I.R.R.S.A.E. EMILIA - ROMAGNA

Matematica e software didattici

a cura di
Giovanni Margiotta

G. Accascina, P. Antognini, AM. Arpinati, G.C. Barozzi, L. Benaglia, S. Bernecoli, P. Berneschi, A. Boiti, R. Bonarelli, S. Bornoroni, M. Calvani, P. Carboni, A. Cornia, E. Crespina, M. De Vita, M. Franceschin, R. Guidetti, M. Lacchini, M.C. Maccaferri, B. Magnani, G. Margiotta, L. Monica, F. Noé, G. Olivieri, R. Penolazzi, E. Pontorno, M. Puppi, R. Ricci, F. Rohr, R. Rossi Bucciarelli, A. Rotteglia, S.D. Sarti, M. Sparapani, G. Sperti, L. Tomasi, G. Toninel, R. Verdiani

Indice

Presentazione

Il 22, 23, 24 aprile 1998 presso l'hotel Principe di Bellaria (FO) si è svolto, a cura dell'IRRSAE dell'Emilia Romagna, un seminario residenziale, rivolto a docenti di Scuola Secondaria di 2° grado, avente per titolo: "Matematica e software didattici". Erano presenti 36 docenti provenienti da 7 regioni italiane: Emilia Romagna, Lombardia, Veneto, Friuli Venezia Giulia, Marche, Lazio, Toscana; era presente anche un docente del Canton Ticino.

Il Seminario si inserisce in un progetto pluriennale dell'IRRSAE-Emilia Romagna, denominato " Eccellenza nel triennio delle superiori". Tale progetto si propone di curare in modo particolare l'aggiornamento dei docenti per quanto riguarda la disciplina che essi insegnano e si compone di due parti; una parte prevede forme di lavoro ed autoaggiornamento per docenti di latino e di greco, l'altra parte prevede forme di lavoro e di autoaggiornamento per docenti di matematica.

A parere dei tecnici IRRSAE che coordinano questo progetto vi è una forte richiesta, da parte dei colleghi che operano nelle scuole, di proposte di questo genere, fortemente disciplinari; è, infatti, un dato oggettivo che molte agenzie formative ed anche altre iniziative che fanno capo agli stessi IRRSAE regionali, curano un altro versante: propongono cioè corsi di aggiornamento ad ampio spettro, che vedono coinvolti contemporaneamente docenti della stessa disciplina appartenenti a varie fasce scolastiche o anche docenti di diverse discipline appartenenti a diverse fasce scolastiche.

Tutti i partecipanti al corso sopra citato di Bellaria erano invece "selezionati", in quanto tutti docenti di matematica di scuola superiore e quasi tutti con particolare interesse per il tema proposto. Condizione indispensabile per poter accedere al corso era anche quello di avere una preparazione "informatica" specifica, era necessario cioè conoscere bene almeno un paio di software didattici rivolti alla matematica. Dei 36 docenti coinvolti, circa la metà lavora nei licei scientifici.
E' opinione degli organizzatori del seminario che ciascuno dei partecipanti sarà poi in grado di riportare nella sua scuola e nella sua città i principali input teorici ricevuti ed i materiali prodotti, innescando così una sorta di reazione a catena.
Referenti scientifici dell'attività erano i professori Giuseppe Accascina dell'Università La Sapienza di Roma e Giulio Cesare Barozzi dell'Università di Bologna.

Obiettivo principale delle tre giornate di lavoro era quello di meglio mettere a fuoco l'utilizzo che viene fatto nella realtà delle classi di alcuni ambienti informatici che il mercato offre ormai da anni ai docenti di matematica; da più parti, infatti, erano state rivolte all'Istituto sollecitazioni per promuovere un momento di riflessione e discussione su alcuni importanti aspetti didattici legati all'uso di questi software.

Per dare l'avvio ad una discussione importante e complessa come quella indicata (e che sicuramente non può espletarsi nell'ambito di un solo Seminario) si è proceduto nella seguente maniera: a tutti i partecipanti è stata inviata, prima dell'incontro di Bellaria, una collezione di 31 problemi, con l'invito a risolverne almeno due, preferibilmente con uno dei seguenti software: *Cabri, Derive, Mathematica*. Per ogni soluzione proposta doveva essere anche indicato il motivo per cui era stato scelto quel determinato software.

Giunti a Bellaria, dopo due relazioni "stimolo" dei professori universitari, i docenti sono stati suddivisi in gruppi di lavoro.
I criteri di formazione dei gruppi sono stati ispirati a questi tre fattori:
- si è tenuto conto degli esercizi che ciascun partecipante aveva già svolto a casa;
- si è tenuto conto dei software che ciascun partecipante aveva usato;
- si è cercato di mettere insieme docenti provenienti da diverse regioni.

Interessanti alcune modalità di lavoro subito emerse:

a) molti docenti hanno risolto a casa più dei due esercizi richiesti, affermando che erano quasi tutti molto interessanti; si veda la tabella di pagina 34, dove le diverse sigle hanno il seguente significato: C=*Cabri-Géomètre,* D=*Derive*, M=*Mathematica*; Ma=*Maple*, GSP=*Geometry Sketchpad,* A=*Altro*; alcuni docenti hanno sottolineato come, sotto la sigla *Altro* vada inserita la soluzione a mano, tradizionale, di un esercizio, per non dimenticare che non sempre è utile ricorrere per forza all'ausilio dell'elaboratore;
b) i problemi "più gettonati" (si veda l'elenco dei problemi) sono stati i numeri: 3, 6, 2, 10, 11, 8, 14, 4, 9, 13, 17, 19, 27.
c) molti esercizi si prestavano evidentemente ad essere risolti con più software; ad esempio l'esercizio n°2 è stato risolto da sette colleghi con il *Derive*, da sette con il *Mathematica*, da uno con il *Cabri-Géomètre* , e da tre con "*Altro*" software;
d) alcuni colleghi hanno risolto uno stesso esercizio con due software diversi;
e) i software più usati sono stati indubbiamente *Cabri e Derive,* anche perché presentano una soglia più bassa di "iniziazione"; *Mathematica* ha evidenziato un piccolo gruppo di forti affezionati;
f) durante lo svolgimento dei lavori si è fatto riferimento ad altri software, non richiesti inizialmente, quali: *Maple, MathView* e *G-Lab*; alcuni colleghi sono inoltre apparsi molto decisi nel non tralasciare, nelle loro classi, la programmazione in Pascal.
Come sempre succede in queste occasioni si è aperta una vivace discussione fra i forti sostenitori della programmazione in Pascal e coloro che pensano invece che il Pascal un po' alla volta sarà completamente rimpiazzato da questi nuovi micromondi informatici.

A ciascun gruppo di lavoro è stato richiesto di approfondire e discutere collegialmente la soluzione solo di alcuni esercizi. Per ogni esercizio si è cercato di mettere a fuoco:
- in quale classe l'esercizio potrebbe essere proposto,
-quali le finalità e gli obiettivi che possono essere conseguiti con la sua soluzione,
- quali i nodi concettuali su cui porre maggiore attenzione,
- quali gli approfondimenti e i collegamenti che possono essere attivati.

Le soluzioni proposte dai singoli gruppi di lavoro sono state discusse collegialmente alla fine del seminario.
E' stato chiesto ai coordinatori di ogni singolo gruppo di far pervenire agli organizzatori del convegno la stesura definitiva delle risoluzioni dei problemi da essi trattati.

In questo volume abbiamo pensato di riportare la testimonianza del lavoro fatto, sicuri che possa essere di aiuto ad altri colleghi interessati a queste tematiche e che fanno matematica nelle loro classi ricorrendo anche all'ausilio dell'elaboratore.
In un momento in cui la multimedialità sta entrando in maniera massiccia nei vari Istituti scolastici, pensiamo che le presenti proposte possano avere una loro validità e concretezza.

Nei siti dell'IRRSAE Emilia Romagna e dell'IRRSAE Lazio saranno disponibili tutti i file collegati a queste attività.

Prima di chiudere questa breve presentazione un grazie al professore Accascina che tanto ha contribuito, anche dal punto di vista organizzativo, per la buona riuscita del seminario e al professore Margiotta che ha curato la stesura del presente volume, un grazie al Direttivo dell'IRRSAE Emilia Romagna che è uno fra i pochi in Italia che sostiene iniziative legate alla matematica e un grazie alla casa editrice Loescher di Torino che ha assunto una parte degli oneri finanziari relativi al Seminario residenziale.

Bologna 15 dicembre 1998

Anna Maria Arpinati
(tecnico IRRSAE-ER)

La "dimostrazione" in geometria con l'aiuto di software didattici

Giuseppe Accascina

(Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici,
Università "La Sapienza" di Roma)

Il titolo di questa chiacchierata apre un campo sterminato.
Io mi limiterò a descrivere alcuni esempi di "dimostrazioni" di geometria svolte con l'aiuto di *DERIVE* (ma il discorso è sempre estendibile a tutti i programmi di calcolo simbolico, quali *MATHEMATICA, MAPLE*, ed, in alcuni casi particolari, a *CABRI*). Spero che gli esempi da me scelti servano a suscitare dubbi e discussioni tra i partecipanti a questo seminario e, successivamente, tra i lettori degli Atti.

Primo Esempio
Fissato in un piano un sistema di assi cartesiani, ci chiediamo se i tre punti:

$$A = (-4,3) \quad , \quad B = \left(\frac{5}{2}, -\frac{12}{5}\right) \quad , \quad C = \left(\frac{1}{2}, -\frac{239}{325}\right)$$

siano allineati.

Se chiediamo ad uno studente di disegnare i tre punti su un foglio di carta, egli molto probabilmente ci risponderà che i punti appaiono allineati ma che non è sicuro che lo siano perché il suo disegno è impreciso.
Suggeriamogli di fare il disegno usando *DERIVE.* Riportiamo il listato del file così come appare sullo schermo del computer.

#1: "file: trepunti"

#2: [-4, 3]

#3: $\left[\frac{5}{2}, -\frac{12}{5}\right]$

#4: $\left[\frac{1}{2}, -\frac{239}{325}\right]$

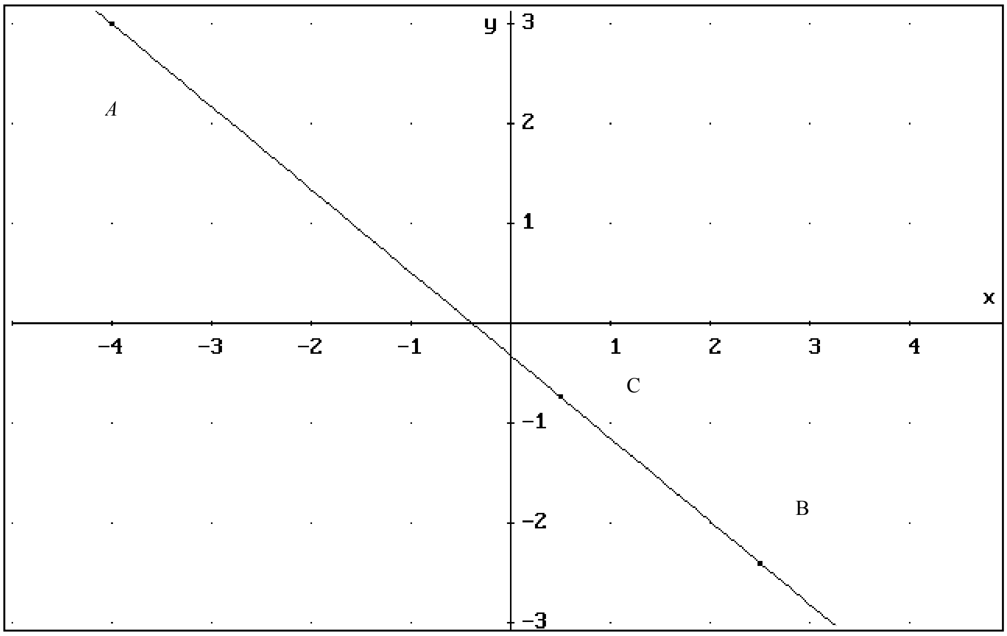
Possiamo ora disegnare i tre punti.
I punti "sembrano" allineati anche quando ingrandiamo il disegno.
Ma ciò ovviamente non ci soddisfa. Scriviamo quindi l'equazione della retta passante per due punti generici (istruzione #5), consideriamo la retta passante per i punti A e B (istruzione #6) e semplifichiamo (istruzione #7)

#5: RETTADUEPTI(x1, y1, x2, y2) := (y2 − y1)·(x − x1) = (x2 − x1)·(y − y1)

#6: $\text{RETTADUEPTI}\left[-4, 3, \frac{5}{2}, -\frac{12}{5}\right]$

#7: $-\frac{27\cdot(x+4)}{5} = \frac{13\cdot(y-3)}{2}$

La retta, una volta disegnata, "appare" passare per il punto *C* anche quando ingrandiamo il disegno.



Per rendere più comprensibile il disegno ottenuto con *DERIVE*, sono stati aggiunti i simboli A,B,C accanto ai tre punti.

A questo punto lo studente inesperto invariabilmente conclude che i tre punti sono allineati.
Il fatto che il disegno fatto dal computer sia molto più preciso del disegno fatto a mano fa sì che lo studente abbandoni tutte le precauzioni usate fino a quel momento.
Spieghiamo allo studente che non è il caso di abbandonare le precauzioni.
Sempre utilizzando *DERIVE* sostituiamo le coordinate del punto *C* nell'equazione della retta (istruzione #8) e semplifichiamo (istruzione #9).

#8: $$-\frac{27\cdot\left[\frac{1}{2}+4\right]}{5}=\frac{13\cdot\left[-\frac{239}{325}-3\right]}{2}$$

#9: false

Il computer ci dice che l'uguaglianza non è verificata. I tre punti non sono allineati.
Ma possiamo fidarci della risposta?
I seguenti calcoli dovrebbero rassicurarci.

$$\#10: \ -27 \cdot \left[\frac{1}{2} + 4\right] \cdot 2 = -243$$

$$\#11: \ 13 \cdot \left[-\frac{239}{325} - 3\right] \cdot 5 = -\frac{1214}{5}$$

$$\#12: \ -243 \cdot 5 = -1215$$

Abbiamo "dimostrato" che i tre punti sono allineati.

Nascono però spontanee le seguenti domande.
Domanda 1. E' opportuno l'uso del software in casi analoghi a questo?
Domanda 2. La verifica dell'appartenenza di un punto ad una retta (oppure dell'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti) fatta con un programma di calcolo simbolico è accettabile?

Supponiamo ora di usare *CABRI* in una situazione analoga. Ci costruiamo una retta passante per due punti A e B distinti. Determiniamo per mezzo di una qualche costruzione geometrica un punto C e chiediamo a *CABRI* se il punto C appartenga alla retta. Ci possiamo fidare della risposta che ci darà *CABRI*?
Domanda 3. La verifica dell'appartenenza di un punto ad una retta (oppure dell'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti) fatta con *CABRI* è accettabile?

Secondo Esempio
Vogliamo determinare la formula della distanza di un punto P_0 da una retta r assegnata in forma cartesiana implicita.
Usiamo *DERIVE*. Poiché con *DERIVE* non è possibile usare gli indici, indichiamo il punto con $P0 = (x0, y0)$. Indichiamo poi con $ax + by + c = 0$ l'equazione della retta r.
Scriviamo l'equazione della retta r (istruzione #2), l'equazione della retta s passante per $P0$ e perpendicolare ad r (istruzione #3), il sistema determinato dalle rette r e s (istruzione #4) e determiniamone la soluzione (istruzione #5).

```
#1:  "file: distanza"

#2:  a·x + b·y + c = 0

#3:  b·(x - x0) - a·(y - y0) = 0

#4:  [a·x + b·y + c = 0, b·(x - x0) - a·(y - y0) = 0]
```

$$\#5: \ \left[x = \frac{b^2 \cdot x0 - a \cdot (b \cdot y0 + c)}{a^2 + b^2}, \ y = \frac{a^2 \cdot y0 - a \cdot b \cdot x0 - b \cdot c}{a^2 + b^2}\right]$$

Diamo quindi un nome alle coordinate del punto di interserzione. Esso è la proiezione del punto $P0$ sulla retta r (istruzioni #6 e #7). Introduciamo la formula della distanza tra due punti (istruzione #8) e la distanza punto - retta come la distanza tra il punto e la sua proiezione sulla retta (istruzione #9). Semplificando otteniamo la formula cercata (istruzione #10).

$$\#6: \quad \mathrm{XPROIEZPTORETTA}(x0, y0, a, b, c) := \frac{b^2 \cdot x0 - a \cdot (b \cdot y0 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\#7: \quad \mathrm{YPROIEZPTORETTA}(x0, y0, a, b, c) := \frac{a^2 \cdot y0 - a \cdot b \cdot x0 - b \cdot c}{a^2 + b^2}$$

$$\#8: \quad \mathrm{DISTANZADUEPTI}(x1, y1, x2, y2) := \mathrm{SQRT}((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2)$$

$$\#9: \quad \mathrm{DISTANZAPTORETTA}(x0, y0, a, b, c) := \mathrm{DISTANZADUEPTI}(x0, y0, \mathrm{XPROIEZPTORETTA}$$

$$\#10: \quad \frac{|a \cdot x0 + b \cdot y0 + c|}{\mathrm{SQRT}(a^2 + b^2)}$$

Scriviamo per intero l'istruzione #9, troppo lunga per apparire nella sua interezza sullo schermo:

DISTANZAPTORETTA(x0,y0,a,b,c):=DISTANZADUEPUNTI(x0,y0,XPROIEZPTORETTA(x0,y0,a,b,c),PROIEZPTORETTA(x0,y0,a,b,c))

Facciamo un esempio assegnando dei valori alle variabili x0,y0,a,b,c (istruzione #11).
Semplificando le espressioni #2,#3,#5 e #10 otteniamo l'equazione della retta r (istruzione #12), della retta s passante per P0 e ortogonale a r (istruzione #13), il punto di intersezione delle rette r e s (istruzione #14) e la distanza tra P0 e r (istruzione #15).

$$\#11: \quad \left[x0 := -\frac{1}{2}, \ y0 := 2, \ a := 2, \ b := -3, \ c := -\frac{3}{2}\right]$$

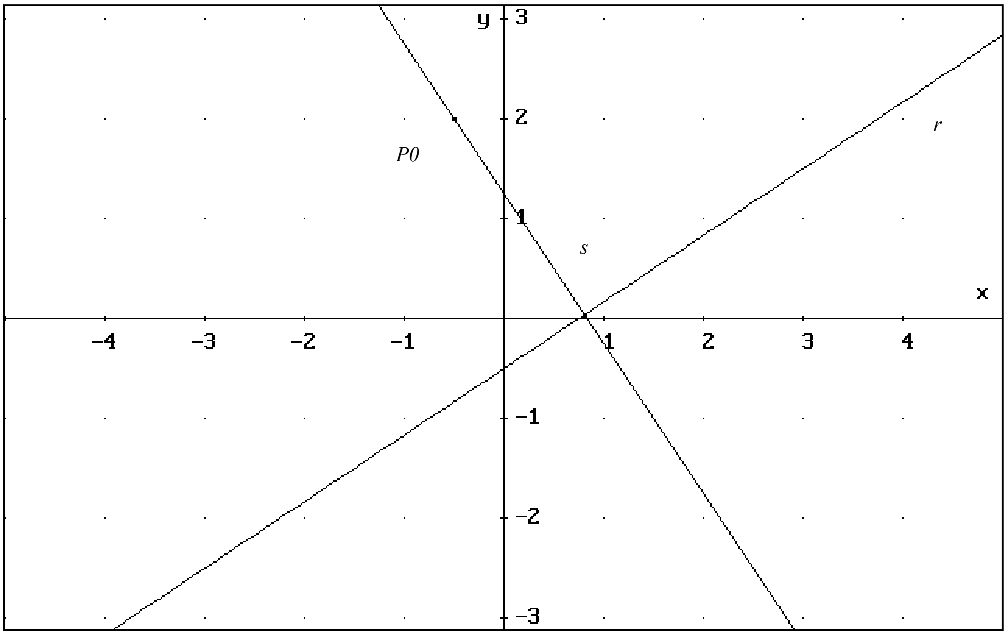
$$\#12: \quad 2 \cdot x - 3 \cdot y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\#13: \quad -\frac{6 \cdot x + 4 \cdot y - 5}{2} = 0$$

$$\#14: \quad \left[x = \frac{21}{26}, \ y = \frac{1}{26}\right]$$

$$\#15: \quad \frac{17 \cdot \mathrm{SQRT}(13)}{26}$$

Possiamo illustrare il procedimento seguito con un disegno.



Ci poniamo le seguenti domande.
Domanda 4. Possiamo accettare come dimostrazione il procedimento appena descritto?
Domanda 5. E' didatticamente conveniente utilizzare un programma di calcolo simbolico per una dimostrazione di questo genere?

Terzo Esempio
Nel primo esempio abbiamo usato *DERIVE* per "dimostrare" l'allineamento di tre punti. Nel secondo esempio abbiamo usato *DERIVE* per "dimostrare" una formula.
Vogliamo ora usare *DERIVE* per "dimostrare" il seguente teorema:
Siano date una terna di punti A, B e C non allineati e una terna di punti AF, BF e CF tali che:

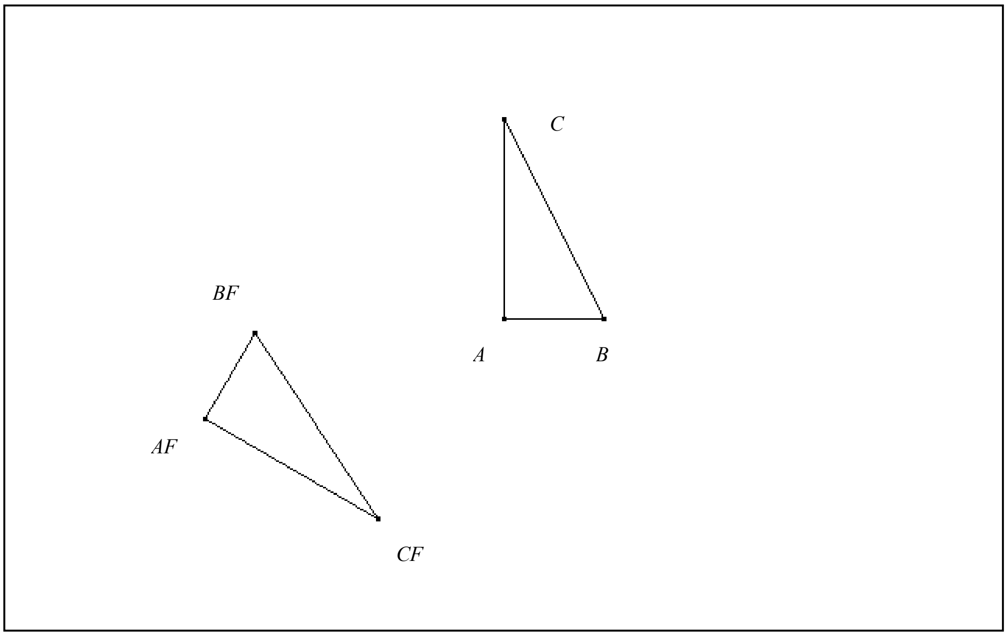
$$d(A,B) = d(AF,BF) \ , \ d(A,C) = d(AF,CF) \ , \ d(B,C) = d(BF,CF)$$

(con $d(A,B)$ intendiamo la distanza tra i punti A e B).
Esiste allora una ed una sola isometria f tale che:

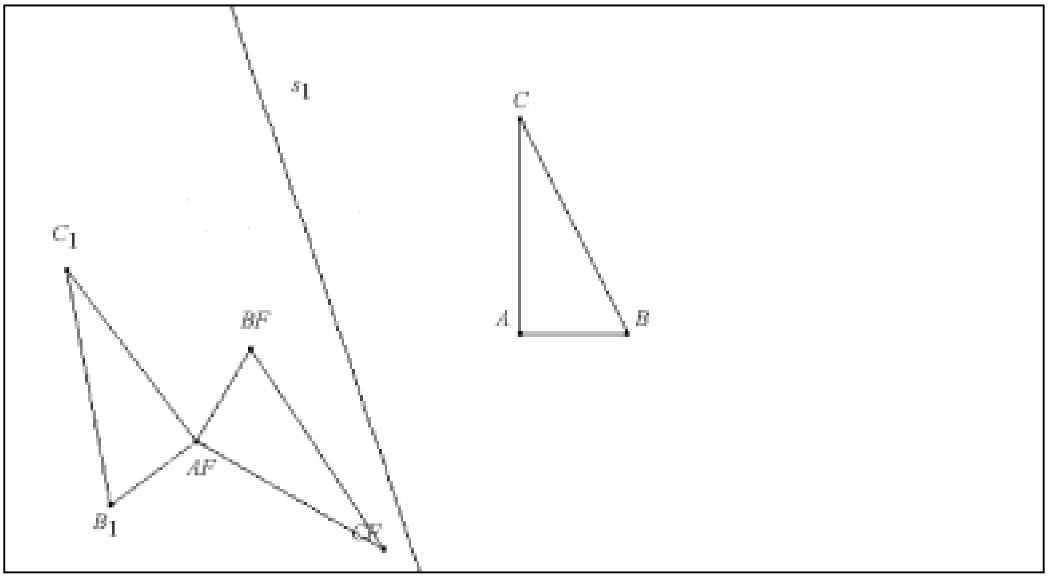
$$f(A) = AF \ , \ f(B) = BF \ , \ f(C) = CF.$$

Per illustrare la dimostrazione di questo teorema usiamo il file ISOMETRIA.
Non ne trascriviamo qui il listato, molto lungo. Ad ogni modo questo file, come tutti gli altri file descritti in questo libro, è consultabile in rete con le modalità descritte nell'ultima pagina di copertina.
In effetti in questo caso non ci interessa tanto il file quanto il suo uso. Utilizziamo infatti *DERIVE* in modo differente dai casi precedenti. I file scritti nei primi due casi sono molto semplici. Possono essere scritti senza difficoltà dagli stessi studenti. In questo caso invece non è necessario (e forse non è opportuno)

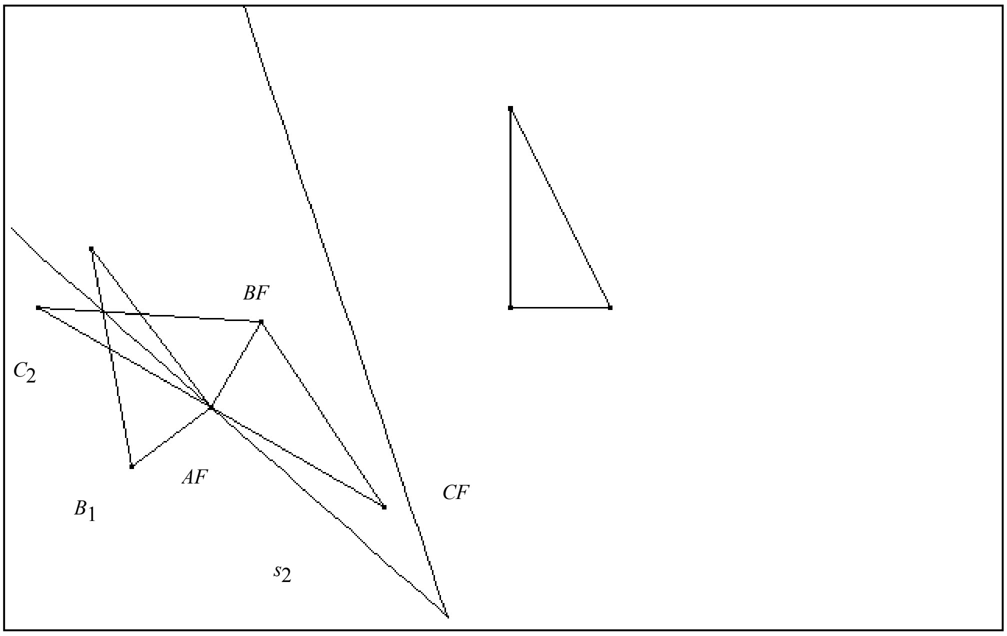
chiedere agli studenti di scrivere loro stessi il file. Possiamo anche evitare di mostrarlo esplicitamente agli studenti.
Lo stesso docente che vuole usare il file può evitare, se vuole, di analizzare, il file. Egli deve solo assegnare i valori alle coordinate della prima terna di punti non allineati e ai tre parametri che permettono di assegnare una seconda terna di punti verificanti le condizioni richieste dal teorema. Deve poi disegnare alcuni enti geometrici. Per rendere più agevole ciò abbiamo inserito alla fine del file tutte le equazioni degli enti geometrici che devono essere disegnati.
Iniziamo ad utilizzare il nostro file disegnando la terna iniziale *A,B,C* e la terna finale *AF,BF,CF*.
Per rendere il tutto più visibile disegniamo i due triangoli aventi come vertici tali terne.



Come al solito sono stati aggiunti al disegno di *DERIVE* alcuni simboli.
Dimostriamo innanzitutto l'esistenza di un'isometria che porti la terna iniziale di punti nella terna finale. Mostriamo che una tale isometria è la composizione di al più tre simmetrie
Se $A \neq AF$, consideriamo la simmetria assiale f_1 avente come asse s_1 l'asse del segmento di estremi A e AF. Se $A = AF$, poniamo f_1 uguale alla trasformazione identica. Disegniamo le immagini A_1, B_1 e C_1, attraverso f_1, di A, B e C. Si ha ovviamente $A_1 = AF$.

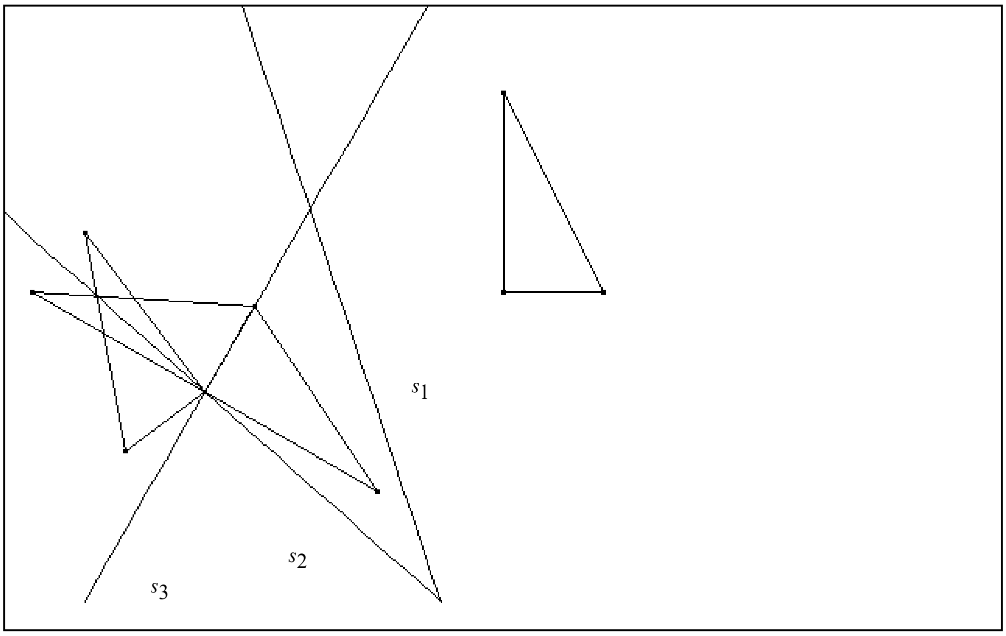


Se $B_1 \neq BF$, consideriamo la simmetria assiale f_2 avente come asse s_2 l'asse del segmento di estremi B_1 e BF. Se $B_1 = BF$, poniamo f_2 uguale alla trasformazione identica. Disegniamo le immagini A_2, B_2 e C_2, attraverso f_2, di A_1, B_1 e C_1.



Si vede che si ha $A_2 = AF$ e $B_2 = BF$.

Se $C_2 \neq CF$, consideriamo la simmetria assiale f_3 avente come asse s_3 l'asse del segmento di estremi C_2 e CF. Se $C_2 = CF$, poniamo f_3 uguale alla trasformazione identica. Disegniamo le immagini A_3, B_3 e C_3, attraverso f_3, di A_2, B_2 e C_2.

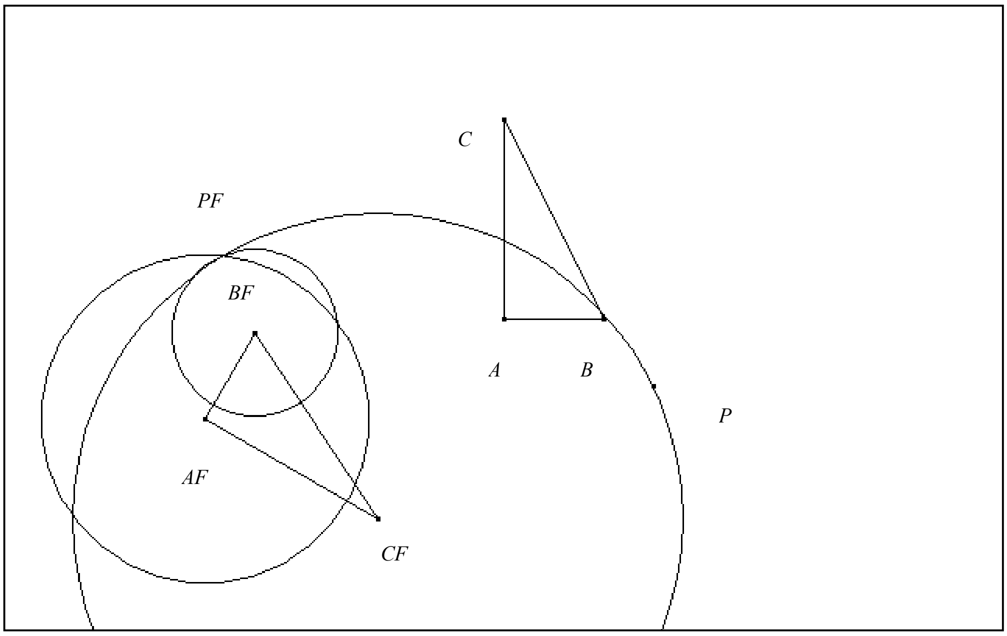


Si vede che si ha $A_3 = AF$, $B_3 = BF$ e $C_3 = CF$.
L'isometria $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ verifica pertanto le proprietà richieste.

Analizziamo la "dimostrazione" appena data.
L'uso di un programma di calcolo simbolico ha fatto sì che il disegno sia molto accurato. Senza l'uso del calcolo simbolico gli errori di approssimazione avrebbero reso illeggibile il disegno.
Provare, per credere, ad utilizzare qualcuno dei software didattici dedicati alle trasformazioni geometriche in commercio già da qualche anno.
La precisione del disegno ha però qualche inconveniente.
Ritorniamo alla parte iniziale della nostra dimostrazione. Ad un certo punto abbiamo scritto "Si vede che si ha $A_2 = AF$ e $B_2 = BF$".
In effetti dal disegno "si vede". Ma è proprio così?
Perché, per esempio, $A_2 = AF$?
Lo studente di solito, affascinato dalla precisione del disegno, non si pone questa domanda.
Supponiamo invece di illustrare la dimostrazione facendo un disegno alla lavagna o su un foglio di carta. Ecco che qualunque studente si chiede perché $A_2 = AF$. Si pone il problema di dimostrare che il punto A_2 appartiene all'asse s_2. Il nostro

studente si rende ora conto che la "dimostrazione" data sopra non è completa. Non gli basta più dire "si vede che". Deve dimostrarlo. In modo analogo egli si rende conto che deve dimostrare che i punti A_2 e B_2 appartengono all'asse s_3 .

Vogliamo ora dimostrare che esiste una sola isometria verificante le condizioni richieste.
Per far ciò dimostriamo che la conoscenza delle immagini, attraverso un'isometria, dei punti *A,B,C* implica la conoscenza dell'immagine di un qualsiasi punto *P*.
Usiamo il nostro file ISOMETRIA per illustrare la dimostrazione di ciò.
Cancelliamo il disegno precedente e disegniamo di nuovo il triangolo iniziale e il triangolo finale. Disegniamo poi un punto *P*.
Poiché, per definizione, le isometrie conservano le distanze, si ha che l'immagine di *P* deve appartenere alla circonferenza di centro *AF* e raggio uguale alla distanza di *P* da *A*. Disegniamo questa circonferenza.
Operando sui punti *B* e *C* in modo analogo, notiamo che l'immagine di *P* deve appartenere alle circonferenze di centri *BF* e *CF* e raggi uguali alle distanze di *P* dai punti *BF* e *CF* rispettivamente. Disegniamo anche queste due circonferenze.



Deduciamo che l'immagine del punto *P* è necessariamente data dall'unico punto di intersezione *PF* delle tre circonferenze.

Analizzando la dimostrazione appena data, ci rendiamo conto che la precisione del disegno è nello stesso tempo di aiuto e di ostacolo.
Aiuta perché fa "capire" che le tre circonferenze si intersecano in un unico punto.
E' di ostacolo perché molto probabilmente nessuno studente si rende conto che ciò va dimostrato.

Se avessimo infatti fatto il disegno a mano libera, molto probabilmente ogni studente si sarebbe chiesto perché mai la terza circonferenza passi per uno ed un solo dei due punti di intersezione delle prime due circonferenze (e perché mai poi le prime due circonferenze si intersecano in due punti?). Lo studente accorto si rende finalmente conto che l'ipotesi che i punti A,B,C non sono allineati viene sfruttata proprio per dimostrare che le tre circonferenze non possono avere più di un punto di intersezione.

Si impongono le seguenti domande.
Domanda 6. Dal punto di vista didattico è conveniente utilizzare *DERIVE* per illustrare la dimostrazione di questo teorema o in casi analoghi?
Domanda 7. Dal punto di vista didattico è conveniente utilizzare *CABRI* per illustrare la dimostrazione di questo teorema o in casi analoghi?

Chi è interessato all'uso di DERIVE nell'insegnamento della geometria può consultare:
[Accascina, Berneschi, 1998a] e [Accascina, Berneschi, 1998b].

Analizziamo ora i tre file. In essi sono stati volutamente usati solamente i comandi principali di *DERIVE*.
Ciò ha reso i file spesso più lunghi del necessario e poco eleganti.
Si sarebbe potuto operare una scelta diversa. Nel rappresentare i punti, per esempio, si sarebbero potuti usare i vettori. Sarebbe stato quindi utile il comando che permette di estrarre da un vettore una sua componente.
Una scelta di questo genere è stata fatta, per esempio, in [Kutzler, 1995] .
Ci poniamo allora la seguente, ultima, domanda.

Domanda 8. Dal punto di vista didattico è preferibile scrivere file "eleganti" che facciano ampio uso delle possibilità offerte dal programma che stiamo utilizzando?

Nel corso di questa chiacchierata abbiamo posto delle domande e, volutamente, alla maggior parte di esse non abbiamo dato alcuna risposta. In effetti la risposta ad alcune di queste domande poste non è univoca. Essa dipende dagli obiettivi che si è posto l'insegnante.
Supponiamo, per esempio, che un insegnante abbia deciso, per qualche ragione (che in ogni caso deve essere a lui ben chiara) di usare un determinato software. La risposta alla domanda 8 sarà di un certo tipo se egli si è posto l'obiettivo di creare degli esperti nell'utilizzo del software in questione, sarà di tipo diverso se egli si è posto l'obiettivo di far capire agli studenti, attraverso l'uso del software, alcuni concetti matematici. I due obiettivi non sono certamente in contrapposizione. E' compito del docente avere ben chiaro quale dei due sia preponderante e in quale proporzione.

Bibliografia

[Accascina, Berneschi, 1998a]
G.Accascina, P.Berneschi, *Introduzione all'uso di DERIVE in geometria*, Quaderni di didattica della matematica, n.2, IRRSAE Lazio, 1998

[Accascina, Berneschi, 1998b]
G.Accascina, P.Berneschi, *Uso di DERIVE per esplorare le trasformazioni geometriche*, Quaderni di didattica della matematica, n.3, IRRSAE Lazio, 1998

[B Kutzler, 1995]
B.Kutzler, *Matematica con il PC, introduzione a DERIVE*, Media Direct, Bassano del Grappa, 1995 (trad. it. di *Introduction to DERIVE*, Soft Warehouse, 1994).

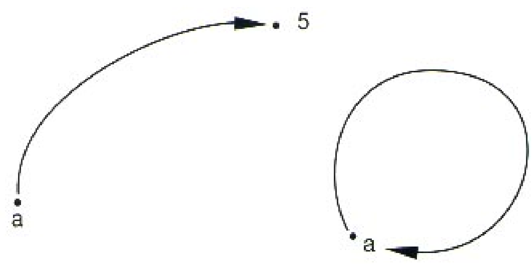
I sistemi di calcolo algebrico nella didattica e nella ricerca matematica

Giulio Cesare Barozzi
Università a di Bologna

L'idea di utilizzare i computer per fare calcoli algebrici risale ad una trentina di anni fa.
I sistemi in grado di svolgere calcoli algebrici sono noti come *Computer Algebra Systems* (CAS).Che cos'è un calcolo algebrico? E' la manipolazione di simboli che rappresentano elementi di una determinata struttura matematica (un campo, un anello, ecc.) senza che ad essi sia necessariamente attributo un valore.
Ad esempio è la possibilità a di percorrere in entrambi i versi l'uguaglianza

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

Nei linguaggi di programmazione tradizionali (FORTRAN, Pascal, BASIC, ecc.) il nome di una variabile è un “segnaposto”, cioè un puntatore ad una locazione di memoria destinata alla scrittura di un dato di un certo tipo (ad es. un numero intero).
Non è possibile manipolare tale variabile prima di averle assegnato un valore.



Nei sistemi di calcolo algebrico una variabile può avere un valore, ma ciò non è necessario: una variabile può avere come “valore” il proprio nome.
A questo proposito voglio ricordare un articolo ormai “storico”:
R. Pavelle, M. Rothstein, J. Fitch: *Algebra al calcolatore*, Le Scienze n. 162 (edizione italiana di *Scientific American*), febbraio 1982
[ristampato in: Matematica e calcolatore, quaderno de Le Scienze n. 14 a cura di G. Lolli e C. Mangione]
Le previsioni contenute in questo articolo si sono puntualmente avverate: quello che gli autori non poterono prevedere fu il fatto che, almeno per i sistemi di Computer Algebra più semplici (ad es. DERIVE) sarebbe stato possibile implementarli su calcolatrici poco più che tascabili.

In questo momento (primavera 1998) il più piccolo sistema di calcolo algebrico è la versione ridotta di DERIVE che risiede sulla calcolatrice TI-92. Il linguaggio di cui essa dispone può essere considerato come una sorta di BASIC strutturato o, se si vuole, di Pascal senza dichiarazione dei tipi delle variabili. La cosa interessante è che, a differenza dei linguaggi appena citati, si possono mescolare istruzioni tipiche della programmazione strutturata (If ... Then ... Else, While ... EndWhile, ecc.) con manipolazioni tipicamente algebriche quali sviluppi, sostituzioni, derivazione e integrazione ecc.
Un piccolo esempio: il listato seguente, scritto nel linguaggio della TI-92, realizza il classico metodo di Newton per determinare uno zero di una funzione f a partire da un'approssimazione iniziale x_0. Il metodo richiede, come è ben noto, la conoscenza tanto di f quanto della derivata prima f'. Ebbene: il programma richiede f (più precisamente: f è un'espressione, contenente la variabile indipendente x, che rappresenta il secondo membro della formula che definisce la funzione $x \to f(x)$); al calcolo di f' provvede il sistema stesso.

```
newton(f,x0)
Prgm
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
Local x,f0,df
d(f,x) → df
f|x=x0 → f0
While abs(f0)>1.E-4
x0-f0/(df|x=x0) → x0
f|x=x0 → f0
EndWhile
Disp " "
Disp "zero = "&string(x0)
EndPrgm
```

Per comprendere il programma scritto basta sapere che il simbolo → indica l'operazione di assegnazione di un valore ad una variabile, mentre una scrittura come `f|x=x0` sta ad indicare il valore assunto dall'espressione `f` quando alla lettera x che in essa compare si assegna il valore `x0`. L'istruzione interessante è:
`d(f,x) → df;`
essa provvede al calcolo della derivata della funzione `f` e ad assegnare l'espressione ottenuta alla variabile `df`.
Il programma è molto rudimentale e largamente perfettibile: ad esempio non è stato incluso un contatore delle iterazioni, nè un criterio di arresto nel caso il metodo fallisca (è molto facile arrestare manualmente il calcolo); ma il lettore comprenderà bene che lo scopo è quello di mostrare la possibilità di scrivere

programmi “ibridi”, in cui si mescolano istruzioni numeriche con istruzioni tipiche del calcolo simbolico.
Possiamo elencare i CAS in ordine storico:
Macsyma, muMATH/muSIMP, DERIVE, Maple, *Mathematica*, Axiom,
oppure in ordine di complessità (richieste hard/soft):
DERIVE, Maple, Mathematica, Macsyma.
Va detto che esistono sistemi nati per il calcolo numerico (come Matlab) che mutuano possibilità di calcolo simbolico da altri sistemi (nel caso specifico da Maple). Qualcosa di analogo accade anche per MathCad, un sistema che è caratterizzato da un'interfaccia tipo foglio elettronico (*spreadsheet*).
La denominazione *Computer Algebra Systems* è fuorviante: si tratta di sistemi integrati di calcolo, in grado di eseguire calcoli numerici, algebrici, grafici (talvolta anche suoni) in un medesimo ambiente. Il valore di questi sistemi (penso soprattutto all'utilizzo didattico) è maggiore della somma dei valori delle loro parti. Esistono sistemi dedicati: in campo matematico esistono sistemi per la teoria dei gruppi, per il calcolo tensoriale, ecc., così come esistono pacchetti per la simulazione di sistemi governati da equazioni differenziali, per l'elaborazione dei segnali, ecc. Ciascuno di questi pacchetti batte un CAS nel proprio ambito specifico, ma questo non toglie nulla al valore dei sistemi integrati.
Veniamo ad un problema più interessante per un pubblico di docenti di scuola secondaria: quello della coesistenza tra linguaggi di programmazione e CAS. In passato c'è stata una polemica su quale linguaggio di programmazione adottare, soprattutto in un primo approccio. I fautori del Pascal vantavano il “guadagno formativo” insito in un'educazione alla programmazione strutturata.
Nessuno disconosce i meriti della programmazione strutturata, ma è un fatto che, a livello internazionale, il Pascal sta lentamente sparendo. La sua grande rigidità , la necessità di dichiarare il tipo di ogni variabile usata e la difficoltà di manipolare liste ne fanno uno strumento poco agile.
Inaspettatamente resistono (opportunamente rimodernati) vecchi cavalli di battaglia come il Fortran. Le ragioni sono da ricercare nel fatto che esistono compilatori altamente ottimizzati, nella possibilità di elaborazione parallela, e nell'esistenza di un patrimonio di programmi (in gergo: *codici*) altamente affidabili.
Si sta andando verso un'estremizzazione: o linguaggi mirati alla massima efficienza (C, ultimamente Java), o linguaggi di altissimo livello che consentono in poche righe di costruire modelli per sistemi anche complessi.
Per illustrare il livello di compattezza che si può ottenere con linguaggi di alto livello, ricordiamo il classico schema di Ruffini-Horner per calcolare il valore di un polinomio in un punto assegnato. La funzione Horner, scritta nel linguaggio del sistema *Mathematica*, calcola il valore nel punto x del polinomio i cui coefficienti (ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile) sono contenuti in lista.

```
In[1]:= Horner[lista_ ,x_ ]:= Expand[Fold[x #1 +
#2 &, 0, lista]]
Esempi:
In[2]:= Horner[{1,2,-3}, 4]
Out[2]= 21
In[3]:= Horner[{a,b,c}, x]
Out[3]= (c + b x + a x^2)
In[4]:= %//TraditionalForm
Out[4]//TraditionalForm= ax^2 + bx + c
```

Ricordiamo poi un risultato relativo alle equazioni algebriche: se un'equazione algebrica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ ha i coefficienti interi, allora le sue (eventuali) soluzioni razionali vanno ricercate tra le frazioni *p/q* dove *p* è un divisore del termine noto a_n e *q* è un divisore del termine direttivo a_0. La funzione seguente, ancora scritta nel linguaggio del sistema *Mathematica*, prende in ingresso la lista dei coefficienti dell'equazione e produce in uscita le eventuali soluzioni razionali.

```
In[5] := radiciRazionali[coefficienti_] :=
Module[{lista},
lista= Flatten[Outer[Times,
Divisors[Last[coefficienti]],1/Divisors[First[coef
ficienti]]]];
lista = Union[Join[lista, -lista]];
Print["Candidati:"]; Print[lista];
lista = Select[lista, Horner[coefficienti, #] == 0
&];
Print["Radici razionali:"];Return[lista];
]
```

```
Esempi:
In[6] := radiciRazionali[{6,1,2,-1}]
"Candidati:"
```

$$\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1},\right\}$$

```
"Radici razionali:"
```

Out[6]= $\frac{1}{3}$??

```
In[7]:= radiciRazionali[{5,1,2,2, 3}]
"Candidati:"
```

$$\left\{-3, -1, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 3\right\}$$

```
"Radici razionali:"
Out[7]= { }
```

Tutti (o quasi) i sistemi di CAS includono quattro importanti possibilità:

- l'aritmetica in precisione "infinita",
- la gestione delle liste,
- la grafica,
- il *pattern matching*.

Con tutti i sistemi di calcolo algebrico è possibile manipolare in forma esatta interi "lunghi", cioè interi la cui lunghezza non è predefinita, ma trova come unico limite la quantità di memoria di cui il calcolatore dispone. Ciò apre un campo di sperimentazione prima impensabile.
"Prima dei calcolatori l'uomo, il matematico, si è mosso su due livelli ben distinti, quello del finito molto piccolo e visualizzabile (le dita delle mani) e subito dopo, con una coraggiosa estrapolazione, quello dell'infinito.
Adesso sembra venuto il momento di esplorare un dominio sconosciuto, il finito grande. Il finito grande non è stato finora dominabile; è molto più semplice fingere l'infinito".
(G. Lolli, 1985)
Non starò ad insistere sul ruolo della visualizzazione, tanto esso è evidente di per sè. Mi limiterò a citare una celebre frase: una figura vale 10.000 parole.
Quanto alla gestione delle liste, tutti i CAS consentono di costruire una lista passo passo, di contare gli elementi di una lista, di porli in ordine crescente oppure decrescente, di fondere due liste, oppure di concatenarle, di prelevare alcuni elementi da una lista, oppure di inserirne altri, e così via.
Nei sistemi più sofisticati è possibile verificare se una lista contiene un dato elemento, quante volte, oppure in quali posizioni.
Voglio soffermarmi su quella che è la caratteristica più originale dei CAS, e cioè il *pattern matching*. E' difficile anche tentare una traduzione: coincidenza di schemi o modelli; in realtà si tratta di un procedimento di correzione/sostituzione basata su modelli.
Tenterò di spiegare in che cosa consista il *pattern matching* cominciando col dire che esso non va confuso con l'*editing* (correzione/sostituzione basata su stringhe).
Quest'ultima possibilità è stata resa popolare dai programmi di videoscrittura: tutte le volte che trovi "quindi", scrivi "dunque". Si tratta di una possibilità utile ma in fondo banale.
Nei migliori tra i linguaggi dei CAS si possono dare comandi del tipo:
"tutte le volte che trovi a^n, a patto che n sia un numero pari, scrivi $a^{n/2}$."
Si può distinguere tra rendere operativa questa regola a seconda che la base si chiami letteralmente a e l'esponente si chiami letteralmente n, oppure no.
Nel caso più generale la regola dice:

“tutte le volte che incontri un'espressione elevata ad una seconda espressione (un *qualchecosa* elevato a un *qualcosaltro*), a patto che quest'ultima (il *qualcosaltro*) abbia come valore un numero pari, sostituiscila con la prima espressione elevata alla metà della seconda espressione.”
Tutti i CAS, almeno internamente, possiedono una qualche forma di *pattern matching*, ma non tutti consentono di utilizzarlo a livello di linguaggio di programmazione.
Uno dei punti di forza del *Mathematica* (che fa da contrappeso alla sua indubbia complessità) è proprio la possibilità di sfruttare il *pattern matching* a livello di linguaggio di programmazione.
Un esempio val più di molte parole. Vogliamo istruire il nostro sistema a sviluppare le espressioni contenenti seno e coseno di angoli multipli di angoli assegnati; finalmente vogliamo esprimere la quantità cos $n\alpha$ (con n intero) come polinomio di grado n nella variabile cos α.
Cominciamo con l'insegnare a *Mathematica* le formule di addizione, le regole di parità e disparità , e due schemi ricorsivi per il trattamento di espressioni del tipo sin $n\alpha$ e cos $n\alpha$.

```
r1 = Sin[a_+ b_ ] -> Sin[a] Cos[b] + Cos[a]
Sin[b];
r2 = Cos[a_+ b_ ] -> Cos[a] Cos[b] - Sin[a]
Sin[b];
r3 = Sin[n Integer?Negative a_ ] -> -Sin[-n a];
r4 = Cos[n Integer?Negative a_ ] -> Cos[-n a];
r5 = Sin[n Integer?Positive a_ ] ->

Expand[Sin[(n-1)a] Cos[a] + Cos[(n-1)a] Sin[a]];
r6 = Cos[n_Integer?Positive a ] ->
Expand[Cos[(n-1)a] Cos[a] - Sin[(n-1)a] Sin[a]];
```

Il sistema si comporta a dovere, trasformando ogni espressione contenente seni e coseni di angoli multipli interi di angoli assegnati in espressioni polinomiali nelle variabili seno e coseno degli stessi angoli. Ad esempio, alla richiesta:

```
Expand[Sin[3x]//. {r1,r2,r3,r4,r5,r6}]
```

risponde correttamente
`3 Cos[x]`^{2} `Sin[x] - Sin[x]`^{3}

Analogamente alla richiesta:
```
Expand[Cos[4x]//. {r1,r2,r3,r4,r5,r6}]
```

risponde

```
Cos[x]^4 - 6 Cos[x]^2 Sin[x]^2 + Sin[x]^4
```

Vogliamo però ottenere un ulteriore risultato: quello di esprimere cos $n\alpha$ come polinomio nella sola variabile cos α. Ed ecco la regola che fa al caso nostro:

```
r7 = Sin[a_ ]^(n_Integer?EvenQ) -> (1-Cos[a]^2)^(n/2);
```

Interpretazione: tutte le volte che trovi una scrittura del tipo
(seno elevato ad un numero pari),
sostituiscila con
((1 - coseno al quadrato) elevato alla metà dell'esponente).
Ed ecco il miracolo compiuto:

```
Expand[%%/.r7]
```

```
1 - 8 Cos[x]^2 + 8 Cos[x]^4
```

Avviandomi alla conclusione, è lecito chiedersi: quale aiuto può venire dai CAS per la didattica della matematica? Risposta: la possibilità di apprendere la matematica in un contesto di laboratorio.
Non tutti i CAS sono abbastanza semplici per poter essere dati in mano ai ragazzi (dipende molto dal tipo di scuola e dall'orario di cui si dispone); tuttavia tutti i CAS possono essere usati come strumenti di produttività individuale per il docente (preparazione di compiti ed esercizi, loro correzione, preparazione di grafici, ecc.).
Non mi dilungherò nell'utilizzo dei CAS nella ricerca: è evidente la possibilità di utilizzarli per il rafforzamento o la confutazione di congetture.
Ci stiamo progressivamente avvicinando al sogno leibniziano della liberazione dall'onere del calcolo. Stiamo dunque andando verso una matematica senza lacrime? Forse sì, ma ricordiamoci che il bene più prezioso, le idee, restano patrimonio dell'utente.
I CAS lavorano a livello *sintattico* (letteralmente: non sanno quello che fanno); l'onere della *semantica* sta tutto sulle spalle dell'utente.

Appendice
Riportiamo di seguito gli indirizzi WWW relativi ai principali CAS:
Soft Warehouse (Honolulu, Hawaii):
http://www.derive.com
Sito gestito dal produttore di DERIVE.
MathWorks:
http://www.mathworks.com
Sito gestito dal produttore di Matlab.
MathSoft:
http://www.mathsoft.com
Sito gestito dal produttore di Mathcad. Oltre a presentare informazioni sul software distribuito dalla MathSoft, ci sono materiali ed indirizzi interessanti attivando il pulsante
Math in Action all'indirizzo
http://www.mathsoft.com/free.html
MathWare:
http://www.xmission.com
Distributore di materiale su DERIVE, sulle calcolatrici TI, ecc.
Wolfram Resarch Inc.:
http://www.wri.com
Sito gestito dal produttore di *Mathematica*.
Waterloo Maple:
http://www.maplesoft.com
Sito gestito dal produttore di Maple.
Texas Instruments: http://www.ti.com
Prodotti della TI; in particolare per le calcolatrici scientifiche si veda l'archivio:
http://www.ti.com/calc/docs/sgraph.htm
Nello stesso sito, all'indirizzo
http://www.ti.com/calc/docs/t3.htm
si possono reperire informazioni sul gruppo di Docenti che opera nell'ambito del programma
Teachers Teaching with Technology.

I testi dei problemi

Problema 1
Rispetto a un riferimento cartesiano ortonormato si conoscono i vertici A(4; 3; 1) e C(O; 4; 2) di una diagonale della base di una piramide retta a base quadrata ABCDV. Si sa inoltre che il vertice V della piramide appartiene alla retta passante per i punti P(5; 4; 1) e Q(1; 7; 6).
Determinare:
a) Le coordinate del vertice V.
b) Le coordinate dei restanti vertici B e D della base.
c) L'ampiezza dell'angolo tra una faccia laterale e la base.
d) L'equazione cartesiana della sfera inscritta nella piramide.

Problema 2
Si studi in modo completo la funzione reale

$$f : x \to \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5[ln(x+1) - ln(x-1)]$$

Problema 3
Sono dati un cerchio di raggio 1 e un quadrato concentrico al cerchio.

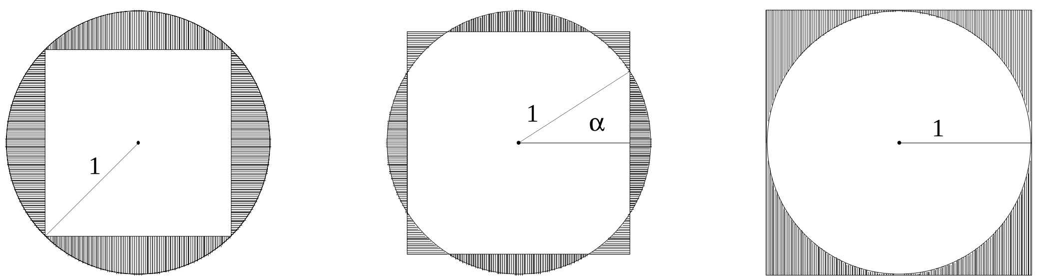
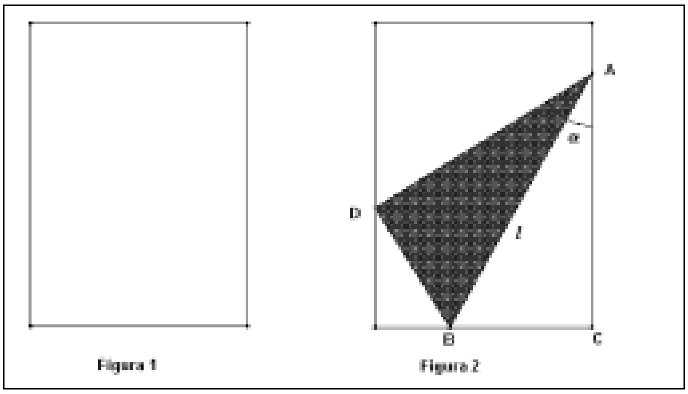


figura 1 figura 2 figura 3

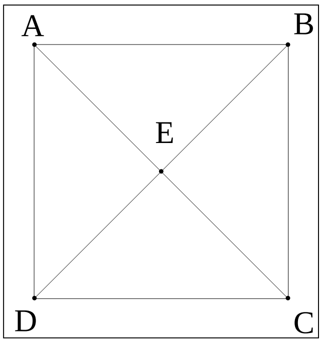
Al variare del lato del quadrato da $\sqrt{2}$ (figura 1), a 2 (figura 3) varia in modo continuo l'area della superficie tratteggiata (cioè la superficie racchiusa dalla circonferenza e dal contorno del quadrato).
Per quali valori del lato in [$\sqrt{2}$,2] quest'area è rispettivamente minima e massima?
Sono richiesti i valori esatti di queste misure.
Consiglio: si scelga come variabile α, l'angolo in radianti tra un raggio parallelo ad un lato del quadrato e il raggio che passa per il più vicino punto d'intersezione della circonferenza con il contorno del quadrato (vedi figura 2).

Problema 4
Considera un foglio A4 disposto come nella *figura 1.*
L'angolo in basso a destra viene piegato fino a quando il suo vertice raggiunge il bordo di sinistra (in modo che la parte piegata sia un triangolo; vedi *figura 2*).
Sia l la misura della piega AB e α l'ampiezza dell'angolo che questa forma con il bordo destro.



Determinare***:***
a) La misura di l in funzione di α, specificando in che intervallo può variare α.
In un foglio A4 il rapporto tra le dimensioni è $\sqrt{2}$
b) I valori estremi di l (specificandone la natura) e le corrispondenti ampiezze α.

Problema 5
Consideriamo l'insieme H dei quattro vertici A, B, C, D e del centro E del quadrato ABCD.

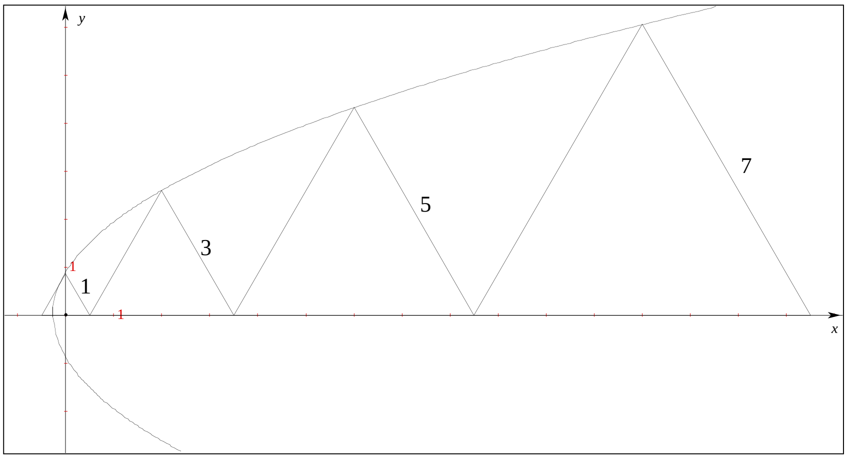


Due punti di H sono vicini se il segmento che li unisce non contiene, oltre ai suoi estremi, nessun altro punto di H.
Un automa, partendo da uno dei cinque punti di H, si sposta, compiendo un passo, in uno dei punti vicini, in modo casuale ed equiprobabile.
Un percorso è una successione di passi consecutivi e indipendenti (per esempio il percorso ABAED è la successione dei quattro passi AB, BA, AE, ED).
Sia e_n la probabilità che l'automa, partendo da A, arrivi, in n passi in E.

a) Calcolare dapprima e_0, e_1, e_2, e_3

b) Determinare e_n e calcolare $\lim_{n \to \infty} e_n$.

Problema 6
Si dispongono dei triangoli equilateri con i lati di lunghezza 1, 3, 5,…, 2n -1, lungo una retta come mostrato nella figura.



Si tratta di dimostrare che i vertici A_1, A_2, A_3 che non giacciono sulla retta, appartengono ad una parabola e che le distanze di questi punti dal fuoco della parabola sono numeri naturali.

Problema 7
Si determini il più piccolo numero naturale con la proprietà che la somma delle sue cifre non divide la somma dei cubi delle sue cifre.

Problema 8
Si consideri la seguente suddivisione dei numeri naturali in sottoinsiemi: $\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\ldots$ Si eliminino ora tutti i sottoinsiemi in posizione pari, a cominciare dal secondo. Si dimostri che la somma di tutti i numeri nei primi k gruppi rimanenti è data da k^4.
Ad esempio per $k=3$ vale: $1+(4+5+6)+(11+12+13+14+15)=81=3^4$.

Problema 9
Siano A, B, C tre punti qualsiasi di una parabola, con l'asse di simmetria parallela all'asse y. Sia m_A la pendenza della tangente alla parabola per A, m_{AB} la pendenza della corda AB, ecc. Si dimostri la sorprendente proprietà: $m_A = m_{AB} + m_{AC} - m_{BC}$

Problema 10
Una corda di lunghezza costante scivola in un cerchio dato. Gli estremi della corda vengono proiettati ortogonalmente su un diametro fissato. Le proiezioni ottenute e il punto medio della corda sono i vertici di un triangolo. Si dimostri che il triangolo è isoscele e non cambia mai la sua forma allo spostarsi della corda nel cerchio.

[*Usare Cabri, Mathematica o Derive per dimostrare (?) illustrare (?), aiutare gli studenti a congetturare (?) la verità o falsità delle affermazioni relative ai problemi 11 - 15].*

Problema 11

Detto G il baricentro di un triangolo qualsiasi, i segmenti che congiungono i tre vertici del triangolo con G dividono il triangolo dato in tre triangoli aventi la stessa area.

Problema 12

Dato un triangolo di vertici A, B e C, sia H il suo ortocentro. Il triangolo ABH ha come ortocentro il punto C.

Problema 13

Dato un triangolo, chiamiamo triangolo ortico il triangolo avente come vertici i piedi delle sue tre altezze. L'ortocentro di un triangolo è incentro del suo triangolo ortico.

Problema 14

Il circocentro, il baricentro e l'ortocentro di un triangolo sono allineati. La retta che li contiene si dice retta di Eulero.

Problema 15

Sia dato un triangolo di vertici A, B e C e sia G il suo baricentro. Siano A', B', C' i punti medi dei lati del triangolo. Chiamiamo circonferenza di Feuerbach la circonferenza circoscritta al triangolo $A'B'C'$. La circonferenza di Feuerbach contiene i piedi delle altezze del triangolo ABC e i punti medi dei tre segmenti che uniscono i tre punti A, B e C con l'ortocentro del triangolo ABC.

Problema 16

(Maturità Scient. Sperimentale, Sessione suppletiva 1997 – Tema 2)

Il candidato rappresenti graficamente la curva d'equazione

$$x^2 y = a^2 (a - y) \qquad (1)$$

essendo a una costante positiva. La curva assegnata figura nelle “Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana" (1748) di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) - donde il nome di versiera dell'Agnesi - come soluzione del seguente problema:

“Dato il semicircolo ADC del diametro AC, si ricerca fuori di esso il punto M tale che condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, sia $AB : BD = AC : BM$, e perché infiniti sono i punti M che soddisfano il problema, se ne dimanda il luogo”.

Il candidato:

a) verifichi che, con un’opportuna scelta del sistema di riferimento cartesiano, la (1) è l'equazione del luogo geometrico richiesto nell'enunciato del problema (si ponga $AC = a, B \in AC$;

b) dette P_1 e P_2, rispettivamente, le intersezioni con l'asse x delle tangenti alla curva nei punti di flesso F_1 e F_2, calcoli l'area della regione di piano delimitata dall'arco di curva di estremi F_1 e F_2 e dai segmenti P_1F_1, P_2F_2, P_3F_3;
c) verifichi che l'area (della regione) compresa fra la curva e l'asse delle x è quattro volte quella del cerchio di diametro AC.

Problema 17
Sono assegnate tre rette parallele nel piano. Esiste un triangolo equilatero con i vertici rispettivamente sulle tre rette?

Problema 18
Data una retta e due punti appartenenti allo stesso semipiano con origine la retta, costruire la circonferenza passante per tali punti e tangente alla retta.

Problema 19
Costruire una circonferenza C' tangente ad una circonferenza C e ad una retta d conoscendo uno dei punti di contatto.

Problema 20
Date due circonferenze esterne tra loro e di diverso raggio, determinare i centri delle due omotetie in cui si corrispondono.

Problema 21
Siano A e B due punti situati esternamente e da parti opposte della striscia individuata da due rette parallele d_1 e d_2. Costruire il minimo percorso AMNB che unisce i punti A e B con $M \in d_1, N \in d_2$ e MN perpendicolare alle rette.

Problema 22
Date due semirette a e b di origine O e due punti P e Q interni all'angolo convesso individuato dalle due semirette, determinare due punti $R \in a, S \in b$, tali che $PR + RS + SQ$ sia il percorso minimo. Ripetere l'esercizio toccando prima la semiretta b e poi la semiretta a. Quando i due percorsi risultano uguali?

Problema 23
Data una retta r ed un segmento AB situato in uno dei due semipiani di origine r, determinare il punto di r che vede il segmento AB sotto l'angolo massimo.

Problema 24
Dati tre punti A, B e C non allineati, trovare il punto P tale che $PA + PB + PC$ sia minimo.

Problema 25
Si consideri un segmento di lunghezza costante con gli estremi sugli assi cartesiani. Determinare il luogo descritto da un punto P del segmento al variare della posizione degli estremi del segmento stesso.

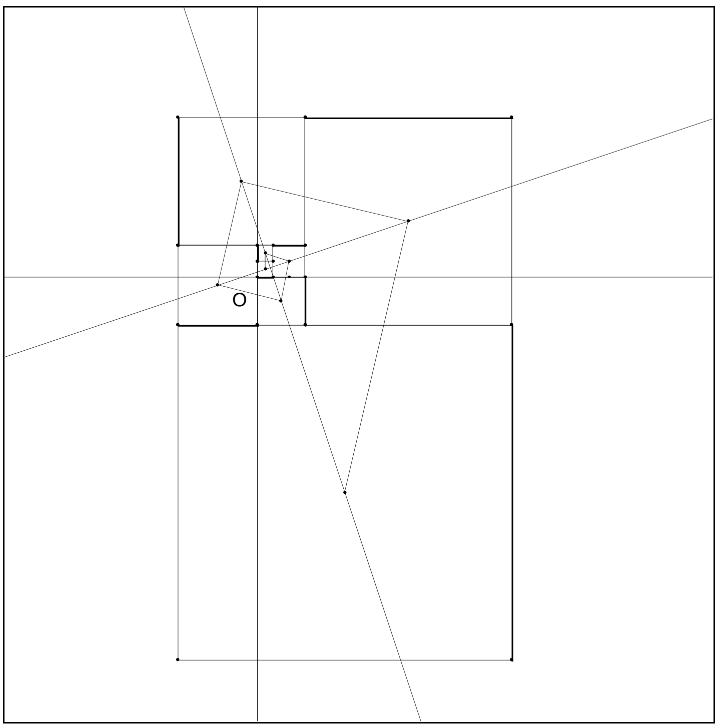
Problema 26
Dati due punti A e B e un numero positivo k, determinare il luogo dei punti P del piano per cui vale k il rapporto delle distanze di P da A e da B.
Problema 27
Dimostrare la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Problema 28
Visualizzare l'andamento delle somme parziali della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ per z complesso.
Analisi qualitativa della convergenza.
Eventualmente: problemi analoghi per la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ e per la serie logaritmica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n/n$

Problema 29
Mostrare che le bisettrici degli angoli di un parallelogramma si incontrano nei vertici di un rettangolo. Determinare il parallelogramma per il quale tale rettangolo è un quadrato. Determinare il parallelogramma per il quale le bisettrici sono concorrenti.

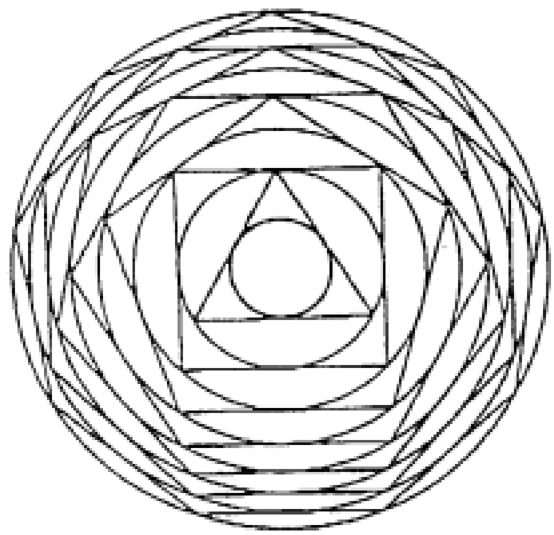
Problema 30
Le misure dei lati dei quadrati della figura sono i numeri di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...



E' vero che i centri di questi quadrati giacciono su due rette perpendicolari?

Problema 31

Si consideri la figura seguente. Si verifichi che se la costruzione viene proseguita all'infinito, la figura resta limitata.



Esercizi risolti dai singoli partecipanti

I gruppi di lavoro e gli esercizi risolti

Il gruppo di lavoro n° 1, composto da Piero Antognini (coordinatore), Paolo Carboni, Milla Lacchini, Rina Penolazzi, Mario Puppi, Gustavo Toninel, ha risolto i seguenti problemi:
- il n° 2 usando i software *Mathematica* e *Derive*
- il n° 6 usando il software *Mathematica*
- il n° 8 usando il software *Mathematica*
- il n° 10 usando il software *Mathematica*

Il gruppo di lavoro n° 2, composto da Lucio Benaglia (coordinatore), Roberta Bonarelli, Alfonso Cornia, Maria Cristina Maccaferri, Barbara Magnani, ha risolto i seguenti problemi:
- il n° 11 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*
- il n° 13 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*

Il gruppo n° 3, composto da Sandra Bernecoli, Patrizia Berneschi, Rosanna Rossi Bucciarelli, Luigi Tomasi (coordinatore), Renato Verdiani, ha risolto i seguenti problemi:
- il n° 4 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*
- il n° 6 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*
- il n° 17 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*
- il n° 23 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*

Il gruppo n° 4, composto da Giovanni Margiotta (coordinatore), Franca Noè, Enrico Pontorno, Marilena Sparapani, Guido Sperti, ha risolto i problemi:
- n° 6 usando il software *Cabri-Géomètre*
- n° 30 usando i software *Cabri-Géomètre, Derive, Mathematica, MatView*

Il gruppo n° 5, composto da Aldo Boiti, Elena Crespina, Mauro De Vita, Rosanna Guidetti, Roberto Ricci (coordinatore), ha risolto i seguenti problemi:
- il n° 5 usando il software *Derive*
- il n° 10 usando il software *Cabri-Géomètre*
- il n° 17 usando i software *Cabri-Géomètre*
- il n° 27 usando il software *Cabri-Géomètre*

Il gruppo n° 6, composto da Marco Calvani, Maurizio Franceschini, Ferruccio Rohr (coordinatore), Stefano Sarti, ha risolto i seguenti problemi:
- il n° 5 usando il software *Derive*
- il n° 8 usando il software *Derive*
- il n° 17 usando i software *Cabri-Géomètre* e *Derive*

Il gruppo n° 7 composto da: Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Giovanni Olivieri (coordinatore), Antonio Rotteglia, ha risolto i seguenti problemi:
- il n° 1 usando il software *Derive*
- il n° 2 usando i software *Derive* e *Mathematica*
- il n° 10 usando il software *Cabri-Géomètre* e *Derive*
- il n° 27 usando il software *Derive*

Come si vede dalle righe precedenti quasi tutti i conoscitori del software *Mathematica* erano confluiti nel gruppo n° 1. Al termine dei lavori, con i docenti stessi, si è discusso a lungo se questo era stato o no un buon criterio per la formazione dei gruppi.
Alla fine è prevalsa l'opinione che, in linea di massima, il criterio era stato corretto: se infatti un buon conoscitore del software *Mathematica* non conosce bene *Derive o Cabri-Géomètre*, può, con poca fatica, seguire lo stesso una discussione sull'uso di questi software; non è invece vero il viceversa.

Problema 1

Rispetto ad un riferimento cartesiano si conoscono i vertici A(4;3;1) e C(0;4;2) di una diagonale di base di una piramide retta a base quadrata ABCDV. Si sa inoltre che il vertice V della piramide appartiene alla retta passante per i punti P(5;4;1) e Q(1;7;6).

Determinare:

a) **Le coordinate del vertice V.**
b) **Le coordinate dei restanti vertici B e D della base.**
c) **L'ampiezza dell'angolo fra una faccia laterale e la base.**
d) **L'equazione cartesiana della sfera inscritta nella piramide.**

Gruppo 7: Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Giovanni Olivieri, Antonio Rotteglia.

Strumenti software: *Derive*

Caratteristiche connesse con l'uso del software
La soluzione di questo problema evidenzia uno dei maggiori vantaggi degli strumenti informatici per il calcolo algebrico, che consiste nel liberare il solutore da lunghe e laboriose operazioni. Questo fatto consente di dedicare più impegno intellettuale nella scelta di un corretto itinerario. Inoltre esso dà la possibilità di svolgere verifiche e controlli vari, che altrimenti, per questioni di tempo, sarebbero "proibitivi".
Tali prove sono inoltre molto utili per una migliore conoscenza degli oggetti matematici in fase di studio.

Collocazione temporale
Nella scuola secondaria non è usuale risolvere un problema di Geometria Analitica nello Spazio; si pensa perciò che tali problematiche possano essere affrontate in una quinta classe.
La proposta di soluzione di codesto problema con l'uso di *Derive* si può inserire a conclusione di un'unità didattica sulla geometria a tre dimensioni. Sì suppone perciò che teoria ed esercitazioni siano già state affrontate e svolte con i metodi classici e che lo strumento informatico intervenga al termine del percorso, per permettere lo svolgimento di numerose verifiche.
L'uso del programma dovrebbe già essere familiare agli studenti.
Il "sacrificio temporale" pagato dall'insegnante per la conoscenza tecnica di uno strumento informatico è ripagato nel corso degli anni con la possibilità di viaggiare nella regione matematica in breve tempo e di vedere più oggetti e da più punti di vista.

Aspetti didattici
La costruzione di un algoritmo in grado di risolvere un problema, e la conseguente traduzione in un linguaggio comprensibile all'automa (in questa caso *"Derive"*), rappresenta un utile allenamento intellettuale, che peraltro costringe a riflettere con maggior profondità sulle situazioni oggetto di analisi. In questo modo l'attività didattica acquista una sua completezza e la richiesta di una relazione chiara e completa su tutto il lavoro svolto costituisce un momento di verifica fondamentale per lo studente stesso e per l'insegnante.
La situazione non è rappresentabile in "concreto" e perciò gli studenti sono "costretti" a rappresentazioni mentali, che certamente contribuiscono a una migliore percezione dello spazio a tre dimensioni.

Nodi concettuali
I condizionali IF devono essere usati con attenzione. Infatti, una macchina che ha un numero finito di registri, quando confronta due numeri reali, potrebbe percorrere l'algoritmo in modo sbagliato.
Gli operatori goniometrici inversi non sempre restituiscono gli angoli associati; il solutore, quindi, deve ragionevolmente interpretare quelli che gli vengono forniti e per non incorrere in dimenticanze ed errori, è obbligato ad approfondire la conoscenza della Trigonometria.

Approfondimenti e collegamenti
Lo studio della Geometria Analitica, che richiede continuamente l'applicazione del calcolo algebrico, numerico e grafico si presta a collegamenti con tantissimi rami della Matematica e delle Scienze. In particolare si possono approfondire argomenti legati alle proprietà di $\boldsymbol{R}^3$, alle equazioni parametriche di una retta nello spazio, alla perpendicolarità di piani e rette nello spazio.
Se si utilizzano equazioni parametriche, allora, ad esempio, il problema della determinazione dei vertici B e D della base della piramide diventa in qualche modo "più semplice".

Tracce delle procedure di soluzione
In generale si può partire con lo scrivere le assegnazioni delle "utilities", che serviranno per la soluzione del problema, accompagnate dall'indicazione di ciò che sviluppano.
Si ottengono i coseni direttori di una retta passante per due punti:

CD(x1,y1,z1,x2,y2,z2) := [x2-x1,y2-y1,z2-z1],

Si scrivono poi le equazioni, parametriche o cartesiane, della retta passante per due punti dati e si determina l'equazione del piano ad essa perpendicolare e passante per un dato punto.

PIA1PE(x0,y0,z0,l,m,n):=l*(x-x0)+m*(y-y0)+n*(z-z0)

a) Il vertice della piramide si determina risolvendo il sistema lineare formato dalle equazioni della retta PQ con il piano α passante per M, punto centrale del quadrato della base, e perpendicolare alla retta AC.

b) I vertici B e D del quadrato che costituisce la base della piramide si determinano risolvendo il sistema di secondo grado formato dalle equazioni del piano di base (questo si determina, sfruttando le condizioni di passaggio per C e la perpendicolarità con la retta MV), del piano α e dalla relazione: $BM^2 = MC^2$.

c) L'angolo fra i due piani si determina usando la formula dell'angolo diedro, applicata ai piani. di base ed ad un piano laterale.
Si determina l'equazione del piano BCV:
a*x+b*y+c*z+d=0
2*a+2*b+3*c+d=0 Condizione di passaggio per B
4*b+2*c+d=0 Condizione di passaggio per C
3*a+11*b/2+7*c/2+d=0 Condizione di passaggio per V
SOLVE([4*b+2*c+d=0,3*a+11*b/2+7*c/2+d=0,2*a+2*b+3*c+d=0],[a,b,c])
[[a=d/4,b=0,c=-d/2]]
Posto d=4, si ottiene
x-2*z+4 Equazione del piano BCV.

Sostituendo i coefficienti dei due piani nella formula, si ha:
COS(ω) = sqrt(5)/5

Applicata la funzione goniometrica inversa all'angolo interno alla piramide, si trova che …

d) L'equazione cartesiana della sfera inscritta alla piramide si trova determinando:
- le coordinate del centro Ω della sfera, come intersezione fra la retta MV ed il piano bisettore del piano di base ed un piano laterale;
- la misura del raggio, come distanza di Ω da M.

Problema 2

Si studi in modo completo la funzione reale

$$f : x \to \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5[ln(x+1) - ln(x-1)]$$

<u>**Gruppo 1**</u>: Piero Antognini, Paolo Carboni, Milla Lacchini, Rina Penolazzi, Mario Puppi, Gustavo Toninel.

Strumenti Software: *Mathematica*, *Derive* .

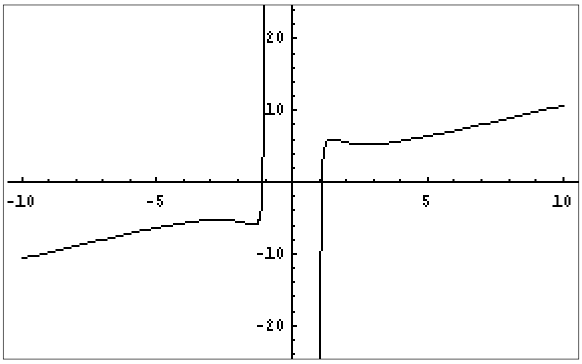
Caratteristiche connesse all'uso del software

1) Per disegnare il grafico di una funzione, *Mathematica* richiede l'intervallo delle ascisse da considerare, non necessariamente coincidente con il dominio della funzione, che risulta definita per ogni x>1. Chiediamo a *Mathematica* di tracciare il grafico in [-10,10].

<u>In[1]:=</u>

```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

<u>Out[1]:=</u>



Il grafico non è corretto. Il motivo della presenza nel disegno di un ramo di curva al di fuori del dominio è legato al fatto che *Mathematica* determina il logaritmo di un numero nel campo complesso. Ciò comporta che l'espressione Log[x+1]-Log[x-1] risulti reale quando Log[x+1] e Log[x-1] assumono valori complessi con parti immaginarie uguali, come si può verificare calcolando le tre espressioni ad esempio per x=-2.

<u>In[2]:=</u>

```
{Log[x + 1], Log[x - 1], Log[x + 1] - Log[x - 1]} /. x -> -2
```

<u>Out[2]:=</u>

```
{I*Pi, I*Pi + Log[3], -Log[3]}
```

Per ovviare a tale inconveniente, si ridefinisce la funzione inserendo la condizione sulla realtà del logaritmi, ponendo uguale a 0 la parte immaginaria dei logaritmi stessi:

In[3]:=

```
f[x_] := (x^3 - 4 x)/(x^2 - 1) + 5 (Log[x + 1] - Log[x - 1]) /; (Im[Log[x + 1]] == 0 && Im[ Log[x - 1]] == 0)
```

In questo modo il grafico risulta corretto anche quando si assegnino ad x valori non appartenenti al dominio.

La condizione sulla realtà del logaritmo impedisce tuttavia a *Mathematica* di determinare la derivata simbolica della funzione; pertanto, per calcolare l'intersezione della funzione con l'asse delle x occorre fornire al comando **FindRoot** gli estremi di un intervallo in cui cada lo zero.[1]

In[4]:=

```
FindRoot[f[x] == 0, {x, 1.01, 2}]
```

2) Nel calcolo del limite di f(x) per $x \to 1+$, *Mathematica*, a differenza di *Derive*, non riesce a risolvere direttamente la forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$; occorre quindi eseguire opportune trasformazioni algebriche, come ad esempio indicato nella traccia di soluzione, o applicare il teorema di De L'Hopital .

Collocazione temporale

Lo studio completo di una funzione è un classico tema di analisi, e si colloca pertanto nel triennio, al quarto o quinto anno.

La possibilità offerta dal software di visualizzare il grafico di una funzione può essere di valido supporto per verificare i risultati ottenuti da uno studio puramente qualitativo, ad esempio di funzioni quali $y=e^{-(x+2)}+1$, che può essere condotto già in terza avendo come soli prerequisiti: funzione esponenziale, trasformazioni geometriche.

Il software utilizzato deve essere già conosciuto e sperimentato in casi meno problematici.

Aspetti didattici

Il problema offre importanti spunti di riflessione:

---

[1] Il comando FindRoot serve per trovare le soluzioni numeriche di un'equazione e sfrutta alcuni dei metodi noti per la risoluzione di tale problema. Esso si può utilizzare con diverse sintassi, ma quando *Mathematica* non è in grado di calcolare la derivata simbolica della funzione di cui si stanno cercando gli zeri (e quindi non è in grado di utilizzare quegli algoritmi che richiedono l'uso della derivata della funzione, come per esempio il metodo di Newton), la sintassi corretta è una sola, quella che abbiamo utilizzato nel comando In[4].

– la presenza del logaritmo nella espressione analitica della funzione rende necessario controllare il dominio su cui *Mathematica* opera, per evitare risultati incongruenti;
– la ricerca degli zeri di questa funzione trascendente induce a considerazioni su applicabilità e convergenza dei relativi metodi numerici, in particolare del metodo di Newton.
– nel calcolo dei limiti non sempre *Mathematica* riesce a risolvere le forme indeterminate: in questi casi è necessario eseguire opportune trasformazioni algebriche.

Si propone che l'allievo studi con carta e penna la funzione prima di affrontare il problema al calcolatore, valutando poi criticamente i risultati che la macchina gli fornisce.
È necessario inoltre che il procedimento risolutivo al calcolatore, pur presentando subito il grafico della funzione, segua tutti i passi richiesti da uno studio corretto: talvolta infatti per evidenziare estremanti, punti di flesso, asintoti, può essere necessario modificare in modo adeguato la scala lungo gli assi o, nel caso di *Derive*, ampliare la finestra in cui il grafico viene tracciato.

Nodi concettuali
Le riflessioni si concentrano sui seguenti punti:
- Dominio delle funzioni trascendenti
- Zeri di una funzione
- Numeri complessi

Approfondimenti e collegamenti
- Zeri di una funzione: implementare il metodo delle approssimazioni successive con *Mathematica* consente di animare la poligonale orientata generata dal metodo, evidenziando in modo efficace la eventuale convergenza o divergenza; condizioni di convergenza dei metodi in relazione alla scelta dell'iterato iniziale.
- Numeri complessi.
- Verificato e motivato l'errato comportamento del software che visualizza un ramo di curva non "atteso", si può indagare se ci sono situazioni in cui invece viene visualizzato un ramo di curva in meno! Per esempio chiedendo a *Mathematica* e a *Derive* di disegnare il grafico della funzione $y=x^{1/k}$ con $x<0$ e k naturale dispari, funzione inversa di $y=x^k$, si osserva che non viene tracciato alcunchè. Questo fatto può servire da stimolo per una discussione, in classe, sulla definizione di potenza e sulle scelte operate dagli autori dei due programmi di calcolo.

Traccia della procedura di soluzione
Utilizziamo il software *Mathematica.*
La funzione da studiare è continua e definita per ogni $x>1$.

In[1]:=

$$\texttt{f[x\_] :=} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5\,(\texttt{Log[x + 1] - Log[x - 1]})$$

In[2]=

```
Plot[f[x], {x, 1.01, 10}]
```

Intersezioni con gli assi: dal grafico risulta che la funzione possiede uno zero nelle vicinanze di 1

In[3]:=

```
FindRoot[f[x] == 0, {x, 1.01, 2}]
```

Out[3]:=

```
{x -> 1.094519583317891}
```

Calcolo del limite per $x \to 1+$

In[4]:=

```
Limit[f[x], x → 1, Direction → -1]
```

Come precedentemente osservato, *Mathematica* non riesce a valutare questo limite, però se si apportano alcune modifiche all'espressione della funzione e si procede a calcolare separatamente due limiti, si giunge al risultato corretto.
Per comprendere meglio le istruzioni contenute nei comandi da In[5] fino a In[10] abbiamo riportato anche i rispettivi Output.

In[5]:=

```
espr = Together[f[x]]
```

Out[5]=

$$\frac{1}{-1+x^2}\left(-4\,x+x^3+5\,\mathrm{Log}[-1+x]-5\,x^2\,\mathrm{Log}[-1+x]-5\,\mathrm{Log}[1+x]+5\,x^2\,\mathrm{Log}[1+x]\right)$$

In[6]:=

```
a = espr[[2]]
```

Out[6]=

$$-4\,x+x^3+5\,\mathrm{Log}[-1+x]-5\,x^2\,\mathrm{Log}[-1+x]-5\,\mathrm{Log}[1+x]+5\,x^2\,\mathrm{Log}[1+x]$$

In[7]:=

```
b = espr[[1]]
```

Out[7]=

$$\frac{1}{-1+x^2}$$

In[8]:=

```
A = Limit[a, x -> 1, Direction -> -1]
```

Out[8]=

```
-3
```

In[9]:=

```
B = Limit[b, x -> 1, Direction -> -1]
```

Out[9]=

```
∞
```

In[10]:=

```
A B
```

Out[10]:=

-Infinity

Studiamo ora il comportamento per $x \to \infty$

In[11]:=

```
Limit[f[x], x -> ∞]
```

Out[11]:=

Infinity

In[12]:=

```
m = Limit[f[x] / x, x -> ∞]
```

Out[12]:=

1

In[13]:=

```
q = Limit[f[x] - m x, x -> ∞]
```

Out[13]:=

0

La retta $y=x$ è dunque l'asintoto obliquo per $x \to \infty$

Studio della derivata prima:

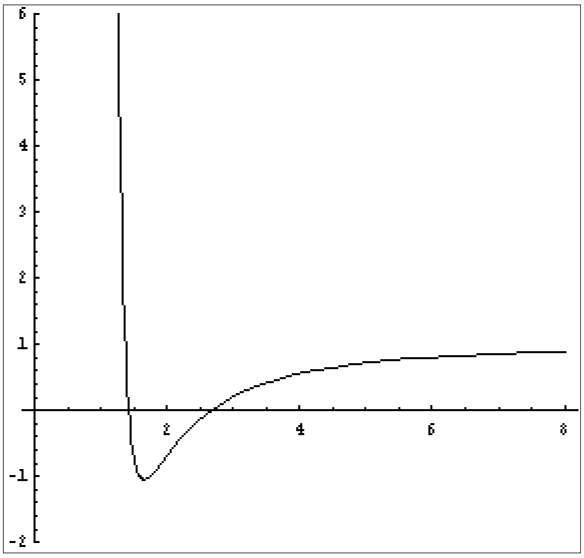
In[14]:=

```
der1 = Simplify[f'[x]]
```

In[15]:=

```
Plot[f'[x], {x, 1.01, 8}, AspectRatio -> Automatic,  PlotRange -> {-2, 6}]
```

Out[15]:=



Ricerca eventuali massimi e minimi (Notare che l'espressione analitica della derivata prima consente di risolvere l'equazione f'(x)=0 in modo esatto mediante il comando **Solve**, e non approssimato con **FindRoot**)

In[16]:=

```
Solve[der1 == 0, x]
```

Out[16]:=

```
{{x -> -Sqrt[2]}, {x -> Sqrt[2]}, {x -> -Sqrt[7]}, {x -> Sqrt[7]}}
```

$\sqrt{2}$ e $\sqrt{7}$ sono rispettivamente le ascisse del punto di massimo e del punto di minimo relativo, aventi rispettivamente ordinate:

In[17]:=

```
f[√2] // N
```

In[18]:=

```
f[√7] // N
```

Studio della derivata seconda:

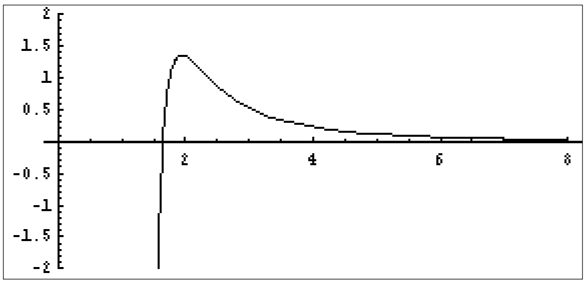
In[19]:=

```
der2 = Simplify[f''[x]]
```

In[20]:=

```
Plot[f''[x], {x, 1.01, 8}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-2, 2}]
```

Out[20]:=



Ricerca eventuali punti di flesso:

In[21]:=

```
Solve[der2 == 0, x]
```

Out[21]:=

```
{{x -> 0}, {x -> -Sqrt[19/7]}, {x -> Sqrt[19/7]}}
```

$\sqrt{}$(19/7) è l'ascissa del punto di flesso, di cui si può calcolare l'ordinata come mostrato in precedenza.

Disegno del grafico della funzione, completo di asintoti e tangente nel punto di flesso:

In[22]:=

```
grafico = Plot[f[x], {x, 1.01, 8}, PlotRange -> {-1, 8}, AspectRatio -> Automatic,
  AxesLabel -> {"x", "y"}, DisplayFunction -> Identity]
```

In[23]:=

$$\text{tangente = Plot}\left[\ f\left[\sqrt{\frac{19}{7}}\right] + f'\left[\sqrt{\frac{19}{7}}\right]\left(x - \sqrt{\frac{19}{7}}\right), \{x, -1, 10\},\ \text{DisplayFunction -> Identity}\right]$$

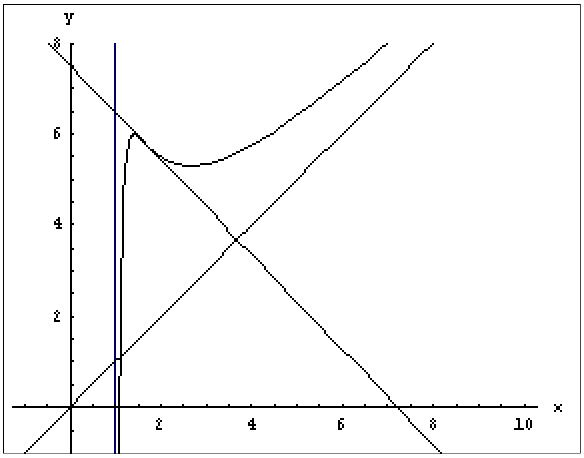
In[24]:=

```
asintoti = Plot[x, {x, -1, 10}, AspectRatio -> Automatic,
        PlotRange -> {-1, 8},
        AxesLabel -> {"x", "y"}, GridLines -> {{1}, {}},
        DisplayFunction -> Identity]
```

In[25]:=

```
Show[asintoti, grafico, tangente, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[25]:=



Commenti
Per disegnare l'asintoto verticale, si è utilizzata l'opzione **GridLines** perchè *Mathematica* non è in grado di tracciare direttamente rette verticali (se non utilizzando l'equazione parametrica della retta) in quanto non rappresentabili nella forma y=f(x).

Gruppo 7: Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Giovanni Olivieri, Antonio Rotteglia

Strumenti software: *Derive*.

Caratteristiche connesse all'uso del software
In *Derive* non è obbligatorio definire l'intervallo rispetto al quale tracciare il grafico di una funzione. *Derive* traccia il grafico della funzione anche in un intervallo in cui questa non è definita.
Grafico della funzione *f* tracciato con *Derive*

Collocazione temporale
Il problema è "naturalmente" collegato al programma di analisi (quarto o quinto anno).
Dagli studenti ci si aspetta un listato o una relazione adeguatamente commentata sulle problematiche affrontate per studiare la funzione.
Un uso strumentale del software consente di utilizzare lo studio della funzione come anticipatore di concetti, ovvero come occasione di riflessione sull'insieme di definizione (ad esempio del logaritmo o delle potenze a esponente reale). In quest'ottica il problema potrebbe quindi essere proposto non appena gli strumenti matematici lo consentono. Lo strumento informatico deve essere conosciuto e già utilizzato in casi non problematici.

Aspetti didattici

Il problema rappresenta un esempio significativo sullo studio di funzioni che può essere utilizzato per analizzare in modo critico l'uso di software che operano fornendo risultati contraddittori rispetto a quelli ipotizzati. In questo modo si viene sollecitati a:

- riflettere sulla correttezza dei risultati forniti da automi, anche a seguito di semplici istruzioni;
- indagare sui comportamenti dell'automa (qual è la logica con cui elabora e costruisce determinati risultati;
- indagare su problemi analoghi (ad esempio, studiare la funzione $y = x^{(1/3)}$);
- indagare su modi e procedure per "forzare" l'automa a lavorare in modo corretto;
- riflettere sull'equivalenza di scritture formalmente trasformabili l'una

  $$\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln\frac{x+1}{x-1} \quad ?$$

  nell'altra, ad esempio.

Il problema non può essere affrontato in modo semplice senza l'uso di uno strumento informatico per mezzo del quale si possono studiare in modo completo funzioni più complesse, che con carta e matita avrebbero invece il vincolo della difficoltà di calcolo.
La possibilità di visualizzare in modo immediato il "grafico" di una funzione, sollecita anche gli studenti che sarebbero invece meno motivati ad analisi da un punto di vista strettamente formale.
La necessità di "forzare" l'automa a tracciare il grafico corretto comporta l'approfondimento di concetti matematici particolari necessari per risolvere il problema.
Lo studio della funzione, nella sua componente trascendente, sollecita l'indagine sui limiti dello strumento informatico e sul suo modo di operare; dal punto di vista della matematica tali limiti sono invece praticamente legati alla sola difficoltà di calcolo.

Nodi concettuali

L'uso di uno strumento informatico comporta maggiore attenzione a:

- Insieme di definizione (ad esempio, come si definisce in Derive);
- Ricerca dell'intersezione della curva con l'asse x (uso di metodi numerici, scelta dell'intervallo e del valore iniziale)
- Disequazioni trascendenti

Approfondimenti e collegamenti

Comportamento dell'automa per argomenti negativi della sola funzione logaritmo o della differenza di funzioni logaritmi o di funzioni trascendenti in generale.
Calcolo di potenze ad esponente razionale e base negativa (ad esempio nello studio del grafico della funzione $y = x^{1/3}$).

Confronti tra grafici per la risoluzione di equazioni a componente trascendente.
Logaritmo ad argomento complesso.

Traccia della procedura di soluzione
Utilizziamo il software *Derive*.
Sappiamo che la funzione è definita per ogni x > 1; confrontiamo questa informazione con il grafico che facciamo tracciare a Derive.
Determiniamo le intersezioni con l'asse x delle ascisse (Risolvi) e constatiamo che Derive non è in grado di determinare una soluzione algebrica. Si sceglie allora la modalità Precisione Approssimata o Mista e si ottiene la soluzione approssimata [x = 1.09452].
Per studiare il segno della funzione si utilizza SIGN(f(x)), il cui grafico è y = 1 quando f(x) è positiva e y = -1 quando f(x) è negativa. Derive, che non è in grado di risolvere la disequazione f(x) > 0, traccia il grafico per x < -1 e x > 1.
Si cercano gli asintoti della funzione, calcolando i limiti nei punti di frontiera.

#1 $F(x) := \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5[\ln(x+1) - \ln(x-1)]$

LIM(#1,x,1) = $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5(ln(x+1) - ln(x-1) \right] = \pm inf$

La funzione ha un asintoto verticale $x = 1$.

LIM(#1,x,inf) = $\Rightarrow \lim\limits_{x \to inf} \left[\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5(ln(x+1) - ln(x-1) \right] = inf$

Si cerca l'eventuale asintoto obliquo.

LIM(#1/x,x,inf) = $\Rightarrow \lim\limits_{x \to inf} \left[\dfrac{\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5(ln(x+1) - ln(x-1)}{x} \right] = 1$

LIM(#1-x,x,inf) = $\Rightarrow \lim\limits_{x \to inf} \left[\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5(ln(x+1) - ln(x-1) - x \right] = 0$

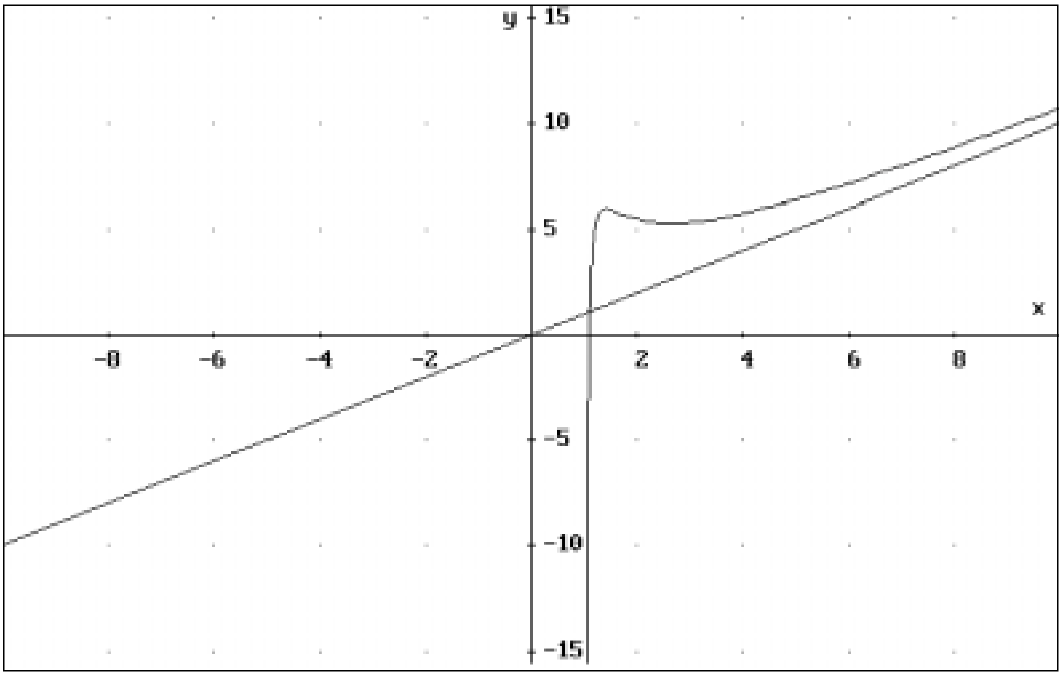
La funzione ha un asintoto obliquo $y = x$.

Si calcola la derivata prima e se ne studia il segno con la funzione SIGN. Si ottiene un massimo in SQRT(2). Si osserva che le altre tre radici (-SQRT(2), ± SQRT(7)) non appartengono all'insieme di definizione.

DIF(#1, x, 1) = $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}^{1} \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5(\ln(x+1) - \ln(x-1) - x = \dfrac{x^4 - 9x^2 + 14}{(x+1)^2 (x-1)^2}$

Si esamina la derivata seconda per la ricerca dei punti di flesso.
Si disegna il grafico della funzione, completa di asintoti, utilizzando la funzione IF per delimitare l'intervallo entro il quale tracciare il grafico.

IF(x >1, (x^3-4x)/(x^2-1)+5(LN(x+1)-LN(x-1)))*



Studio completo della funzione f nel suo insieme di definizione

Commenti
Dopo aver visto il primo grafico tracciato con Derive, quello errato, si può porre il problema di come ottenere la sola parte corrispondente all'insieme di definizione.
Per capire come mai Derive traccia il grafico anche per x < -1 si possono far calcolare i valori delle seguenti funzioni, ad esempio per x = -3: $\ln(x+1)-\ln(x-1)$; $\ln(x+1)$; $\ln(x-1)$. Si rileva così che il valore della prima funzione è reale mentre il valore delle altre due funzioni non è reale, ma hanno parte immaginaria uguale.

Problema 4

Considera un foglio A4 disposto come nella *figura 1.*

Figura 1

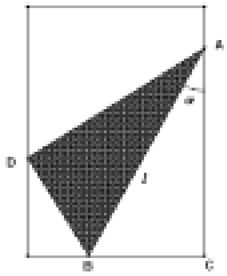


Figura 2

L'angolo in basso a destra viene piegato fino a quando il suo vertice raggiunge il bordo di sinistra (in modo che la parte piegata sia un triangolo; vedi *figura 2*).
Sia l la misura della piega AB e α l'ampiezza dell'angolo che questa forma con il bordo destro.
Determinare:

a) La misura di l in funzione di α, specificando in che intervallo può variare α. In un foglio A4 il rapporto tra le dimensioni è $\sqrt{2}$.

b) I valori estremi di l (specificandone la natura) e le corrispondenti ampiezze α.

<u>**Gruppo 3**</u> : Sandra Bernecoli, Patrizia Berneschi, Rossana Rossi Bucciarelli, Luigi Tomasi, Renato Verdiani

Strumenti software: *Cabri-géomètre, Derive*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Inizialmente *Cabri-géomètre* permette di simulare la piegatura della carta. Si può quindi esplorare la figura e "vedere" le varie configurazioni, comprendendo subito quali sono i limiti di variabilità dell'angolo α.

È più difficile matematizzare ed esprimere, mediante una funzione, il legame tra l e l'angolo α. In questa fase il software aiuta nel fare delle congetture, grazie soprattutto alla variabilità delle figure che si possono tracciare; questa caratteristica permette di comprendere quali sono le proprietà invarianti e quelle che mutano in base allo spostamento dei punti base del disegno.
Con *Cabri-géomètre* non è invece possibile determinare con precisione quale sia l'angolo α che rende minimo il valore di l; tale valore si può tuttavia trovare "sperimentalmente" per tentativi con buona approssimazione.
La funzione goniometrica trovata non si può studiare elementarmente, perché occorrono nozioni di analisi matematica. La si può studiare facilmente con *Derive*.

Collocazione temporale
Per quanto riguarda la prima parte, il problema si può collocare in una classe quarta liceo scientifico, in possesso di conoscenze di base di trigonometria, oppure una classe terza che segua la sperimentazione del Piano Nazionale per l'Informatica o quella del Progetto Brocca. Per lo studio di l come funzione dell'angolo α occorre invece avere a disposizione strumenti di analisi matematica perché la funzione ottenuta non si può studiare elementarmente.

Aspetti didattici
Questo problema coinvolge diverse abilità matematiche. Inizialmente occorre che gli allievi sappiano costruire, con *Cabri-géomètre*, un rettangolo con i lati di dimensioni a e b con $b = a\sqrt{2}$. Successivamente devono simulare la piegatura del foglio e individuarne l'intervallo in cui può variare l'angolo α come richiesto dal testo del problema; infine sono chiamati ad esprimere quantitativamente i valori di l e di α in alcuni casi particolari.

E' sempre necessaria la guida dell'insegnante perché le difficoltà da superare non sono poche; si ritiene anche che, se la parte geometrica è interessante e ricca di spunti didattici e quindi possa essere anche affrontata da studenti del secondo anno di liceo scientifico, quella trigonometrica e di analisi matematica può essere proposta solo a studenti del triennio. La parte finale del problema, dove si chiedono "i valori estremi l e le corrispondenti ampiezze dell'angolo α" può essere completata solo con l'aiuto dell'analisi matematica.

Nodi concettuali
In questo problema è difficile comprendere inizialmente che l dipende soltanto dal valore di α. Per tale analisi occorre osservare che si può circoscrivere una circonferenza, di diametro variabile l, al quadrilatero $ACBD$. Questa osservazione risulta essere cruciale per la risoluzione del problema, perché permette di determinare la misura della corda CD in funzione di α.

L'osservazione è suggerita dall'analisi iniziale del problema fatta con *Cabri-géomètre* che, come è noto, permette di esplorare in modo dinamico la figura, di fare deduzioni e di portare quindi a scoprire la soluzione.

Approfondimenti e collegamenti
Il problema è collegato con diverse questioni importanti nell'apprendimento-insegnamento della matematica: matematizzazione di un problema reale; uso della trigonometria in un contesto motivante; trovare l'espressione di una funzione che esprima un problema geometrico; studio di un problema di massimo e di minimo. Per questi motivi il problema può essere usato in contesti diversi con finalità differenti in relazione alla classe dove viene proposto.

Traccia della procedura di soluzione

1ª Fase
Costruzione di un rettangolo che simuli un foglio A4.

Probabilmente gli studenti, costruito un segmento di lato a, saranno portati a costruire il lato $b = a\sqrt{2}$ utilizzando la diagonale di un quadrato di lato a.
L'insegnante può presentare una nuova costruzione, più generale, che permette di costruire un segmento di lunghezza $a\sqrt{n}$, con n intero positivo qualsiasi. Per tale costruzione occorre usare il secondo teorema di Euclide e la costruzione del medio proporzionale tra i segmenti a e na, dove n è un numero naturale.

2ª Fase

Costruito quindi il rettangolo di formato A4, l'insegnante dovrà discutere con gli studenti sul modo di simulare la piegatura dell'angolo C in maniera che il punto C si sovrapponga al bordo di sinistra. Occorre infatti riconoscere, tra i punti A, B e D della figura del testo, quale sia quello da scegliere come principale dal quale dipendano gli altri due. Non è immediato infatti capire che B e A dipendono dalla posizione di D sul lato EG.
L'insegnante, comunque, in questa fase non dovrà intervenire con alcun suggerimento, ma dovrà limitarsi ad "esplorare" il comportamento dei propri allievi.

3ª Fase

Si consegna ad ogni alunno un vero foglio A4 e si chiede a ciascuno di eseguire una piegatura come indicato nel disegno del testo del problema.
L'insegnante dovrà far notare che:

- il punto D è quello fondamentale; ottenuto questo, i punti A e B si determinano automaticamente piegando definitivamente il foglio;
- il triangolo rettangolo ABD è isometrico al triangolo rettangolo ACB e quindi il punto D è simmetrico di C rispetto all'ipotenusa AB.

4ª Fase

A questo punto la costruzione della figura completa diventa immediata con *Cabri-géomètre*.
Partendo dal rettangolo costruito nella prima fase, si sceglie un punto D sul lato EG e si costruisce l'asse del segmento di estremi CD; tale asse interseca il lato CF nel punto A e il lato CE nel punto B (figura 3).

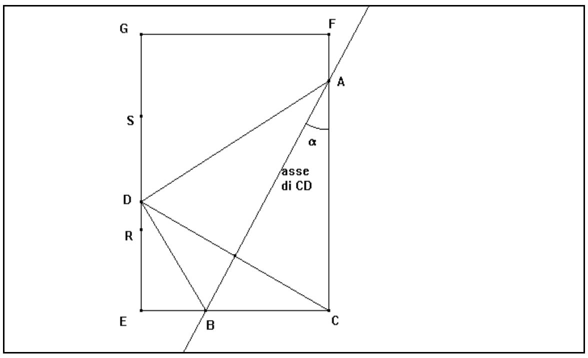


Figura 3. Il punto D deve appartenere al segmento RS.

Posto $\overline{EC} = a$, si osserva che il punto D non può variare su tutto il lato EG, ma soltanto dal punto *R*, a una distanza $a\left(\sqrt{2}-1\right)$ rispetto al punto *E*, fino al punto *S*, a una distanza *a* rispetto al punto *E* (figura 3).

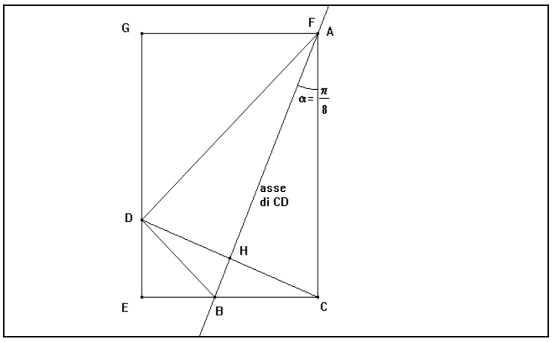


Figura 4. Caso estremo in cui α = π/8.

Il triangolo *ABD* è il triangolo che simula la piegatura del foglio e quindi, muovendo il punto *D*, si può iniziare ad esplorare il modello geometrico sulla “lavagna elettronica” di *Cabri-géomètre*. Con *Cabri-géomètre II* si può eseguire un’animazione che aiuta ancor più a comprendere la variabilità della figura al mutare del punto *D* appartenente ad *RS*.
Si vede allora che l’angolo α ha i seguenti estremi di variabilità (figura 4 e figura 5):

$$\frac{\pi}{8} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

Da tale esplorazione si deducono facilmente le posizioni estreme del punto *D* e le relative misure dell’angolo α.

Nella figura 4 è riportata la posizione di *D* corrispondente a quando il punto *A* coincide con *F*. Il triangolo *AGD* è rettangolo isoscele (*AD* = *A C* = $a\sqrt{2}$), il segmento *AB* è bisettrice dell’angolo *DAC* e quindi l’angolo α è π/8.

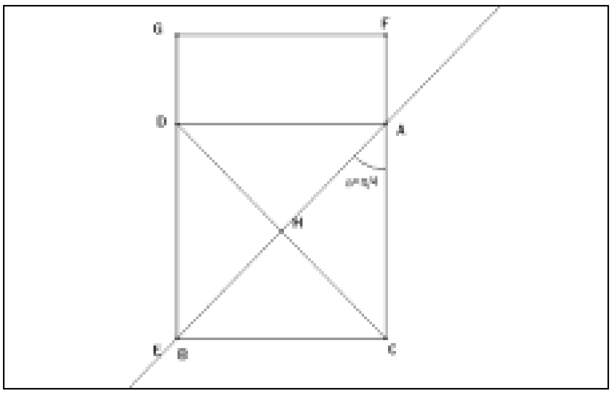


Figura 5. Caso estremo, in cui α = π/4.

Nella figura 5 è riportata la posizione di *D* corrispondente a quando il punto *B* coincide con *E*. Il quadrilatero *ACBD* diventa un quadrato di lato *a*, con il segmento *AB* che è la diagonale di tale quadrato e l'angolo α è di $\pi/4$.

5ª Fase

Esplorando ancora la figura con *Cabri-géomètre* è possibile scoprire che la lunghezza *l* della "piega" *AB* è massima in corrispondenza di *A* coincidente con *F* (figura 4) e diventa minima in una particolare posizione di *D* (figura 6). Per trovare esattamente tale posizione occorre però il calcolo differenziale e l'aiuto di *Derive.*

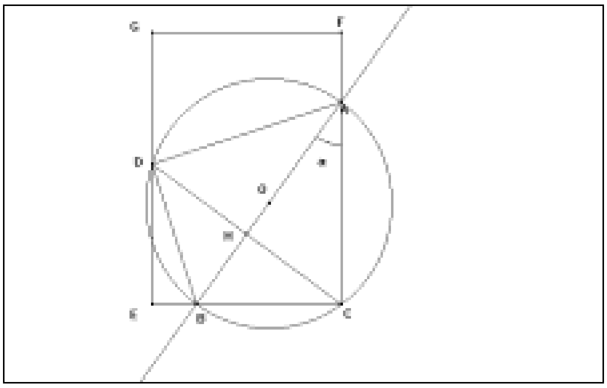


Figura 6. Posizione di *D* per cui *AB* è minimo.

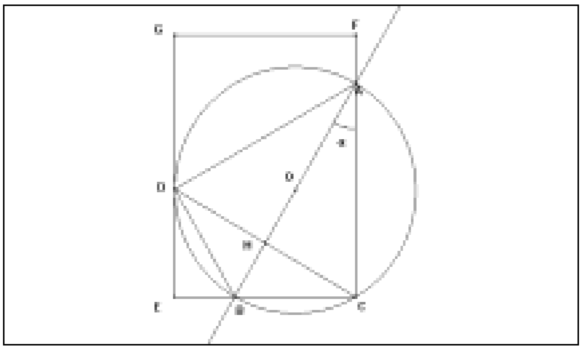


Figura 7. *AB* è il diametro variabile di una circonferenza.

La determinazione dei valori numerici di *AB* nei vari casi particolari si ottiene con considerazioni geometriche e con applicazioni delle relazioni tra lati ed angoli di un triangolo rettangolo.

a) Per $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (figura 5), $l = \overline{AB} = a\sqrt{2}$.

b) Per $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ (figura 4), $l = \overline{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\dfrac{\pi}{8}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = 2a\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

c) Dalla figura 7 si osserva che il quadrilatero *ACBD* è inscrittibile in una circonferenza. Applicando il teorema della corda nella circonferenza di diametro *l* = *AB*, si ottiene:

$$\overline{CD} = l\,\mathrm{sen}(2\alpha)\cdot$$

Quindi:

$$l = l(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{\frac{a}{\cos\alpha}}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha} = \frac{a}{2}\left(\tan\alpha \;\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha\right).$$

Quest'ultima formula fornisce *l* in funzione dell'ampiezza dell'angolo α.

```
"STUDIO DELLA FUNZIONE L(α)"
"La funzione da studiare e' la seguente:"
1/(2*SIN(x)*COS(x)^2)
x=pi/4
x=pi/8
;Sub(#3)
1/(2*SIN(pi/8)*COS(pi/8)^2)
;Simp(#6)
SQRT(8-4*SQRT(2))
;Sub(#3)
1/(2*SIN(pi/4)*COS(pi/4)^2)
;Simp(#8)
SQRT(2)
"La sua derivata prima e' data da:"
;Dif(#3,x)
DIF(1/(2*SIN(x)*COS(x)^2),x)
;Simp(#11)
(3/2-1/(2*SIN(x)^2))/COS(x)^3
(3/2-1/(2*SIN(x)^2))/COS(x)^3=0
;Solve(#13)
x=ATAN(SQRT(2)/2)
;Solve(#13)
x=ATAN(SQRT(2)/2)+pi
;Solve(#13)
x=ATAN(SQRT(2)/2)-pi
;Solve(#13)
x=-ATAN(SQRT(2)/2)
;Solve(#13)
x=pi-ATAN(SQRT(2)/2)
;Solve(#13)
x=-ATAN(SQRT(2)/2)-pi
ATAN(SQRT(2)/2)
"Nel punto atan(sqrt(2)/2) la funzione vale:"
;Sub(User)
1/(2*SIN(ATAN(SQRT(2)/2))*COS(ATAN(SQRT(2)/2))^2)
;Simp(#22)
3*SQRT(3)/4
```

Il grafico della funzione può essere ottenuto con *Derive* (figura 8). La parte del grafico che ha significato geometrico è quella compresa tra

$$\frac{\pi}{8} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}.$$

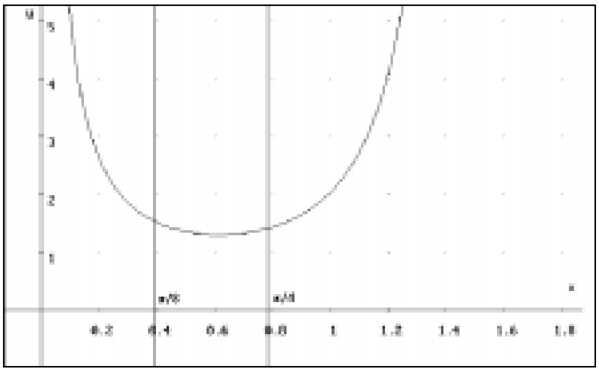


Figura 8. Grafico della funzione $l(\alpha)$

Si vede allora che il massimo assoluto del lato $l(\alpha)$ si ha in corrispondenza a

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \text{ (figura 4),}$$

ottenendo:

$$l = \overline{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = 2a\sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Un massimo relativo del lato l si ha in corrispondenza a

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ (figura 5) con } l = \overline{AB} = a\sqrt{2}\ .$$

Dallo studio del segno della derivata prima, segue che il minimo della funzione (figura 6) si ottiene per $\alpha = \operatorname{arc}\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; in corrispondenza a tale angolo si ha il valore minimo di l che vale

$$l = \overline{AB} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\ .$$

Commenti

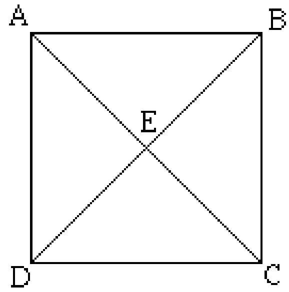
Il problema è interessante anche perché gli allievi possono avere un riscontro pratico, con l'uso di un semplice foglio A4 ed una verifica immediata dell'intervallo di variabilità dell'angolo α.

Il problema è quindi stimolante sotto l'aspetto della motivazione perché aderente alla realtà e facilmente "visibile", almeno nella fase iniziale.

È interessante anche perché mostra come, da un semplice problema di piegatura della carta, si possa arrivare a una funzione goniometrica, che può essere studiata in modo completo soltanto con l'aiuto dell'analisi matematica.

Problema 5

Consideriamo l'insieme H dei quattro vertici A, B, C, D e del centro E del quadrato ABCD. Due punti sono vicini se il segmento che li unisce non contiene, oltre ai suoi estremi, nessun altro punto di H. Un automa, partendo da uno dei cinque punti di H, si sposta, compiendo un passo, in uno dei punti vicini, in modo casuale ed equiprobabile. Un percorso è una successione di passi consecutivi e indipendenti (per esempio il percorso ABAED è la successione dei quattro passi AB, BA, AE, ED).



Sia e_n la probabilità che l'automa, partendo da A, arrivi, in n passi in E.
a) Calcolare dapprima e_0, e_1, e_2, e_3 .
b) Determinare e_n e calcolare $\lim_{n\to\infty} e_n$.

<u>Gruppo 5</u>: Aldo Boiti, Elena Crespina, Mauro De Vita, Rosanna Guidetti, Roberto Ricci.

Strumenti software: *Derive*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Derive è qui utilizzato come strumento di calcolo veloce per l'implementazione della funzione ricorsiva. In quanto tale libera in parte lo studente per consentirgli una maggiore concentrazione sugli aspetti matematico-probabilistici del problema.

Collocazione temporale
L'argomento è proponibile alla fine di un IV anno delle superiori in scuole a contenuto matematico forte. Lo studente dovrà già possedere una pratica sufficiente dello strumento software e della ricorsione ma anche oltre dei concetti fondamentali di probabilità, almeno elementi introduttivi al concetto di limite.

Aspetti didattici
Si tratta di un problema non elementare di probabilità. Attraverso l'aiuto di diagrammi ad albero lo studente è indotto a ragionare con metodo ricorsivo. Senza una buona preparazione sui tre diversi metodi richiesti per la risoluzione (almeno quella qui proposta) difficilmente lo studente potrà affrontare in modo autonomo

il problema, che quindi si presta sostanzialmente per una lezione da parte dell'insegnante.

Nodi concettuali

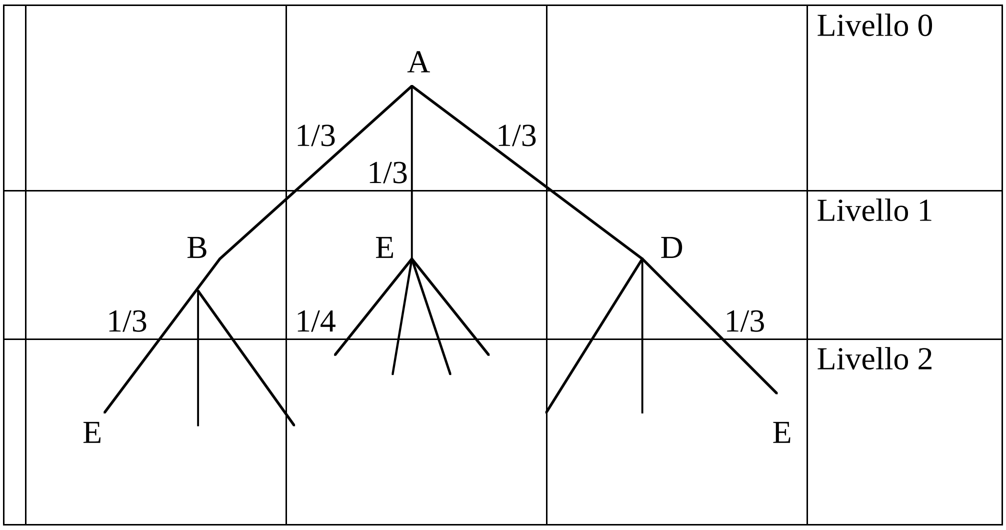
La soluzione esatta si ricava facilmente anche senza *Derive*. Anzi: il suo uso conduce a instabilità derivanti dal metodo numerico usato dello strumento per risolvere il limite. Come e dove approfondire le questioni qui legate ai problemi dell'approssimazione?

Approfondimenti e collegamenti

Applicazione di funzioni ricorsive. Concetto di limite.
Definizione frequentistica della probabilità.

Traccia della procedura di soluzione

Analizzato il problema, si parte dalla ricerca delle probabilità e_0 , e_1, e_2, e_3.
Un diagramma ad albero aiuta nella ricerca della soluzione.



Dal diagramma ad albero è immediato dedurre che:
$e_0 = 0$
$e_1 = 1/3$
$e_2 = 2/9$

Appare anche chiaro che la probabilità che l'automa si trovi in E nello stadio successivo (livello 3), dipende dal non essere in E nel livello precedente. Cioè la probabilità e_3 è uguale alla complementare di e_2 con probabilità 1/3:

$$e_3 = (1-e_2)*\ 1/3 = 7/27$$

Viene naturale allora calcolare la probabilità e_n introducendo la funzione ricorsiva

$$E(n) = [1-E(n-1)]*1/3$$
$$E(0) = 0$$

Se esiste $\lim_{n\to\infty} E(n)$ e vale l allora anche $\lim_{n\to\infty} E(n-1) = l$.

Si ha allora
$l = (1 - l) \cdot 1/3 \quad \Rightarrow \quad l = 1/4.$

In *Derive*, da n =12 circa, la notazione decimale converge a 0,25 (in realtà oscilla tra 0,249999… e 0,250000… e ciò è un ulteriore argomento di approfondimento).

Gruppo 6: Marco Calvani, Maurizio Franceschini, Ferruccio Rohr, Stefano Sarti.

Strumenti software: *Derive*

Collocazione temporale
Il problema studia un processo discreto non deterministico ed è un esempio di problema semplice, ma non banale, di calcolo delle probabilità. Questo tema è previsto – in teoria – sia nei programmi del biennio sia in quelli del triennio. Tenendo presente che la risoluzione richiede un passaggio al limite, la collocazione più ovvia è nel secondo ciclo, ma si può anche ipotizzare una trattazione in cui il software matematico è utilizzato per "andare oltre", cioè per esplorare un modello senza troppo preoccuparsi dei problemi di calcolo e/o formali che si possono presentare (nel nostro caso, quelli connessi ad una successione definita per ricorrenza). È questa seconda possibilità che ci sembra metta meglio in risalto le potenzialità del software matematico.

Caratteristiche connesse all'uso del software
Il problema si affronta con carta e matita, ottenendo per la probabilità cercata una formula ricorsiva. *Derive* è usato unicamente come calcolatore numerico per lo studio di tale successione. Il vantaggio che offre rispetto ad una calcolatrice tascabile è quello di poter lavorare su una lista di dati anziché sul dato singolo (funzione VECTOR). Nel nostro caso si riesce per esempio a scoprire il punto limite della successione. In poche parole si utilizza *Derive* come un foglio elettronico.

Aspetti didattici
Il problema è un esempio di passeggiata aleatoria su un grafo che, pur non richiedendo un grande bagaglio tecnico (vedi risoluzione), presenta qualche difficoltà. In particolare sono richieste le seguenti abilità:

- Saper costruire e interpretare un modello matematico probabilistico
- Saper applicare i teoremi sulla probabilità condizionata e gli eventi indipendenti
- Conoscere le successioni definite per ricorrenza
- Saper interpretare i dati approssimati forniti da un calcolatore

Inoltre, a un livello più elevato, si richiede di:

- Saper risolvere un problema con lo schema della ricorrenza
- Saper utilizzare una simmetria presente nei dati

Pertanto il problema, in virtù dell'importanza degli schemi richiesti per la risoluzione e, al contrario, del limitato bagaglio tecnico, può costituire un esempio significativo nell'ambito dell'educazione matematica.
Dal punto di vista didattico possiamo fare alcune osservazioni. Come tutti i processi discreti che coinvolgono il caso, il problema può essere presentato facendo ricorso a materiali concreti: dadi, urne e carte da gioco.
Inoltre, per la risoluzione del problema è certamente utile (come proposto dal testo) determinare la probabilità e_n per n=1,2,3 prima di passare al caso generale.

Osserviamo infine che questi processi si possono facilmente simulare utilizzando un linguaggio di programmazione, poiché tutti sono dotati di funzioni che generano numeri pseudo–casuali (per esempio la funzione RANDOM del *Turbo Pascal*).

Nodi concettuali

Dal punto di vista matematico i concetti che intervengono sono i seguenti:

- Modello probabilistico
- Probabilità condizionata ed eventi indipendenti
- Successioni definite per ricorrenza
- Limite di una successione

Come abbiamo già osservato, nel problema sono presenti anche due importanti nozioni metamatematiche:

- Risoluzione di un problema con lo schema della ricorrenza
- Semplificazione di un problema utilizzando una simmetria

Infine, il nodo concettuale più importante dal punto di vista informatico è quello di

- Approssimazione

Approfondimenti e collegamenti

Nella teoria della probabilità, le passeggiate aleatorie in un grafo sono viste come catene di Markov e sono state ampiamente trattate in letteratura. Per quanto riguarda la teoria, un risultato generale su queste passeggiate aleatorie è che per n tendente all'infinito la probabilità di finire in un certo vertice non dipende da dove si e partiti (ripetiamo: al limite!), quanto piuttosto dal numero di lati che arrivano nel vertice rispetto al numero di lati che arrivano a tutti i vertici del grafo: per esempio, nel nostro caso 4 su 3+3+3+3+4: cioè proprio 1/4!
Questa osservazione apre chiaramente la strada alla possibilità di costruire altre istanze di questo problema che si possono proporre agli studenti per rafforzarne l'apprendimento.

Traccia della procedura di soluzione

Indichiamo la probabilità che l'automa partendo da A, dopo n passi, arrivi in E, con

$$\Pr\left\{A \xrightarrow{n} E\right\}$$

Per un teorema sulla probabilità condizionata, questa probabilità è uguale a

$$\Pr\left\{A\xrightarrow{n}E \mid A\xrightarrow{n-1}\text{non}E\right\}\Pr\left\{A\xrightarrow{n-1}\text{non}E\right\}+\Pr\left\{A\xrightarrow{n}E \mid A\xrightarrow{n-1}E\right\}\Pr\left\{A\xrightarrow{n-1}E\right\}$$

Ma

$$\Pr\left\{A\xrightarrow{n}E \mid A\xrightarrow{n-1}E\right\}=0$$

(si sta considerando un evento impossibile). Inoltre per la simmetria del grafo

$$\Pr\left\{A\xrightarrow{n}E \mid A\xrightarrow{n-1}\text{non}E\right\}=1/3$$

Perciò

$$\Pr\left\{A\xrightarrow{n}E\right\}=\frac{1}{3}\cdot\Pr\left\{A\xrightarrow{n-1}\text{non}E\right\}=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\Pr\left\{A\xrightarrow{n-1}E\right\}\right)$$

Tornando ai simboli definiti nel testo del problema, si ottiene la formula ricorsiva:

$$\begin{cases} e_0=0 \\ e_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot e_{n-1} \quad n\geq 1 \end{cases}$$

Con metodi che esulano da un corso di matematica della scuola secondaria è possibile ottenere una forma chiusa per e_n con la quale è facile calcolare il limite per *n* che tende all'infinito.

$$e_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

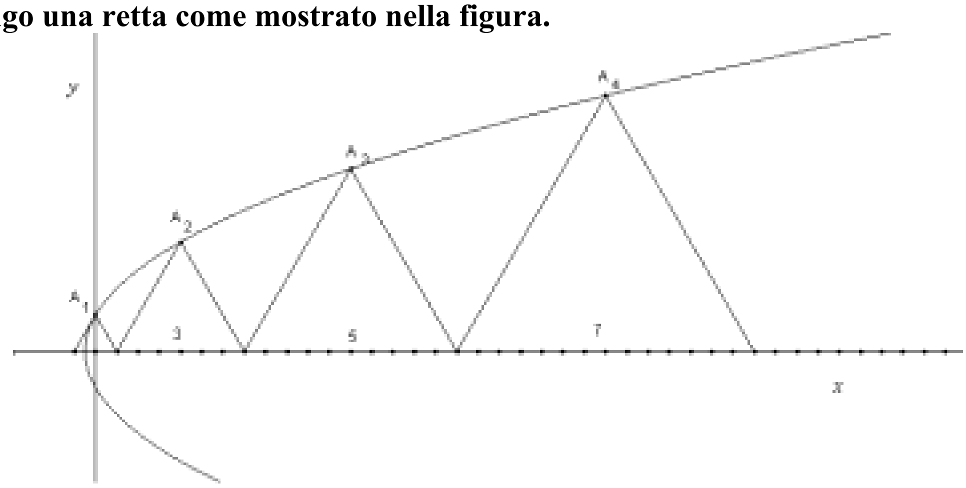
Per superare la difficoltà, facciamo dunque intervenire il computer: il cuore del foglio di lavoro è un'istruzione di *Derive* che permette di calcolare gli elementi di una successione definita ricorsivamente

$$\mathrm{e(n) := IF}\left[\mathrm{n = 0, 0, }\frac{1}{3}\cdot\mathrm{(1-e(n-1))}\right]$$

In questo modo è stata definita una funzione che può essere valutata negli interi non negativi. Con la funzione VECTOR è possibile vedere liste di valori consecutivi della funzione: sono frazioni orribili! Ma basta approssimarle con la funzione APPROX per accorgersi che al crescere di *n* i valori tendono rapidamente a 0,25.

Problema 6

Si dispongono dei triangoli equilateri con i lati di lunghezza 1, 3, 5, …, 2n-1 lungo una retta come mostrato nella figura.



Si tratta di dimostrare che i vertici che non giacciono sulla retta, appartengono ad una parabola e che le distanze di questi punti dal fuoco della parabola sono numeri naturali.

<u>Gruppo 1</u>: Piero Antognini, Paolo Carboni, Milla Lacchini, Rina Penolazzi, Mario Puppi, Gustavo Toninel.

Strumenti Software: *Mathematica.*

Caratteristiche connesse all'uso del software

In problemi come questo in cui si lavora con i grafici cartesiani *Mathematica* può aiutare a fare confronti tra diverse ipotesi. Ad esempio, nella scelta del sistema di riferimento sarà interessante studiare più di una possibilità, dato il vantaggio di calcolare rapidamente le equazioni oppure le coordinate di uno stesso oggetto in diversi riferimenti. *Mathematica* dispone poi di operatori che rendono banali i calcoli e permettono di concentrarci sulla struttura logica e sugli aspetti concettuali del problema.

Collocazione temporale

I prerequisiti che sono richiesti sono i seguenti

- successioni: definizione esplicita e definizione induttiva di una successione, in particolare progressioni aritmetiche e serie generate da progressioni aritmetiche;
- geometria analitica: retta, parabola e suoi elementi caratteristici (asse, vertice, fuoco, direttrice), equazioni parametriche ed equazione esplicita di una curva.

Visti i contenuti, il problema sembra adatto ad un terzo anno di un liceo scientifico o di un istituto tecnico industriale.

Aspetti didattici

La soluzione richiede la capacità di applicare in un unico ambiente metodi e conoscenze di contenuti diversi. Vediamo un possibile itinerario didattico:

- il docente presenta il problema alla classe, magari servendosi di animazioni al computer;
- il docente indica agli allievi dei temi da ripassare individualmente a casa, ad esempio le progressioni o la parabola;
- in laboratorio il computer viene inizialmente usato dagli allievi per fare esperimenti e ricavare congetture (ad esempio, studiare la posizione del vertice o della direttrice della parabola);
- una volta individuata una strategia risolutiva, il computer verrà usato per i calcoli.

Nodi concettuali

Un punto delicato nell'approccio seguito è l'eliminazione del parametro naturale n; è possibile pervenire allo stesso risultato seguendo altre vie che fanno a meno delle equazioni parametriche e sono concettualmente meno problematiche.

Approfondimenti e collegamenti

Modifiche del problema:

- eliminare il sistema di riferimento nel testo del problema (lo studente dovrà scegliere un sistema opportuno);
- sostituire i triangoli equilateri con dei quadrati.

Generalizzazioni:

- se cambiamo la successione delle lunghezze dei lati con una progressione aritmetica generica è vero che i vertici A_i percorrono ancora una parabola?
- sostituire i triangoli equilateri con triangoli isosceli.

Traccia della procedura di soluzione

Utilizziamo il software *Mathematica.*

Il sistema di riferimento cartesiano è scelto come nella figura del testo.

Calcoliamo le coordinate del punto A[n]: per l'ascissa si sfrutta la somma di n-2 numeri dispari a partire da 3, l'ordinata è l'altezza del corrispondente triangolo equilatero.

In[1]:=

$$\mathbf{x[n\_] = Simplify}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1}(2k-1) + \frac{1}{2}(2n-1)\right]$$

Out[1]=

(-1+n)n

In[2]:=

$$\mathbf{y[n-1]} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2n-1)$$

Out[2]=

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}(-1+2n)$$

In[3]:=

```
A[n_]= {x[n], y[n]}
```

Out[3]=

$$\left\{(-1+n)n,\frac{1}{2}\sqrt{3}(-1+2n)\right\}$$

Indichiamo con B[n] i vertici dei triangoli sull'asse x.

In[4]:=

$$B[n\_]=\left\{Simplify\left[x[n]+\frac{1}{2}(2n-1)\right],0\right\}$$

Out[4]=

$$\left\{-\frac{1}{2}+n^2,0\right\}$$

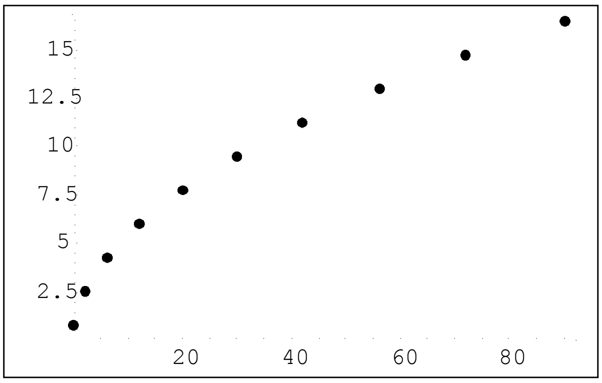
Esaminiamo graficamente il comportamento dei punti A[n]:

In[5]:=

```
nvertici[n_,opzioni__]:=ListPlot[Table[A[k],{k,1,n}],
opzioni]
```

In[6]:=

```
nvertici[10,PlotStyle->Pointsize[0.02],AxesOrigin->
{0,0}]
```



Il grafico ci dà una prima conferma della tesi sull'appartenenza dei punti ad una parabola. Ricaviamo, ora, n in funzione di x e, poi, y in funzione di x:[1]

In[7]:=

```
eq=Eliminate[{x= =x[n], y= =y[n]},n]
```

Out[7]=

```
12x==-3+4y^2
```

In[8]:=

```
eq= Roots[eq/.y^2->t,t]/.t->y^2
```

Out[8]:=

$$y^2 == \frac{3}{4}(1+4x)$$

Si tratta dell'equazione di una parabola con l'asse di simmetria coincidente con l'asse x.
Per completare il problema determiniamo le coordinate del fuoco della parabola:
In[9]:=

```
xv=x/.Flatten[Solve[eq[[2]]==0]]
```

Out[9]:=

$$-\frac{1}{4}$$

In[10]:=

```
yv=y/.Flatten[Solve[eq/.x->xv]]
```

Out[10]:=

```
0
```

In[11]:=

```
V={xv, yv}
```

Out[11]:=

$$\left\{-\frac{1}{4},0\right\}$$

---

[1] Il fatto che $n \in N$, mentre $(x,y) \in R \times R$dovrebbe essere oggetto di discussione e approfondimento con gli studenti.

In[12]:=

```
p=p/.Flatten[Solve[2p= = Coefficient[eq[[2]],x]]]
```

Out[12]:=

$$\frac{3}{2}$$

In[13]:=

$$\mathbf{F}=\left\{\mathbf{xv}+\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}},\mathbf{xy}\right\}$$

Out[13]:=

$$\left\{\frac{1}{2},0\right\}$$

Calcoliamo, infine, il quadrato della distanza *d*2 tra *A*[*n*] e *F*:

In[14]:=

```
AF=A[n]-F
```

Out[14]:=

$$\left\{-\frac{1}{2}+(-1+n)n,\frac{1}{2}\sqrt{3}(-1+2n)\right\}$$

In[15]:=

```
d2=Apply[Plus,AF^2]
```

Out[15]:=

$$\frac{3}{4}(-1+2n)^2+\left(-\frac{1}{2}+(-1+n)n\right)^2$$

In[16]:=

```
d2=Expand[d2]
```

Out[16]:=

$$1-2n+3n^2-2n^3+n^4$$

In[17]:=

```
d2=Factor[%]
```

Out[17]:=

$$(1-n+n^2)^2$$

Poiché *d*2 è un quadrato perfetto, la distanza *d* è dunque un numero naturale:

In[18]:=

d = $\sqrt{\mathbf{d2}}$**//PowerExpand**

Out[18]:=

1-n+n^2

Con le seguenti funzioni, infine, si può ottenere un'animazione del problema:

In[19]:=

```
Needs["Graphics ImplicitPlot"]
```

In[20]:=

```
Parabola=ImpliciPlot[eq,{x,-1,25}, {y,-1,9},
        AxesOrigin->{0,0}, AxesLabel->{x,y},
        DisplayFunction->Identity]
```

Out[20]:=

```
- ContourGraphics -
```

In[21]:=

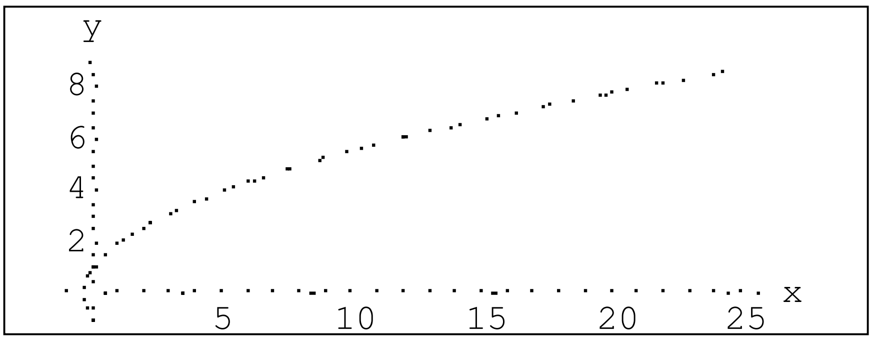
```
Trinagoli[k_]:=Graphics[Line[Flatten[Table[{B[n-
1],A[n], B[n]}, {n,1,k}],1]]]
```

In[22]:=

```
mostra[k_]:=Show[parabola,triangoli[k],DisplayFunction
-> $DisplayFunction]
```

In[23]:=

```
mostra[5]
```



Out[23]:=

- Graphics -

In[24]:=

```
Triang[k_]:=Graphics[{Hue [0], Line[Flatten[Table[{B[n-
1],A[n],B[n]}, {n,1,k}],1]]}]
```

In[25]:=

```
curva[n_]:=ImplicitPolt[eq,{x,-1/2,x[n]},{y,0,y[n]},
            DisplayFunction->Identity]
```

In[26]:=

```
muovi[n_]:=Do[Show[curva[n],triang[k],AxesOrigin->
{0,0}Ticks->None,Axes->True,PlotRange->{{-1/2,
B[n][[1]]},{0,y[n]}}DisplayFunction->
$DisplayFunction],{k,1,n}]
```

L'argomento della funzione "muovi" è il numero di triangoli che si desidera visualizzare.

Commenti
In una risoluzione senza aiuto del computer sarebbero richieste maggiori abilità di calcolo da parte dello studente: somma di una progressione, eliminazione di un parametro, fattorizzazione di un polinomio. L'uso del software permette, se si vuole, di fare a meno di queste capacità operative: quali conseguenze ne derivano sul piano didattico? Si dovrà ancora insistere molto nell'insegnamento della scomposizione in fattori dei polinomi? Se la risposta è negativa, quali sono le tecniche di scomposizione che lo studente medio dovrebbe comunque possedere?

Gruppo 3: Sandra Bernecoli, Patrizia Berneschi, Rossana Rossi Bucciarelli, Luigi Tomasi, Renato Verdiani.

Strumenti software: *Derive, Cabri-géomètre.*

Collocazione temporale
Il problema può essere affrontato a vari livelli con modalità diverse.
Inizialmente occorre che gli allievi riescano ad esprimere le coordinate dei vertici dei triangoli equilateri, non appartenenti all'asse x, in funzione di n. Trovare la successione aritmetica delle ordinate è più facile rispetto a quella delle ascisse di tali vertici, il cui termine generale è $n(n–1)$. Dimostrare che effettivamente la formula per le ascisse è quest'ultima coinvolge abilità che sono acquisite di solito

nel triennio (successioni, definizione esplicita di una successione, definizione ricorsiva di una successione, oltre a conoscenze di base sulla parabola).
Il problema quindi può essere proposto in una classe terza liceo scientifico dopo aver introdotto lo studio della parabola, ma ha anche una sua validità come esercizio sulle successioni numeriche. Inizialmente, infatti, occorre esprimere in termini generali le coordinate dei vertici non appartenenti all'asse delle ascisse dei triangoli equilateri dati.
Rimanendo, tuttavia, ad un livello prevalentemente intuitivo, il problema è stato proposto (vedere oltre) da una componente del nostro gruppo di lavoro in una classe seconda superiore nell'ambito della geometria analitica, dopo aver introdotto lo studio della parabola.

Caratteristiche connesse all'uso del software
Questo problema si presta bene ad una lezione condotta in laboratorio basata su una continua discussione tra studenti e docente. Quest'ultimo deve indirizzare con opportuni suggerimenti la scelta di strategie risolutive e deve aiutare gli allievi a formalizzare i risultati ottenuti. Il *Derive* permette di scrivere annotazioni e commenti lungo il percorso. Questo fatto abitua gli studenti a sintetizzare e formalizzare i risultati ottenuti dalla discussione.
Il *Derive* permette in alcuni passaggi di fare congetture, in altri di svolgere più velocemente calcoli laboriosi. Il programma offre quindi un valido aiuto per catalizzare tutta l'attenzione degli allievi sulla strategia risolutiva piuttosto che sulle difficoltà di calcolo.
Il software usato per risolvere questo problema è stato prevalentemente il *Derive,* con la soluzione indicata nella traccia indicata sopra.
Tuttavia l'ultima versione del *Cabri-géomètre*, che contiene un ambiente di geometria analitica, si presta altrettanto bene alla risoluzione del problema, ma la possibilità di ottenere l'equazione della parabola richiedendola direttamente dal menu può non rappresentare una grande valenza didattica se non è preceduta da un'adeguata analisi del problema.

Aspetti didattici
Il problema offre l'occasione di riflettere:
- sulla definizione della parabola come luogo geometrico e sulla sua equazione in presenza di una simmetria;
- sull'opportunità di scelta di un sistema di riferimento piuttosto che di un altro;
- sulla scelta di strategie risolutive alternative, in modo particolare per l'ultima richiesta del testo del problema;
- sulla necessità di generalizzazione, a partire dalla conoscenza di alcune coordinate dei vertici dei triangoli;
- sulla definizione di equazioni parametriche di un luogo geometrico;
- sulla definizione esplicita di una successione numerica.

La risoluzione di questo problema rafforza le conoscenze teoriche sulla parabola, la relazione esistente tra la misura del lato e dell'altezza di un triangolo equilatero,

del concetto di appartenenza di un punto ad una curva, della scomposizione in fattori di polinomi, oltre allo studio di alcune proprietà dei numeri naturali (somma dei primi n numeri dispari).
Il docente, svolgendo le funzioni di moderatore, può suscitare una discussione nella classe sulla strategia di risoluzione più opportuna. Inoltre, limitando i propri interventi al minimo indispensabile, può fare in modo che le soluzioni dei vari aspetti del problema siano effettivamente frutto del lavoro della classe.

Nodi concettuali
Riuscire ad esprimere le coordinate dei vertici del triangolo di lato $2n - 1$, soprattutto per il valore dell'ascissa, rappresenta il momento più delicato. Questo punto del problema è collegato alla particolare scelta del sistema di riferimento fatta dall'autore del quesito che, inserendo la figura nel testo, ha creato dei vincoli.
Un nodo concettuale di questo problema sta comunque nella dimostrazione che i punti dati appartengono a una parabola. Trovate le generiche coordinate dei punti A_n, occorre osservare che tali coordinate dipendono da un numero naturale n. Per dimostrare che i punti appartengono a una parabola si deve osservare che l'ordinata dei vertici A_n è una funzione lineare di n e l'ascissa è una funzione quadratica di n, evitando di parlare di coordinate parametriche del luogo, in quanto n varia nell'insieme N_0. Si può quindi concludere che i punti appartengono ad una conica. Eliminando n tra le due equazioni si ottiene l'equazione di una parabola.

Approfondimenti e collegamenti
Il problema si può collegare, oltre che all'approfondimento della parabola e delle coniche, allo studio delle successioni e alla necessità di dare una dimostrazione della formula ottenuta come generalizzazione da alcuni casi particolari (problema dell'induzione matematica). La generalizzazione, e quindi la necessità di non limitarsi a ragionare su alcuni casi particolari, costituisce uno degli obiettivi dell'insegnamento della matematica. Questo problema chiede inizialmente un lavoro di generalizzazione, per passare da alcune coordinate dei vertici all'espressione generale di esse. Il problema offre inoltre la possibilità di rivedere in un contesto significativo la formula che fornisce la somma dei primi n numeri dispari.
Un ulteriore approfondimento è permesso dall'analisi delle equazioni delle ascisse e delle ordinate dei vertici dei triangoli non giacenti sull'asse x. Tali equazioni sono espresse in funzione di un numero naturale anziché di un numero reale; esse rappresentano soltanto un'infinità numerabile di punti che stanno sulla parabola. Per ottenere le equazioni parametriche occorre un'ulteriore generalizzazione, sostituendo ad n un numero reale x, con $x \geq -\frac{1}{4}$.

Traccia di risoluzione del problema

- Si determinano, rispetto al sistema di assi indicato nella figura iniziale, le coordinate di alcuni dei vertici non appartenenti all'asse x dei triangoli equilateri. Conoscendo la formula che fornisce la misura dell'altezza di un triangolo equilatero, è facile determinare le ordinate dei punti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, scoprire che sono in progressione aritmetica e date dalla formula:
$$y_n = (2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots .$$
- Meno immediato è trovare le ascisse dei punti A_n che risultano essere:
$$x_n = n(n-1) \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots .$$
Per dimostrare la validità di tale formula si vede che la prima ascissa è 0; la seconda è 2, la terza è 6, … e così via fino alla n-esima ascissa che, dall'osservazione della figura iniziale, si ricava essere data da:
$$x_n = \frac{1}{2} + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + \frac{2n-1}{2}.$$
In classe si può osservare che, in quest'ultima somma, aggiungendo e togliendo $\frac{1}{2}$, si ottiene:
$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + \frac{2n-1}{2} - \frac{1}{2}$$

ovvero:
$$x_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (n-1) = (n-1)^2 + (n-1) = n(n-1).$$
In questo calcolo, che può essere ottenuto più velocemente con il *Derive*, è stata usata la formula che fornisce la somma dei primi n numeri dispari:
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$
Il vertice generico A_n ha pertanto le seguenti coordinate:
$$A_n\left(n(n-1)\,,\ (2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

ovvero:
$$\begin{cases} x = n(n-1) \\ y = (2n-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{con } n \in N_0.$$

- Da quanto visto in precedenza si osserva che mentre le ordinate sono una funzione lineare di *n,* le ascisse sono una funzione quadratica di n. Pertanto la curva passante per i punti A_n deve essere una conica.
Procedendo con il *Derive,* si ricava n dalla seconda equazione e si sostituisce nella prima equazione. Si ottiene l'equazione di una parabola.
- Stabilito che la curva cui appartengono tutti i punti è una parabola, si può anche trovare la sua equazione osservando che, per ragioni di simmetria, il suo asse coincide con x. La sua equazione sarà dunque del tipo:

$$x = ay^2 + c .$$

Imponendo il passaggio per due dei punti dati, si ottiene, dopo alcuni calcoli, la seguente equazione:

$$x = \frac{1}{3} y^2 - \frac{1}{4}$$

che rappresenta una parabola avente il vertice nel punto $V\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$, il fuoco in $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ e per direttrice la retta di equazione $x = -1$.

- Relativamente all'ultima domanda del problema, si discutono con gli allievi le due possibilità per determinare le distanze $\overline{A_n F}$ richieste dal testo.

  Sfruttando la formula della distanza tra due punti, si ricava:

$$d = \overline{A_n F} = \sqrt{\left[n(n-1) - \frac{1}{2}\right]^2 + \left[(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2}$$

ovvero:

$$d = \sqrt{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 1} .$$

Sotto radice quadrata si trova un polinomio di quarto grado che il *Derive* fattorizza agevolmente, mentre gli allievi potrebbero non procedere oltre. Osservato che:

$$d = \sqrt{n^2 (n-1)^2 + 2n(n-1) + 1} ,$$

si ottiene:

$$d = n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1 .$$

Se si vuole evitare la difficoltà di scomporre un polinomio di quarto grado, per determinare le distanze $\overline{A_n F}$ conviene quindi seguire un'altra strada, che fa uso della definizione di parabola come luogo geometrico dei punti equidistanti dalla direttrice e dal fuoco. Considerato che deve essere:

$$\overline{A_n F} = \overline{A_n H} ,$$

dove H è il piede della proiezione di A_n sulla direttrice della parabola, conviene calcolare $\overline{A_n H}$.

Tale osservazione dà adito ad un calcolo che si rivela più semplice e veloce. Dato che la direttrice ha per equazione $x = -1$, il calcolo si riduce ad eseguire la differenza tra due numeri interi e si può fare immediatamente:

$$d = \overline{A_n F} = \overline{A_n H} = n^2 - n + 1 ,$$

che è chiaramente un numero naturale. Al variare di $n \in \boldsymbol{N}_0$, si ottiene d = 1, 3, 7, 13, … .

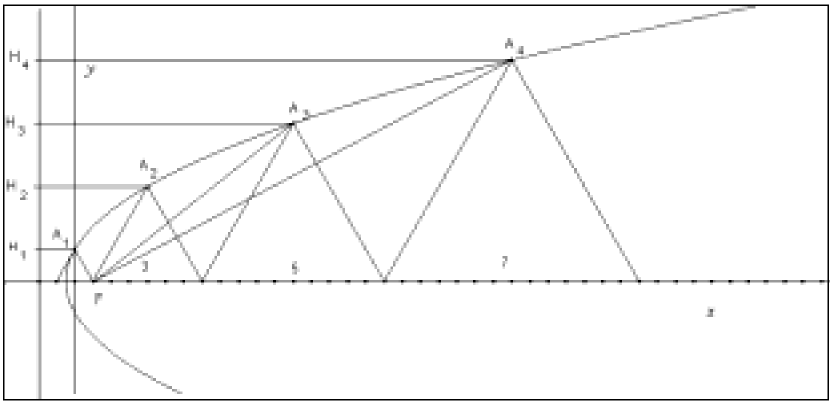


Figura 2. Distanze tra i vertici A_n e il fuoco F della parabola.

Traccia di risoluzione con *Derive*

```
"PROBLEMA DEI VERTICI DEI TRIANGOLI EQUILATERI"
"Le ordinate dei punti sono:"
(2*n-1)*SQRT(3)/2
"Le ascisse dei vertici che non stanno sull'asse x
sono:"
0
1/2+3/2
;Simp(#6)
2
1/2+3+5/2
;Simp(#8)
6
1/2+3+5+7/2
;Simp(#10)
12
"..............................."
"La n-esima ascissa sara' pertanto:"
1/2+SUM(2*k-1,k,2,n-1)+(2*n-1)/2
;Simp(#14)
n*(n-1)
"Quindi i vertici hanno coordinate:"
[n*(n-1),(2*n-1)*SQRT(3)/2]
"Quindi si ottiene:"
x=n*(n-1)
y=(2*n-1)*SQRT(3)/2
"Ricavando n dalla seconda equazione:"
;Solve(#20)
n=SQRT(3)*y/3+1/2
"e sostituendo nella prima equazione, si ottiene:"
;Sub(#19)
x=(SQRT(3)*y/3+1/2)*((SQRT(3)*y/3+1/2)-1)
```

```
"otteniamo l'equazione della parabola richiesta:"
;Simp(#24)
x=(4*y^2-3)/12
;Expd(#26)
x=y^2/3-1/4
"Disegniamo alcuni vertici dei triangoli:"
VECTOR([n*(n-1),(2*n-1)*SQRT(3)/2],n,1,10)
"Consideriamo la parabola generica di asse x:"
x=a*y^2+c
"Imponiamo il passaggio per il primo punto:"
;Sub(#32)
0=a*(SQRT(3)/2)^2+c
;Simp(#34)
0=3*a/4+c
;Solve(#35)
c=-3*a/4
"Imponiamo il passaggio per il secondo vertice:"
2=a*(3*SQRT(3)/2)^2+c
;Simp(#38)
2=27*a/4+c
;Solve(#39)
c=2-27*a/4
"Risolvendo si ottiene:"
2-27*a/4=-3*a/4
;Solve(#42)
a=1/3
;Sub(#40)
c=2-27*(1/3)/4
;Solve(#44)
c=-1/4
"Quindi l'equazione della parabola e’:"
x=1/3*y^2-1/4
"Disegniamo alcuni triangoli:"
"Sull'asse x, i vertici hanno coordinate:"
-1/2
1/2
1/2+3
1/2+3+5
"In generale l'ascissa sara':"
-1/2+SUM(2*k-1,k,1,n)
;Simp(#55)
n^2-1/2
"Creiamo un vettore con i vertici dei triangoli equilateri:"
[n*(n-1),(2*n-1)*SQRT(3)/2]
```

```
[n^2-1/2,0]
"otteniamo:"
VECTOR([[n^2-
1/2,0],[n*(n+1),(2*n+1)*SQRT(3)/2],[(n+1)^2-
1/2,0]],n,0,10)
```

Traccia di risoluzione con *Cabri-géomètre*

Con *Cabri-géomètre* occorre fare prima di tutto costruire i triangoli equilateri così come indicato nella figura del testo e poi usare il menu 'Conica', indicando cinque suoi punti; si ottiene in questo modo il disegno della parabola.

Fissato il sistema di riferimento indicato nel testo del problema, con l'origine nel punto medio del lato del primo triangolo equilatero e unità di misura uguale al lato del primo triangolo equilatero, si può chiedere direttamente a *Cabri-géomètre II* di scrivere l'equazione della conica, ottenendo in modo immediato:

$$4y^2 - 12x - 3 = 0 .$$

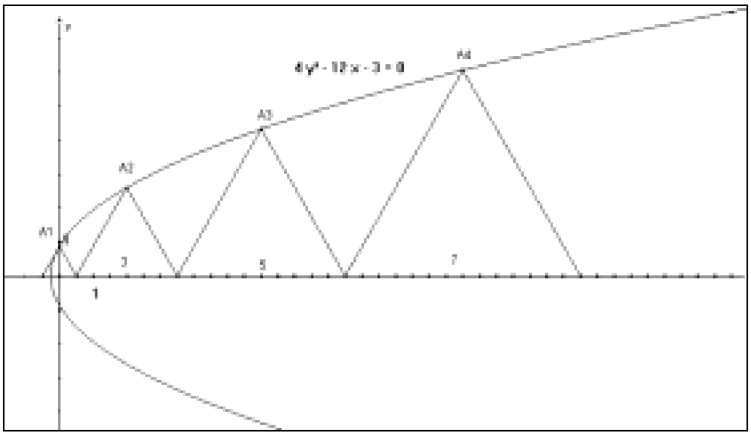


Figura 3. Equazione della parabola ottenuta con *Cabri-géomètre II.*

Commenti

Il problema è adatto ad un triennio, ma, come si è accennato in precedenza, una componente del gruppo di lavoro l'ha proposto anche in una classe seconda superiore, dopo aver introdotto lo studio della parabola. In questa esperienza didattica si è inizialmente fatto uso di un foglio elettronico (*Excel*), proprio per provocare negli allievi una discussione sulla differenza tra il grafico empirico, costruito "per punti", e la trattazione analitica più generale. Si ritiene infatti che, dal punto di vista didattico, sia sempre produttivo suscitare la discussione, per mettere in crisi alcune facili certezze degli allievi nell'uso del computer, al fine soprattutto di ottenere una riflessione sulla necessità di una dimostrazione di quanto si è intuito, oltre che la partecipazione e l'interesse della classe. Anche in questa esperienza didattica, condotta nel biennio, si è quasi subito passati all'uso del programma *Derive* che permette un'analisi più raffinata del problema, grazie soprattutto alle sue possibilità di calcolo simbolico, nonostante il programma non sia stato usato con tutte le sue potenzialità, ma effettuando scelte con motivazione didattica e tenendo sempre ben presente il livello di apprendimento della classe.

Gruppo 4: Giovanni Margiotta, Franca Noè, Enrico Pontorno, Marilena Sparapani, Guido Sperti

Strumenti software: *Cabri*

Caratteristiche connesse all'uso del software:
Riteniamo necessario trattare inizialmente il problema a tavolino, sia per la valenza didattica dello stesso che per necessità di calcolo. Il software serve in seguito per illustrare la soluzione grafica del problema e, a seconda che si tratti di *Cabri 1.7* o di *Cabri II*, è possibile utilizzare o solo l'opzione luogo di punti o anche l'equazione per disegnare la parabola.
Il problema non richiede l'uso di un software particolarmente sofisticato, inoltre la dinamicità delle figure *Cabri* risulta in questo caso particolarmente significativa.

Collocazione temporale:
Si colloca nella 3ª/4ª classe di un liceo scientifico o di un istituto tecnico industriale, nell'ambito delle unità didattiche sulla parabola o sulle successioni o anche al termine di un percorso su tali contenuti come prova di verifica.
Il lavoro è stato proposto in una classe 4ª del LS Galilei di Macerata dalla prof. Marilena Sparapani con esiti sicuramente positivi per la ricchezza di spunti di riflessione offerti dal problema.

Aspetti didattici:
Il problema è significativo rispetto ai programmi sperimentali e consente di utilizzare conoscenze e metodi diversi per uno stesso problema.
Si può pensare a una scheda di lavoro per gli alunni così organizzata:
a) usare il computer per costruire la figura in *Cabri* e fare congetture;
b) determinare l'equazione della parabola passante per i vertici della figura 1;
c) individuare le successioni delle ascisse e delle ordinate dei vertici A_n;
d) dimostrare che i vertici A_n appartengono a una parabola;
e) dimostrare che le distanze dal fuoco dei vertici A_n sono numeri naturali;
f) illustrare graficamente la soluzione in *Cabri*;
g) modificare e generalizzare il problema.

Nodi concettuali:
Da un punto di vista didattico il problema è interessante per:
- la flessibilità nell'analisi del problema (scegliere un sistema di riferimento eventualmente diverso da quello indicato in figura 1, comprendere la simmetria rispetto all'asse x nel punto b);
- la ricerca di regolarità (determinare le successioni nel punto c);
- la trattazione delle equazioni parametriche e il passaggio dal discreto al continuo (eliminazione del parametro nel punto d).

Approfondimenti e collegamenti:
Il problema è ritenuto interessante anche per le possibili varianti (lati di lunghezza pari, triangoli isosceli simili, lati in progressione aritmetica) e per le trattazioni che ne possono derivare.

Traccia della procedura di soluzione
Nel sistema di riferimento *Oxy* della figura 1, i vertici dei triangoli equilateri con i lati di lunghezza 1, 3, 5, 7 hanno coordinate:
$A_1(0;\sqrt{3}/2)$, $A_2(2;3\sqrt{3}/2)$, $A_3(6;5\sqrt{3}/2)$, $A_4(12;7\sqrt{3}/2)$.

Sia $x = ay^2 + c$ l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria coincidente con l'asse x; imponendo il passaggio per i punti A_1, A_2 si ottiene il sistema lineare: $\begin{cases} 3a + 4c = 0 \\ 27a + 4c = 8 \end{cases}$ la cui soluzione è: $a = 1/3, \quad c = -1/4$.

L'equazione della parabola richiesta è: $x = 1/3\, y^2 - 1/4$.
Si verifica facilmente che i vertici A_3, A_4 appartengono alla parabola. Il fuoco della parabola è il punto F(1/2 ; 0) e le distanze dei vertici da F valgono: $\overline{A_1F} = 1$, $\overline{A_2F} = 3$, $\overline{A_3F} = 7$, $\overline{A_4F} = 13$.

Le successioni delle ascisse x_n e delle ordinate y_n dei vertici A_1, A_2, A_3, A_4, …, A_n, … dei triangoli equilateri con i lati di lunghezza 1, 3, 5, 7, …, (2*n*-1), … sono: $x_n = n(n-1)$; $y_n = \sqrt{3}(2n-1)/2$.
Eliminando il parametro *n* tra le coordinate di A_n si ottiene la relazione: $x_n = 1/3 y_n{}^2 - 1/4$, che dimostra che i vertici A_n appartengono alla parabola di equazione $x = 1/3 y^2 - 1/4$.
La distanza del vertice A_n dell'*n*-simo triangolo equilatero dal fuoco F(1/2;0) vale:
$$\overline{A_nF} = \sqrt{(n^2 - n - 1/2)^2 + (\sqrt{3}(2n-1)/2)^2} = n^2 - n + 1, \ \textit{e si ha}\ \forall n \in N_0, (n^2 - n + 1) \in N_0.$$
Quindi la successione delle distanze è costituita dai numeri naturali: 1, 3, 7, 13, …, $n^2 - n + 1$,….

La procedura di costruzione della figura 2 in *Cabri 1.7* è sinteticamente:
- costruzione assi *x* e *y*;
- costruzione su asse *x* dei segmenti di lunghezze 1, 3, 5 ,7;
- costruzione di una macro per disegnare i triangoli equilateri;
- visualizzazione della parabola, luogo dei punti equidistanti da F e dalla direttrice *d* (parallela asse *y* a distanza 1).

In *Cabri II* è possibile utilizzare ottenere sia il grafico che l'equazione della parabola direttamente dal menu, tuttavia potrebbe non essere didatticamente valido.

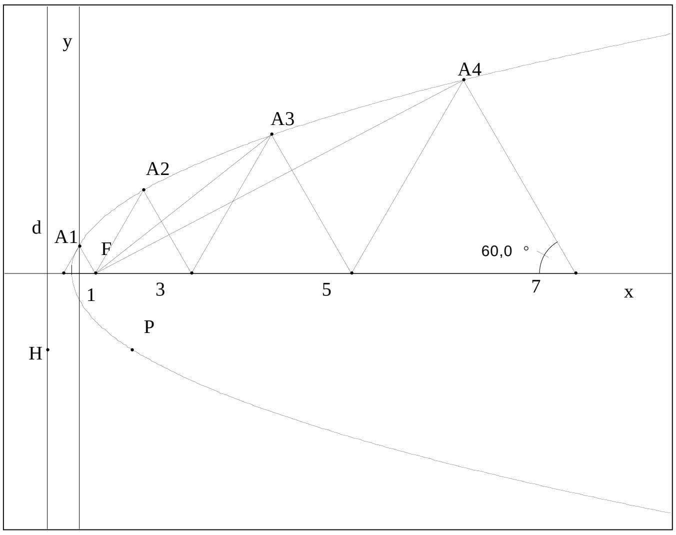


Figura 2

Approfondimenti

- Traccia di soluzione del problema con triangoli equilateri con i lati di lunghezze pari

Nel sistema di riferimento *Oxy* della figura 3, i vertici B_n dei triangoli equilateri con i lati di lunghezza 2, 4, 6, …, $2n$, … hanno coordinate: $B_1(0\,;\sqrt{3})$, $B_2(3\,;2\sqrt{3})$, ... $B_n(n^2-1\,;n\sqrt{3})$ che appartengono alla parabola di equazione: $x = 1/3\,y^2 - 1$.

Il fuoco della parabola è il punto F(-1/4 ; 0) e le distanze dei vertici da F valgono: $\overline{B_1F} = 7/4$, $\overline{B_2F} = 19/4$, ... $\overline{B_nF} = n^2 + 3/4$

che non sono numeri naturali.

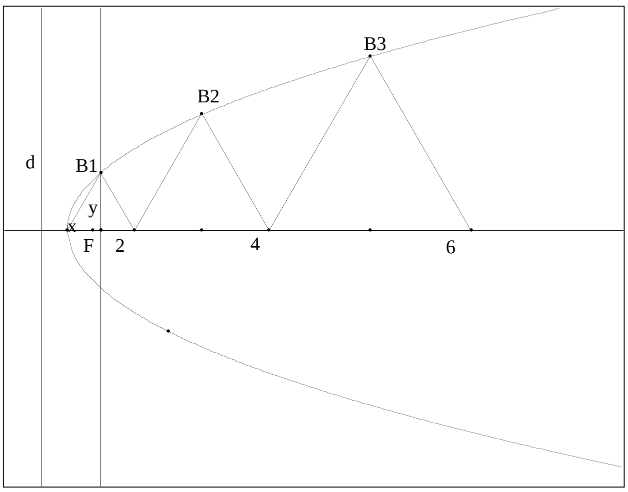


Figura 3

- Traccia di soluzione del problema con triangoli isosceli simili con i lati di lunghezza dispari

Nel sistema di riferimento *Oxy* della figura 4, i vertici dei triangoli isosceli simili con gli angoli alla base α e i lati di lunghezza dispari hanno rispettivamente coordinate: $A_1(0\,;\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha)$, $A_2(2\,;\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha)$, ... $,A_n(n^2-n\,;\frac{2n-1}{2}\mathrm{tg}\alpha)$

Eliminando il parametro n tra le coordinate di A_n si dimostra che i vertici appartengono alla parabola di equazione: $x=\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}y^2-\frac{1}{4}$.

Il fuoco della parabola è il punto $F\,(\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{4};0)$ e le distanze dei vertici A_n da F valgono: $\overline{A_nF}=\frac{4n(n-1)\cos^2\alpha\ \ +1}{4\cos^2\alpha}=n^2-n+\frac{1}{4\cos^2\alpha}$ che, nel caso di $\alpha=\pi/3$, sono numeri naturali.

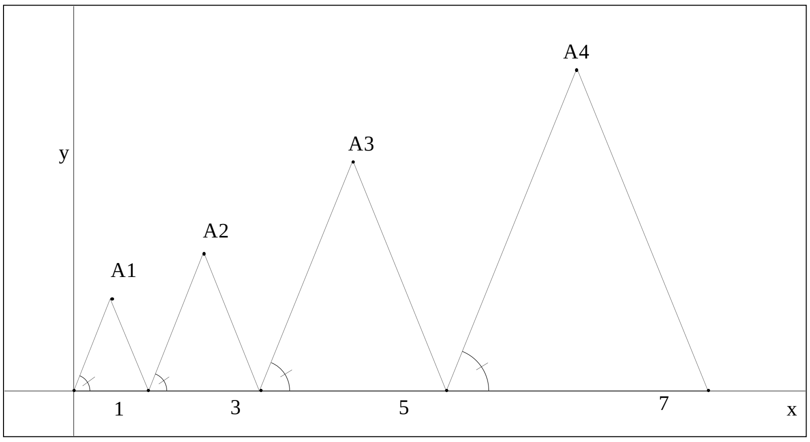


Figura 4

Problema 8

Si consideri la seguente suddivisione dei numeri naturali in sottoinsiemi:
{1}, {2,3}, {4,5,6}, {7,8,9,10}, {11,12,13,14,15},…
Si eliminino ora tutti i sottoinsiemi in posizione pari a cominciare dal secondo.
Si dimostri che la somma di tutti i numeri nei primi k gruppi rimanenti è data da k^4.
Ad esempio per k = 3 vale: $1+(4+5+6)+(11+12+13+14+15) = 81 = 3^4$.

Gruppo 1: Piero Antognini, Paolo Carboni, Milla Lacchini, Rina Penolazzi, Mario Puppi, Gustavo Toninel.

Strumenti software: *Mathematica.*

Caratteristiche connesse all'uso del software
La potenza e la versatilità di *Mathematica* nell'operare su liste, fanno di *Mathematica* l'ambiente ideale per risolvere problemi del tipo considerato. Usando solo alcune delle numerose funzioni che il software mette a disposizione dell'utente, lo studente è in grado prima di verificare per diversi valori di *k* l'assunto del problema e poi di compiere ulteriori verifiche delle congetture, che l'analisi dei risultati precedenti gli ha permesso di formulare.

Collocazione temporale
La soluzione del problema richiede che lo studente sia in possesso dei seguenti prerequisiti:
- conoscenze acquisite nel biennio sulle progressioni aritmetiche;
- conoscenza del concetto di ricorsività;
- esperienza di soluzione di semplici problemi utilizzando il principio di induzione.

Questi prerequisiti portano a collocare nel triennio la proposta da parte dell'insegnante di tale problema. Per la sua specificità di essere abbastanza svincolato dagli argomenti tradizionalmente trattati, esso potrebbe essere affrontato dagli studenti assieme ad altre questioni in un seminario o in un corso di approfondimento.

Aspetti didattici
Sul piano didattico, si ritiene interessante il problema in quanto:
- fa riflettere lo studente su regolarità non evidenti;
- gli consente di acquisire operativamente il concetto di definizione per ricorsività;
- lo stimola a fare congetture e a utilizzare gli strumenti di cui dispone per verificarne la validità;

- gli permette di fare esperienza del fatto che in alcuni casi la strutturazione sistematica (ad esempio, mediante tabelle) delle osservazioni compiute, può essere d'aiuto nella formulazione di una congettura;
- offre, infine, all'insegnante un'ulteriore occasione per far riflettere i propri alunni sulla distinzione tra verifica in un numero finito di casi e dimostrazione di una proprietà.

Nodi concettuali

Si ritiene essenziale che lo studente distingua con chiarezza il momento della verifica in un numero finito di casi di una proprietà ipotizzata da quello della sua dimostrazione.

Un'altra questione rilevante, ma che si lascia volutamente aperta, è la seguente:

"Una dimostrazione ottenuta sfruttando le capacità di calcolo simbolico di *Mathematica* (e quindi in modo trasparente per l'utilizzatore) è una vera dimostrazione? In altre parole, nelle dimostrazioni ci possiamo fidare di *Mathematica*?"

Forse la risposta è sì, anche se una siffatta dimostrazione non appaga il nostro gusto di fare matematica, ma anzi ci spinge a ricercarne una, in cui tutti i passaggi siano espliciti e controllabili.

Approfondimenti e collegamenti

Come approfondimento, si potrebbe proporre agli studenti di formulare in modo rigoroso una dimostrazione per induzione della proprietà messa in luce dal problema.

Si potrebbe inoltre stimolarli ad investigare se esiste una analoga regolarità anche per la successione di sottoinsiemi che si ottiene da quella di partenza, eliminando questa volta quelli di posto dispari.

Tracce della procedura di soluzione

Il primo passo è quello di costruire la successione dei sottoinsiemi proposta dal testo del problema, per poter verificare la proprietà in questione per diversi valori di k .

A tale scopo si definisce per ricorsività la funzione A[n] che consente di scrivere l'ennesimo sottoinsieme della suddivisione dei numeri naturali riportata all'inizio del testo; A[2n-1] sarà quello generico di posto dispari.

In[1]:=

```
A[1] = {1};
A[n_] := A[n] = Table[i, {i, Last[A[n - 1]] + 1, Last[A[n - 1]] + n}]
```

Le istruzioni:

In[2]:=

```
lista = Table[A[2 n - 1], {n, 1, 10}]
```

e:

In[3]:=

```
Plus@@Flatten[lista]
```

permettono di creare la lista dei sottoinsiemi di posto dispari e di sommarne gli elementi**.** Sostituendo al posto del valore 10, diversi valori e ricalcolando l'output, lo studente può verificare la proprietà.
Il secondo passo è quello di cercare di esprimere in funzione di *n* la somma degli elementi dell'ennesimo sottoinsieme. Allo scopo può essere di aiuto raccogliere le osservazioni in una tabella.

n	*2n-1*	*A[2n-1]*
1	1	{1}
2	3	{4,5,6}
3	5	{11,12,13,14,15}
4	7	{22,23,24,25,26,27,28}
5	9	{37,38,39,40,41,42,43,44,45}
…	…	…

Ogni insieme della terza colonna è formato da *2n-1* numeri naturali consecutivi, il primo dei quali si ottiene aggiungendo *2n-1* all'ultimo elemento dell'insieme precedente e l'ultimo dei quali è il prodotto di *n* per *2n-1*. Ad esempio, 22 = 3*5+7.
Individuata e verificata tale regolarità (ovviamente in un numero finito di casi), non dovrebbe essere difficile per uno studente che ricorda quanto appreso sulle progressioni aritmetiche esprimere in funzione di *n* la somma *S[2n-1]* degli elementi di *A[2n-1]*.

$$S[2n-1]=\frac{\{[(n-1)\cdot(2n-3)+(2n-1)]+n\cdot(2n-1)\}\cdot(2n-1)}{2}$$

Con semplici calcoli eseguiti con carta e penna oppure con *Mathematica* stesso risulta:

$$S[2n-1]=\left(2n^2-2n+1\right)\cdot(2n-1)$$

Facendo calcolare a *Mathematica* la $\sum_{1}^{k} S[2n-1]$ si "dimostra", nel senso sopra specificato, che essa è uguale a k^4.

Commenti
La comprensione della dimostrazione è quasi immediata se ci si accorge che:
$S[2n-1]=n^4-(n-1)^4$.
È opportuno, infine, osservare che la soluzione del problema illustrata è solo una delle possibili: molto infatti dipende dalle regolarità che il risolutore coglie.

A conferma di ciò può essere proposta una soluzione che segue un approccio leggermente diverso e che fa un uso più sofisticato delle funzioni disponibili in *Mathematica* per operare sulle liste.

<u>Gruppo 6</u>: Marco Calvani, Maurizio Franceschin, Ferruccio Rohr, Stefano Sarti

Strumenti software: *Derive*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Derive ha in questo esercizio un ruolo prevalente di "assistenza e aiuto" nell'esecuzione di calcoli simbolici piuttosto complessi, cionondimeno l'uso del software impone una formulazione del problema strutturata in un certo modo ed un'attenta analisi di alcuni sottoproblemi. La macchina in questo caso può anche funzionare come "scatola nera", nel caso in cui siano poco note o difficilmente utilizzabili dallo studente alcune tecniche di calcolo simbolico.

Collocazione temporale
La collocazione dell'esercizio può essere abbastanza variabile, in dipendenza del tipo di strumenti risolutivi usati. Facendo ricorso a semplici osservazioni e a concetti intuitivi e poco rigorosi di induzione, si può anche tentare alla fine del biennio. Se invece si vuole che l'esercizio coinvolga gli studenti in tutte le sue sfaccettature e implicazioni, in considerazione anche dello sforzo di astrazione che richiede sul piano formale, è consigliabile proporlo a ragazzi del 4-5 anno.

Aspetti didattici
Il problema offre l'occasione di riflettere su:
- Ricerca di regolarità e di leggi in sequenze numeriche
- Ricerca di formulazioni simboliche di proprietà e regolarità in sequenze numeriche
- Possibilità e strumenti rigorosi per estendere all'infinito proprietà osservate su sequenze numeriche finite
- Validità della dimostrazione in *Derive*
- Problemi di interpolazione
- Modellizzazione di un problema

Nodi concettuali
In *Derive* la maggiore difficoltà, eliminati i calcoli demandati alla macchina, consiste nel dover operare con variabili a diversi livelli, dovere cioè adottare un linguaggio simbolico con diversi livelli di astrazione (ad esempio, sommatorie di sommatorie, con relativi problemi sugli indici).

Approfondimenti e collegamenti
L'argomento ci sembra interessante anche per una serie di ulteriori spunti e aperture che esso suggerisce, quali, ad esempio:
- Interpolazione e polinomi di Lagrange

- Principio di induzione
- Passaggio da successioni definite ricorsivamente e per induzione (e viceversa).
- Trasformazioni del piano.

Traccia della procedura di soluzione
I sottoinsiemi che ci interessano sono:

$$I_1 \equiv \{1\} \quad I_2 \equiv \{4,\ 5,\ 6\} \quad I_3 \equiv \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\} \ldots\ldots\ldots \quad I_n \equiv \{\ldots\ldots\}$$

Osservato che l' n-simo sottoinsieme contiene $2n-1$ elementi, si pongono due questioni preliminari (sottoproblemi):

a. Esprimere il primo elemento $P(I_n)$ del generico sottoinsieme I_n in funzione di n.
b. Calcolare la somma $S(I_n)$ degli elementi del generico sottoinsieme I_k.

La somma totale S richiesta è allora data da: $S=\sum_{n=1}^{k} S(I_n)$ e deve risultare uguale a k^4.

Punto a.
I primi elementi di ciascun sottoinsieme sono, nell'ordine:
1, 4, 11, 22, 37 . . . . le cui differenze seconde sono costanti e uguali a 4, ciò vuol dire che i $P(I_n)$, almeno per quanti ne abbiamo analizzati, sono generati da un polinomio di 2° grado. Utilizzando il comando "FIT" di *Derive*, ricaviamo $P(I_n)=2n^2-3n+2$. A rigore *Derive* ci offre una " buona congettura "; per convalidarla si può fare una dimostrazione applicando il principio di induzione.

Punto b.
Utilizzando il comando "SUM" di *Derive* si ha:

$$S(I_n)=\sum_{i=1}^{2n-1}\left(2n^2-3n+2+i-1\right)=4n^3-6n^2+4n-1=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$

Utilizzando ancora "SUM" si ha: $S=\sum_{n=1}^{k} S(I_n)=\sum_{n=1}^{k}(2n-1)(2n^2-2n+1)=k^4$

In ogni caso, volendo procedere ad un livello più basso e rinunciando un po' al rigore, si possono fare osservazioni dirette, cercando di capire e descrivere verbalmente l'andamento dei primi $P(I_n)$, $S(I_n)$, verificando la proprietà per alcuni valori di *k*. Si tratta di stimoli di natura induttiva che oltre a sviluppare fantasia e creatività, affinano l'uso dei simboli, intesi come strumenti per una più efficace modellizzazione.

Problema 10

Una corda di lunghezza costante scivola in un cerchio dato. Gli estremi della corda vengono proiettati ortogonalmente su un diametro fissato. Le proiezioni ottenute e il punto medio della corda sono vertici di un triangolo . Si dimostri che il triangolo è isoscele e non cambia mai la sua forma allo spostarsi della corda nel cerchio.

Gruppo 1: Piero Antognini, Paolo Carboni, Milla Lacchini, Rina Penolazzi, Mario Puppi, Gustavo Toninel.

Strumenti Software: *Mathemathica.*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Il problema presenta un evidente aspetto dinamico che *Mathematica* aiuta a cogliere con le sue potenzialità di animazione. Infatti è possibile visualizzare il movimento della corda di lunghezza costante all'interno del cerchio ed evidenziare il triangolo indicato, che, pur cambiando la sua posizione e la lunghezza dei suoi lati, mantiene costante la sua forma; risultano evidenti, inoltre, le due posizioni limite della corda, per le quali il triangolo degenera in un punto.

Collocazione temporale
In una classe del triennio, al termine dello studio della trigonometria.
Il software *Mathematica* deve essere già conosciuto e sperimentato in casi meno problematici.

Aspetti didattici
Uno degli obiettivi che ci si propone è una revisione critica di argomenti già studiati al biennio; infatti il problema proposto può essere affrontato sia con la geometria sintetica, sia con la trigonometria.
Il confronto fra le due modalità di svolgimento può abituare la classe ad affrontare uno stesso tema da diversi punti di vista.
Mathematica interviene nella semplificazione delle espressioni goniometriche e nell'animazione del problema.
Il lavoro in classe si può articolare in questi termini:
1) Presentazione del problema da parte del docente con animazione al computer.
2) Studio individuale dei prerequisiti di geometria richiesti per la soluzione sintetica (triangoli simili).
3) Lavoro di gruppo per individuare una strategia risolutiva.
4) Codifica e realizzazione al computer.

Nodi concettuali
La risoluzione per via sintetica porta a prestare attenzione a:
- Teoremi sulla circonferenza;

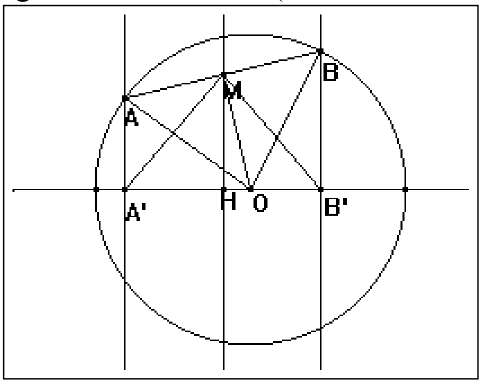
- Criteri di similitudine;

mentre la risoluzione per via goniometrica è incentrata sulla:

- Risoluzione del triangolo rettangolo.

Approfondimenti e collegamenti

Diamo un cenno alla risoluzione del problema per via sintetica, dimostrazione fornitaci dal collega Renato Verdiani (ci si riferisce alla figura sottostante):



Sia AB la corda ed A'B' la sua proiezione sul diametro della circonferenza di centro O.
Indicato con M il punto medio di AB, sia MH la perpendicolare condotta da M al diametro.
Per il teorema di Talete H è punto medio di A'B', per cui il triangolo A'MB' è isoscele.
Poiché al variare della corda AB il triangolo AOB rimane isometrico a se stesso, per provare che anche A'MB' mantiene invariata la sua forma, è sufficiente dimostrare che esso è simile ad AOB. Poichè i due triangoli sono isosceli, basta dimostrare la similitudine dei triangoli rettangoli OMB e MHB'.
Allo scopo consideriamo il quadrilatero MOB'B che, avendo due angoli opposti retti, è inscrivibile in una circonferenza di diametro OB.
In tale circonferenza gli angoli MBO e MB'O sono congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco.
Pertanto OMB e MB'H , avendo un angolo acuto congruente sono simili.

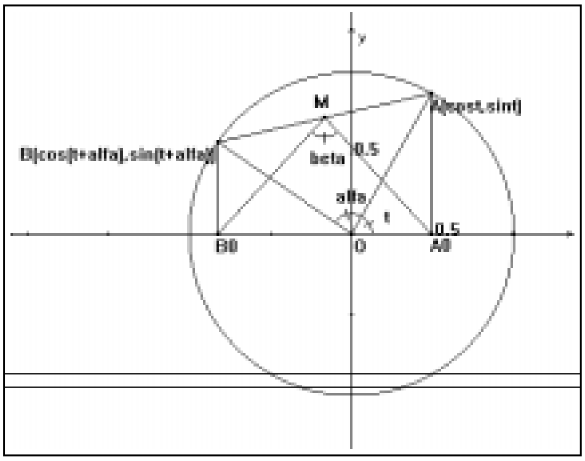
Traccia della procedura di soluzione

Utilizziamo il software *Mathematica.*
Facciamo riferimento alla figura della prossima pagina.
Senza restrizione di generalità scegliamo il cerchio di raggio 1 con centro nell'origine.
Gli estremi di una corda di lunghezza costante hanno dunque coordinate:

In[1]:=

```
A = {Cos[t], Sin[t]}; B = {Cos[t + α], Sin[t + α]};
```

dove α è l'ampiezza dell'angolo al centro sotteso dalla corda.



Poiché M è il punto medio di AB:

In[2]:=

```
M = (A + B)/2
```

Out[2]=

$$\left\{\frac{1}{2}\,(\mathrm{Cos}[t]+\mathrm{Cos}[t+\alpha]),\ \frac{1}{2}\,(\mathrm{Sin}[t]+\mathrm{Sin}[t+\alpha])\right\}$$

Siano A_0 e B_0 i punti proiezione di A e B sul diametro fissato:

In[3]:=

```
Ao = {Cos[t], 0}; Bo = {Cos[t + α], 0};
```

Definita la funzione "distanza di due punti":

In[4]:=

```
d[P_, Q_] := Sqrt[Apply[Plus, (Q - P)^2]]
```

si verifica che il triangolo (A_0MB_0) è isoscele; infatti:

In[5]:=

```
d[Ao, M]
```

Out[5]:=

$$\sqrt{\left(\left(-\mathrm{Cos}[t]+\frac{1}{2}\,(\mathrm{Cos}[t]+\mathrm{Cos}[t+\alpha])\right)^2+\frac{1}{4}\,(\mathrm{Sin}[t]+\mathrm{Sin}[t+\alpha])^2\right)}$$

In[6]:=

```
d[Bo, M]
```

Out[6]:=

$$\sqrt{\left(\left(-\mathrm{Cos}[t+\alpha]+\frac{1}{2}\,(\mathrm{Cos}[t]+\mathrm{Cos}[t+\alpha])\right)^2+\frac{1}{4}\,(\mathrm{Sin}[t]+\mathrm{Sin}[t+\alpha])^2\right)}$$

In[7]:=

```
Simplify[d[Ao, M]^2 == d[Bo, M]^2]
```

Out[7]=

```
True
```

Il triangolo (A_0B_0M) è dunque isoscele.

Detto β l'angolo in M del triangolo (A_0B_0M) , utilizzando la trigonometria:

In[8]:=

$$\text{Tan}\left[\frac{1}{2}\beta\right] == \frac{(\text{Ao}[[1]] - \text{Bo}[[1]])}{2\,\text{M}[[2]]}$$

In[9]:=

```
Simplify[%]
```

Out[9]:=

$$\text{Tan}\left[\frac{\beta}{2}\right] == \text{Tan}\left[\frac{\alpha}{2}\right]$$

Dunque $\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + k\pi \Rightarrow \beta = \alpha + 2k\pi$, ed in particolare per k=0, $\beta = \alpha$.
Ma allora i due triangoli (OAB) e (A_0B_0M) , essendo isosceli ed avendo l'angolo al vertice congruente risultano simili.
Per realizzare una animazione :

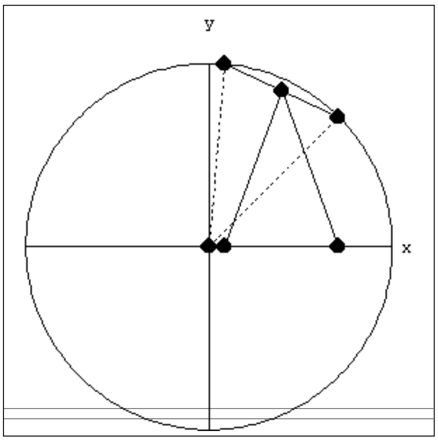
In[12]:=

```
figura :=
 Show[Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], Point[{0, 0}],
           Point[A], Point[B],
          Point[M], Point[A], Point[B],
          Point[Ao], Point[Bo],
          Hue[.6], Line[{A, B}],
          Hue[.0], Line[{Ao, M, Bo}],
             Dashing[{0.01, 0.01}],
            GrayLevel[0], Line[{B, {0, 0}, A}]}],
             AspectRatio -> Automatic,
             Axes -> True,
              Prolog -> AbsolutePointSize[5],
            PlotRange -> {{-1, 1}, {-1, 1}},
             AxesLabel -> {x, y}, Ticks -> None]
```

In[13]:=

$$\text{Do}\left[\text{figura}, \left\{t, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{\pi}{16}\right\}\right]$$

Out[13]:=



Gruppo 5: Aldo Boiti, Elena Crespina, Mauro De Vita, Rosanna Guidetti, Roberto Ricci.

Strumenti software: *Cabri*

Caratteristiche connesse all'uso del software
In questo caso *Cabri*, utilizzato qui nella versione *Cabri 1.7* per MS-DOS, contribuisce sia a fornire un aspetto dinamico alla figura sia a disegnarla con precisione. La figura realizzata diviene così prima uno strumento per la comprensione dell'enunciato, poi uno strumento per convincersi della tesi. Dopo questa fase preliminare, *Cabri* diviene una base ricca di stimoli per la ricerca di ulteriori costruzioni finalizzate alla dimostrazione, che soprattutto consente di selezionare rapidamente ed escludere strade errate.

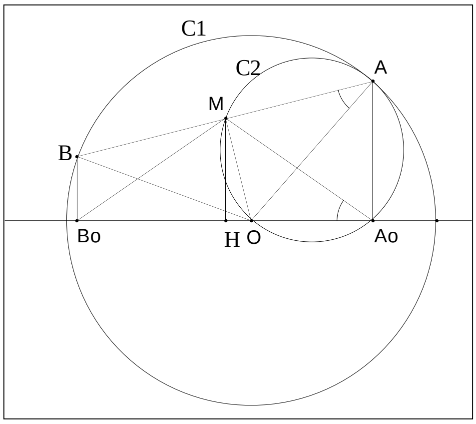
Collocazione temporale
Il problema può essere proposto anche nel biennio della scuola superiore, a seconda del metodo di risoluzione sul quale si fa affidamento. Prevede infatti da parte degli allievi il possesso dei seguenti prerequisiti: teorema di Talete, circonferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo, angoli alla circonferenza, oppure conoscenze elementari della geometria cartesiana e della goniometria con le formule di prostaferesi.

Aspetti didattici
Il problema rappresenta una valida esercitazione di geometria sintetica o anche di geometria analitica e goniometria. Questo esercizio può fare parte anche di una raccolta di problemi da assegnare in modo svincolato dal programma, per potenziare, ad esempio, l'intuizione e la capacità di dimostrare; ciò anche perché si presta appunto a impostazioni diverse.

Nodi concettuali
Differenza tra dimostrazione e verifica, tra ragionamento deduttivo e ragionamento induttivo

Approfondimenti e collegamenti
Proprietà della circonferenza.
Elementi di base della goniometria e formule di prostaferesi.

Traccia della procedura di soluzione



Esaminiamo innanzitutto una risoluzione sintetica.
Quando si proiettano su di una retta gli estremi ed il punto medio di un segmento si conserva il punto medio (teorema di Talete). Questo prova immediatamente che il triangolo A_0MB_0 che ha come vertici le proiezioni A_0 e B_0, sul diametro fissato, degli estremi A e B della corda ed il suo punto medio M è isoscele. La figura realizzata con *Cabri*, deformabile a piacere muovendo l'estremo A della corda, usato come punto di costruzione (punto su un oggetto), suggerisce che gli angoli uguali del triangolo A_0MB_0 sono congruenti agli angoli uguali del triangolo isoscele AOB che ha come vertici gli estremi della corda ed il centro della circonferenza data. Infatti il triangolo AMO, rettangolo in M, è inscritto nella circonferenza di diametro OA. Nella stessa circonferenza è inscritto anche il triangolo AA_0O, rettangolo in A_0. I due angoli alla circonferenza OAM e OA_0M sono congruenti perché insistono sul medesimo arco OM. Qualunque sia la posizione della corda, gli angoli alla base del triangolo A_0MB_0 hanno l'ampiezza costante degli angoli alla base del triangolo AOB: gli infiniti triangoli A_0MB_0 sono dunque tutti simili tra loro.
Per realizzare la costruzione della figura con *Cabri*:
1. tracciare al centro dello schermo una retta "orizzontale" r;
2. segnare su r i punti O e P;
3. costruire la circonferenza C1 con centro O e passante per P;
4. segnare tre punti non allineati per definire un angolo α;
5. indicare un punto A su C1;
6. trasportare l'angolo α con il vertice in O e un lato passante per A;
7. indicare con B l'intersezione del secondo lato di α con C1;
8. il segmento AB è una corda di C1 di lunghezza costante al variare di A;
9. segnare il punto medio M di AB;
10. indicare con Ao, Bo ed H le proiezioni ortogonali di A, B ed M su r;

11. tracciare i raggi OA, OB ed il segmento OM;
12. tracciare i lati AoM e BoM del triangolo richiesto;
13. costruire la circonferenza C2 con centro nel punto medio C di OA e passante per O;
14. si nascondono gli elementi costruttivi non necessari per la dimostrazione.

(alcuni passi della costruzione riassumono più operazioni elementari; per brevità non sono indicati i comandi di *Cabri*).

La figura può essere modificata spostando il punto A su C_1. La lunghezza della corda AB può essere cambiata spostando uno dei punti con cui è stato definito l'angolo α.

Esaminiamo infine una risoluzione trigonometrica.

Preso come unitario il raggio della circonferenza, A e B sono punti della circonferenza goniometrica associati a due angoli α e β. Detta H, come nella figura relativa al metodo precedentemente esposto, la proiezione di M sul lato comune degli angoli α e β si può calcolare che

$$tg(MB_0A_0) = \pm\frac{MH}{HB_0} = \frac{\dfrac{sin\alpha + sin\beta}{2}}{\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} - \cos\beta} = \frac{2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{-2sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{1}{tg\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$$

è costante quando l'angolo AOB è costante, ovvero quando la corda AB è di lunghezza costante.

<u>**Gruppo 7**</u>: Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Giovanni Olivieri, Antonio Rotteglia

Strumenti software: Cabri oppure Derive.

Caratteristiche connesse all'uso del software

Con Cabri la costruzione della figura non richiede l'uso di particolari concetti matematici. Un problema da risolvere è quello di "fissare" la lunghezza della corda: è necessario quindi fare riferimento a un segmento esterno alla circonferenza (occorre conoscere le tecniche di trasporto di un segmento).

La soluzione con Derive diventa "semplice" se si sceglie un opportuno sistema di riferimento: origine coincidente con il centro della circonferenza e unità di misura uguale al raggio.

Collocazione temporale

Con uso di *Cabri*

Alla fine del secondo anno di biennio superiore, il problema può rappresentare uno strumento con il quale verificare l'acquisizione di determinate abilità e concetti matematici: teorema di Talete, inscrivibilità di un quadrilatero, proprietà dei triangoli, capacità di effettuare congetture.

Con uso di *Derive*

Il problema può essere proposto a partire da una classe terza superiore come attività di sintesi e di trasposizione di concetti già acquisiti.

Aspetti didattici

È un problema rispetto al quale l'uso di Cabri consente di poter effettuare congetture, da validare mediante dimostrazione di geometria sintetica. Le possibilità offerte da questo software di muovere dinamicamente una figura, consente inoltre di esplorare senza difficoltà i casi limite e di valutare il comportamento dell'automa in tali situazioni. La possibilità di utilizzare costruzioni dinamiche consente di effettuare rappresentazioni mentali della situazione, a partire dalla quale si procede successivamente ad una dimostrazione "più mirata". Il problema potrebbe anche essere posto in questi altri termini: "studia le proprietà del triangolo formato da …"

Il lavoro con Derive comporta invece un maggiore livello di astrazione poiché in questo caso è necessario integrare strumenti e concetti appartenenti a ambiti diversi di contenuto. La dimostrazione si effettua verificando una tesi già posta: è una "dimostrazione verifica". Si può presumere che una preliminare rappresentazione su carta della situazione possa agevolare la successiva implementazione del programma.

Lo studio dei casi limiti si effettua in modo diverso con i due strumenti: con Cabri si possono anche "vedere" dalla dinamicità della costruzione; con Derive devono essere preliminarmente analizzati e previsti e devono poi essere trattati in modo opportuno.

Nodi concettuali

La costruzione con Derive comporta la riflessione su alcuni punti di fondamentale importanza:

- Scelta del sistema di riferimento;
- Uso di equazioni parametriche;
- Descrizione analitica di proprietà geometriche.

Approfondimenti e collegamenti

L'analisi e la risoluzione del problema consente di effettuare approfondimenti sia in termini di principi generali che di contenuti da approfondire o sviluppare.

Dal punto di vista generale è importante la discussione sulla semplificazione che la scelta di un sistema di riferimento opportuno porta nell'analisi e nella costruzione della soluzione di un problema, abbinata al vantaggio che in generale non viene affatto perso il carattere di generalità.

Ulteriori approfondimenti possono essere quelli relativi all'uso delle equazioni parametriche per descrivere rette e curve.

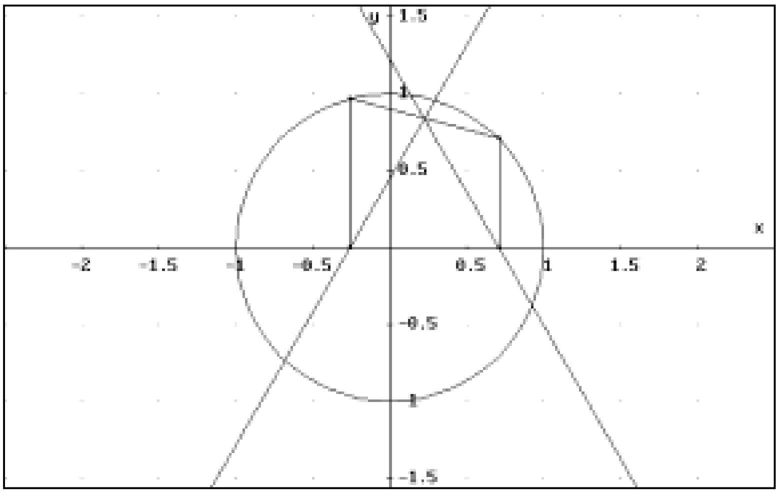
Tracce della procedura di soluzione

Con riferimento all'ambiente Derive

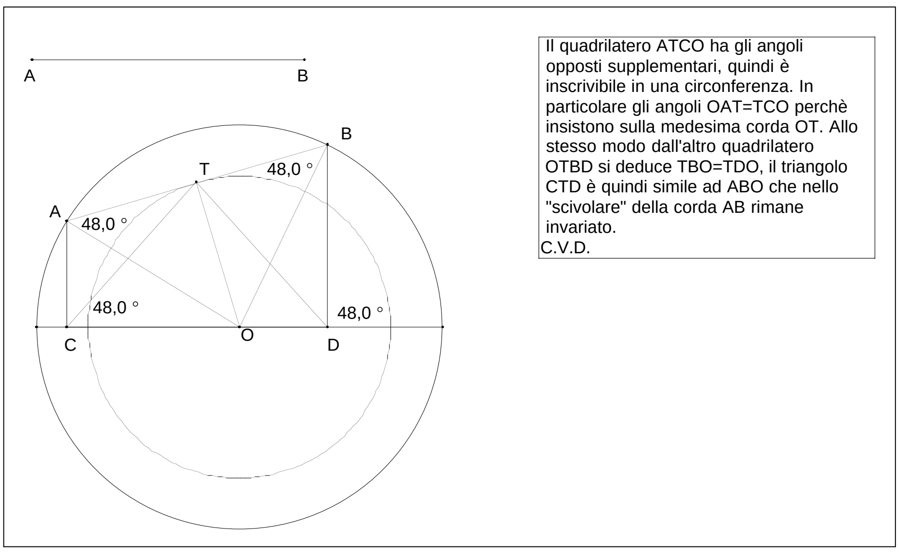
Per semplicità si considera una circonferenza unitaria di centro l'origine del sistema di riferimento. Con riferimento alle equazioni parametriche della circonferenza, la corda viene individuata da una coppia di punti sulla circonferenza in corrispondenza di un angolo alfa e di un angolo alfa + t:

x0:= COS(a)
y0:= SIN(a)
x1:= COS(a+t)
y1:= SIN(a+t)

Le proiezioni di tali punti sul diametro, coincidente con l'asse x delle ascisse, sono rispettivamente i punti (0, cos(a)) e (0, cos(a+t)).
La dimostrazione della proprietà avviene confrontando i valori dei coefficienti angolari delle due rette che congiungono il punto medio della corda con le proiezioni sull'asse delle ascisse degli estremi della corda stessa. Se questi due coefficienti angolari sono opposti, allora la proprietà è dimostrata. In questo caso infatti gli angoli formati dalle rette risultano supplementari ed uguali quelli del triangolo.
Di seguito è riportata una figura d'esempio ottenuta assegnando particolari valori ai due parametri a e t.



Con riferimento all'ambiente Cabri
Il disegno e la traccia di dimostrazione con *Cabri* corrispondono a figura e testo di seguito riportati.



Problema 11

Detto G il baricentro di un triangolo qualsiasi, i segmenti che congiungono i tre vertici del triangolo con G dividono il triangolo dato in tre triangoli aventi la stessa area.

<u>Gruppo 2</u>: Lucio Benaglia, Roberta Bonarelli, Alfonso Cornia, Maria Cristina Maccaferri, Barbara Magnani

Strumenti software: *Cabri Géomètre II, Derive*

Collocazione temporale

Il problema può essere affrontato dal punto di vista sintetico, nel biennio della scuola secondaria di secondo grado, quando si tratta la teoria dell'equivalenza oppure quando si affronta il problema del calcolo delle aree, o nel terzo anno nell'ambito del programma di geometria analitica.

Sono possibili le seguenti osservazioni:

- La dimostrazione sintetica è molto semplice e si adatta agli studenti di prima o di seconda, indipendentemente dall'uso dello strumento informatico. *Cabri* può essere utilizzato per rendere più evidente la proprietà. Come prerequisito si richiede che lo studente abbia il concetto di estensione come classe di equivalenza tra poligoni, conosca il criterio di equivalenza per differenza e il teorema di equivalenza tra triangoli con basi ed altezze congruenti. La proprietà si configura infatti come un'applicazione delle precedenti proprietà.
- La dimostrazione può essere anche effettuata applicando il teorema di Talete, dimostrando che la distanza del baricentro da un lato è eguale a 1/3 dell'altezza del triangolo. I prerequisiti richiesti sono le proprietà del baricentro, le nozioni di base della teoria della misura, il teorema di Talete, le formule per il calcolo dell'area del triangolo in funzione della base e dell'altezza. Questa trattazione favorisce la comprensione dell'impostazione analitica sviluppata con *Derive.*
- Con un'opportuna scelta del sistema di riferimento è possibile una trattazione analitica anche nel biennio, assegnando i vertici A(0, 0), B(xb, 0) e C(xc, yc). La trattazione in un sistema di riferimento qualsiasi richiede invece una buona conoscenza della funzione lineare e del suo uso (retta per due punti, coefficiente angolare, ecc.)
- Abbiamo anche avanzato l'ipotesi, che per ora non abbiamo potuto verificare, che il problema sia adatto anche alle classi terminali (quarte o quinte) nell'ambito del programma di algebra lineare, calcolando le aree dei tre triangoli interni con il determinante della matrice dei loro vertici, ponendo sempre 1 come terza coordinata, verificando che il rapporto è eguale ad uno.
- Come modalità di approccio, si può proporre prima il problema a casa e poi discutere in classe le soluzioni emerse, fino ad ottenere le soluzioni corrette. Per la particolare semplicità del problema, è possibile chiedere anche agli

studenti del biennio di realizzare in modo autonomo con *Cabri* la figura necessaria per una analisi euristica della proprietà.

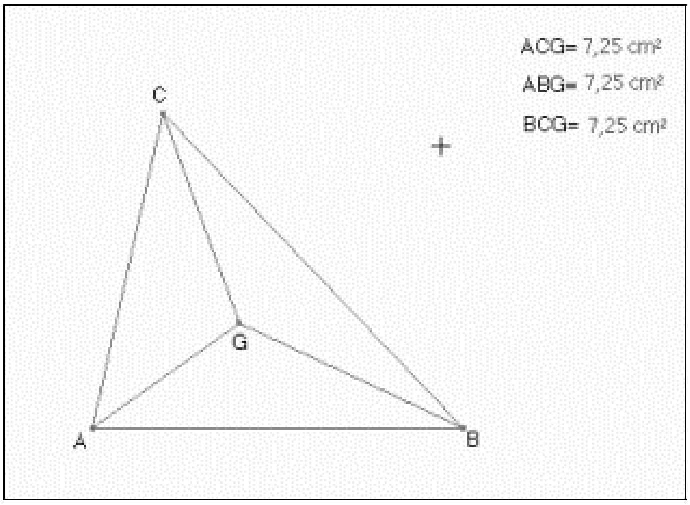
Caratteristiche connesse all'uso del software
Cabri consente un approccio euristico al problema, grazie all'opzione che consente di calcolare l'area di un triangolo. L'analisi è alquanto "macchinosa", perché richiede di creare preventivamente i triangoli dei quali si vuole valutare l'area: quello che si vede sullo schermo infatti non è detto sia riconosciuto come tale dal calcolatore. Il problema non è forse tra quelli più significativi per una trattazione con *Cabri.* Inoltre è necessario far capire allo studente che, essendo i calcoli con *Cabri* approssimati, non abbiamo fornito una dimostrazione della proprietà. Una dimostrazione può essere invece data con un sistema che operi in modo esatto. Utilizziamo, per esempio *Derive.*che consente di evitare la difficoltà di un calcolo reso piuttosto pesante dalla quantità di parametri in gioco, permettendo così di concentrarsi maggiormente sugli aspetti matematici del problema. L'approccio di tipo analitico richiede l'uso del concetto di funzione in *Derive*, perché facilita la leggibilità e la comprensione del listato, che risulta più compatto.

Aspetti didattici
Le possibili differenti collocazioni temporali delineate più sopra mostrano che il problema può essere ripreso in contesti abbastanza differenti. La trattazione sintetica, seguita da quella analitica, può favorire nello studenti la coscienza del fatto che dimostrazione analitica e dimostrazione sintetica sono complementari, in linea con le richieste dei programmi di matematica del P.N.I..

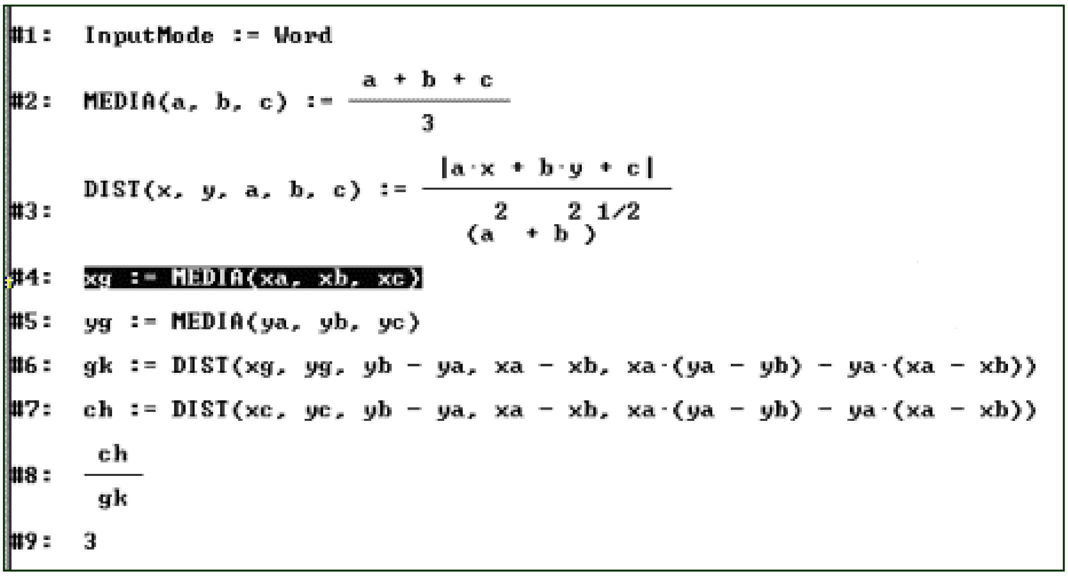
Nodi concettuali
Cabri è molto utile per affrontare in modo sperimentale un problema. Dopo averlo utilizzato gli studenti in genere sono più motivati a cercare la dimostrazione di quanto hanno osservato. Occorre sempre carta e penna per spiegare quanto si osserva, cercando i legami fra le differenti proprietà. La trattazione analitica richiede la capacità di gestire in modo ordinato le numerose variabili in gioco.
L'uso di due software differenti ci pare in ogni caso utile per abituare lo studente alla scelta dello strumento più adatto a trattare la situazione che ha di fronte.

Approfondimenti e collegamenti
Si tratta di un problema di tipo applicativo, sia che venga affrontato dal punto di vista sintetico, sia da quello analitico. Non abbiamo individuato collegamenti con altre parti dei programmi.

Tracce della procedura di soluzione
Costruito con *Cabri* un triangolo ABC e il suo baricentro G (il baricentro può essere determinato con una macro preparata precedentemente), si costruiscono ulteriormente i tre triangoli ABG, BCG, ACG, dei quali si rilevano le aere con l'opportuno comando. Spostando a piacere uno qualsiasi dei tre vertici del



triangolo ABC, si nota che le tre aree sono sempre eguali. Con *Derive* invece si inizia con le coordinate dei vertici A, B, C del triangolo nel piano cartesiano. Dopo aver definito le funzioni media(a,b,c) e dist(x,y,a,b,c) distanza di un punto P(x,y) da una retta ax+by+c=0, si calcola il rapporto fra l'altezza relativa al lato AB del triangolo ABC e l'altezza sempre relativa al lato AB del triangolo ABG. Il rapporto tra le due altezze, che sono proporzionali alle aree dei due triangoli, è eguale a 3, da cui segue facilmente la proprietà richiesta relativamente ad uno dei tre triangoli. Ci si comporta in modo analogo per gli altri due triangoli.



La figura seguente mostra la schermata realizzata con *Derive* per risolvere il problema proposto relativamente ad uno dei triangoli.

Notiamo che l'uso delle capacità di calcolo di Derive ci ha permesso di non operare in un sistema di riferimento opportuno. Pensiamo però sia necessario spiegare che un'adeguata scelta del sistema di riferimento semplificherebbe i calcoli.

Problema 13

Dato un triangolo, chiamiamo triangolo ortico il triangolo avente come vertici i piedi delle sue tre altezze. L'ortocentro di un triangolo è l'incentro del suo triangolo ortico.

Gruppo 2: Lucio Benaglia, Roberta Bonarelli, Alfonso Cornia, Maria Cristina Maccaferri, Barbara Magnani

Strumenti software: *Cabri Géomètre II, Derive*

Collocazione temporale

Il problema può essere proposto come congettura su cui riflettere come compito a casa per poi discuterne in classe e darne dimostrazione.

- Utilizzando la soluzione sintetica, il problema può essere affrontato al biennio, come utile applicazione dei punti notevoli di un triangolo, dell'uguaglianza fra triangoli rettangoli e degli angoli alla circonferenza che insistono su un medesimo arco. Anzi, proprio per la sua articolazione, potrebbe essere utilizzato come un problema conclusivo, da svolgere come sintesi della trattazione degli argomenti citati.
- La soluzione può essere ricavata anche per via analitica, e in questo caso il problema è da collocare al triennio (classe terza, di solito). Anche scegliendo un opportuno sistema di riferimento (ad esempio con A(a, 0), B(b, 0) e C(0,c)), la trattazione risulta piuttosto laboriosa e richiede una buona conoscenza della funzione lineare e del suo uso.

Caratteristiche connesse con l'uso del software

Con *Cabri* è abbastanza facile convincersi della veridicità dell’affermazione: costruito il triangolo ortico di un triangolo qualsiasi, si controlla che il centro della circonferenza in esso inscritta coincide con l'intersezione delle altezze del triangolo dato. E' possibile anche eseguire misure di angoli, per verificarne l'uguaglianza.
L’essere convinti della veridicità di un teorema non vuol dire averlo dimostrato. Possiamo dare una dimostrazione sintetica o una dimostrazione analitica. In quest’ultimo caso, anche se si è scelto un sistema di riferimento opportuno, il numero dei parametri non è indifferente.
L'uso di *Derive* permette di evitare calcoli abbastanza pesanti dovuti alla presenza di tre parametri e permette di sottolineare gli aspetti matematici e procedurali del problema. E' necessario conoscere l'uso del concetto di funzione.

Aspetti didattici

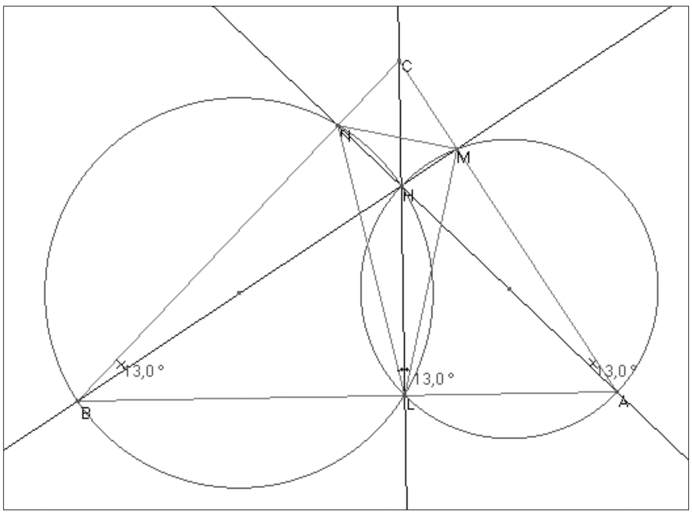
Si ritiene che, nel triennio, svolgere la trattazione analitica insieme a quella sintetica possa essere prima di tutto l'occasione di un utile ripasso di metodi e strumenti della geometria elementare e, successivamente, possa fornire

l'opportunità di stabilire un confronto fra l'approccio geometrico e quello algebrico.
Nella trattazione analitica potrebbe essere didatticamente interessante far lavorare autonomamente gli studenti un po' prima di suggerire loro di scegliere un sistema di riferimento opportuno. In ogni caso è necessario che non si perda di generalità con la scelta delle coordinate dei vertici sopra fatta.
Potrebbe essere anche interessante confrontare vantaggi e svantaggi fra la scelta proposta e un'altra: per esempio A (0, 0), B (1, 0) e C (a, b) con b>0.

Nodi concettuali
E' molto importante far capire agli studenti che *Cabri* permette di convincersi della verità della congettura, sfruttando naturalmente la facilità con cui le figure sono modificabili.
Derive costringe ad operare con molte "lettere" (variabili e parametri) e quindi ad avere una chiara idea del loro uso e delle distinzioni fra esse.

Approfondimenti e collegamenti
- Proprietà angolari dei triangoli
- Punti notevoli di un triangolo
- Perpendicolarità
- Angoli al centro e alla circonferenza
- Proprietà dei triangoli rettangoli
- Intersezione fra due rette
- Luoghi geometrici

Tracce della procedura di soluzione
In realtà è una dimostrazione insieme ad un controllo



Costruito il triangolo ABC, e il suo triangolo ortico LMN, si indica con H l'ortocentro di ABC. Si vuole dimostrare che H è incentro di LMN.

Si può, ad esempio, dimostrare che la retta per L e H è bisettrice dell'angolo $M\hat{L}N$. A tale scopo si costruiscono la circonferenza di diametro AH passante per L (che passa anche per M, il motivo è da chiedere agli studenti) e la circonferenza di diametro BH passante per L (che passa anche per N, il motivo è da chiedere agli studenti). Nella prima circonferenza si ha $M\hat{A}H = M\hat{L}H$ perché insistono sullo stesso arco MH, mentre nella seconda circonferenza si ha $N\hat{L}H = N\hat{B}H$ perché insistono sullo stesso arco NH. D'altra parte $N\hat{B}H = M\hat{A}H$ perché complementari dello stesso angolo $A\hat{C}B$, quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $M\hat{L}H = N\hat{L}H$.

Problema 17

Sono assegnate tre rette parallele nel piano. **Esiste un triangolo equilatero con i vertici rispettivamente sulle tre rette?**

Gruppo 3: Sandra Bernecoli, Patrizia Berneschi, Rossana Rossi Bucciarelli, Luigi Tomasi, Renato Verdiani

Strumenti software: *Cabri-géomètre, Derive*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Il software che meglio si presta, dal punto di vista didattico, ad affrontare il problema è il *Cabri-géomètre.* La possibilità di fare delle animazioni, presente nell'ultima versione, di variare le figure e di cercare "per tentativi" la soluzione, offre un notevole aiuto per la risoluzione di questo problema oltre ad avere una forte valenza per l'apprendimento e l'insegnamento della geometria in generale.
Viene anche proposta una soluzione con *Derive*, ma la soluzione analitica risulta, per questo particolare problema, piuttosto laboriosa e meno intuitiva rispetto a quella sintetica.

Collocazione temporale
Il problema è stato risolto in due modi diversi usando *Cabri-géomètre*; successivamente si presenta la soluzione del problema anche con *Derive*.
Le due soluzioni proposte con *Cabri-géomètre* possono essere trattate con classi dei primi anni delle scuole medie superiori ma sono particolarmente stimolanti anche per allievi del triennio. La soluzione con *Cabri-géomètre* presuppone che si sappia usare il programma per disegnare dei luoghi geometrici.
La soluzione con *Derive* può essere proposta dopo che sono stati trattati i primi elementi di geometria analitica, almeno la formula della distanza tra due punti e l'equazione della retta.
Si possono usare entrambe le soluzioni in una stessa classe del triennio in momenti diversi.

Aspetti didattici
Il problema permette di distinguere tra la questione di esistenza e quella di costruzione della figura. Se per la prima non esistono difficoltà, né concettuali né didattiche, per la seconda occorre seguire un percorso più articolato nel quale si può proporre sia una soluzione sintetica, con l'uso di un luogo geometrico, sia la soluzione analitica.
Il problema suscita discussione in classe ed è banale apparentemente solo se rimaniamo nel campo "dell'esistenza" di un triangolo equilatero che abbia i vertici sulle tre rette parallele date inizialmente. Più difficile è portare gli allievi a scoprire una dimostrazione che giustifichi le varie soluzioni del problema.

Il gruppo di lavoro ritiene che, per il problema in questione, la soluzione sintetica sia preferibile dal punto di vista didattico, rispetto a quella analitica. In questo ambito si ritiene tuttavia che il confronto tra strategie risolutive diverse sia molto stimolante e positivo dal punto di vista dell'apprendimento e anche dell'insegnamento in quanto permette di raggiungere una visione più vasta delle questioni, e di scegliere la soluzione più formativa.

Nodi concettuali

Dal punto di vista matematico il problema è interessante perché permette di comprendere la differenza tra un problema di esistenza della figura e uno, più impegnativo, di costruzione e di dimostrazione.

In questo problema assume un particolare rilievo la necessità di una dimostrazione che giustifichi le costruzioni proposte.

Si dovrà osservare che tutte le soluzioni sintetiche presuppongono inizialmente di avere a disposizione un triangolo equilatero, con due vertici già fissati su due delle tre rette. Tale triangolo equilatero iniziale viene poi ruotato, e contemporaneamente sottoposto ad un'omotetia, attorno ad uno dei due vertici per portare il terzo vertice ad appartenere alla terza retta.

Occorre notare che le soluzioni del problema sono due per ogni punto scelto su una qualunque delle tre rette parallele date. I triangoli trovati sono tutti tra loro congruenti in modo diretto, tramite una traslazione, oppure in modo inverso, tramite una simmetria assiale.

Approfondimenti e collegamenti

Il problema è collegato ad altri analoghi che si risolvono per il tramite di trasformazioni geometriche del piano e, esprimendoci in termini più tradizionali, al metodo di similitudine per la risoluzione di un problema.

Traccia della procedura di soluzione

1ª traccia della procedura di soluzione con *Cabri-géomètre*

Cabri-géomètre è lo strumento più adatto per rispondere alla domanda del problema.

La soluzione può passare attraverso tre fasi:

a – verifica dell'esistenza di un triangolo equilatero che soddisfa alle ipotesi del problema;

b – costruzione del luogo geometrico descritto dal terzo vertice quando il primo è fisso sulla prima retta ed il secondo è variabile sulla terza retta;

c – costruzione del triangolo richiesto.

Fase a

Si disegnano tre rette generiche r, s e t parallele tra loro.

Sulla retta r si prende un punto A; sulla retta t si prende un punto B, si costruisce la circonferenza γ_1 di centro A e raggio AB; si costruisce la circonferenza γ_2 di centro B e raggio AB.

Si determinano i punti C e C' d'intersezione delle due circonferenze; si nascondono le due circonferenze ed il secondo punto C' (il problema ammette due

soluzioni); il triangolo *ABC* è equilatero con i vertici *A* e *B* che appartengono alle rette *r* e *t*.
Muovendo ora il punto *B* su *t*, si può notare che esiste una posizione per cui il vertice *C* si trova sulla retta data *s* (figura 1).

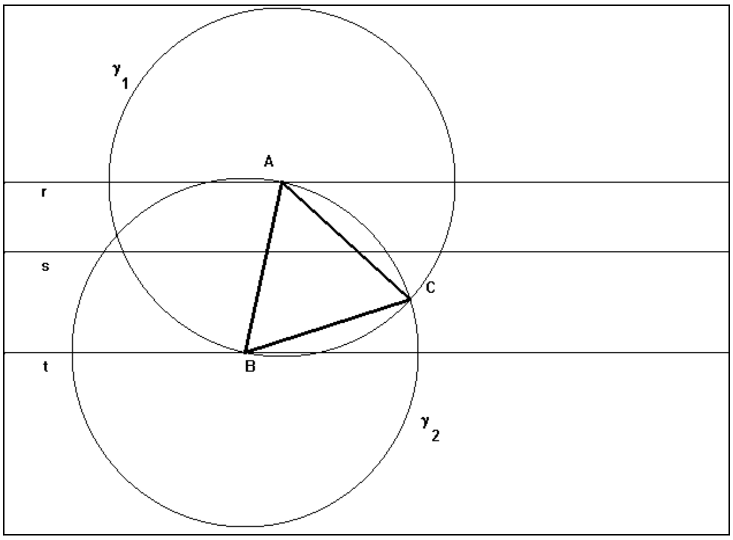


Figura 1. Costruzione di un triangolo equilatero con due vertici vincolati.

Fase b
Lasciando inalterata la costruzione precedente, si chiede a *Cabri-géomètre* di disegnare il luogo geometrico descritto dal terzo vertice *C* al variare di *B* sulla retta *t*.
Si può dimostrare, tramite considerazioni sugli angoli, che tale luogo è una retta passante per due punti *P* e *Q* appartenenti alle rette *t* ed *r* rispettivamente (figura 2).

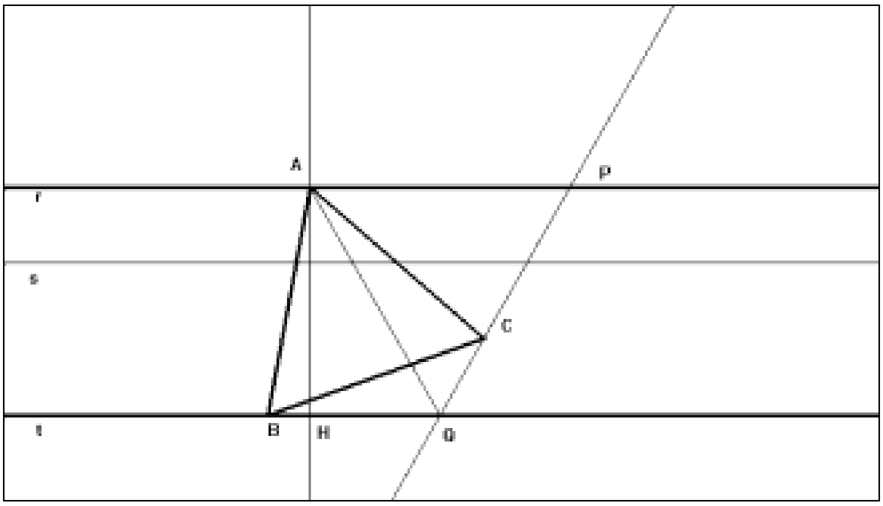


Figura 2. Luogo descritto dal punto *C* al variare di *B* sulla retta *t*.

Infatti P coincide col vertice C del triangolo ABC, fatto ruotare intorno ad A e sottoposto contemporaneamente a un'omotetia di centro A, in modo che il vertice B si sovrapponga al punto Q. Tale triangolo ha per altezza la distanza AH tra le rette parallele r e t (figura 2).

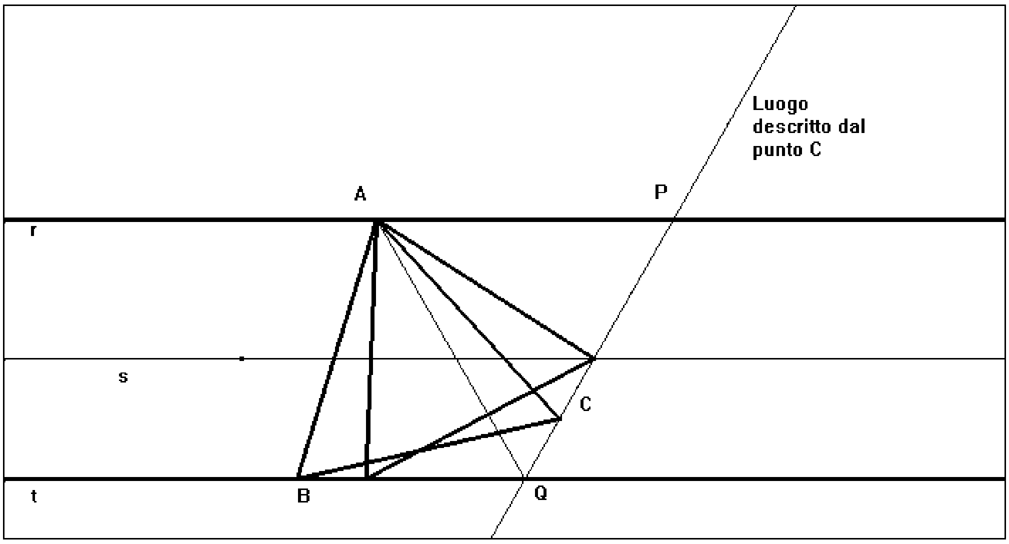


Figura 3. Tramite una rotazione e un'omotetia di centro A, il vertice C si porta sulla retta s

Q invece coincide col vertice C del triangolo equilatero ABC che ha il secondo vertice B coincidente col punto P determinato in precedenza.

Fase c

Costruita la retta v, luogo dei vertici C – come indicato nella fase (b) – il triangolo equilatero richiesto dal problema si determina con la seguente costruzione (figura 4):

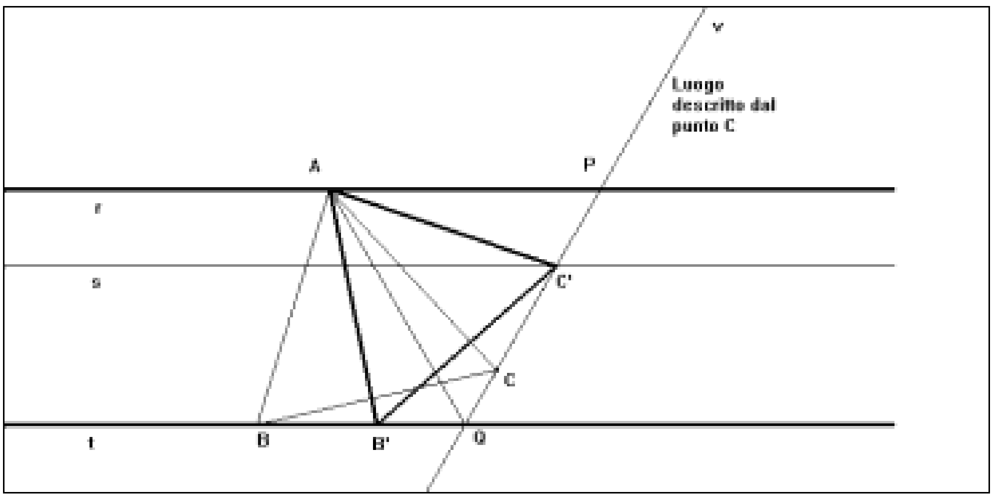


Figura 4. Costruzione del triangolo $AB'C'$.

- si trova *C'* come intersezione tra le rette *s* e *v*;
- si costruisce il segmento *AC'*, lato del triangolo equilatero richiesto;
- si costruisce l'asse del segmento *AC'*;
- si determina il punto *B'* come intersezione tra l'asse di *AC'* e la retta *t* ;
- si completa il triangolo *AB'C'*;
- si costruisce il triangolo simmetrico di *AB'C'* rispetto alla retta *AH.* Questo triangolo è la seconda soluzione del problema.

Il triangolo *AB'C'* è equilatero e i suoi vertici appartengono alle tre rette parallele date, qualunque sia la loro posizione nel piano.

2ª traccia della procedura di soluzione con *Cabri-géomètre*

Si disegnano tre rette generiche del piano *r*, *s* e *t*, parallele tra loro.
Sulla retta r si prende un punto *A*. Da *A* si manda la retta z perpendicolare alla retta *t* e chiamiamo *H* il punto d'intersezione.
Si costruisce il triangolo equilatero di altezza *AH* e le rette *v* e *w* dei lati del triangolo concorrenti nel punto *A*.
Sia *D* il punto d'intersezione tra la retta *s* e la retta *v*. Dal punto *D* mandiamo la retta *u* parallela alla retta *w*.

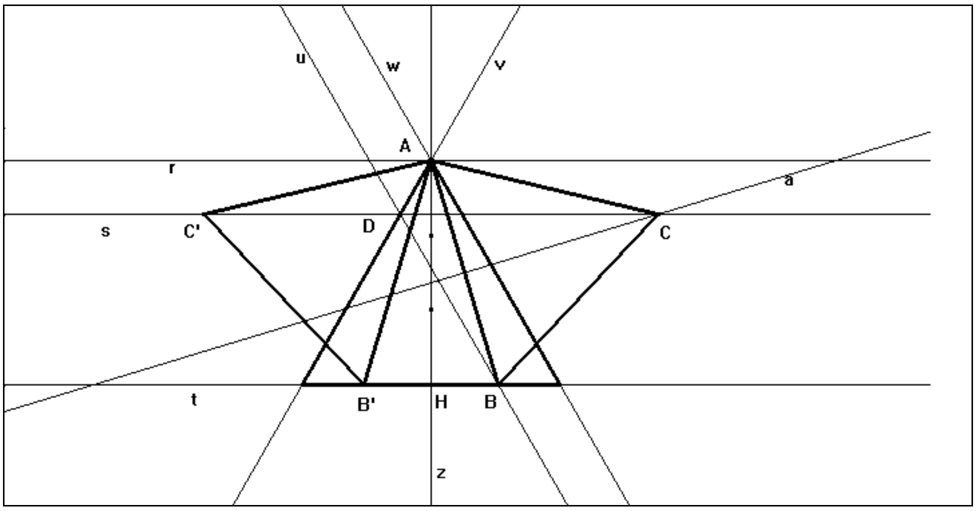


Figura 5. Seconda soluzione con *Cabri-géomètre.*

Sia *B* il punto d'intersezione tra *u* e *t* (figura 5). Allora *AB* è il lato del triangolo equilatero richiesto.
Per completare il triangolo si costruisce l'asse *a* di *AB* che incontra la retta *s* nel punto *C*. Il triangolo *ABC* è quello richiesto. (Perché? Fare la dimostrazione!).
Simmetrizzando il triangolo *ABC* rispetto alla retta *z* si ottiene la seconda soluzione del problema (figura 5), rappresentata dal triangolo *AB'C'*.

Traccia della procedura di soluzione con *Derive*

Si riporta di seguito una traccia di soluzione del problema con *Derive*. Una delle tre rette viene fatta coincidere, per comodità, con l'asse *x* e, inoltre, una delle distanze tra le tre rette viene assunta come unità di misura.

```
"Problema del triangolo equilatero con i vertici su tre rette parallele"
"Assegnate tre rette"
RETTE(l,m):=[y=0,y=l,y=m]
"consideriamo un punto su ciascuna retta"
[0,0]
[x1,l]
[x2,m]
"definiamo la distanza tra due punti"
DISTANZA(x1,y1,x2,y2):=SQRT((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)
"determiniamo la distanza tra O=(0,0) e A=(x1,l)"
DISTANZA(0,0,x1,l)
"determiniamo la distanza tra O=(0,0) e B=(x2,m)"
DISTANZA(0,0,x2,m)
"determiniamo la distanza tra A=(x1,l) e B=(x2,m)"
DISTANZA(x1,l,x2,m)
"uguagliamo il quadrato della distanza OA a quello di OB"
DISTANZA(0,0,x1,l)^2=DISTANZA(0,0,x2,m)^2
;Simp(#17)
l^2+x1^2=m^2+x2^2
"uguagliamo il quadrato della distanza OA a quello di AB"
DISTANZA(0,0,x1,l)^2=DISTANZA(x1,l,x2,m)^2
;Simp(#20)
l^2+x1^2=l^2-2*l*m+m^2+(x1-x2)^2
"per risolvere il sistema sottraiamo le due equazioni"
(l^2+x1^2=l^2-2*l*m+m^2+(x1-x2)^2)-(l^2+x1^2=m^2+x2^2)
;Simp(#23)
0=l^2-2*l*m+x1^2-2*x1*x2
"risolviamo rispetto a x2"
;Solve(#24)
x2=(l^2-2*l*m+x1^2)/(2*x1)
"sostituiamo per determinare x1”
;Sub(#18)
l^2+x1^2=m^2+((l^2-2*l*m+x1^2)/(2*x1))^2
"otteniamo le seguenti soluzioni"
"considerando solo le reali"
;Solve(#28)
x1=SQRT(3)*l/3-2*SQRT(3)*m/3
;Solve(#28)
x1=2*SQRT(3)*m/3-SQRT(3)*l/3
;Solve(#28)
x1=#i*l
;Solve(#28)
x1=-#i*l
"considerato x1 = SQRT(3) l/3 – 2 SQRT(3) m/3  otteniamo"
```

```
;Sub(#26)
x2=(l^2-2*l*m+(SQRT(3)*l/3-2*SQRT(3)*m/3)^2)/(2*(SQRT(3)*l/3-
2*SQRT(3)*m/3))
;Simp(#36)
x2=SQRT(3)*(2*l-m)/3
"considerato x1 = 2 SQRT(3) m/3 - SQRT(3) l/3  otteniamo"
;Sub(#26)
x2=(l^2-2*l*m+(2*SQRT(3)*m/3-SQRT(3)*l/3)^2)/(2*(2*SQRT(3)*m/3-
SQRT(3)*l/3))
;Simp(#39)
x2=SQRT(3)*(m-2*l)/3
"una soluzione del problema e quindi un triangolo sarà…"
TRIANG1(l,m):=[[0,0],[SQRT(3)*l/3-2*SQRT(3)*m/3,l],[SQRT(3)*(2*l-
m)/3,m],[0,0]]
"l'altra soluzione del problema e quindi l'altro  triangolo sarà…"
TRIANG2(l,m):=[[0,0],[2*SQRT(3)*m/3-SQRT(3)*l/3,l],[SQRT(3)*(m-
2*l)/3,m],[0,0]]
"esempio"
RETTE(1,3)
TRIANG1(1,3)
TRIANG2(1,3)
```

Si riporta il grafico della particolare soluzione ottenuta con *Derive.*

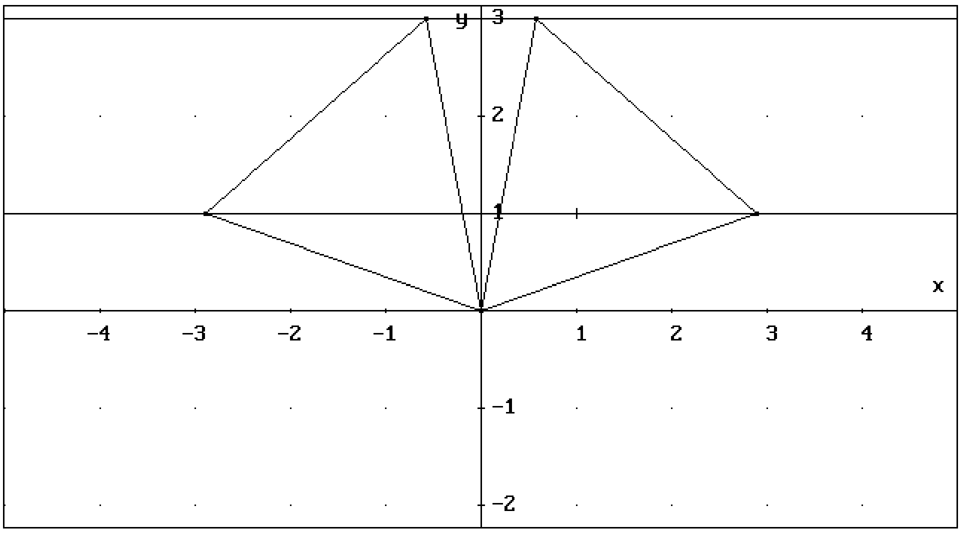


Figura 6. Soluzione del problema con *Derive*.

Gruppo 5: Aldo Boiti, Elena Crespina, Mauro De Vita, Rosanna Guidetti, Roberto Ricci.

Strumenti software: *Cabri*

Caratteristiche connesse all'uso del software
In questo caso *Cabri*, qui utilizzato nella versione *Cabri*II per MS-DOS, contribuisce, oltre che per l'aspetto dinamico, anche per la precisione della figura, che diviene così una base ricca di stimoli per la ricerca di un procedimento risolutivo. A partire da una costruzione risolutiva con Cabri, è possibile anche favorire la consapevolezza della necessità di una dimostrazione rigorosa.

Collocazione temporale
Il problema può essere proposto anche nel biennio della scuola superiore, a seconda del metodo di risoluzione sul quale si fa affidamento. Prevede infatti da parte degli allievi il possesso dei seguenti prerequisiti: solo la conoscenza delle proprietà elementari della circonferenza per il secondo procedimento, oppure solo la conoscenza delle proprietà elementari delle rotazioni, oppure solo conoscenze elementari della trigonometria.

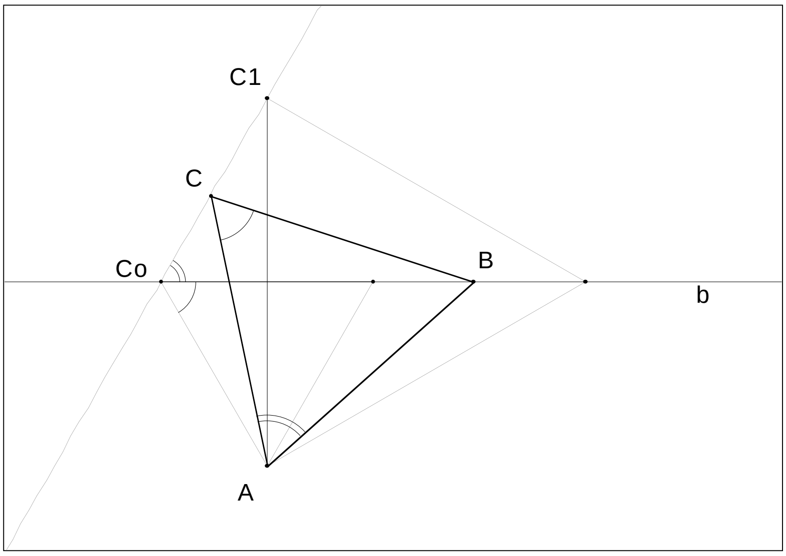
Aspetti didattici
Il problema è interessante dal punto di vista didattico per il numero di approcci diversi, sempre a livelli elementari.
Questo esercizio può fare parte anche di una raccolta di problemi da assegnare in modo svincolato dal curricolo, per potenziare, ad esempio, l'intuizione e la capacità di dimostrare, anche perché si presta appunto a impostazioni molto diverse.

Nodi concettuali
Differenza tra dimostrazione e verifica, tra ragionamento deduttivo e ragionamento induttivo.

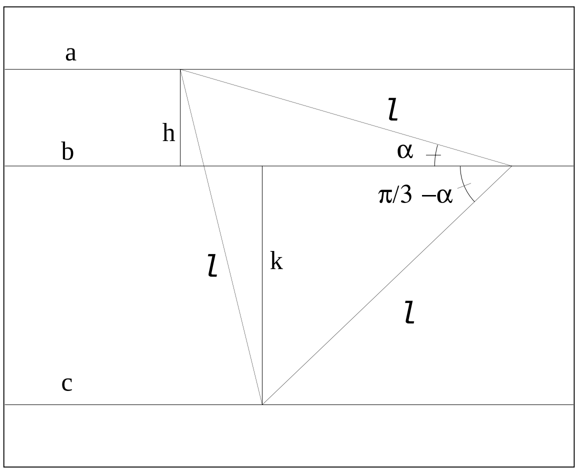
Approfondimenti e collegamenti
Proprietà della circonferenza. Luogo di punti. Continuità.
Trasformazioni geometriche.
Elementi di base della trigonometria.

Traccia della procedura di soluzione
Vediamo innanzitutto una risoluzione sintetica. Date le rette parallele a, b e c, un punto A su a, un punto B su b, si costruisca un triangolo equilatero ABC. Al variare dei punti B sulla retta b, il luogo dei punti C che completano un triangolo equilatero di lato AB è una retta. Infatti, costruendo ad esempio il triangolo equilatero con vertice C_0 anch'esso su b, sia C che C_0 vedono il lato AB sotto un angolo di 60°, dunque stanno su una circonferenza per A, B, C e C_0; allora anche gli angoli CC_oB e CAB sono congruenti. Poiché, indipendentemente da B, il segmento CC_0 forma sempre lo stesso angolo - di 60° - con la retta b, allora il

luogo dei punti C è una retta; e questa retta interseca qualunque retta c che non formi con b un angolo di 60°. Si ottiene un'altra soluzione considerando il luogo dei punti B che, al variare di C sulla retta c, completano un triangolo equilatero di lato AC.



Esaminiamo una seconda risoluzione che fa uso delle trasformazioni. Date le rette parallele a, b e c, un punto A su a, consideriamo la retta b' corrispondente a b nella rotazione di centro A e di angolo 60°: questa retta interseca c in un punto C. La circonferenza di centro A e passante per C interseca la retta b in un punto B tale che evidentemente ABC è un triangolo equilatero. Analogamente, se consideriamo la retta c' corrispondente a c nella rotazione di centro A e di angolo 60°, questa interseca la retta b in un punto B'. Si può allora costruire ancora a partire dal lato AB' un triangolo equilatero $AB'C'$ che ha il vertice C' sulla retta c.
Queste primi due metodi di risoluzione si prestano per risolvere un problema generalizzato: date tre rette qualunque (o anche tre circonferenze) e un triangolo qualunque, costruire un triangolo simile con vertici sulle tre rette date (sulle circonferenze date).
Esaminiamo infine una terza risoluzione che fa uso della trigonometria.



Con riferimento alla figura siano:

- l la misura dei lati del triangolo equilatero,
- α la misura dell'angolo che il lato *AB* forma con la retta intermedia *b* con $0 < \alpha < \pi/3$.

Indicate con *h* e *k* le distanze tra le rette *a*, *b* e *b, c* si hanno le relazioni:

$\text{sen}\alpha = h / l, \quad l \cdot \text{sen}(\pi/3\text{-}\alpha) = k$.

Essendo $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{h}{l}\right)^2}$, $\quad \text{sen}(\pi/3\text{-}\alpha) = (\sqrt{3}\cos\alpha - \text{sen}\alpha)/2$, si ottiene:

$$l(\sqrt{3}\sqrt{1-(\mathrm{h}/\mathrm{l})^2} - \frac{h}{l}) = 2k.$$

Con facili calcoli algebrici si ottiene infine:

$$l = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\mathrm{h}^2 + \mathrm{hk} + \mathrm{k}^2} \ .$$

Nota la misura del lato, il triangolo equilatero può essere costruito immediatamente.

<u>Gruppo 6</u> Marco Calvani, Maurizio Franceschin, Ferruccio Rohr, Stefano Sarti

Strumenti software: *Cabri, Derive*

Caratteristiche connesse all'uso del software

Cabri consente innanzi tutto di vedere e provare che la soluzione esiste e suggerisce anche una costruzione del triangolo. La dimostrazione rigorosa avviene per via sintetica. Il problema assume maggiore evidenza e la possibilità di gestire in senso dinamico le figure permette di acquisire la proprietà dimostrata in senso generale, inoltre è semplice il passaggio dalla consegna del testo all'operatività.
Derive consente una trattazione analitica, meno intuitiva, per certi aspetti più difficile da modellizzare e gestire, ma offre un contributo al calcolo simbolico, che alleggerisce il lavoro e consente di concentrasi maggiormene sugli aspetti matematici del problema. Le figure sono costruite dopo aver trovato la soluzione, hanno carattere statico, le proprietà geometriche devono essere continuamente tradotte in algebriche e viceversa.

Collocazione temporale

Riguardo alla collocazione dell'esercizio, in un percorso didattico, bisogna fare alcune distinzioni. Per una trattazione a livello di "costruzione dinamica con *Cabri*", sono richieste conoscenze di base, generalmente possedute al termine di un biennio superiore.
La trattazione analitica che richiede, oltre alla conoscenza della geometria analitica della retta e elementi di trigonometria, buone capacità di modellizzazione matematica ed abilità di calcolo simbolico non sottovalutabili, è proponibile a studenti più maturi di 3-4 anno. È comunque necessario, in ogni caso, vista la

natura e la ricchezza del problema, che gli studenti abbiano già una buona familiarità con i software utilizzati.

Aspetti didattici
Il problema offre l'occasione di riflettere su:

- Nozioni di continuità
- Distinzione tra esistenza e costruzione della soluzione
- Uso di strumenti e strategie risolutive alternative
- Validità della costruzione in *Cabri* e necessità della dimostrazione rigorosa
- Esame di alcuni casi particolari (retta intermedia equidistante dalle altre due …) o generalizzazioni del problema (tre rette incidenti …)
- Equivalenza tra il "registro geometrico" e il "registro analitico"
- Modellizzazione di un problema

L'esplorazione dinamica delle figure permessa da *Cabri*, induce a progettare tentativi strutturati, a portare avanti una vera e propria attività di ricerca, con formulazione e verifica di ipotesi.

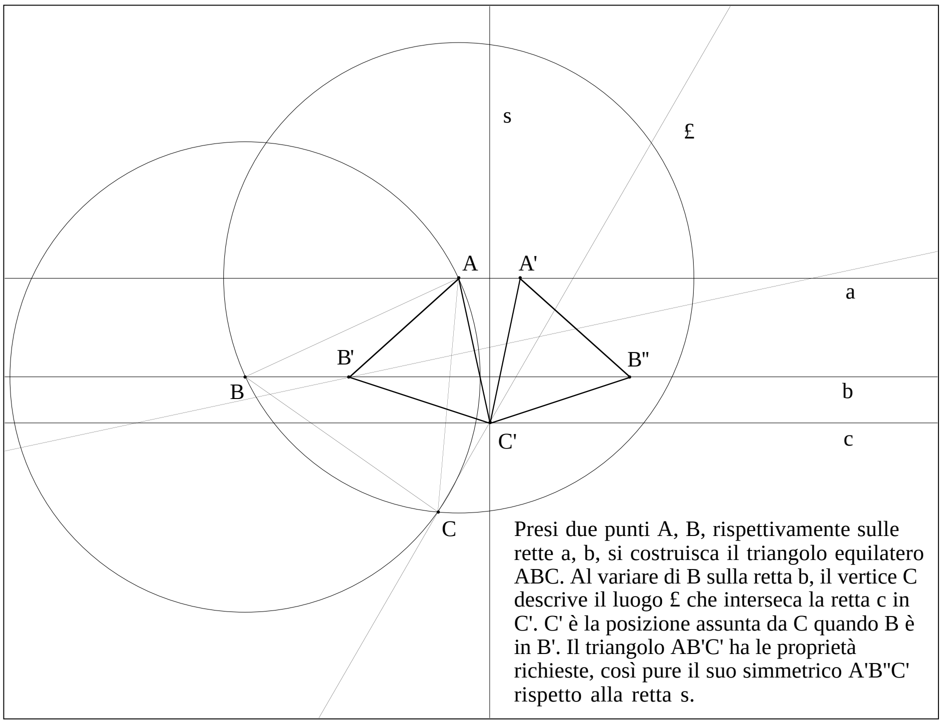
Nodi concettuali
A seconda del software usato si presentano differenti punti delicati connessi alla soluzione del quesito. In ambiente *Cabri*, si ripropongono le difficoltà delle dimostrazioni sintetiche. In *Derive* la maggiore difficoltà, tolta quella del calcolo, demandato alla macchina, consiste nel dover operare con molte variabili, che di volta in volta giocano o meno il ruolo di incognite e di dover gestire una molteplicità di relazioni algebriche.

Approfondimenti e collegamenti
L'argomento ci sembra interessante anche per una serie di ulteriori spunti e aperture che esso suggerisce, quali, ad esempio:

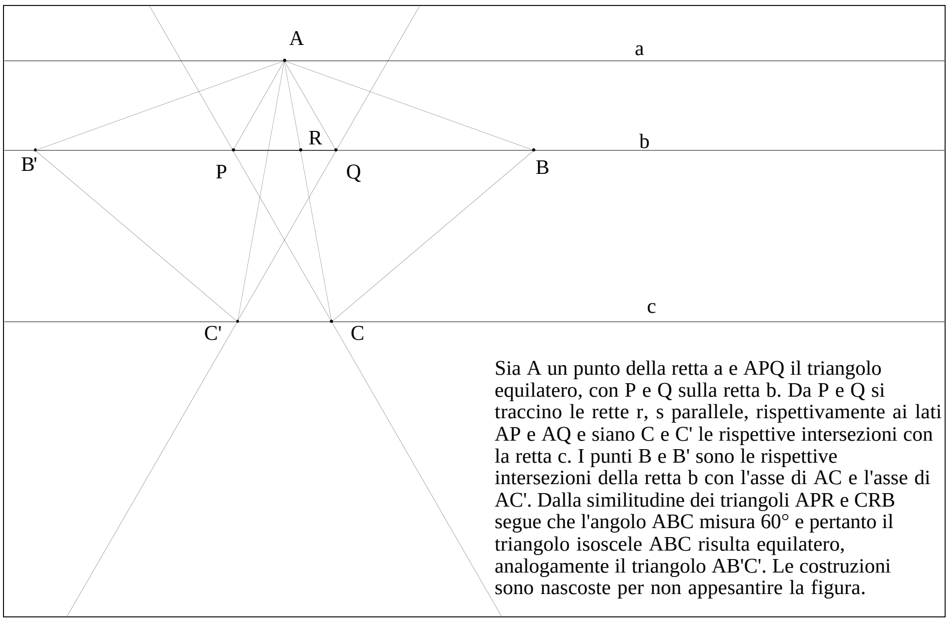
- Approfondimento dei concetti legati alla continuità;
- Infinità delle soluzioni e problemi connessi con la dimensione dell'insieme soluzione
- Studio di luoghi geometrici.
- Trasformazioni del piano.

Traccia della procedura di soluzione
Per cominciare ci sembra più semplice l'ambiente *Cabri*.
Tracciate le tre rette parallele, si prende un punto su una retta (ad esempio il punto A sulla retta a), un punto su un'altra (ad esempio B su b) e si determina un terzo punto (in realtà ce ne sono due) che forma con gli altri due un triangolo equilatero. Scegliendo i primi due punti in modo indipendente, il terzo vertice del triangolo equilatero difficilmente verrà a trovarsi sulla terza retta. Per fortuna!
Operando una serie di tentativi si comincia ad avere qualche idea di come dovranno essere presi i tre punti. Scelto comunque il primo su una retta (fissato una volta per tutte), tutto dipende da come si sceglie il secondo sulla seconda retta. Al variare di questo secondo punto, il terzo vertice del triangolo equilatero

retta. Al variare di questo secondo punto, il terzo vertice del triangolo equilatero (o dei triangoli equilateri) “cammina” nel piano, cioè descrive un luogo, la cui natura può essere ipotizzata prima di farlo effettivamente tracciare da *Cabri*. Si arriva dunque alla costruzione della figura che segue.



La retta £, luogo del punto *C*, forma un angolo di 120° con le rette a, b, c.
Questa proprietà (si dimostra, basta portare C sulla retta a) suggerisce una costruzione più semplice:



Cabri consente di fare controlli, misurando lati e angoli, confrontando le misure mentre si spostano le rette nel piano. La dimostrazione sintetica si basa sulla similitudine dei triangoli PQB e AQC. Sono possibili altri approfondimenti, quali ad esempio la dimostrazione che il luogo £ è effettivamente una retta.

Diversa la soluzione in *Derive*.

Consideriamo tre rette parallele: l'asse x, la retta y = 1 e la retta y = k (k>1). Non è restrittiva questa scelta. Le condizioni affinché il triangolo avente per vertici O(0,0), A(a,1), B(b,k) sia equilatero possono essere poste in modi equivalenti:

1. Distanza(O, A) = Distanza(O, B);
2. Angolo(AOB) = 60°, ovvero tangente(Angolo(AOB) = tangente(60°)= $\sqrt{3}$

Ovvero:

3. Distanza(O, A) = Distanza(O, B);
4. Distanza(O, A) = Distanza(A, B);

Risolvendo il sistema che traduce le condizioni 1. e 2. si ottengono due soluzioni reali, che vanno interpretate poiché l'angolo di due rette presenta ambiguità. Tale ambiguità è però utile perché impone di ragionare per dare senso ai risultati. Il secondo triangolo soluzione si ottiene per simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

Problema 23

Data una retta *r* ed un segmento *AB* situato in uno dei due semipiani di origine *r*, determinare il punto di *r* che vede il segmento *AB* sotto l'angolo massimo.

Gruppo 3: Sandra Bernecoli, Patrizia Berneschi, Rossana Rossi Bucciarelli, Luigi Tomasi, Renato Verdiani

Strumenti software: *Cabri-géomètre, Derive*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Per la risoluzione di questo problema è particolarmente adatto *Cabri-géomètre*, soprattutto nell'esplorazione iniziale della figura. Occorre conoscere ad un livello minimo il programma *Cabri-géomètre* e saper fare le costruzioni fondamentali con riga compasso, in particolare la costruzione del segmento medio proporzionale tra due segmenti dati. Se il problema viene impostato con il *Derive*, occorrono invece conoscenze sulle derivate e sullo studio di funzione oltre che sulle funzioni goniometriche inverse.

Collocazione temporale
Questo è un problema che fa uso delle relazioni tra angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco, del secondo teorema di Euclide e del teorema della tangente e della secante. Almeno per gli aspetti iniziali, pertanto, può essere proposto alla fine del biennio. Gli studenti sono stimolati, durante la fase di esplorazione, a ricercare una soluzione adeguata; devono inoltre rivedere, in questo contesto, teoremi fondamentali della geometria euclidea.
Nel triennio il problema può essere riproposto nell'ambito dello studio dei massimi e dei minimi da risolvere per via sintetica, senza l'uso delle derivate.

Aspetti didattici
Il problema va proposto inizialmente come riflessione individuale agli allievi e solo successivamente discusso e risolto nell'aula d'informatica sotto la guida del docente.
Si ritiene che tale problema possa essere proposto alla fine del biennio e ripreso nel triennio come esempio significativo di massimo e di minimo dove l'uso delle derivate è sconsigliato perché troppo laborioso.
La finalità didattica di questo problema è quella di applicare, in un contesto particolarmente motivante, il secondo teorema di Euclide e nello stesso tempo di vedere anche un collegamento con il teorema della secante e della tangente, permettendo un'unificazione di quanto studiato nella geometria nell'ambito della similitudine tra figure del piano.

Nodi concettuali
Questo problema ha al suo centro il concetto di media geometrica tra due

segmenti dati. Dal punto di vista dell'uso del software *Cabri-géomètre* occorre conoscere le costruzioni fondamentali con riga e compasso. Occorre inoltre ricordare il teorema dell'angolo esterno ad un triangolo per poter dimostrare la proprietà di massimo richiesto.

Approfondimenti e collegamenti

Il problema dato è equivalente al problema di trovare la circonferenza tangente ad una retta *r* data e passante per due punti *A* e *B* che, a sua volta, equivale al problema di determinare il segmento medio proporzionale tra due segmenti dati.

Un altro problema equivalente è quello della determinazione della media geometrica tra le misure di due segmenti.

Il problema dato può anche essere messo in relazione con la definizione di "potenza" di un punto esterno rispetto ad una circonferenza.

Traccia della procedura di soluzione con *Cabri-géomètre*

Disegniamo con *Cabri-géomètre* il segmento *AB* e la retta *r*. Se il segmento *AB* è parallelo ad *r*, il problema è di facile soluzione.

In caso contrario, la soluzione si divide in due fasi.

Fase 1 (di esplorazione)

Tracciamo l'asse del segmento *AB*; prendiamo un punto generico *O* sull'asse di *AB* e consideriamo sia il fascio di circonferenze passanti per gli estremi *A* e *B* del segmento dato sia l'angolo *APB*.

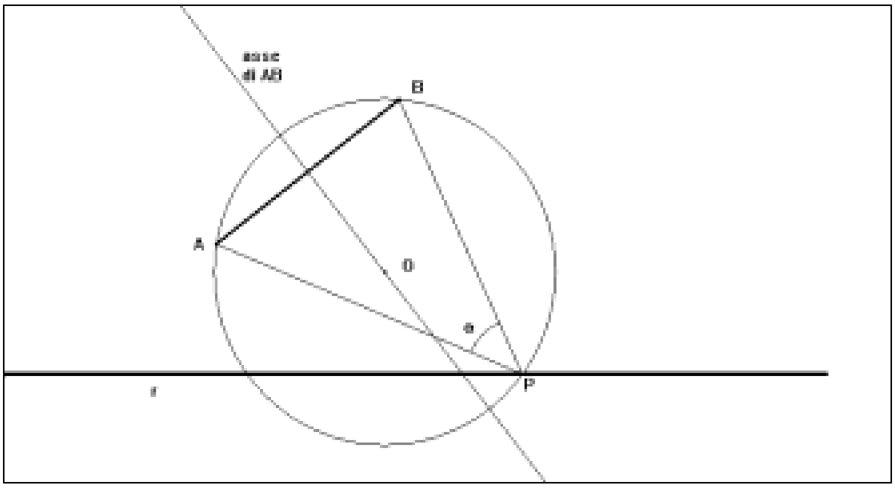


Figura 1. In questa figura si può disegnare prima *P* e poi la circonferenza oppure la circonferenza e poi *P*.

Si "vede" che *APB* diminuisce se la circonferenza ha il centro *O* che si allontana dalla corda *AB* (figura 1); lo stesso angolo aumenta se il centro *O* si avvicina alla corda *AB*.

Le stesse considerazioni possono essere fatte anche nel caso in cui le circonferenze non intersechino la retta data *r*.

Da ciò è facile portare gli allievi a dedurre che il punto T richiesto dal problema è quello di tangenza tra la circonferenza e la retta data r (figura 2).

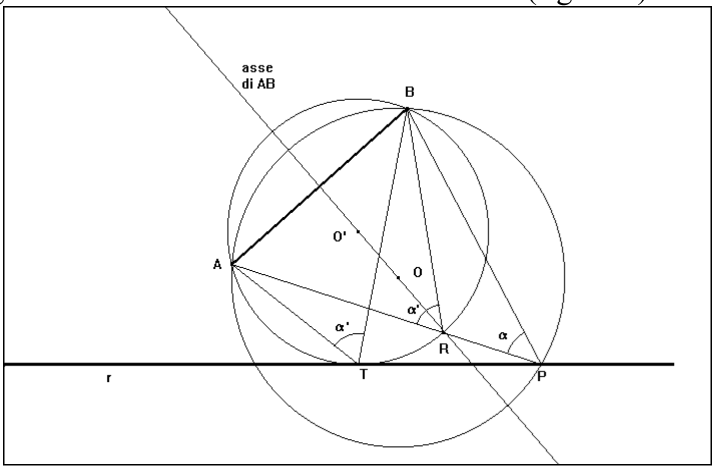


Figura 2 L'angolo α' è maggiore dell'angolo α.

Fase 2 (di costruzione e dimostrazione)

Ammesso di aver determinato il punto T, si osserva (figura 2) che l'angolo α' è maggiore dell'angolo α. Infatti l'angolo $A\hat{T}B$ è congruente all'angolo $A\hat{R}B$, che a sua volta è angolo esterno al triangolo BRP. Quindi α' > α._

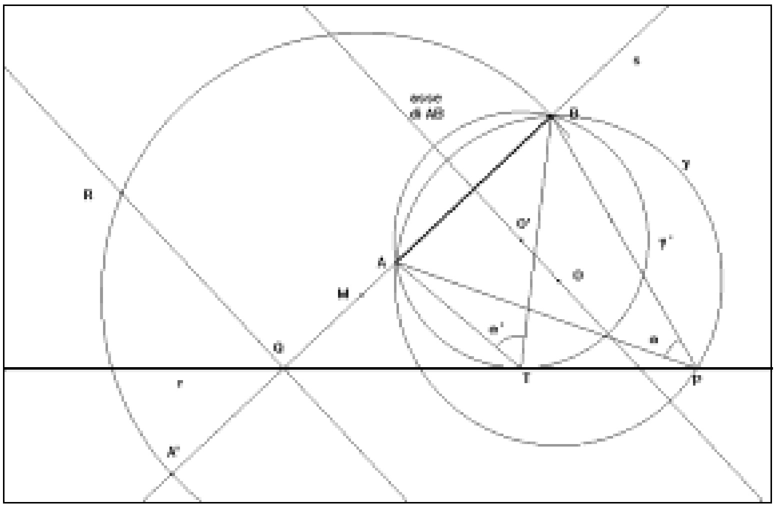


Figura 3. Costruzione del punto T e della circonferenza tangente alla retta r.

Trovato il punto Q d'intersezione tra r e la retta s passante per A e B, si costruisce il punto T in modo che valga la relazione del secondo teorema di Euclide (figura 3):

$$\overline{QT}^2 = \overline{QA} \cdot \overline{QB}.$$

Per costruire il punto T con "riga e compasso", si trova il punto Q di intersezione tra la retta r e la retta s passante per A e B, si costruisce il punto A', simmetrico del punto A rispetto a Q, e si trova il punto medio M del segmento $A'B$.

Con centro nel punto *M*, si traccia la circonferenza di raggio *MB*. Da *Q* si manda la perpendicolare alla retta *s* e si trova uno dei punti *R* di intersezione con la circonferenza.
Il segmento *QR,* per il secondo teorema di Euclide, è medio proporzionale tra i segmenti *A'Q* e *QB*:

$$QA' : QR = QR : QB,$$

ovvero tra *QA* e *QB*, essendo *QA'=QA*:

$$QA : QR = QR : QB.$$

La distanza *QR* viene riportata su *R* a partire dal punto *Q*, ottenendo il punto di tangenza *T*, che è il punto di *r* dal quale il segmento *AB* viene visto sotto l'angolo massimo α'.

Dalla proporzione precedente segue:

$$QA : QT = QT : QB.$$

La stessa proporzione si può trovare anche applicando il teorema della secante e della tangente, dove ovviamente la retta *r* è la retta tangente ed *s* è la retta secante.

Traccia della procedura di soluzione con *Derive*

Si riporta nel seguito una soluzione ottenuta con *Derive.* La retta *r* è stata assunta come asse delle ascisse, il punto *A* è stato assunto avere coordinate (0, *a*) ed il punto *B* di coordinate (*b*, *c*).
Si trova l'angolo tra la retta *PA* e la retta *PB.* Si determina il massimo della funzione con l'uso di *Derive.*
Il calcolo è molto laborioso, ma esaminando il risultato trovato si osserva che il valore massimo dell'angolo viene assunto in corrispondenza ad un valore di *x* che rappresenta l'ascissa del punto di tangenza della circonfernza all'asse delle ascisse.
In realtà si trovano due soluzioni, perché due sono le circonferenze tangenti ad una retta *r* data passanti per due punti *A* e *B,* ma solo una delle due soluzioni è accettabile.

```
"Problema dell'angolo massimo di visione di AB
da un punto P"
"Consideriamo i punti A(0, a) e B(b,c)"
[0,a] [b,c]
"e un punto P(x, 0) sull'asse x" [x,0]
"La retta PA ha per coefficiente angolare:"
-a/x
"La retta PB ha per coefficiente angolare:"
-c/(x-b)
"La prima retta forma con l'asse x l'angolo:"
ATAN(-a/x)
"La seconda retta forma con l'asse x
l'angolo:"
ATAN(-c/(x-b))
```

```
"L'angolo tra le due rette e' pertanto:"
ATAN(-c/(x-b))-ATAN(-a/x)
;Simp(#16)
ATAN(a/x)-ATAN(c/(x-b))
"Calcoliamo la derivata prima di tale
funzione:"
;Dif(#17,x)
DIF(ATAN(a/x)-ATAN(c/(x-b)),x)
"Otteniamo l'espressione:"
;Simp(#19)
-(x^2*(a-c)-2*a*b*x-a*(a*c-b^2-
c^2))/((x^2+a^2)*(x^2-2*b*x+b^2+c^2))
"Il denominatore è positivo. Studiamo il segno
del numeratore:"
x^2*(a-c)-2*a*b*x-a*(a*c-b^2-c^2)"
"L'equazione associata ammette le radici:"
;Solve(#23)
x=SQRT(a)*(SQRT(c)*SQRT(a^2-
2*a*c+b^2+c^2)+SQRT(a)*b)/(a-c)
;Solve(#23)
x=SQRT(a)*(SQRT(c)*SQRT(a^2-2*a*c+b^2+c^2)-
SQRT(a)*b)/(c-a)
"Consideriamo un caso particolare:"
;Sub(#25)
x=SQRT(2)*(SQRT(5)*SQRT(2^2-
2*2*5+3^2+5^2)+SQRT(2)*3)/(2-5)
;Simp(#29)
x=-2*SQRT(5)-2
x=2*SQRT(5)-2
"Ragionando in modo simile, si ottiene:"
m:=-a/x
n:=-c/(x-b)
"La tangente dell'angolo tra due rette e':"
(m-n)/(1+m*n)
;Simp(#36)
(a*b-x*(a-c))/(x^2-b*x+a*c)
"L'angolo tra le due rette e' dunque:"
ATAN((a*b-x*(a-c))/(x^2-b*x+a*c))
"La derivata di tale funzione e':"
;Dif(#39,x)
DIF(ATAN((a*b-x*(a-c))/(x^2-b*x+a*c)),x)
;Simp(#41)
(x^2*(a-c)-2*a*b*x-a*(a*c-b^2-c^2))/(x^4-
2*b*x^3+x^2*(a^2+b^2+c^2)-2*a^2*b*x+a~
^2*(b^2+c^2))
```

```
"Studiando il segno del numeratore, si
ottiene:"
x^2*(a-c)-2*a*b*x-a*(a*c-b^2-c^2)
"Consideriamo un esempio con A(0,2) e B(3,5)"
;Sub(#44)
x^2*(2-5)-2*2*3*x-2*(2*5-3^2-5^2)
;Simp(#46)
-3*x^2-12*x+48
"Le soluzioni dell'equazione associata sono:"
;Solve(#47)
x=2*SQRT(5)-2
;Solve(#47)
x=-2*SQRT(5)-2
"Questi ultimi valori sono le ascisse dei
punti di tangenza"
"tra le circonferenze e l'asse delle x."
"Soltanto la soluzione positiva e’
accettabile."
```

Il grafico ottenuto con *Derive*, nel caso particolare indicato, è il seguente:

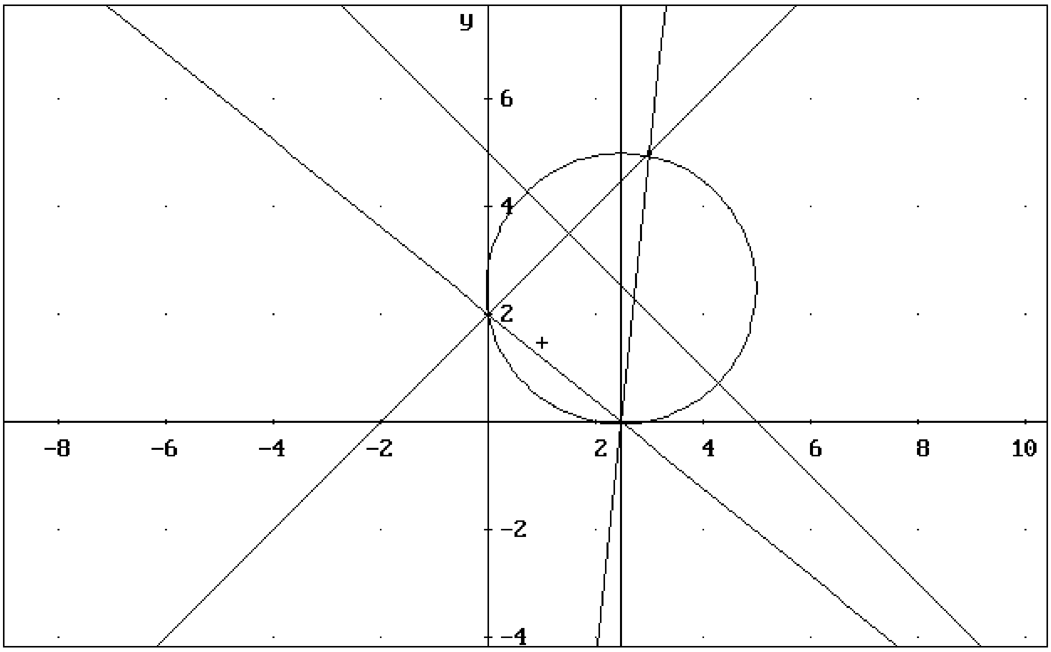


Figura 4. Grafico ottenuto con *Derive* con $A(0, 2)$, $B(3, 5)$ e la retta r coincidente con l’asse x.

Commenti

Da quanto si è visto la trattazione sintetica di questo problema è di gran lunga preferibile rispetto alla soluzione analitica, perché quest’ultima necessita di strumenti di analisi matematica e di calcoli molto laboriosi.

Problema 27

Dimostrare la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

per $\forall$ x, y≥0

<u>**Gruppo 5**</u>**:** Aldo Boiti, Elena Crespina, Mauro De Vita, Rosanna Guidetti, Roberto Ricci.

Strumenti software: *Cabri*

Collocazione temporale
L'attività di risoluzione di questo problema non è strettamente legata ad un particolare momento del curricolo. Può essere affrontata ad esempio nel corso del biennio della scuola superiore per consolidare le basi di algebra elementare. Per entrambe le soluzioni proposte occorre come prerequisito la conoscenza del II teorema di Euclide.

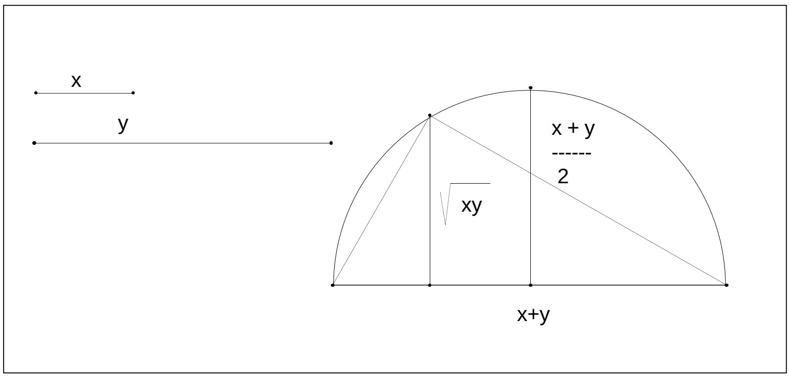
Caratteristiche connesse all'uso del software
Le figure dinamiche realizzate con il sw *Cabri*, in questo caso *CabriII* per MS-DOS*,* aggiungono ad una celebre "dimostrazione senza parole", ad esempio, la possibilità di variarne alcuni elementi, nel nostro caso le lunghezze *x* e *y*, in modo che la figura cambi non soltanto agli occhi della mente. Già la "dimostrazione visiva", con il suo contenuto intuitivo, permette di sviluppare una dimostrazione; con l'aiuto di *Cabri* si può dare senso al quantificatore universale, realizzando numerose verifiche sperimentali, con variazioni "continue", di quello che si intuisce, e che poi andrà dimostrato per ogni x , y non negativi.
Cabri può fornire inoltre la possibilità di rappresentare i numeri reali come punti sulla retta e le operazioni come costruzioni in modo tale da poter metter mano su tali oggetti divenuti così più concreti.

Aspetti didattici
Il problema è interessante dal punto di vista didattico perché consente di associare un significato visivo-geometrico a relazioni algebriche che altrimenti, quando resta solo l'aspetto formale, possono essere memorizzate in modo sbagliato o facilmente dimenticate.
Le due dimostrazioni fornite sviluppano il colpo d'occhio riprendendo proprietà e relazioni della geometria elementare mai abbastanza consolidati nello studente.
Questo esercizio può fare parte anche di una raccolta di problemi da assegnare in modo svincolato dal curricolo, per potenziare, ad esempio, l'intuizione e la capacità di dimostrare, anche perché si presta a impostazioni molto diverse.

Nodi concettuali
Differenza tra dimostrazione e verifica, tra ragionamento deduttivo e ragionamento induttivo.

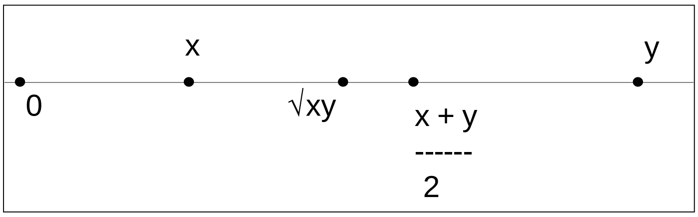
Approfondimenti e collegamenti
Teoremi di Euclide e proprietà della circonferenza.
Rappresentazione dei numeri reali sulla retta. Continuità.

Traccia della procedura di soluzione
Esaminiamo una prima risoluzione. Si costruisce una semicirconferenza avente per diametro la somma di due segmenti, indicati come x e y.

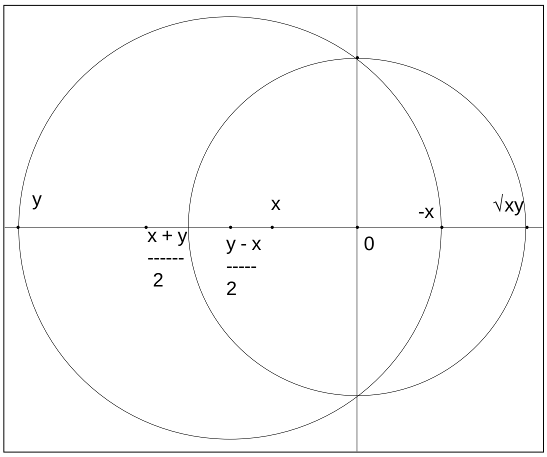


In questa semicirconferenza si traccia l'altezza, relativa all'ipotenusa, del triangolo rettangolo inscritto e avente x e y come proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: la sua misura è evidentemente $\sqrt{(xy)}$. Si tratta di fare un confronto, all'inizio visivo, di questa altezza, che è metà di una corda, con il raggio ad essa parallelo, che naturalmente misura $(x+y)/2$. Ci si convince immediatamente di quale sia il segmento minore, e la figura può essere trasformata cambiando x e y.
Esaminiamo una seconda risoluzione. Basata sulla rappresentazione dei reali sulla retta reale, si presta a due fasi di lavoro. Nella prima, a partire dalla figura Cabri costruita dall'insegnante, lo studente può sperimentare, variando con continuità i punti x e y, che il punto $\sqrt{(xy)}$, quando esiste, cioè per x e y concordi, precede sempre il punto medio $(x+y)/2$.

Nella seconda fase lo studente può analizzare la costruzione di $\sqrt{(xy)}$ (servendosi dell'opzione <u>Ricostruzione passo a passo</u> del menu <u>Edita</u>) per rendersi conto della sua validità attraverso la geometria elementare.



Dati i punti x e y si costruiscono il punto medio $(x+y)/2$, il punto $-x$ e il punto $(y-x)/2$ medio tra $-x$ e y, la circonferenza di diametro di estremi $-x$ e y, una sua intersezione - se esiste - con la perpendicolare per 0 alla retta reale, la circonferenza di centro 0 e passante per quel punto, infine il punto intersezione $\sqrt{xy}$ di quest'ultima circonferenza con il semiasse reale positivo.



Con questo approccio si estende la relazione anche per i valori negativi di x e y. Si osserva che quando x e y sono discordi il punto $\sqrt{xy}$ scompare, evidenziando la presenza di un campo d'esistenza della funzione radice. Inoltre si osserva che se x e y sono entrambi negativi vale invece la relazione con il segno di diseguaglianza invertito.

Commenti
La prima soluzione è tratta da : Nelsen Roger B., *Proofs Without words,* The Mathematical Association of America, pag. 49.
Per la seconda soluzione si può vedere anche:
Ricci R.*, Algebra con Cabri-Géomètre*, Quaderno n.5 di Cabrirssae, IRRSAE-ER, Bologna 1994.
Ricci R., *Didattica dell'algebra con Cabri-Géomètre*, su: La matematica e la sua didattica, n.1, Pitagora, Bologna 1998.

Gruppo 7: Silvana Bornoroni, Luigi Monica, Giovanni Olivieri, Antonio Rotteglia

Strumenti Software: Derive

Caratteristiche connesse all'uso del software
Derive consente una "agevole" trattazione analitica del problema, sicuramente più complessa di quella sintetica, che viene anche proposta come soluzione. L'uso del software semplifica i calcoli, abitua lo studente alla programmazione funzionale, permette di interpretare relazioni in due variabile nello spazio, di visualizzare l'andamento di superficie imponendo anche i vincoli per le variabili.

Collocazione temporale
Il problema è connesso a problemi di statistica e si colloca a fine biennio o al terzo o quarto anno della scuola secondaria superiore. Le proposte di soluzione comportano conoscenze di:

- geometria sintetica del biennio;
- tecniche di risoluzione di disequazioni irrazionali;
- geometria analitica del triennio.

Il quesito può quindi essere proposto nei due anni con modalità di analisi diverse. Dagli studenti del secondo anno ci si aspetta la dimostrazione sintetica, dagli studenti del terzo o quarto anno la dimostrazione algebrica, quella analitica e un listato con il software Derive corredato da una relazione sulle problematiche affrontate nel dimostrare disuguaglianze in due variabili e nell'utilizzare la programmazione funzionale (funzioni scritte in forma intera per evitare perdita di significato del denominatore, funzioni nello spazio rappresentate tenendo conto dei vincoli per le variabili, ecc..).

Aspetti didattici
Il problema offre l'opportunità di collegare la statistica con altre parti del programma di matematica. Si può lavorare avendo presenti i seguenti tre tipi di soluzione:

- **Soluzione algebrica,** che tiene conto delle tecniche di risoluzione delle disequazioni irrazionali e di quelle di confronto fra espressioni in due variabili;
- **Soluzione di geometria sintetica**, elegante e immediata, che lega le medie a costruzioni geometriche; il confronto fra espressioni in due variabili si riduce alla relazione fra cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo;
- **Soluzione di geometria analitica,** più complessa a livello di modellizzazione, che comporta la ricerca di un opportuno sistema di riferimento e calcoli laboriosi. Il confronto fra espressioni in due variabili tiene conto delle considerazioni proprie della trattazione algebrica.

L'uso di Derive si colloca all'interno della trattazione analitica e consente di:

- semplificare i calcoli;
- abituare lo studente alla programmazione funzionale (la programmazione si riduce ad una dichiarazione di funzioni);
- interpretare e visualizzare le relazioni in due variabili nello spazio migliorando l'intuizione e stimolando la riflessione.

Approfondimenti e collegamenti
La risoluzione del problema offre l'opportunità di approfondire le proprietà dei radicali algebrici e il modo di operare dell'automa, di anticipare lo studio di funzioni nello spazio, di riflettere su grafici di funzioni in due variabili, con riferimento a particolari condizioni per le variabili.
La soluzione del problema, anche nella forma più generale di seguito esposta, può anche essere costruita analizzando le proprietà delle funzioni lineare, esponenziale e iperbolica, rispetto alle quali le medie assumono particolari significati.

Il problema può inoltre essere generalizzato allo studio della relazione esistente tra tutti e quattro i tipi di medie.

Dimostrare le disuguaglianze fra le quattro medie:

media armonica ≤ media geometrica ≤ media aritmetica ≤ media quadratica

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

per $\forall\ x, y \ge 0$

Traccia delle procedure di soluzione

La dimostrazione analitica con uso di *Derive* fa comunque riferimento alla dimostrazione che può essere svolta per via sintetica, con riferimento alla figura di seguito riportata.

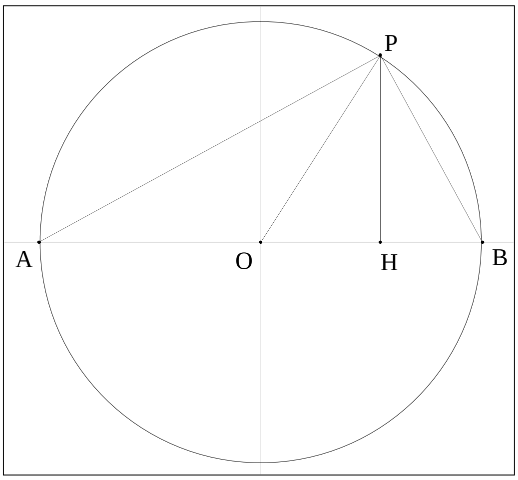
Si fa riferimento alla circonferenza di centro l'origine e di raggio uguale alla media aritmetica di due valori a e b.

```
CFREQCART(x0,y0,r):=[(x-x0)^2+(y-y0)^2=r^2]
CFREQCART(0,0,(a+b)/2)
[x^2+y^2=0.25*(a+b)^2]                              Simp(#5)
```

Si determina l'equazione della retta perpendicolare all'asse delle ascisse, passante per il punto H=((a-b)/2,0), e si calcola il punto P, intersezione di tale retta con la circonferenza. Si ottiene per la variabile y il seguente valore:

y = SQRT(a)*SQRT(b)

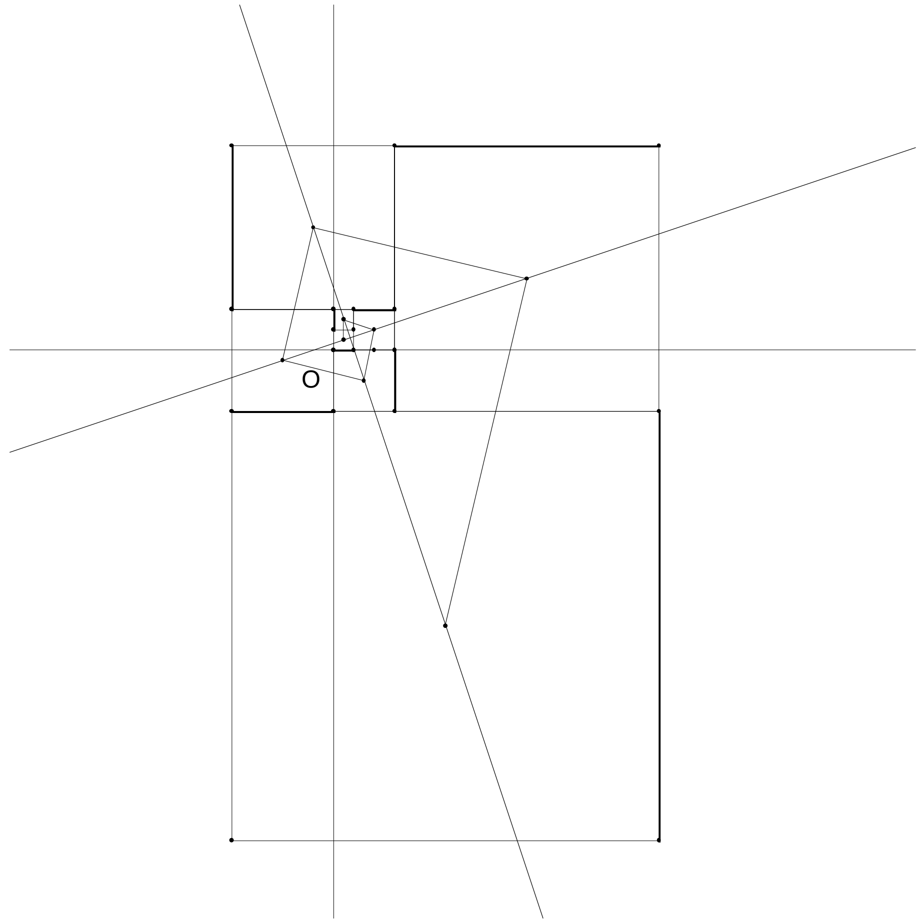
Il segmento PH è la media geometrica dei valori a e b.



Il segmento OP è il raggio della circonferenza (uguale alla media aritmetica di a e b) e, quindi, maggiore del segmento PH.

Problema 30

Le misure dei lati dei quadrati della figura sono i numeri di Fibonacci 1,1,2,3,5,8,… E' vero che i centri di questi quadrati giacciono su due rette perpendicolari?



<u>Gruppo 4</u>: Giovanni Margiotta, Franca Noè, Enrico Pontorno, Marilena Sparapani, Guido Sperti.
Sono proposte tre diverse soluzioni, due del gruppo ed una realizzata da Elena Crespina.

Strumenti software: *Cabri* , *Derive, Mathematica, MathView.*

Caratteristiche connesse all'uso del software
Soluzione 1
Riteniamo necessario trattare inizialmente il problema a tavolino, sia per la valenza didattica dello stesso che per necessità di analisi del problema. Il software serve per realizzare la figura del problema (*Cabri* o *Mathematica*) ed elaborare i calcoli dei termini delle successioni (*Mathematica*).

Riportiamo anche una traccia di soluzione in *Mathematica* , che può essere utile progettare con gli alunni (con la sola conoscenza del trattamento delle liste con l'operatore TABLE e la definizione di funzioni ricorsive) per confermare la correttezza delle congetture fatte precedentemente; è chiaro comunque che la risoluzione di questo problema richiede una attenta analisi a tavolino della figura e delle ipotesi di calcolo prima di passare al lavoro sul computer.

Soluzione 2

L'uso del software è stato utile per la soluzione del problema.

Con *Cabri* II si esplorano le caratteristiche del problema ed si osservano le relazioni tra i centri dei quadrati permettendo di determinare la funzione che ne individua le coordinate, con MathView si sviluppa la definizione della funzione e la verifica delle proprietà.

Soluzione 3

Nessuno dei due software usati è particolarmente utile per la risoluzione di questo problema, per il quale si lavora bene su carta quadrettata. Non ci sembra che siano utili né per la fase euristica, né per quanto riguarda svolgimento di calcoli, ma piuttosto per aspetti complementari alla risoluzione di questo problema.

Cabri, che è stato usato per tracciare la figura precedente, fornita insieme al testo del problema, è utile per un altro obiettivo: si può infatti ritenere istruttiva la realizzazione di una macro per disegnare un quadrato dati i due precedenti, in particolare per le considerazioni che comporta sull'orientamento.

Anche *Derive* può essere utilmente sfruttato per altri obiettivi, che sono: come sempre l'impostazione analitica della questione, ma anche una traduzione in termini di ricorsività. La soluzione di quest'ultimo tipo ci ha permesso di scoprire la trattazione che si può fare con *Derive* di funzioni mutuamente ricorsive.

Collocazione temporale

Il problema può essere trattato dopo aver studiato l'induzione e la ricorsività e si inserisce naturalmente nell'ambito del triennio di un istituto ad indirizzo sperimentale.

Il lavoro è stato proposto in una classe 3ª del LS Galilei di Macerata dalla prof. Marilena Sparapani. Gli alunni hanno fornito una soluzione molto semplice di tipo analitico che tuttavia non è la dimostrazione generale richiesta.

Aspetti didattici

La valenza didattica di questo problema consiste soprattutto nel proporlo come attività complementare e di tipo problem solving, visto che coinvolge ambiti di norma separati e che può essere risolto in modi diversi, senza però richiedere conoscenze troppo specifiche.

Interessante è la possibilità di studiare successioni e fare dimostrazioni per induzione.

Gli obiettivi principali che si possono raggiungere sono:

a) usare il computer per realizzare ed esplorare la figura del problema (per esempio in *Cabri* è molto semplice), fare congetture, formalizzare il problema (*Derive*, *Mathematica* e *MathView*);

b) risolvere il problema per via analitica elementare;
c) analizzare la successione delle coordinate dei centri dei quadrati;
d) dimostrare che i centri dei quadrati giacciono su due rette perpendicolari.

Nodi concettuali
Si può osservare che la risoluzione completa del problema presenta notevoli difficoltà nonostante che ad una prima lettura si presenti abbastanza accessibile anche per la semplicità con cui realizzare le figure. Solo dopo aver analizzato la figura da vari punti di vista si comprende la natura della regolarità della costruzione geometrica.

Approfondimenti e collegamenti
Rispetto alla traccia di soluzione proposta può essere interessante, anche dal punto di vista didattico, disporre i quadrati in modi diversi (vedere le tracce di soluzione), per trovare soluzioni alternative o comunque per studiare le proprietà della figura e dei numeri di Fibonacci.
Può essere inoltre, occasione per una congettura relativa all'omotetia che sembra legare triangoli che hanno in comune il vertice posto nel punto d'incontro delle due rette perpendicolari.

Tracce della procedura di soluzione
Soluzione 1
Descriviamo sinteticamente come è costruita la figura 1 in *Cabri 1.7:*
- costruzione di una macro per disegnare un quadrato fissati due vertici consecutivi e con il centro visualizzato;
- costruzione dei quadrati aventi per lato un segmento scelto come 1 e sovrapposti;
- costruzione del quadrato avente per lato la somma dei lati dei quadrati precedenti posti a destra e così via procedendo in senso orario;
- visualizzazione delle rette dei centri.

Dalla figura 1 si osserva che i centri dei quadrati si dividono in due classi: i centri corrispondenti ai quadrati aventi per lati i numeri di Fibonacci "di posto dispari" f_1, f_3, f_5, … f_{2n-1} e i centri corrispondenti ai quadrati aventi per lati i numeri di Fibonacci "di posto pari" f_2, f_4, f_6, … f_{2n}
Nella tabella sono indicati i centri C_n dei quadrati aventi per lati i numeri f_n di Fibonacci e le loro coordinate rispetto al sistema di riferimento avente l'origine nel vertice in basso a sinistra del primo quadrato di lato 1 e gli assi coincidenti con i suoi lati:

Centro C_n	C_1 (1/2,1/2)	C_2 (1/2,3/2)	C_3 (2,1)	C_4 (3/2,-3/2)	C_5 (-5/2,-1/2)	C_6 (-1,6)	C_7 (19/2,7/2)	C_8 (11/2,-27/2)
Lato f_n	1	1	2	3	5	8	13	21

Una prima osservazione per la soluzione del problema consiste nel determinare le equazioni delle rette passanti per i centri C_1, C_3 e C_2, C_4 rispetto al sistema di riferimento scelto e verificare che sono perpendicolari:

l'equazione della retta $r_{dispari}$ passante per i centri C_1, C_3 è $y = \frac{1}{3}(x+1)$,

l'equazione della retta r_{pari} passante per i centri C_2, C_4 è $y = -3(x-1)$.

A questo punto è interessante andare alla ricerca delle successioni dei centri: si scoprono così diverse proprietà della figura e dei numeri di Fibonacci.
a) Le successioni x_{2n-1} delle ascisse e y_{2n-1} delle ordinate dei centri C_1, C_3, C_5, … , C_{2n-1}, … dei quadrati con i lati di lunghezza 1, 2, 5, 13, 34 … sono:
x_{2n-1} = 1/2, 2, -5/2, 19/2 ,-22, …. y_{2n-1} = 1/2, 1, -1/2, 7/2, -7, …
Le successioni x_{2n} delle ascisse e y_{2n} delle ordinate dei centri C_2, C_4, C_6, … , C_{2n} … dei quadrati con i lati di lunghezza 1, 3, 8, 21,55, … sono:
x_{2n} = 1/2, 3/ 2, -1, 11/2 , -23/2, …. y_{2n} = 3/2, -3/2, 6, -27/2, 75/2, …
In generale le coordinate di due centri "alternati di tipo dispari" sono legate dalle relazioni (1):

$$x_1 = 1/2 \quad ; \quad x_{2n+1} = x_{2n-1} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{2} f_{2n}$$

$$y_1 = 1/2 \quad ; \quad y_{2n+1} = y_{2n-1} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} f_{2n}$$

mentre le coordinate di due centri "alternati di tipo pari" sono legate dalle relazioni (2):

$$x_2 = 1/2 \quad ; \quad x_{2n+2} = x_{2n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} f_{2n+1}$$

$$y_2 = 3/2 \quad ; \quad y_{2n+2} = y_{2n} + (-1)^{n} \cdot \frac{3}{2} f_{2n+1}$$

E' semplice ora dimostrare che i centri dei quadrati giacciono su due rette perpendicolari:
il coefficiente angolare della retta passante per i centri C_{2n-1} , C_{2n+1} è:

$$\frac{y_{2n+1} - y_{2n-1}}{x_{2n+1} - x_{2n-1}} = \frac{1}{3}$$

il coefficiente angolare della retta passante per i centri C_{2n} , C_{2n+2} è:

$$\frac{y_{2n+2} - y_{2n}}{x_{2n+2} - x_{2n}} = -3.$$

La proprietà precedente può anche essere dimostrata verificando che i centri C_1, C_3,..., C_{2n-1} appartengono alla retta $r_{dispari}$ ed i centri C_2, C_4, ..., C_{2n} appartengono alla retta r_{pari} ; verifichiamo che se $C_{2n-1} \in r_{dispari}$ allora $C_{2n+1} \in r_{dispari}$:

$$y_{2n+1} = y_{2n-1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{2} f_{2n} = \frac{1}{3}(x_{2n-1}+1) + (-1)^{n+1}\frac{1}{2} f_{2n} =$$
$$= \frac{1}{3}\left[x_{2n-1} + (-1)^{n+1}\frac{3}{2} f_{2n}\right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(x_{2n+1}+1\right)$$

Allo stesso modo si procede per i centri di indice pari.

Vediamo come si possono dedurre le relazioni (1) e (2).

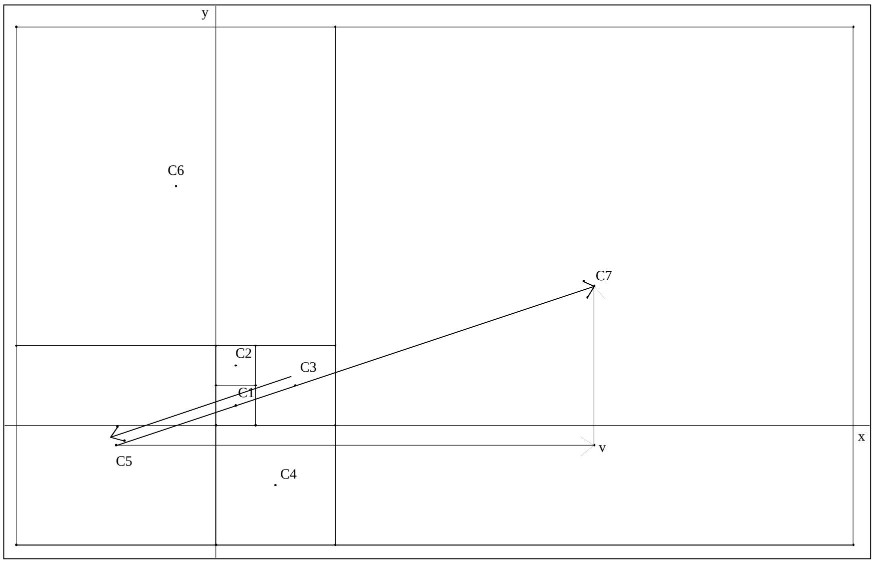


Figura 2

Osservando la figura 2 si deduce che l'ascissa di un centro C_{2n+1} della retta $r_{dispari}$ si ottiene dall'ascissa del centro C_{2n-1} con una traslazione di vettore di modulo:

$$\frac{f_{2n-1}}{2}+f_{2n}+\frac{f_{2n+1}}{2}=\frac{f_{2n-1}+f_{2n+1}}{2}+f_{2n}=\frac{f_{2n-1}+f_{2n-1}+f_{2n}}{2}+f_{2n}=f_{2n-1}+f_{2n}+\frac{f_{2n}}{2}=\frac{3}{2}f_{2n}$$

Il fattore $(-1)^{n+1}$ è necessario in quanto il vettore di traslazione ha verso alternativamente positivo e negativo; in modo del tutto analogo si dimostrano le altre relazioni.

Riportiamo ora alcune indicazioni per realizzare un notebook in *Mathematica 2.2* che consente di controllare la correttezza della soluzione trovata:

Definizione dei numeri di Fibonacci:

```
fibonacci[1]:=1;fibonacci[2]:=1;
fibonacci[n_]:=fibonacci[n]=fibonacci[n-1]+fibonacci[n-2]
```

Visualizzazione dei primi 12 numeri di Fibonacci:

```
TABLE[fibonacci[n],{n,1,12}]
{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144}
```

Definizione delle funzioni che calcolano le coordinate dei centri "dispari" e "pari":

```
xdispari[1]:=1/2;
xdispari[d_]:= xdispari[d-2]+(-1)^((d+1)/2)*(3/2)*fibonacci[d-1]
ydispari[1]:=1/2;
ydispari[d_]:=ydispari[d-2]+(-1)^((d+1)/2)*(1/2)*fibonacci[d-1]
xpari[2]:=1/2;
xpari[p_]:=xpari[p-2]+(-1)^(p/2)*(1/2)*fibonacci[p-1]
ypari[2]:=3/2;
ypari[p_]:=ypari[p-2]+(-1)^(p/2-1)*(3/2)*fibonacci[p-1]
```

Visualizzazione dei primi centri:

centridispari=TABLE[{*xdispari*[*n*],*ydispari*[*n*]},{*n*,1,7,2}]:
{{1/2,1/2},{2,1},{-5/2,-1/2},{19/2,7/2}}

centripari=TABLE[{*xpari*[*n*],*ypari*[*n*]},{*n*,2,8,2}]
{{1/2,3/2},{3/2,-3/2},{-1,6},{11/2,-27/2}}

Verifica che il prodotto dei coefficienti angolari delle rette dei centri è (-1):

((*ydispari*[2*n*+1]-*ydispari*[2*n*-1])/(*xdispari*[2*n*+1]-*xdispari*[2*n*-1]))*((*ypari*[2*n*+2]-*ypari*[2*n*])/(*xpari*[2*n*+2]-*xpari*[2*n*]))
-1

Soluzione 2

Con riferimento alla figura 3 consideriamo, ad esempio, i quadrati di centro rispettivamente C_2 e C_3.

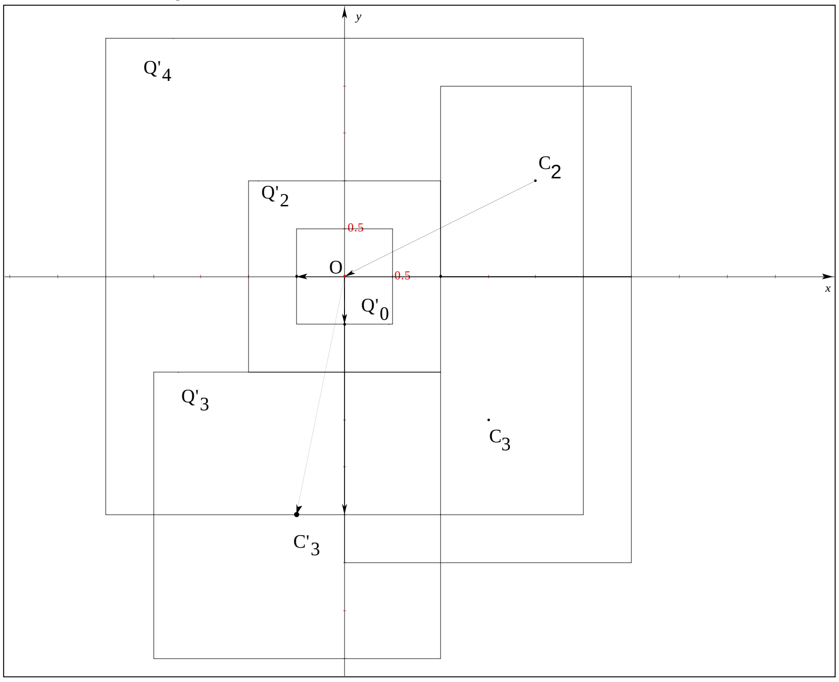


Figura 3

I quadrati Q_2 e Q_3 rispetto alla traslazione di vettore $C_2\,O$ si trasformano in Q'_2 e Q'_3, le coordinate di C'_3 sono rispettivamente sui quadrati Q_1 e Q_4.

Ripetendo la stessa costruzione per altri quadrati, vedere figura 4 si può osservare che le coordinate del centro C'_n sono il trasformato di $\frac{1}{2}(f_{n-2}, f_{n+1})$ rispetto alla rotazione di centro l'origine ed ampiezza $(n-1)\frac{\pi}{2}$. Allora C_n è il trasformato di C'_n rispetto alla traslazione individuata dal vettore OC_2 .

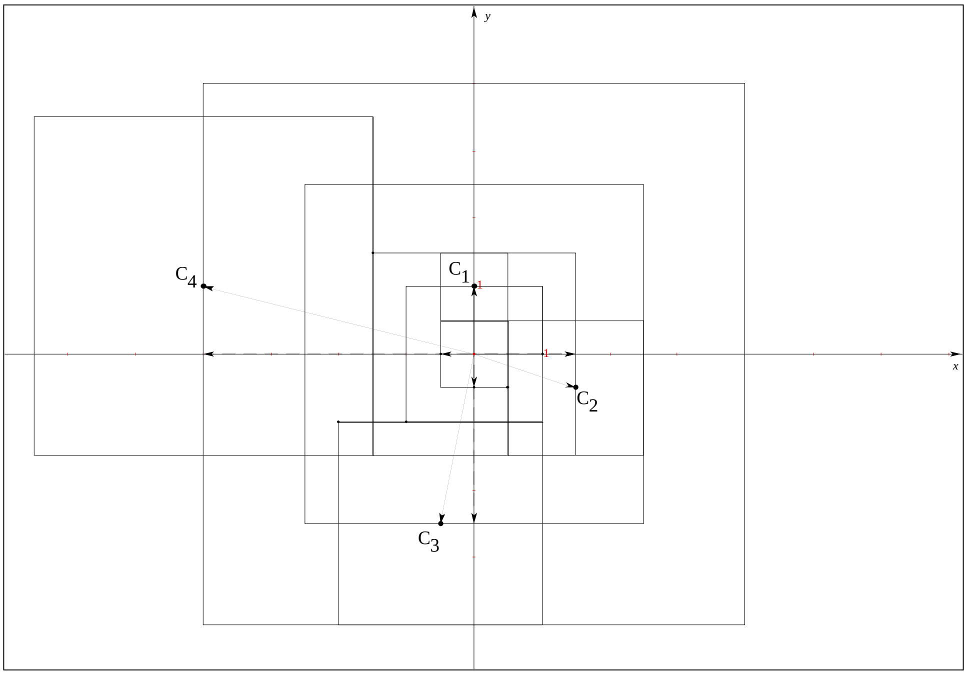


Figura 4

Formalmente:

$$
centro(n)=\begin{cases}
\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} & n=0\\
\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} & n=1\\
centro(n-1)+\begin{pmatrix}\frac{f(n-2)}{2} & \frac{f(n+1)}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right] & sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\\ sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right] & \cos\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\end{pmatrix} & n>1
\end{cases}
$$

Con

$$
f(n)=\begin{cases}1 & [n=0]+[n=1]\\ f(n-1)+f(n-2) & n>1\end{cases}
$$

La funzione centro(n) può essere anche descritta utilizzando le potenze di *i*.
Per la verifica della proprietà si determina

$$
\mathrm{m} = \mathrm{pendenza}\left(\left[\mathrm{centrox}(n), \mathrm{centroy}(n)\right], \left[\mathrm{centrox}(n+2), \mathrm{centroy}(n+2)\right]\right)
$$

$$
\mathrm{m} = \frac{-\mathrm{centroy}(n+2)+\mathrm{centroy}(n)}{-\mathrm{centrox}(n+2)+\mathrm{centrox}(n)}
$$

$$
\mathrm{m} = \frac{-\left(\left[\left\{\frac{1}{2}f(n), \frac{1}{2}f(n+3)\right\}\begin{Bmatrix}\cos\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right) & -\sin\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right)\\ \sin\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right)\end{Bmatrix}\right]_2 + \mathrm{centroy}[n+1]\right) + \mathrm{centroy}(n)}{-\left(\left[\left\{\frac{1}{2}f(n), \frac{1}{2}f(n+3)\right\}\begin{Bmatrix}\cos\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right) & -\sin\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right)\\ \sin\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}[n+1]\pi\right)\end{Bmatrix}\right]_1 + \mathrm{centrox}[n+1]\right) + \mathrm{centrox}(n)}
$$

$$
\mathrm{m} = -\frac{-\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+3\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{3\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}
$$

Si calcola il coefficiente angolare per n dispari e per n pari

$$n = 2p + 1$$
$$m = -\frac{-\cos\left(\frac{1}{2}\pi[2p+1]\right) + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi[2p+1]\right)}{3\cos\left(\frac{1}{2}\pi[2p+1]\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2p+1]\right)}$$
$$m = \frac{\cos\left(\pi p + \frac{1}{2}\pi\right)}{3\cos\left(\pi p + \frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\pi p + \frac{1}{2}\pi\right)} - 3\frac{\sin\left(\pi p + \frac{1}{2}\pi\right)}{3\cos\left(\pi p + \frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\pi p + \frac{1}{2}\pi\right)}$$
$$m = \frac{-\sin(\pi p)}{3(-\sin[\pi p]) + \cos(\pi p)} - 3\frac{\cos(\pi p)}{3(-\sin[\pi p]) + \cos(\pi p)}$$
$$m = -\frac{3\cos(\pi p) + \sin(\pi p)}{\cos(\pi p) - 3\sin(\pi p)}$$
$$m = -\frac{3\cos(\pi p) + 0}{\cos(\pi p) - 3\cdot 0}$$
$$m = -3$$

$$n = 2p$$
$$m = -\frac{-\cos\left(\frac{1}{2}\pi[2p]\right) + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi[2p]\right)}{3\cos\left(\frac{1}{2}\pi[2p]\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2p]\right)}$$
$$m = \cos(\pi p)\frac{1}{3\cos(\pi p)}$$
$$m = \frac{1}{3}$$

Soluzione 3

Con riferimento alla figura 1, che fa parte del testo del problema, si dispone un sistema di riferimento cartesiano con l'origine in un vertice del primo quadrato e con gli assi ovviamente sui lati, in modo che i primi tre quadrati appartengano al I° quadrante. I centri di due quadrati successivi hanno:

• ascisse che differiscono per la semisomma delle misure dei lati,

• ordinate che differiscono per la semidifferenza, con i segni che sono specificati nelle righe seguenti.

Iniziando con i primi due quadrati assegnati, ogni volta che si passa al quadrato successivo la costruzione è ruotata di $\pi/2$ in verso orario; si ha allora la sequenza di 4 diversi tipi di traslazioni che si ripetono ciclicamente per passare da un centro al successivo.

Indicando con $F(i)$ l'i-esimo numero di Fibonacci, a partire da i=1, i centri hanno coordinate:

C_1 (1/2, 1/2)

C_2 (1/2, 3/2) (non è necessario assegnarlo, si può partire dall'ultima delle regole indicate)

Se C_i ha coordinate (x_i, y_i) allora C_{i+1} ha coordinate:

per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 2** dei resti mod 4 $\left(x_i + \frac{F(i)+F(i+1)}{2}; y_i + \frac{F(i)-F(i+1)}{2}\right)$

per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 3** dei resti mod 4 $\left(x_i + \frac{F(i)-F(i+1)}{2}; y_i - \frac{F(i)+F(i+1)}{2}\right)$

per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 0** dei resti mod 4 $\left(x_i - \frac{F(i)+F(i+1)}{2}; y_i - \frac{F(i)-F(i+1)}{2}\right)$

per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 1** dei resti mod 4 $\left(x_i - \frac{F(i)-F(i+1)}{2}; y_i + \frac{F(i)+F(i+1)}{2}\right)$

Da notare che altre 4 possibili regole che contengono semisomme e semidifferenze, con il segno + o -, generano una figura in cui la costruzione ruota in verso antiorario.

Si tratta ora di considerare vertici alternati, cioè di cercare la relazione che c'è tra le coordinate di C_i e di C_{i+2}.

Ad esempio, seguendo il passaggio da C_3 a C_5, cioè per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 3** dei resti mod 4, le coordinate di C_{i+2} sono:

$$(x_{i+2}, y_{i+2}) = \left(x_{i+1} - \frac{F(i+1)+F(i+2)}{2}; y_{i+1} - \frac{F(i+1)-F(i+2)}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} x_i + \dfrac{F(i)-F(i+1)-F(i+1)-F(i+2)}{2} \\ y_i - \dfrac{F(i)+F(i+1)+F(i+1)-F(i+2)}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_i + \dfrac{F(i)-2F(i+1)-F(i)-F(i+1)}{2} \\ y_i - \dfrac{F(i)+2F(i+1)-F(i)-F(i+1)}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_i + \dfrac{-3F(i+1)}{2} \\ y_i - \dfrac{F(i+1)}{2} \end{cases}$$

dunque la retta che passa per i due centri ha coefficiente angolare

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F(i+1)}{-3F(i+1)} = \frac{1}{3} \qquad \text{che } \textbf{non dipende da } \boldsymbol{i}.$$

Allo stesso risultato si arriva scegliendo due vertici come C_5 e C_7, cioè per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 1** dei resti mod 4.

Per l'altra retta si considerino due vertici come C_2 e C_4, per cui $\boldsymbol{i}\in$ **classe 2** dei resti mod 4. Le coordinate di C_{i+2} sono:

$$(x_{i+2}, y_{i+2}) = \left(x_{i+1} + \frac{F(i+1)-F(i+2)}{2}; y_{i+1} - \frac{F(i+1)+F(i+2)}{2} \right) =$$

$$= \begin{cases} x_i + \dfrac{F(i)+F(i+1)+F(i+1)-F(i+2)}{2} \\ y_i + \dfrac{F(i)-F(i+1)-F(i+1)-F(i+2)}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_i + \dfrac{F(i+1)}{2} \\ y_i + \dfrac{-3F(i+1)}{2} \end{cases}$$

dunque la retta che passa per i due centri ha coefficiente angolare

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3F(i+1)}{F(i+1)} = -3 \qquad \text{che } \textbf{non dipende da } \boldsymbol{i}.$$

Allo stesso risultato si arriva scegliendo due vertici come C_4 e C_6, cioè per $\boldsymbol{i}\in$ **classe 0** dei resti mod 4.

In ognuno dei due casi, l'unicità del coefficiente angolare e il passaggio per un punto comune implicano l'allineamento dei tre punti (ad esempio C_3, C_5 e C_7). Infine i due valori dei coefficienti angolari dimostrano la perpendicolarità delle due rette.

Commenti: (a) Rappresentazione "empirica" con *Derive* ; (b) Impostazione ricorsiva con *Derive*

Attraverso l'assegnazione delle funzioni:

F(n) := IF(n=1 OR n=2, 1, F(n-1)+F(n-2))
S(n) :=(F(n)+F(n+1)) / 2
D(n) :=(F(n)-F(n+1)) / 2

che definiscono i numeri di Fibonacci, e poi la semisomma e la semidifferenza di due successivi numeri di Fibonacci, e attraverso le due funzioni

X(n) := IF(n=2, 1/2, X(n-1) + S(n-1)COS((n-3)π/2) + D(n-1)SIN((n-3) π/2))
Y(n) :=IF(n=2, 3/2, Y(n-1) + D(n-1)SIN((n-2) π/2) + S(n-1)COS((n-2) π/2))

che definiscono le coordinate dei centri, a partire dal secondo, si genera la sequenza dei segmenti che congiungono i centri

VECTOR([X(n), Y(n)], n, 2, k)
VECTOR([X(n), Y(n)], n, 2, 8).

Si può dunque rappresentare la figura, che ovviamente illustra solo la situazione, senza contribuire alla risoluzione del problema.

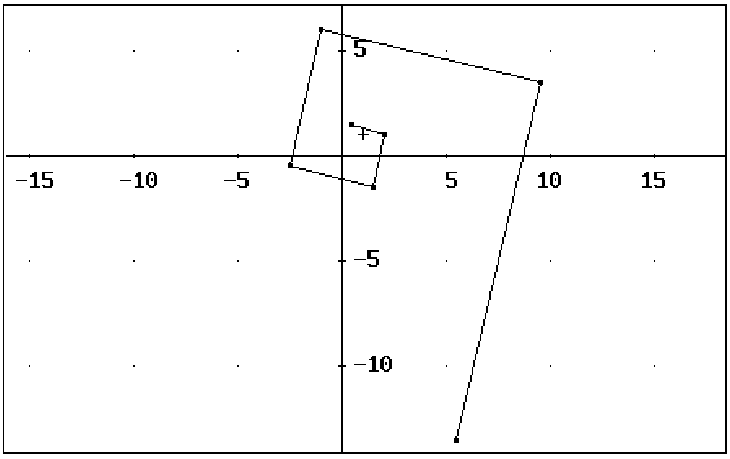


Figura 5

Si può tuttavia procedere in modo diverso, dando **una regola unica** per individuare il tipo di traslazione da applicare ad un centro per avere il successivo:
"per i=1 ($C_1 \rightarrow C_2$) si applica l'ultima delle regole indicate nella dimostrazione precedente,
per ogni i successivo ($C_i \rightarrow C_{i+1}$) la regola è:

si opera sulle ascisse così come nel passo precedente si è operato ordinate,

si opera sulle ordinate così come nel passo precedente si è fatto sulle ascisse, cambiando però il segno".

Questa regola può essere descritta da due funzioni, a due variabili, mutamente ricorsive :

```
#1:  F(n) := IF(n = 1 OR n = 2, 1, F(n - 1) + F(n - 2))

                F(n) + F(n + 1)
#2:  S(n) :=  ─────────────────
                      2

                F(n) - F(n + 1)
#3:  D(n) :=  ─────────────────
                      2

#4:  DELTAY(i, n) :=

#5:  DELTAX(i, n) := IF(i = 1, - D(n), DELTAY(i - 1, n))

#6:  DELTAY(i, n) := IF(i = 1, S(n), - DELTAX(i - 1, n))

#7:  VECTOR([DELTAX(n, n), DELTAY(n, n)], n, 1, k)
```

che calcolano le due componenti della traslazione da applicare al centro C_n per avere il centro successivo. L'ultima istruzione, per un dato k, permette di generare, la sequenza di componenti delle diverse traslazioni da applicare a C_1 per avere C_k.

$$\#10:\ M(n) := \frac{DELTAY(n,\ n) + DELTAY(n + 1,\ n + 1)}{DELTAX(n,\ n) + DELTAX(n + 1,\ n + 1)}$$

```
#11: VECTOR(M(n), n, 1, k)

#12: VECTOR(M(n), n, 1, 12)
```

$$\#13:\ \left[\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}, -3\right]$$

Questa impostazione permette di procedere: infatti si possono seguire i valori che assume la funzione m, che calcola il coefficiente angolare della retta che congiunge due punti alterni. Per i primi valori di k, si verifica bene quello che il problema chiede di dimostrare, e questa è già una buona indicazione relativa alla strada da seguire ; ovviamente la velocità di computazione risente della mutua ricorsività (già per il valore k=12 il calcolo non è immediato).

Approfondimenti e collegamenti

A1) Dalle relazioni (1) e (2) precedenti si possono facilmente ottenere altre relazioni tra i centri legate alle proprietà dei numeri di Fibonacci:

le distanze di due centri di quadrati consecutivi valgono: $\overline{C_nC_{n+1}} = \sqrt{\frac{f_{2n+1}}{2}}$

così le distanze di due centri di quadrati alternati valgono: $\overline{C_nC_{n+2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot f_{n+1}$

A2) Rispetto alla traccia di soluzione proposta è didatticamente interessante costruire figure alternative, per esempio disporre i quadrati come in figura 3, per trovare in modo semplice la successione delle coordinate dei centri anche se questo non risolve direttamente il problema dato.

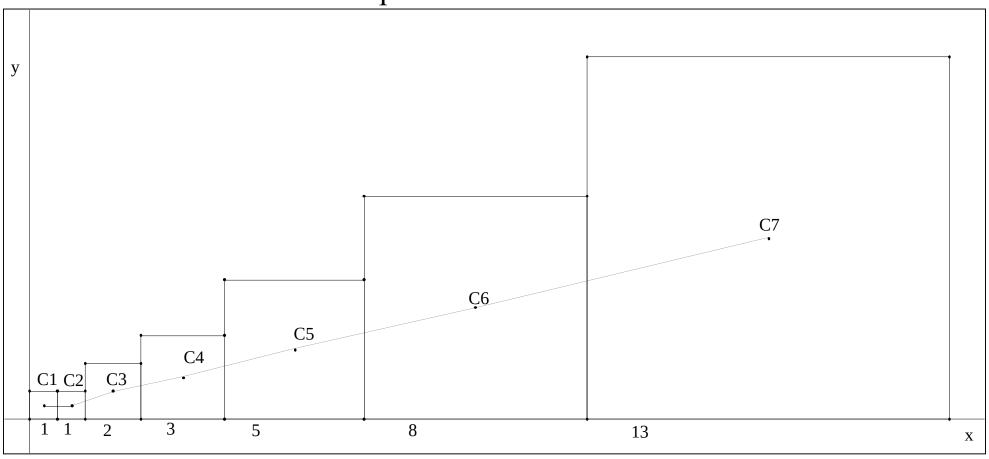


Figura 6

La figura 3 è una visualizzazione in *Cabri* dei quadrati aventi per lati segmenti, di lunghezza i numeri di Fibonacci , disposti su una semiretta.
Si trova che il centro C_n del quadrato di lato il numero di Fibonacci f_n ha coordinate (rispetto al sistema Oxy della figura 3):

$$x_{C_n} = \frac{f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \ , \quad y_{C_n} = \frac{f_n}{2}$$

I coefficienti angolari m_{consec} e m_{alter} rispettivamente delle congiungenti due centri consecutivi C_nC_{n+1} e alternati C_nC_{n+2} valgono:

$$m_{consec} = \frac{f_{n-1}}{f_{n+2}} \ , \quad m_{alter} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+4}}$$

Vista la dinamicità delle figure Cabri e ... la curiosità sollecitata dalla traccia del problema così interessante, si possono costruire altre figure di semplice realizzazione (per esempio la seguente figura 4), che sono didatticamente interessanti per gli spunti di riflessione che possono fornire.

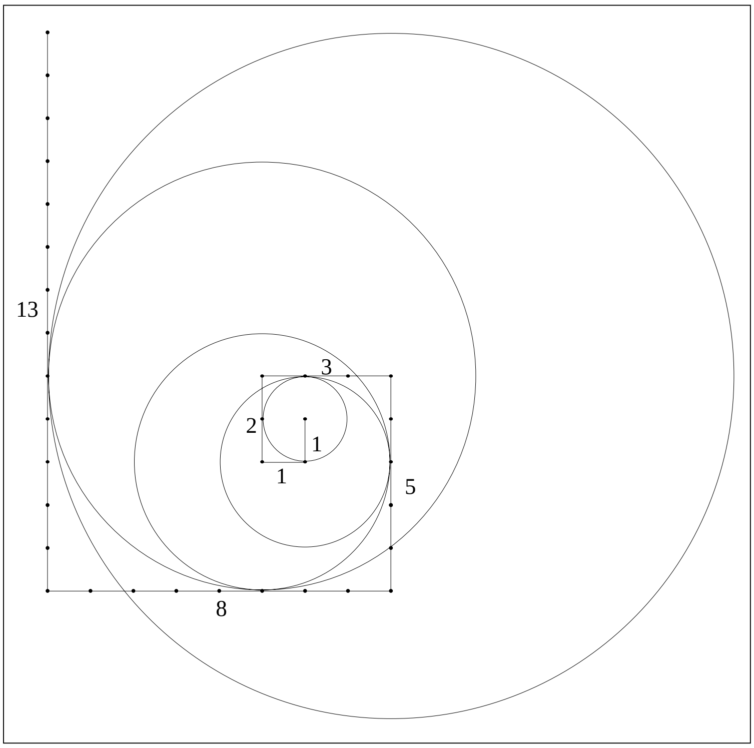


Figura 7