_2 w_2 \quad (8)$$

$$z(\underline{z}_3 - \underline{w}_3) - \underline{z}(z_3 - w_3) + z_3 \underline{w}_3 - \underline{z}_3 w_3 = 0 \quad \text{retta per } z_3 w_3 \quad (9)$$

Le (7), (8), (9) tenendo conto delle (4), (5), (6), si possono riscrivere:

$$z(\underline{z}_1 - \underline{w}_1) - \underline{z}(z_1 - w_1) + z_1 \underline{w}_1 - \underline{z}_1 w_1 = 0 \quad \text{retta per } z_1 w_1 \quad (7')$$

$$\omega^2 z(\underline{z}_1 - \underline{w}_1) - \underline{\omega}(z_1 - w_1) + z_2 \underline{w}_2 - \underline{z}_2 w_2 = 0 \quad \text{retta per } z_2 w_2 \quad (8')$$

$$\omega z(\underline{z}_1 - \underline{w}_1) - \omega^2 \underline{z}(z_1 - w_1) + z_3 \underline{w}_3 - \underline{z}_3 w_3 = 0 \quad \text{retta per } z_3 w_3 \quad (9')$$

Ora, dopo aver posto $t = z_1 \underline{w}_1 - \underline{z}_1 w_1$ $r = z_2 \underline{w}_2 - \underline{z}_2 w_2$ $s = z_3 \underline{w}_3 - \underline{z}_3 w_3$ si vede che le tre rette passano per lo stesso punto O se il determinante dei coefficienti del sistema, dato dalle (7'), (8'), (9') rispetto a $x = z(\underline{z}_1 - \underline{w}_1)$ e $y = \underline{z}(z_1 - w_1)$, è nullo.

Il che è vero se

$$t + r + s = 0.$$

Tale verifica si svolge tenendo conto delle (1), (2) e (3).

Ad esempio per calcolare $s = z_3 \underline{w}_3 - \underline{z}_3 w_3$, si ricava dalla (2)

$$z_3 = -\omega w_2 - \omega^2 z_1 \text{ e dalla (3) } w_3 = -z_2 \omega - \omega^2 z_1$$

da cui $\underline{z}_3 = -\omega^2 \underline{w}_2 - \omega \underline{z}_1$ e $\underline{w}_3 = -\underline{z}_2 \omega^2 - \omega \underline{z}_1$

e così via.

c) Il quesito è equivalente al seguente: $OB + OC = OA'$ o $OB + OA = OC'$ o $OA + OC = OB'$. Dimostriamo che $OB + OC = OA'$ ovvero che $|w_1| = |z_3| + |z_2|$

Verifichiamo innanzitutto che gli angoli $BOC = AOB = AOC = 120^\circ$.

Infatti dalle (4), (5), (6) si ha che, posto $u = z_1 - w_1$, $v = z_3 - w_3$ e $k = z_2 - w_2$:

$$COA = \arg(u) - \arg(v) = \arg(u/v) = \arg \omega = 120^\circ$$

$$AOB = \arg(k) - \arg(u) = \arg(k/u) = \arg(1/\omega^2) = \arg(\omega) = 120^\circ$$

E quindi $B\hat{O}C = 120^\circ$

Pertanto i punti ωz_3 e $\omega^2 z_2$ si trovano sulla semiretta OA . Ma dalla (1) si ha:

$$-w_1 = \omega z_3 + \omega^2 z_2$$

e, passando ai moduli si ricava:

$$|w_1| = |\omega z_3 + \omega^2 z_2| = |\omega z_3| + |\omega^2 z_2|$$

dove l'ultima uguaglianza è vera per l'allineamento dei punti O , ωz_3 e $\omega^2 z_2$

Infine:

$$|w_1| = |z_3| + |z_2|$$

in quanto $|\omega| = 1$.

Problema 16

Il triangolo ABC di baricentro G è inscritto nella circonferenza Γ . Studiare il luogo descritto da G quando uno dei vertici varia su Γ . Stabilire inoltre come viene suddiviso, dai punti in cui incontra il luogo, il lato opposto al punto che varia sulla circonferenza.

Gruppo di lavoro 2: Antonino Anzalone, Roberta Bonarelli, Elena Crespina

Strumenti software

Cabri II

Collocazione temporale

Il problema può essere proposto solo dopo aver trattato tutta la geometria piana: punti notevoli del triangolo, circonferenza circoscritta, similitudine, quindi a partire dal terzo anno.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

La valenza didattica generalmente riconosciuta al *Cabri* è legata alla possibilità di compiere esplorazioni sugli enti geometrici e di congetturarne le proprietà. In questo caso, l'immediatezza della risposta di *Cabri* nell'individuazione del luogo toglie forse il gusto della scoperta e probabilmente alla ricerca del luogo va anteposta una breve ricerca basata sull'esplorazione "manuale".

Nodi concettuali

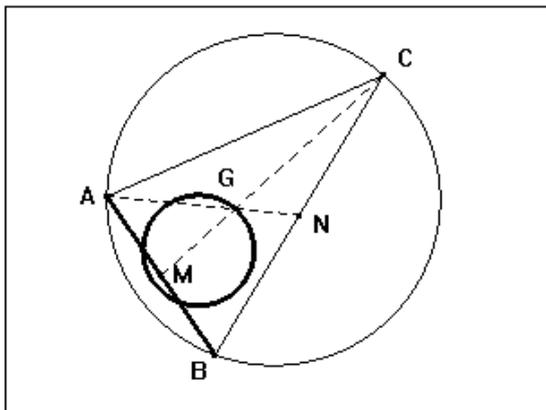
L'aspetto più difficile è la dimostrazione "sintetica" del fatto che il luogo è una circonferenza; nella prima soluzione proposta, in cui si hanno già due circonferenze di cui si conosce il rapporto dei raggi, si tratta di dimostrare che, al variare del punto C , il punto G che gli corrisponde in una similitudine, varia sull'altra circonferenza. Questa difficoltà non è invece presente nell'approccio con le trasformazioni ed anzi le soluzioni analitiche risultano molto rapide.

Approfondimenti e collegamenti

Questo problema consente di riprendere, in un'unica situazione, molti teoremi e proprietà studiate in capitoli separati; sembra quindi molto utile per stabilire collegamenti fra diversi argomenti. Appare anche risolubile con metodi diversi e si presta dunque a riflessioni legate al confronto tra vari percorsi risolutivi.

Tracce della procedura di soluzione n. 1

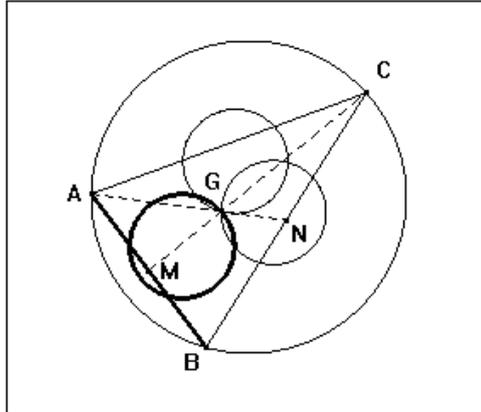
Disegnata la circonferenza e i tre punti A, B, C su di essa, individuato il baricentro G come punto di intersezione di due mediane, ad esempio AN e CM , si



chiede a *Cabri* il luogo di G al variare di C . Si ha la percezione immediata che si tratta di una circonferenza e che questa interseca il lato AB in due punti che lo dividono in tre segmenti uguali.

Dopo questa prima fase può seguire un momento di “esplorazione”:

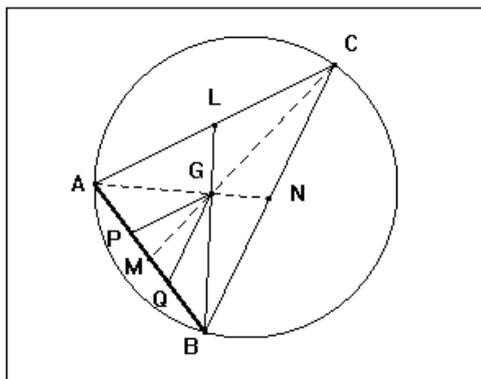
- Si possono cercare i luoghi di G al variare di A o di B , per avere conferma del fatto che non c'è un vertice privilegiato: si “vedono” infatti tre circonferenze uguali.
- Spostando il punto C su A o B una delle tre circonferenze è fissa, mentre un'altra va a sovrapporsi con la terza: si possono anche osservare i punti di suddivisione del lato fisso nei casi limite.
- Si può verificare che si tratta di una circonferenza costruendo una circonferenza e sovrapponendola al luogo.
- E' anche possibile, sfruttando la “misura”, controllare che il raggio della circonferenza è costante al variare di C .
- Così come verificare che il raggio del luogo è $1/3$ del raggio della circonferenza data.



In base all'esplorazione dei casi limite è possibile stabilire come viene suddiviso AB : infatti, nel caso in cui C coincida con A , il baricentro G appartiene al segmento AB e la mediana uscente da B si sovrappone allo stesso segmento, pertanto G divide AB in due parti di cui una doppia dell'altra. Analogamente quando C coincide con B . Resta quindi dimostrato che il luogo descritto da G divide il lato AB in tre parti uguali.

Comunque, superato il momento dell'intuizione, si passa alla dimostrazione, che può procedere nel modo seguente.

Siano P e Q i punti che dividono il lato AB in tre parti uguali. Allora, per la proprietà del baricentro, PG è parallelo ad AC , e QG è parallelo a BC . Il triangolo PQG è dunque simile al triangolo dato, il rapporto di similitudine è $1:3$ e le due circonferenze ad essi circoscritte hanno i raggi anch'essi in rapporto $1:3$. Si tratta ora di dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo PQG è il luogo richiesto. Al variare di C sulla circonferenza data, è fissa la corda AB ed è costante l'angolo ad essa opposto ACB , che è anche uguale all'angolo PGQ , ma anche PQ è una corda fissa per la circonferenza passante per P, Q, G . Dunque il punto G , dovendo vedere una corda fissa sotto un angolo costante, si muove su una circonferenza, che è quella costruita precedentemente.



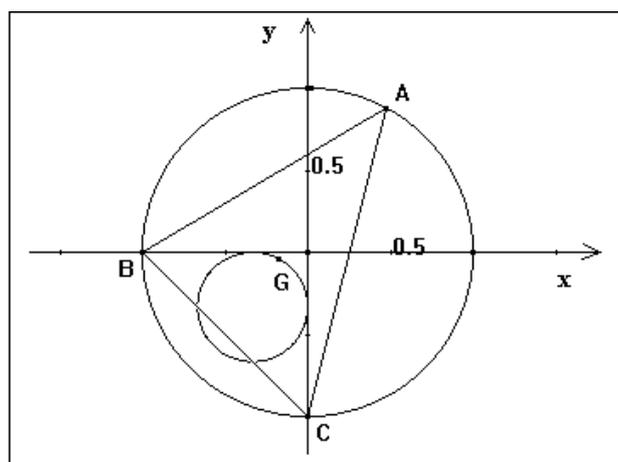
Tracce della procedura di soluzione n. 2

Utilizzando la circonferenza goniometrica, il triangolo ABC può essere scelto in modo che i punti $B(-1,0)$ e $C(0,-1)$ siano fissi ed $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Le coordinate del baricentro sono pertanto :

$$x = \frac{\cos\alpha - 1}{3} \quad (1) \quad \text{e} \quad y = \frac{\sin\alpha - 1}{3} \quad (2)$$

Ricavando α dalla (1) si ha $\alpha = \arccos(3x+1)$ e sostituendo nella (2) si ottiene

$$y = \frac{\pm\sqrt{1-(3x+1)^2} - 1}{3}$$



Razionalizzando e semplificando si ottiene l'equazione della circonferenza:

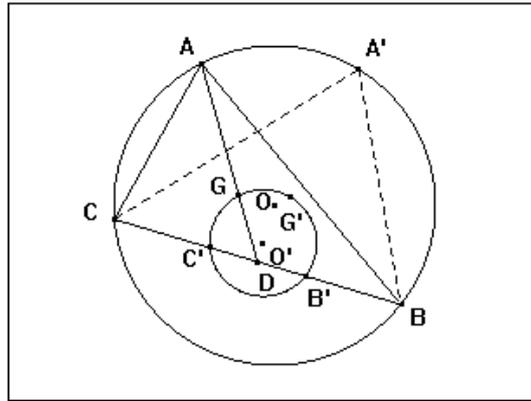
$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0 \quad \text{di centro } P(-1/3, -1/3) \text{ e raggio } 1/3.$$

Commenti

E' evidente come la precedente dimostrazione analitica, impostata con l'uso della trigonometria, risulti breve grazie alla scelta opportuna del sistema di riferimento. Dunque le varie soluzioni ipotizzate permettono di affrontare diversi aspetti didattici, e forse la migliore valenza formativa può essere raggiunta proprio tramite il confronto in classe di diverse procedure di soluzione.

Tracce della procedura di soluzione n. 3

Sia A il vertice considerato come variabile sulla circonferenza Γ . Il baricentro G può essere considerato come il corrispondente di A in una opportuna trasformazione del piano; si tratta di individuare quale è questa trasformazione.



Per la proprietà del baricentro sappiamo che è: $\frac{DG}{AD} = \frac{1}{3}$, essendo D il punto medio di CB .

Quando il vertice A varia sulla circonferenza, ma lo stesso varrebbe se supponessimo che A vari in tutto il piano, il punto D rimane sempre lo stesso mentre il punto G , immagine di A , varia, così ad esempio al punto A' corrisponderà il punto G' e si avrà ancora:

$$\frac{DG'}{A'D} = \frac{1}{3}$$

Pertanto la trasformazione cercata è una omotetia del 1° tipo di centro D e rapporto di omotetia pari a:

$$k = \frac{DG}{AD} = \frac{1}{3}$$

Poiché una omotetia è una similitudine allora il luogo di G al variare di A sulla circonferenza Γ è una circonferenza Γ' di raggio pari ad un $1/3$ del raggio della circonferenza Γ e di centro O' il quale è l'immagine di O nella suddetta omotetia e pertanto si ha:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{3}, \quad \frac{O'D}{OD} = \frac{1}{3}$$

Quando il vertice A , variando sulla circonferenza Γ , coincide con il vertice B , la sua immagine B' sarà ovviamente sul luogo Γ' e sarà anche sul lato BC . Inoltre risulta:

$$\frac{DB'}{DB} = \frac{1}{3}; \quad \frac{BB'}{DB} = \frac{2}{3}; \quad BB' = \frac{2}{3} DB = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{3} BC$$

Analogamente quando il vertice A coincide con il vertice C si ha:

$$CC' = \frac{1}{3} BC$$

Inoltre si ha:

$$C'B' = AB - CC' - BB' = AB - \frac{2}{3} AB = \frac{1}{3} AB$$

Pertanto il lato opposto al vertice variabile A viene suddiviso dal luogo in tre segmenti uguali.

Tracce della procedura di soluzione n. 4:

Si scelga il sistema di riferimento cartesiano come è indicato nella figura seguente. In esso il punto O è il centro della circonferenza Γ e D è il punto medio del lato CB del triangolo.

Sia:

$$C(0,0) ; B(2p,0) ; A(x,y) ; D(p,0) ; O(p,c)$$

dove:

$$c^2 = R^2 - p^2 \quad \text{con} \quad R \geq p$$

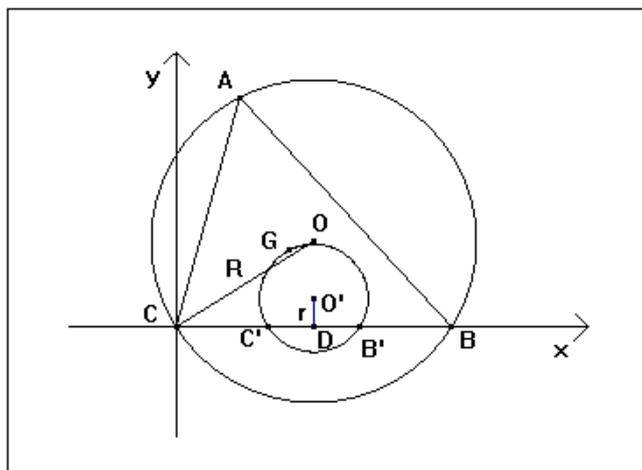
L'equazione della circonferenza Γ è: $(x - p)^2 + (y - c)^2 = R^2$

che tenendo conto della (1) diventa:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2cy = 0 \quad (2)$$

Le coordinate del baricentro del triangolo sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}p \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases} \quad (3)$$



Le (3) rappresentano le equazioni di una omotetia di 1° tipo, di rapporto $k = 1/3$ e il cui centro è dato dal punto unito della trasformazione che si ottiene ponendo:

$x' = x$ e $y' = y$. Si ha:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}p \\ y = \frac{1}{3}y \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}p \\ y - \frac{1}{3}y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}p \\ \frac{2}{3}y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = p \\ y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Perciò il centro dell'omotetia coincide con il punto medio D .

Determiniamo adesso l'equazione del luogo descritto dal punto G . Imponiamo che il vertice A del triangolo stia sulla circonferenza Γ ; dalle (3) si ottiene:

$$\begin{cases} 3x' = x + 2p \\ 3y' = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3x' - 2p \\ y = 3y' \end{cases}$$

Sostituiamo queste nell'equazione della circonferenza Γ ossia la (2); sviluppando si ha:

$$x'^2 + y'^2 - 2px' - \frac{2}{3}cy' - \frac{8}{9}p = 0 \quad (5)$$

Questa è l'equazione del luogo Γ' di G al variare di A sulla circonferenza Γ e rappresenta una circonferenza di centro:

$$O' \left(p, \frac{1}{3}c \right) \quad (6)$$

e raggio:

$$r = \sqrt{p^2 + \frac{1}{9}c^2 - \frac{8}{9}p^2} = \sqrt{\frac{1}{9}p^2 + \frac{1}{9}c^2} = \frac{1}{3}\sqrt{p^2 + c^2} \quad r = \frac{1}{3}R \quad (7)$$

Questi risultati sono coerenti con la presenza della omotetia (3); infatti il rapporto fra segmenti corrispondenti in una omotetia è pari al rapporto di omotetia che nel nostro caso è $k = 1/3$ e quindi si ha:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{3} \quad r = \frac{1}{3}R$$

e quest'ultima coincide con la (7).

Inoltre l'immagine di $O(p,c)$ nell'omotetia è:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}p \\ y' = \frac{1}{3}c \end{cases} \quad \begin{cases} x' = p \\ y' = \frac{1}{3}c \end{cases}$$

e questo coincide con il punto O' ossia con la (6).

Determiniamo adesso l'intersezione della circonferenza luogo Γ' con il lato CB del triangolo:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 - 2px' - \frac{2}{3}cy' + \frac{8}{9}p = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$x'^2 - 2px' + \frac{8}{9}p = 0$$

$$x' = \frac{2}{3}p \quad x' = \frac{4}{3}p$$

Da cui si ha:

$$C' \left(\frac{2}{3}p, 0 \right) \quad B' \left(\frac{4}{3}p, 0 \right)$$

e quindi:

$$CC' = \frac{2}{3}p; \quad C'B' = \frac{4}{3}p - \frac{2}{3}p = \frac{2}{3}p; \quad B'B = 2p - \frac{4}{3}p = \frac{2}{3}p$$

$$CC' = C'B' = B'B = \frac{2}{3}p = \frac{2}{3} \cdot 2CB = \frac{1}{3}CB$$

Gruppo 4: Paolo Carboni, Domingo Paola, Enrico Pontorno, Gustavo Toninel.

Strumenti software

Mathematica 3.0

Collocazione temporale

La soluzione prospettata di seguito richiede che lo studente abbia acquisito una discreta conoscenza della geometria del triangolo (classe prima), sappia come calcolare le coordinate del baricentro, abbia buone conoscenze di trigonometria e, infine, abbia una discreta padronanza del metodo per la determinazione dell'equazione di un luogo geometrico. Tali prerequisiti specifici portano a collocare la presentazione del problema negli ultimi mesi di una classe quarta di un liceo scientifico.

Aspetti didattici

Il problema, relativamente alla prima parte, può essere proposto alla classe come un tipico esercizio sui luoghi geometrici.

La sua validità sul piano didattico è quella di costringere lo studente a recuperare conoscenze e strategie risolutive, acquisite in anni precedenti, il cui ricordo forse si è un po' sbiadito, rafforzando così in lui la consapevolezza dell'importanza del ripasso per poter disporre dei concetti e degli strumenti appresi in precedenza.

La seconda parte del problema propone un approfondimento significativo: stabilire come viene suddiviso, dai punti in cui incontra il luogo, il lato del triangolo opposto al punto in che varia sulla circonferenza. È proprio in relazione a questa parte che si rivela utile il computer, specie nella fase di congettura della soluzione.

L'uso di *Mathematica*, che, come è noto, necessita tempi di apprendimento più lunghi, rispetto ad altri software quali *Cabri* e *Derive*, richiede che si siano create in precedenza le necessarie condizioni di conoscenza. Ciò può essere conseguito, a nostro avviso, mediante corsi di approfondimento, da proporre già alla fine della terza classe e nel primo quadrimestre della quarta per un gruppo ristretto di allievi, che rivelino adeguate attitudini per la matematica e siano interessati a conoscere uno strumento di calcolo simbolico, che potrebbe rivelarsi utile nel corso dei successivi studi universitari.

Ciò premesso, il lavoro potrebbe essere impostato nelle seguenti fasi:

- proposta della prima parte del problema (determinazione del luogo) alla classe e risoluzione a casa con carta e penna;
- analisi ed eventuale correzione in classe dei risultati ottenuti;
- proposta della seconda parte e richiesta di intervento degli "specialisti" di *Mathematica* per produrre una visualizzazione animata della risoluzione della prima parte (potrebbero lavorare al pomeriggio, assistiti dallo stesso insegnante);
- visione in classe della animazione prodotta, formulazione di una congettura per la risoluzione della seconda parte e verifica analitica;

- dimostrazione per via sintetica del risultato ottenuto.

Nonostante la consapevolezza che in problemi di questo tipo *Mathematica* non abbia il vantaggio dell'immediatezza della resa grafica di *Cabri*, la scelta del software indicata è dovuta non solo al fatto che *Mathematica* consente il calcolo simbolico ma, soprattutto, alla convinzione che in ogni classe c'è sempre un gruppo di ragazzi che, adeguatamente stimolati, rispondono con l'entusiasmo tipico della loro età a proposte anche impegnative. Ciò detto, lo stesso percorso sopra delineato può essere seguito impiegando in modo integrato *Cabri* e *Derive*.

Nodi concettuali

Dal punto di vista matematico, non si scorgono particolari difficoltà a livello concettuale. L'uso della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario in luogo di una generica, senza perdita di generalità nei risultati, dovrebbe essere una prassi già acquisita dagli studenti in situazioni analoghe, vista la collocazione temporale del problema.

Stessa valutazione si può esprimere dal punto di vista informatico, in quanto le istruzioni usate sia per la trattazione algebrica sia per quella della parte grafica rientrano tra quelle che si dovrebbero impartire in corso introduttivo su *Mathematica*.

Approfondimenti

Una volta scoperto che il luogo richiesto dal problema è una circonferenza di raggio pari a $1/3$ di quello della circonferenza in cui è inscritto il triangolo, un ulteriore approfondimento potrebbe essere quello di scoprire qual è il luogo descritto dal centro della circonferenza trovata al variare di uno dei due vertici rimasti fissi.

Traccia della procedura di soluzione

Studio del luogo richiesto

Senza perdere di generalità assumiamo che la circonferenza sia quella di raggio unitario con centro nell'origine; A e B siano inoltre i vertici fissi del triangolo, C sia quello mobile e G il baricentro. Indicando con a , b e t i valori del parametro corrispondenti rispettivamente ai punti A , B e C , si avrà:

$$A = \{\cos[a], \sin[a]\}; B = \{\cos[b], \sin[b]\}; C = \{\cos[t], \sin[t]\}$$

$$G = 1/3 (A + B + C)$$

Indicate con x e y le coordinate di G :

$$x == 1/3 (\cos[a] + \cos[b] + \cos[t]);$$

$$y == 1/3 (\sin[a] + \sin[b] + \sin[t]);$$

si elimina il parametro t tra le due uguaglianze mediante il comando Eliminate:

$$\text{Eliminate}[\{x == 1/3 (\cos[a] + \cos[b] + \cos[t]),$$

$$y == 1/3 (\sin[a] + \sin[b] + \sin[t])\}, t]$$

Al risultato si applicano le consuete manipolazioni algebriche per ridurre l'equazione a forma normale con i comandi `Thread` e `Simplify`. Alla fine si perviene all'equazione:

$$1/9 + x^2 + y^2 + 2/9 \cos[a - b] + x (-2 \cos[a]/3 - 2 \cos[b]/3) + y(-2 \sin[a]/3 - 2 \sin[b]/3) == 0$$

Da essa si riconosce che il luogo cercato è una circonferenza. Posto:

$$\begin{aligned} p &= 1/9 + 2/9 \cos[a - b]; \\ m &= 1/3 (\cos[a] + \cos[b]); \\ n &= 1/3 (\sin[a] + \sin[b]); \end{aligned}$$

il centro è il punto $P = \{m, n\}$ e, detto r il raggio si ha:

$$r = \sqrt{(m^2 + n^2 - p)} = 1/3$$

Realizzazione dell'animazione

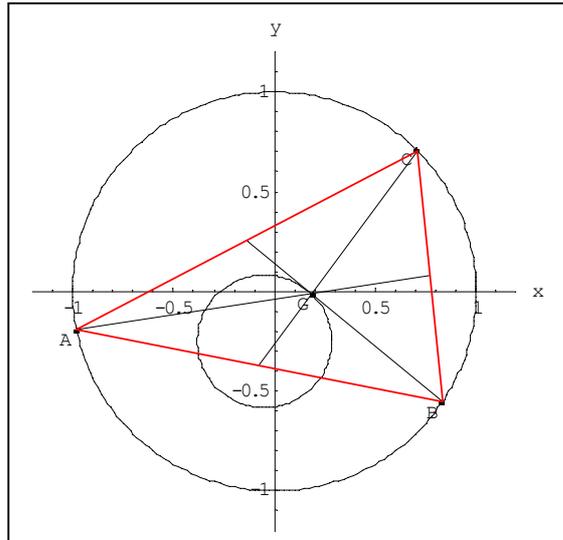
Assegnati i vertici fissi A e B , attribuendo un valore rispettivamente ai parametri a e b , si costruisce la figura servendosi delle primitive grafiche "`Circle`", "`Line`" e "`Point`" e poi servendosi dell'istruzione "`Do`" si realizzano i fotogrammi desiderati.

```
figura = Show[
  Graphics[
    {Circle[{0, 0}, 1], Circle[P, r],
     Line[{C, (A + B)/2}], Line[{A, (B + C)/2}],
     Line[{B, (C + A)/2}], Point[A], Point[B], Point[C],
     Point[G], Text["A", A - .05], Text["B", B - .05],
     Text["C", C - .05], Text["G", G - .05],
     Thickness[0.007], Hue[3], Line[{A, B, C, A}]},
  AspectRatio → Automatic, Axes → True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotRange → {{-1.2, 1.2}, {-1.2, 1.2}},
  Prolog → AbsolutePointSize[4],
  DisplayFunction → Identity];

Fotogramma:=Show [figura,DisplayFunction → $DisplayFunction]

Do[Fotogramma, {t, 0, 2 Pi, Pi/16}]
```

\mathbf{Pi} sta per π e $\mathbf{Pi}/16$ è il passo con cui viene incrementato t ; in questo caso si ottengono 33 fotogrammi del tipo di quello di seguito riportato.



Congettura e verifica numerica

L'analisi dell'animazione, eventualmente ripetuta variando i valori assegnati ad a e b e il numero dei fotogrammi (memoria permettendo), dovrebbe consentire agli studenti di formulare la congettura che il lato AB del triangolo venga suddiviso in tre parti uguali dai due punti di intersezione con il luogo di baricentri.

Per compiere una verifica numerica di tale congettura si può procedere innanzitutto definendo come far calcolare al computer la distanza tra due punti .

```
dist[{x1_,y1_},{x2_,y2_}]:=Sqrt[(x1-x2)^2+(y1-y2)^2]
```

Indicate con **rettaAB** e **baricirco** rispettivamente le equazioni della retta per i punti A e B e della circonferenza luogo dei baricentri, usando il comando **Nsolve** si risolve numericamente il sistema da esse costituite.

```
NSolve[{rettaAB,baricirco},{x,y}]
```

Detti infine $M1$ e $M2$ i punti di intersezione, avendo l'avvertenza di chiamare $M1$ quella delle due che è più vicina ad A , *Mathematica* conferma la verità della supposizione fatta.

```
dist[A,M1] == dist[M1,M2]
True
dist[B,M2] == dist[M1,M2]
True
dist[M1, M2] == 1/3 dist[A, B]
True
```

Problema 17

E' stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni.

Vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M , un pino P e una quercia Q .

Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P . Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP . Pianta in questa posizione un paletto P_1 . Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ . Pianta in questa posizione un paletto P_2 . Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P_1P_2 .

Problema

Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M . Ci sono P e Q ma non c'è M . Potrà trovare ugualmente il tesoro?

Gruppo di lavoro 5: Prudenza Maffei, Rina Penolazzi, Ferruccio Rohr, Renato Verdini, Mauro Zoffoli

Strumenti software

Cabri II, Derive

Collocazione temporale

Biennio Scuola media superiore. E' un utile esercizio di applicazione di proprietà e teoremi di Geometria piana euclidea, in particolare il teorema di Talete.

La soluzione con *Derive* richiede l'uso di trasformazioni isometriche (rotazioni)

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Affinché il quesito non venga inteso dagli studenti come un gioco (chi potrebbe rispondere negativamente alla domanda finale? Per il fatto che il problema viene formulato, automaticamente si **deve dedurre** che Ariele potrà trovare il tesoro!!!) ma come un vero problema di Geometria, il testo dovrebbe essere formulato così:

E' stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni.

Vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M , un pino P e una quercia Q .

Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P . Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP . Pianta in questa posizione un paletto P_1 . Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ . Pianta in questa posizione un paletto P_2 . Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P_1P_2 .

Verificare / Dimostrare che il tesoro T è raggiungibile qualunque sia la posizione del melo M .

I due verbi sottolineati stanno a significare due diverse strategie "didattiche" di risoluzione.

Scegliendo il primo ("verificare") si suggerisce di fare una costruzione geometrica (oppure alcuni passaggi algebrici) e quindi notare la veridicità dell'affermazione finale **senza** chiedere **perché** il punto T "gode" di tale particolare proprietà.

Lo strumento più adatto per questa "esplorazione" è *Cabri*. La costruzione della mappa non offre alcuna difficoltà e può essere eseguita da qualunque studente del biennio che abbia imparato le più elementari istruzioni di *Cabri*.

Muovendo a piacere il punto M **si verifica** immediatamente che la posizione del punto T rimane invariata.

Scegliendo invece la strada della dimostrazione, il percorso didattico si svolge in due fasi: la prima, di tipo esplorativo, è identica a quella descritta sopra; la seconda fase, meno banale, permette di giustificare perché T è indipendente da M .

E' sottinteso che, dal punto di vista didattico, reputo più valida la seconda scelta.

Nodi concettuali

La dimostrazione, come descriveremo più sotto, si avvale fondamentalmente del teorema di Talete. Si dovranno richiamare tutte le applicazioni di tale teorema.

Approfondimenti e collegamenti

Il problema offre lo spunto per riprendere e approfondire:

- luoghi geometrici;
- rotazioni e più in generale isometrie nel piano;
- vettori e matrici.

Tracce della procedura di soluzione

1° Fase (costruzione della figura di base con *Cabri*):

Dopo aver disegnato un segmento (orizzontale) di estremi PQ e aver scritto nell'angolo superiore sinistro i numeri 90 e 270, si sceglie a piacere un punto M **non appartenente** a tale segmento.

Con l'istruzione RUOTA si determina P_1 selezionando, nell'ordine,

$M - P - 90$

Ancora con l'istruzione RUOTA si determina P_2 selezionando, nell'ordine,
 $M - Q - 270$

Si determina infine il punto medio T tra P_1 e P_2 . Si ottiene la seguente figura finale.

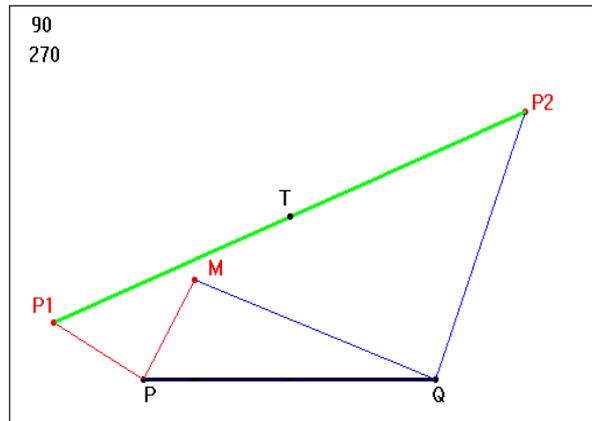


Figura 1

2° Fase (dimostrazione):

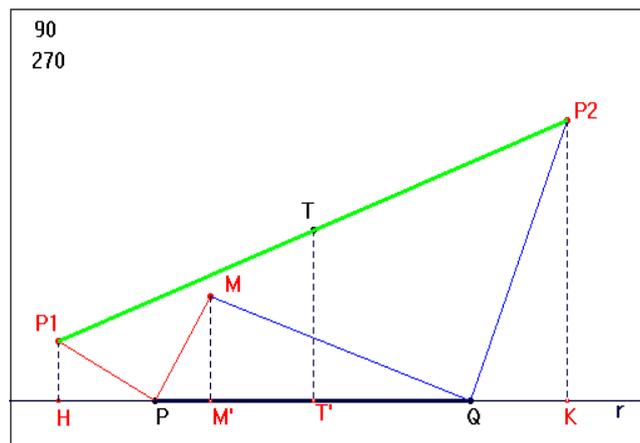


Figura 2

Disegnata la retta r passante per P e Q (Figura 2), si determinano le proiezioni H , M , T e K dei punti P_1 , M , T e P_2 rispettivamente.

Nel trapezio rettangolo HKP_2P_1 , per ipotesi, T è il punto medio del lato obliquo P_1P_2 . Per il teorema di Talete abbiamo:

- a) T' è anch'esso punto medio del lato HK ;
- b) la lunghezza del segmento TT' è data da $(HP_1 + KP_2)/2$

Inoltre:

- c) i triangoli PMM' e PP_1H sono congruenti aventi le ipotenuse MP e PP_1 congruenti (per costruzione) e gli angoli MPM' e PP_1H congruenti perché complementari dello stesso angolo HPP_1 ;

- d) i triangoli QMM' e QP_2K sono congruenti aventi le ipotenuse QM e QP_2 congruenti (per costruzione) e gli angoli MQM' e QP_2K congruenti perché complementari dello stesso angolo KQP_2 .

Di conseguenza:

- e) $PH = MM' = QK$ (proprietà transitiva);
 f) $HP_1 = PM'$ e $KP_2 = QM'$.

Dunque:

- per la a) e la e) $\Rightarrow T$ è punto medio anche del segmento PQ ;
- per la b) e la f) $\Rightarrow TT' = (PM' + QM') / 2 = PQ/2$.

La posizione di T non dipende da M ma soltanto dai punti P e Q . Si fa notare che la dimostrazione procede in modo del tutto analogo ponendo M in modo tale che P_1 e P_2 risultino da parti opposte rispetto al segmento PQ (Figura 3).

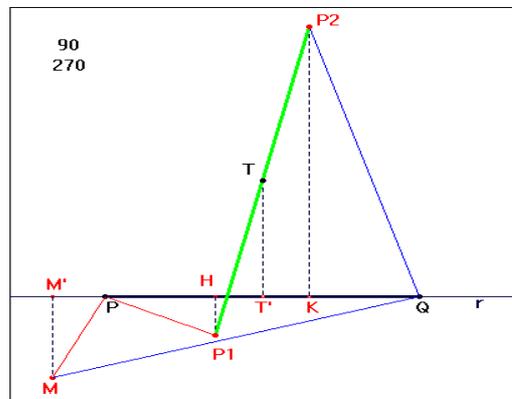


Figura 3

Altre tracce di soluzione

5. *Soluzione geometrica.* Con riferimento alla figura che segue, si propone una seconda dimostrazione geometrica che prova l'indipendenza del punto T dalla posizione di M .

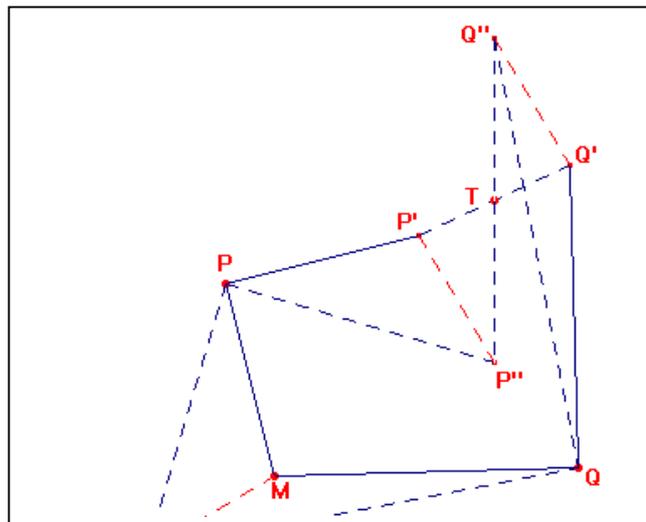


Figura 4

I punti P e Q sono rintracciabili (il pino e la quercia). Non trovando il melo prendiamo arbitrariamente un punto M e, seguendo le istruzioni costruiamo T , punto medio di P' e Q' , come nella fig. 4. Sia X un qualsiasi punto del piano distinto da M , a partire da esso ricostruiamo i punti P'' e Q'' analoghi dei punti P' e Q' . I triangoli XMP e $P''P'P$ sono isometrici (in una rotazione di 90° di centro P), analogamente sono isometrici (in una rotazione di 90° di centro Q) i triangoli XMQ e $Q''Q'Q$. Ne segue che i segmenti $P'P''$ e $Q'Q''$ sono congruenti e paralleli, pertanto i triangoli $P'P''T$ e $Q'Q''T$ sono congruenti. Se ne deduce pertanto che i punti $Q''TQ'$ sono allineati e T è medio tra Q' e Q''

2. Soluzione con i vettori

Simbologia: $(3,2)$ sarà il punto di coordinate 3 e 2, $[3,2]$ sarà il vettore che ha la componente parallela all'asse x lunga 3, e componente parallela all'asse y lunga 2. Inoltre con vettore $[AB]$ si intenderà il vettore che ha origine in A e estremo in B , con $[BA]$ il vettore opposto ed infine le coordinate di un punto $A(3,2)$ sono anche le componenti del vettore $[OA] = [3,2]$.

Per convenienza, senza perdere però di generalità, scegliamo il sistema di assi cartesiani con origine nel punto medio fra Pino e Quercia, asse delle ascisse passante per Pino e Quercia ed indichiamo con $2a$ la distanza fra Pino e Quercia. Il punto P (Pino) avrà coordinate $(a,0)$ mentre Q (Quercia) avrà coordinate $(-a,0)$. Il punto M (Melo) sarà un punto qualunque del piano $M(x, y)$.

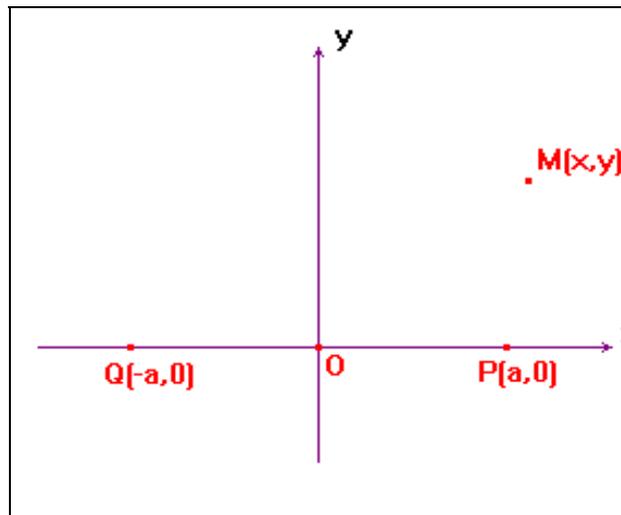


Figura 5

Il movimento da M a P sarà descritto dal vettore $[MP] = [a - x, -y]$, il movimento da P a P_1 sarà quindi descritto dal vettore $[PP_1] = [-y, x - a]$ (questo vettore è perpendicolare al precedente, ha la stessa lunghezza ed è a destra). Le coordinate del punto P_1 corrisponderanno alle componenti del vettore $[OP_1]$, ma $[OP_1] = [OM] + [MP] + [PP_1] = [x, y] + [a - x, -y] + [-y, x - a] = [a - y, x - a]$, quindi $P_1 = (a - y, x - a)$.

Il movimento da M a Q sarà descritto dal vettore $[MQ] = [-a - x, -y]$, il movimento da Q a P_2 sarà quindi descritto dal vettore $[QP_2] = [y, -a - x]$. (questo vettore è perpendicolare al precedente, ha la stessa lunghezza ed è a sinistra). Le coordinate del punto P_2 corrisponderanno alle componenti del vettore $[OP_2]$, ma $[OP_2] = [OM] + [MQ] + [QP_2] = [x, y] + [-a - x, -y] + [y, -a - x] = [-a + y, -a - x]$, quindi $P_2 = (-a + y, -a - x)$. Il punto medio fra P_1P_2 avrà coordinate $(-a, 0)$. Come si vede le coordinate di quest'ultimo punto dipendono solo dalla distanza fra P e Q e non dalle coordinate di P .

3. Soluzione con Derive

"Si scelga il sistema riferimento tale che $P(-1,0)$, $Q(1,0)$ e sia $M(x,y)$ "

" il punto P_2 si ottiene da M con una rotazione di 270° intorno a Q "

" le coordinate di P_2 sono date dal seguente vettore colonna "

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + 1 \\ 1 - x \end{bmatrix}$$

" Il punto P_2 ha dunque coordinate $(y+1, 1-x)$ "

"il punto P_1 si ottiene da M con una rotazione di 90° intorno a Q "

" le coordinate del punto P_1 sono date dal seguente vettore colonna"

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x + 1 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - 1 \\ x + 1 \end{bmatrix}$$

" il punto P_1 ha dunque coordinate $(-y-1, x+1)$ "

" Calcoliamo le coordinate del punto medio di P_1P_2 "

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} -y - 1 \\ x + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y + 1 \\ 1 - x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \text{"T}(0,1) \text{ è indipendente da } M(x,y)\text{"}$$

Commenti

E' possibile "inventare" una serie di "mappe" simili a quella del problema proposto, con il tesoro cioè che dipende soltanto da un segmento di base e non da un punto di partenza.

Si esamini il seguente testo:

E' stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni.

*Vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M , un pino P e una quercia Q . Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P . Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza **doppia** a quella di MP . Pianta in questa posizione un paletto P_1 . Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta.*

*Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza **doppia** a quella di MQ . Pianta in questa posizione un paletto P_2 . Il tesoro T si trova*

Gruppo di lavoro 9: Patrizia Berneschi, Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Sergio Zoccante.

Strumenti software

Cabri II, Derive 4

Collocazione temporale

La risoluzione con *Derive*, così come proposta, può essere affrontata nel terzo anno di corso. Costituiscono prerequisiti per la risoluzione del problema: la retta nel piano cartesiano ed i problemi relativi, l'equazione della circonferenza dati centro e raggio.

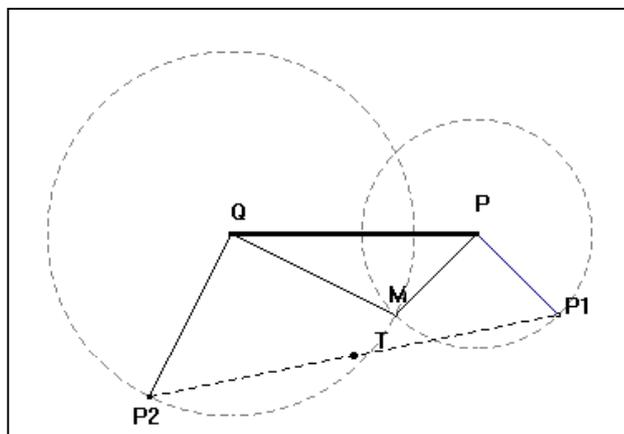
Tracce della procedura di soluzione

La soluzione è presentata nei files allegati

Le operazioni richieste sono le seguenti:

1. Costruzione dei tre punti M, P, Q .
2. Costruzione dei tre segmenti MP, MQ, PQ .
3. Costruzione della circonferenza di centro P e raggio MP .
4. Retta perpendicolare ad MP e passante per P .
5. Definizione di P_1 come intersezione tra PP_1 e circonferenza.
6. Ripetizione dei passi 3, 4, 5 per il punto Q .
7. Punto medio tra $P_1 P_2$

La figura ottenuta è quella riportata.



Con *Cabri* si inizia ora ad esplorare la figura alla scoperta delle sue proprietà.

Modificando, per trascinamento, la posizione di M , Cabri visualizza immediatamente che quella di T non varia e che quindi ne è indipendente. È facile infine scoprire che T è il vertice di un quadrato di cui PQ ne è la diagonale; oppure, come illustrato in figura, l'intersezione della circonferenza di diametro PQ con l'asse dello stesso.

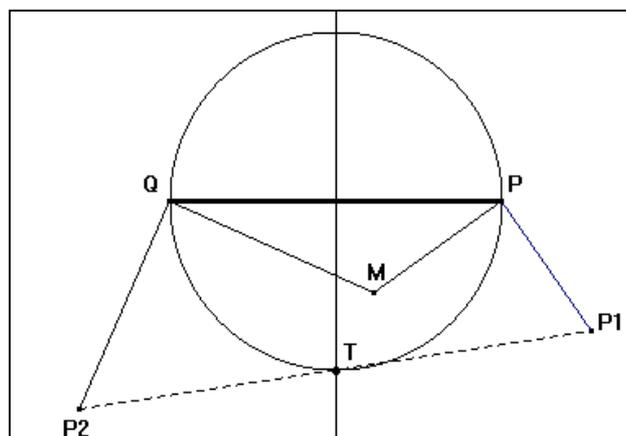


Figura 2: Anche la posizione del tesoro si determina facilmente:
TQP è un triangolo rettangolo ed isoscele

Traccia di dimostrazione:

Sintesi della parte geometrica

- Si dimostra anzitutto che la posizione del punto M non è significativa. Infatti consideriamo un punto M' diverso da M . I triangoli $M'MQ$ e $P_2'P_2Q$ sono congruenti.

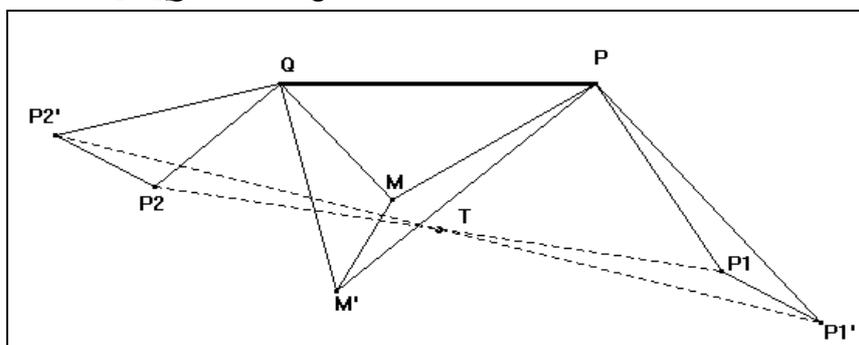


Figura 3: La dimostrazione si basa sulle proprietà del parallelogramma

Questo si può vedere sia notando che il secondo triangolo è costruito congruente al primo in una rotazione di 90 gradi, sia applicando il *Primo criterio di congruenza* ai due triangoli $(MQ$ e P_2Q congruenti per costruzione, idem per $M'Q$ e $P_2'Q$, e gli angoli $M'QM$ e $P_2'QP_2$ congruenti perché differenza di

angoli congruenti). Quindi il segmento P_2P_2' è congruente al segmento MM' , ed è ad esso ortogonale (sempre per la rotazione di 90 gradi). Identico ragionamento per i triangoli $M'MP$ e $P_1'P_1P$ porta a concludere che anche il segmento P_1P_1' è congruente al segmento MM' , ed è ad esso ortogonale. Pertanto, i segmenti P_1P_1' , P_2P_2' sono congruenti tra loro ed anche paralleli, in quanto entrambi ortogonali a MM' . Si consideri ora il quadrilatero $P_1P_1'P_2P_2'$ ⁽¹⁾. Questo ha una coppia di lati opposti congruenti e paralleli: è perciò un parallelogramma. Allora il centro T (posizione del tesoro) di una diagonale è anche il centro dell'altra diagonale, e risulta invariante rispetto alla scelta del parallelogramma.

- Una volta dimostrato che la posizione di M non è rilevante se ne può ricavare semplicemente la posizione mettendo M nel punto medio di PQ (oppure coincidente con uno dei punti P, Q). In questo modo si verifica che la posizione di T è nel vertice del triangolo rettangolo ed isoscele di ipotenusa PQ .

Eseguita la costruzione geometrica con *Cabri* non vi sono particolari problemi nella risoluzione analitica del problema con *Derive 4*, questa ricalca infatti sostanzialmente la costruzione vista sopra ed è illustrata dettagliatamente nei due files allegati. La scelta di un opportuno sistema di riferimento, come illustrato nel file, pur opportuna, non condiziona in modo sostanziale la risoluzione del problema. La potenza operativa del programma è infatti in grado di gestire comunque il problema.

Sintesi della parte analitica

- Scegliamo un sistema di riferimento che abbia P, Q sull'asse delle ascisse e l'origine nel loro punto medio
- Indichiamo quindi con $(xp, 0)$, $(-xp, 0)$, (xm, ym) le coordinate dei rispettivi punti P, Q, M che supponiamo noti
- Determiniamo la posizione del punto P_1 , come intersezione della circonferenza di centro P e raggio PM con la perpendicolare al segmento PM passante per P
- Equazione della circonferenza di centro P e raggio PM
- $(x - xp)^2 + (y - yp)^2 = (xp - xm)^2 + (yp - ym)^2$
- Partiamo inizialmente con le coordinate generiche dei tre punti P, M, Q
- $P(xp, yp), Q(xq, yq), M(xm, ym)$
- Il coefficiente angolare della retta passante per MP è dato da

$$mp = (ym - yp)/(xm - xp)$$
- Quindi l'equazione della retta perpendicolare a MP passante per P diventa
 - $y - yp = -1/((ym - yp)/(xm - xp)) \cdot (x - xp)$
- Ma per il sistema di riferimento scelto, sappiamo che $yp = 0$

¹ Il fatto che sia un quadrilatero convesso e non intrecciato è strettamente legato al senso delle rotazioni di cui si parla nel testo (*90 gradi a destra...90 gradi a sinistra*). Per un'analisi approfondita delle differenze tra i casi di rotazioni discordi e concordi, si veda il Problema 9

- $y = -1/(ym/(xm - xp)) \cdot (x - xp)$
- Risolviamo il sistema di secondo grado per sostituzione
- ... eseguendo i calcoli qui tralasciati per brevità si ottiene :
 - $(xp - ym, xm - xp)$
- Stesso procedimento per trovare la posizione del punto $P2$
- Secondo paletto $P2$
 $(-xp + ym, -xm - xp)$
- Determiniamo le coordinate del punto medio tra $P1$ e $P2$ ed otteniamo le coordinate del tesoro
 - $(0, -xp)$

La posizione del punto T non dipende da M e si trova sul vertice di un quadrato di cui PQ è una diagonale

Problema 18

E' dato un quadrilatero $ABCD$. Sui suoi lati costruisci quattro quadrati esternamente al quadrilatero. Determinati i centri dei quattro quadrati, uniscili per ottenere il quadrilatero $EFGH$. Quali configurazioni può assumere $EFGH$, al variare di $ABCD$?

Gruppo di lavoro 7: Amelia Di Marco, Rosanna Guidetti, Marilena Sparapani, Gaetano Speranza

Strumenti software:

Cabri, Derive, LiveMath

Collocazione temporale

Classe seconda, terza o quarta superiore secondo la strategia utilizzata in relazione al percorso formativo.

Aspetti didattici

La figura iniziale in *Cabri* è utile per scoprire che il quadrilatero $EFGH$ ha le diagonali perpendicolari e congruenti, proprietà che può essere dimostrata poi con diverse strategie:

- per via geometrica con le trasformazioni geometriche o con le proprietà dei parallelogrammi,
- per via analitica,
- utilizzando i numeri complessi.

Nel primo caso si utilizza *Cabri* per la visualizzazione delle conclusioni, nel secondo è utile l'uso di *Derive* per la complessità dei calcoli nel caso generale di $ABCD$ qualsiasi, nel terzo utilizzando *LiveMath* si evitano tali complicazioni di calcolo facendo leva sulla moltiplicazione per l'unità immaginaria. La descrizione delle configurazioni che assume $EFGH$ al variare di $ABCD$ può essere fatta esaminando i vari casi particolari, ma è più interessante, anche se più impegnativo per gli studenti, dedurre le possibili situazioni dopo aver dimostrato la proprietà delle diagonali nel caso generale.

Il problema è stato proposto agli studenti di una terza Liceo Scientifico, che hanno realizzato la figura in *Cabri* e dimostrato solo alcuni casi particolari (per esempio che $EFGH$ è un quadrato se $ABCD$ è un parallelogramma).

Nodi concettuali

La soluzione del problema richiede conoscenze elementari di geometria del biennio (ma notevoli capacità di analisi della figura); se si preferisce la soluzione analitica, sono necessarie nozioni di base sulla retta e la distanza oppure per la terza possibilità la conoscenza dei numeri complessi.

Traccia della procedura di soluzione

Si ritiene che le figure di seguito riportate e i commenti relativi siano esaurienti per la descrizione delle diverse procedure seguite.

Soluzioni per via sintetica:

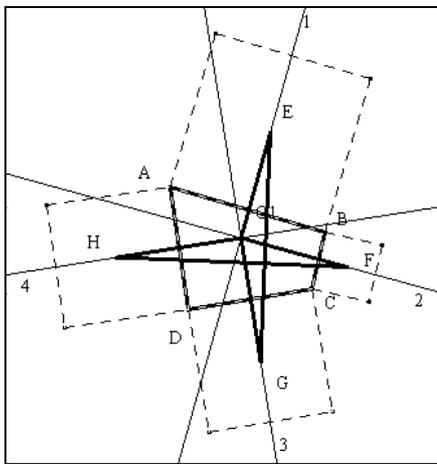


Figura 1

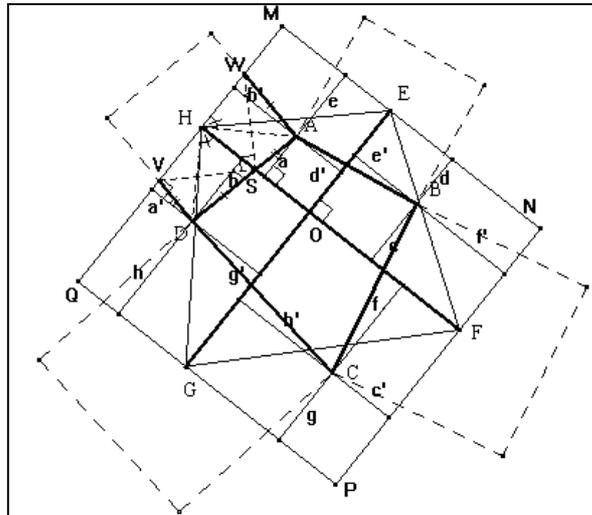


Figura 2

Figura 1: La composizione delle rotazioni di 90° di centri E, F, G, H è l'identità. La composizione delle rotazioni di centro E ed F individua una simmetria di centro O_1 , analogamente per le rotazioni di centro G ed H (il centro della simmetria è sempre O_1). Il triangolo GO_1E si trasforma nel triangolo HO_1F per mezzo di una rotazione di 90° , quindi HF e GE sono perpendicolari e congruenti.

Figura 2: Dalla costruzione relativa al lato AD (e analoghe considerazioni per gli altri lati del quadrilatero $ABCD$) si deduce che $MNPQ$, costruito con i lati paralleli alle diagonali di $EFGH$, è un quadrato: dunque $EFGH$ ha le diagonali EG e FH perpendicolari e congruenti e $a+b+c+d+f+g+h = a'+b'+c'+d'+e'+f'+g'+h'$.

Figura 3: X e X' coincidono (appartengono entrambi a tutte le diagonali dei due parallelogrammi di vertici i punti medi dei lati di $ABCD$ e $EFGH$).

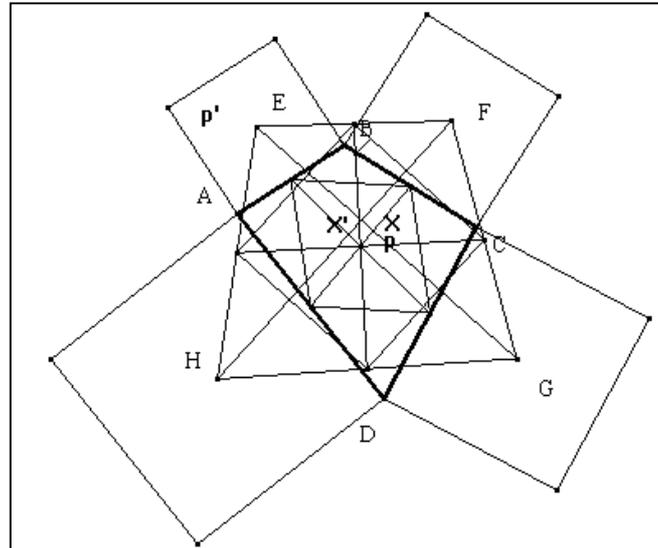


Figura 3

I procedimenti dimostrativi illustrati dalle precedenti figure 2 e 3 si rivelano complessi e non completi (in ciascuno è presente una affermazione non pienamente dimostrata ma validata solo in *Cabri*).

Soluzione con Derive

Fissato un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale xOy , siano $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$ i vertici del quadrilatero. In *Derive* si possono definire delle procedure di calcolo che determinano i centri dei quadrati costruiti sui lati di $ABCD$ (per esempio il centro H è l'intersezione tra l'asse di AD e la circonferenza di centro A e raggio AH) e quindi verificare che le diagonali di $EFGH$ sono perpendicolari e congruenti. Nonostante la notevole semplificazione di calcolo permessa da *Derive* è comunque complesso giungere alle conclusioni richieste.

Soluzione in LiveMath

Rispetto alle soluzioni precedenti il metodo che utilizza i numeri complessi da una parte è rigoroso dal punto di vista logico, dall'altra riduce notevolmente la quantità dei calcoli. Inoltre questa soluzione dimostra che le conclusioni del teorema si estendono anche al caso dei quadrati rivolti verso l'interno di $ABCD$.
Riportiamo le parti salienti del notebook.

☰ Dati due numeri complessi z e w Ricordiamo che il numero $w - z$ è rappresentato geometricamente dal vettore z_w . Ricordiamo anche che la moltiplicazione per $-i$ agisce con una rotazione di 90° in senso orario. Tenendo presente quanto detto, costruiamo il quadrato di vertici $z, z + (z - w)i, w + (z - w)i, w$. Il suo centro è la media aritmetica (punto medio) di due vertici opposti :

$u = \frac{z + w + (z - w)i}{2}$

$u = z \frac{1+i}{2} + w \frac{1-i}{2}$

☰ Possiamo quindi definire una funzione "centro del quadrato"

$ceq(x, y) = x \frac{1+i}{2} + y \frac{1-i}{2}$

☰ Punti dati A, B, C, D

☰ Punti definiti come centri tramite la funzione **ceq**

$E = ceq(A, B)$

$F = ceq(B, C)$

$G = ceq(C, D)$

$H = ceq(D, A)$

☰ **Ortogonalità e congruenza delle diagonali EG e FH**

☰ Per la definizione della funzione **ceq** abbiamo :

$E = ceq(A, B)$
 $\triangle E = \frac{1}{2}(1+i)A + \frac{1}{2}(1-i)B$ Simplify

$F = ceq(B, C)$
 $\triangle F = \frac{1}{2}(1+i)B + \frac{1}{2}(1-i)C$ Simplify

$G = ceq(C, D)$
 $\triangle G = \frac{1}{2}(1+i)C + \frac{1}{2}(1-i)D$ Simplify

$H = ceq(D, A)$
 $\triangle H = \frac{1}{2}(1-i)A + \frac{1}{2}(1+i)D$ Simplify

☰ pertanto :

$\triangle G - E = -\frac{1}{2}(1+i)A - \frac{1}{2}(1-i)B + \frac{1}{2}(1+i)C + \frac{1}{2}(1-i)D$ Substitute

$\triangle H - F = \frac{1}{2}(1-i)A - \frac{1}{2}(1+i)B - \frac{1}{2}(1-i)C + \frac{1}{2}(1+i)D$ Substitute

☰ **MOLTIPLICANDO PER i IL NUMERO COMPLESSO $G - E$:**

$\triangle (G - E)i = -\frac{1}{2}iA + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}iB - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}iC - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}iD + \frac{1}{2}D$ Expand

☰ **OTTENIAMO QUINDI $H - F$.**

Gruppo di lavoro 3: Aldo Boiti, Mauro De Vita, Giovanni Olivieri, Rossana M. Rossi Bucciarelli.

Strumenti software

Cabri II

Collocazione temporale

Si può affrontare il problema già alla fine del primo anno della scuola superiore, quando si è già affrontato un discorso di base sui quadrilateri e sulle loro proprietà. È anche necessario che i ragazzi conoscano i criteri di congruenza dei triangoli.

Aspetti didattici ed eventuale sperimentazione in classe

Specialmente in laboratorio, la didattica dovrebbe essere basata sulla discussione di problemi, effettuando cioè una vera e propria attività di *problem solving*. Questo problema è di tipo "aperto", nel senso che non chiede di dimostrare, ma chiede invece di indagare sulle proprietà e le caratteristiche di una particolare figura, la cui costruzione è connessa a quella di un'altra figura.

L'esplorazione della figura con *Cabri* si rivela determinante per la formulazione di congetture relative alla soluzione del problema.

Il problema è stato proposto in una classe prima di un Istituto tecnico industriale e gli esiti della sperimentazione sono riportati insieme alla successiva traccia di soluzione.

Nodi concettuali

I principali argomenti che ruotano attorno alla soluzione del problema sono:

- proprietà dei quadrilateri;
- criteri di congruenza dei triangoli;
- angoli interni dei poligoni.

Approfondimenti e collegamenti

La risoluzione del problema consente di rafforzare la conoscenza delle proprietà dei quadrilateri e, contemporaneamente, di acquisire sempre più padronanza nell'uso del software.

Tracce della procedura di soluzione e della sperimentazione¹

Il problema è stato proposto in una classe prima dell'I.T.I.S. "G. Ferraris" di San Giovanni Valdarno (Ar). La classe è composta da 27 alunni abituati a lavorare per problemi con l'aiuto del software *Cabri*. L'orario curriculare prevede due ore settimanali in laboratorio dove, per tutto l'anno scolastico, è stato svolto il programma di geometria. I ragazzi hanno a disposizione 20 computer di cui 8 con processore Pentium. Anche se molti hanno la possibilità di lavorare con un com-

¹ La sperimentazione in classe è stata condotta da Rossana M. Rossi Bucciarelli

puter tutto per loro, i ragazzi tendono comunque a lavorare in gruppo, confrontandosi con i compagni. La cosa potrebbe essere positiva se c'è vera cooperazione. L'esperienza qui riportata è stata sviluppata in due incontri di due ore ciascuno. Il lavoro si è svolto nelle ultime due lezioni di laboratorio dell'anno scolastico 1999/2000.

Gli allievi si sono trovati tutti d'accordo sulla necessità di creare una macro per costruire i quadrati sui lati del quadrilatero.

Successivamente i ragazzi hanno costruito diverse figure salvandole in altrettanti file: uno in cui il quadrilatero in esame era un quadrato, uno in cui era un rettangolo, uno in cui era un rombo, uno in cui era un parallelogramma, uno in cui era un trapezio, uno in cui era un quadrilatero inscritto in una circonferenza, uno in cui era circoscritto e infine uno in cui era convesso ed uno in cui era concavo. In tutti i file i ragazzi hanno tracciato le diagonali del quadrilatero $EFGH$. La cosa è venuta spontanea nei primi file, data la regolarità della figura, e poi è continuata per analogia di comportamento.

La dimostrazione del fatto che $EFGH$ è un quadrato se $ABCD$ è o un quadrato o un rettangolo, è stato facile per tutta la classe. Hanno lavorato sulla congruenza dei triangoli: DCH , ABF , DAE e CGB . I passi successivi sono invece stati fatti solo da alcuni gruppi. Lavorando sulle figure gli alunni hanno stabilito che se i lati di $ABCD$ sono a due a due paralleli, $EFGH$ è un quadrato, e che negli altri è un quadrilatero avente le diagonali perpendicolari e congruenti.

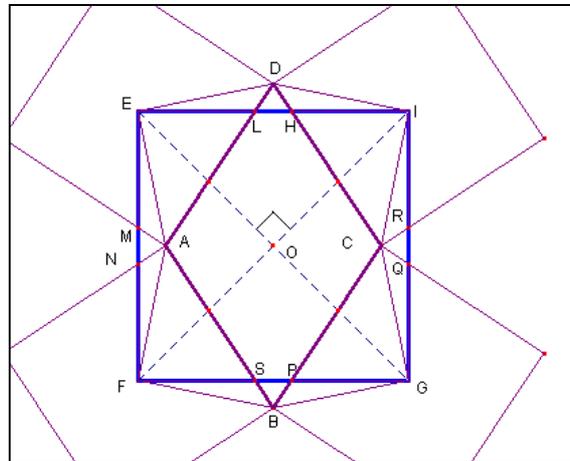


Figura 1

A questo punto è cominciato un grande lavoro per riuscire a dimostrare quanto visto.

Nel caso del rombo (Figura 1) si formano quattro triangoli congruenti: $EDI = ICG = GBF = FAE$. In un primo momento gli allievi avevano tentato di lavorare sui triangoli EMA , ELD , DHI , ICR , CQG , PBG , SFB , AFN , ma hanno dovuto abbandonare questa strada.

La cosa è stata ripetuta nel caso del parallelogramma (Figura 2).
 Il tentativo di applicare lo stesso percorso ad un quadrilatero irregolare (Figura 3)
 ha portato, già nel momento della costruzione della figura, alla conclusione che
 non si formavano triangoli congruenti.

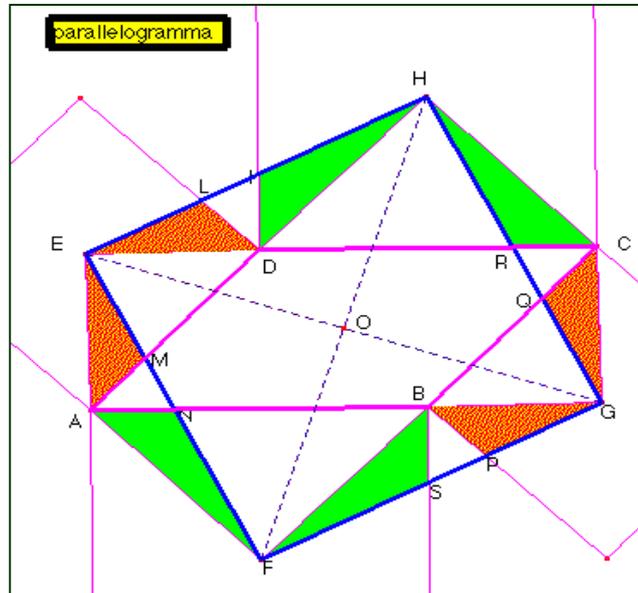


Figura 2

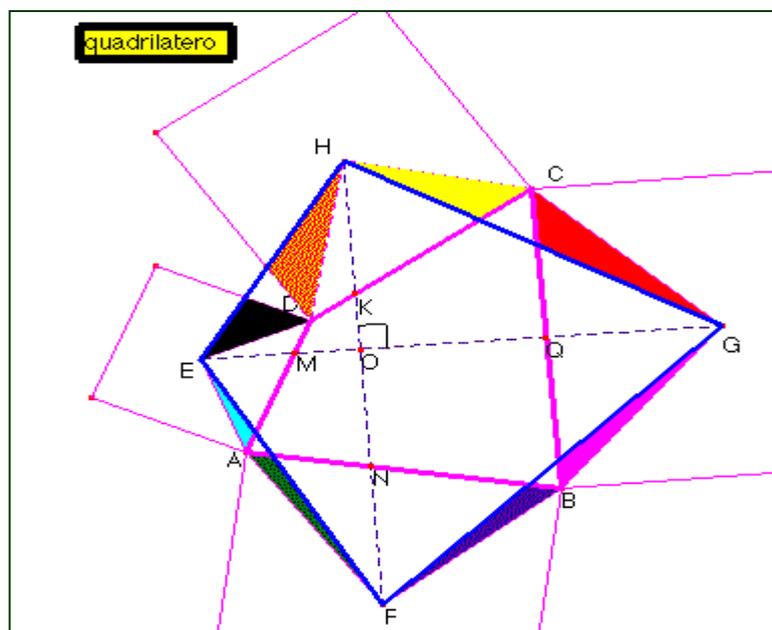


Figura 3

Due gruppi, giunti ad un punto di stallo e avendo verificato che E, F, G e H sono punti dei lati di un quadrato che ha i lati paralleli alle diagonali di $EFGH$ (Figura 4) hanno costruito un quadrato $A'B'C'D'$, hanno preso un punto H su $D'C'$ e un punto G su $C'B'$, hanno tracciato le perpendicolari HF e GE da H e da G ai lati opposti $A'B'$ e $A'D'$, hanno costruito il poligono $EFGH$ hanno costruito il quadrato di centro H e vertice C (punto qualsiasi interno ad $A'B'C'D'$, un altro di centro G e vertice C (trovando così anche il vertice B), un altro di centro F e vertice B (trovando così anche il vertice A), un altro di centro E e di vertice A .

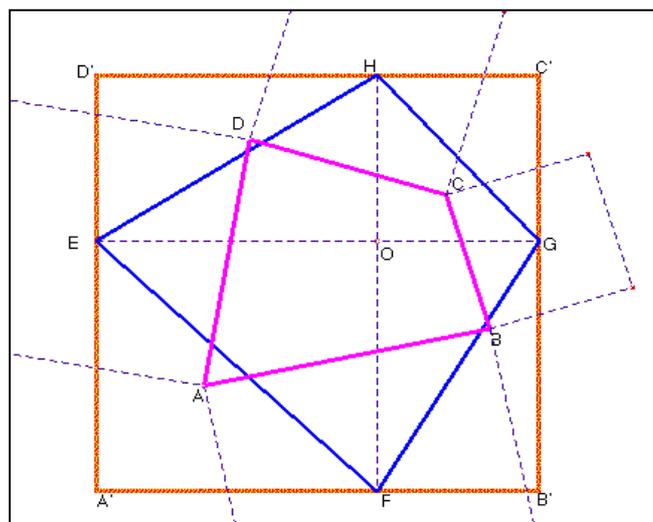


Figura 4

La constatazione che D coincideva con il punto già trovato con la costruzione del primo quadrato e che muovendo alternativamente H, G e C si potevano ottenere tutti i quadrilateri $ABCD$ ha verificato le conclusioni avanzate dai ragazzi. Inoltre, trovati i punti medi M ed N dei lati del quadrato $C'D'$ e $B'C'$, se si porta a coincidere H con M e G con N (in questo caso $EFGH$ è un quadrato), si può verificare, muovendo C , che il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma. Questo fatto rimane sempre solo e solamente una congettura e si ha quindi necessità di procedere a una dimostrazione.

MATEMATICA E SOFTWARE DIDATTICI

(Materiali relativi al Progetto Eccellenza – 2000)

I software didattici per la matematica si stanno sempre più diffondendo, soprattutto quelli che consentono attività di esplorazione e di problem solving. Molti docenti di matematica della scuola secondaria di secondo grado si sono posti il problema di come affrontare nell'attività di insegnamento-apprendimento il problema dell'eccellenza, per il quale è più difficile, rispetto al recupero, trovare materiali che possano risultare stimolanti per gli studenti. Il progetto è ormai al terzo anno e questo è il terzo volume che viene pubblicato.

Nel presente volume sono contenuti i materiali elaborati dagli insegnanti che hanno partecipato alle attività e il cui numero è cresciuto negli anni. Anche le modalità dell'esperienza sono, in parte, cambiate, ma è rimasta costante l'attenzione a evidenziare quali sono i problemi in cui l'utilizzo del software produce un reale guadagno formativo e quali invece quelli in cui può risultare addirittura un appesantimento inutile.

Va infine sottolineato che i problemi sono stati elaborati e discussi in gruppo e, talvolta, sperimentati in classe.

Il volume è stato pensato come strumento per gli insegnanti spesso alla ricerca di problemi, e relative soluzioni "non usuali".

Ha curato la presente pubblicazione **Aurelia Orlandoni**, insegnante di matematica di scuola secondaria di secondo grado, che da molti anni collabora con l'IRRE Emilia Romagna e da due anni è comandata presso tale Istituto.