INTRODUZIONE ALLE SUCCESSIONI E SERIE:

ALCUNI ESEMPI NOTEVOLI

Mirta Debbia – LS A. F. Formiggini di Sassuolo (MO) - debbia.m@libero.it
Maria Cecilia Zoboli - LS A. F. Formiggini di Sassuolo (MO) - cherubini8@libero.it

INDICE

Presentazione

Finalità

- Usare la TI89 in modo critico e controllato
- Usare la TI89 per fare congetture
- Usare la TI89 per cercare soluzioni diverse da quelle tradizionali a situazioni problematiche

Argomenti trattati

- Successioni e serie
- Alcune successioni e serie notevoli

Obiettivi

- Acquisire alcune conoscenze di base sull'uso della TI89
- Acquisire i concetti di successione e di serie

Metodologia

- Lezioni frontali ed utilizzo del view screen per l'esposizione dei concetti fondamentali
- Uso di una macchina TI89 per ogni coppia di studenti
- Scoperta guidata di leggi e proprietà con eventuali discussioni sulle difficoltà incontrate dall'alunno

Tempi di attuazione

- 15 ore circa

Destinatari

- Alunni delle classi quarte PNI

SCHEMA DELLE ATTIVITA'			
	ARGOMENTO	**METODOLOGIA E STRUMENTI**	**TEMPI**
1^LEZIONE	**Introduzione al concetto di successione**	**Lezione frontale Studio guidato**	**1 ora**
2^LEZIONE	**Introduzione all'uso della calcolatrice TI89: ambienti Home, Yeditor, Graph e Table; grafico di una successione**	**Schede guidate Studio guidato View-screen TI89**	**3 ore**
3^LEZIONE	**Introduzione al concetto di serie numerica**	**Lezione frontale Studio guidato TI89**	**1 ora**
4^LEZIONE	**Proprietà di alcune serie numeriche**	**Studio guidato View-screen TI89**	**3 ore**
5^LEZIONE	**Un numero antico: PIGRECO**	**Lezione frontale Studio guidato TI89**	**2 ore**
6^LEZIONE	**Un numero famoso: il numero *e***	**Lezione frontale Studio guidato TI89**	**2 ore**
7^LEZIONE	**Un esempio di geometria frattale: il fiocco di neve di Koch**	**Lezione frontale Studio guidato View-screen TI89**	**2 ore**
8^LEZIONE	**Verifica finale con la TI89**		**1 ora**

I LEZIONE (un'ora)

- Situazione problematica:
  consideriamo un segmento AB di lunghezza . Dalla geometria sappiamo che è possibile dividerlo in due parti tra loro congruenti, grazie al teorema dell'esistenza e unicità del punto medio di un segmento. Le due parti AB_1 e B_1B sono entrambe di lunghezza $a_1=a/2$. Possiamo ripetere la procedura di dimezzamento sul segmento AB_1, ottenendo un segmento AB_2 che rappresenta la quarta parte del segmento AB di partenza. Determinare le lunghezze a, a_1, a_2, …, a_n dei segmenti AB_n, che si ottengono iterando fino ad n volte la procedura.
- Definizione di successione numerica
- Esempi:
  - La successione: $\{2,4,6,8,...,2n,...\}$ indica l'insieme dei numeri naturali pari
  - La scrittura $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ indica la successione di termine generale $a_n = \frac{n}{2^n}$
  - La scrittura $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ indica la successione di Fibonacci, che risulta definita per ricorrenza
  - …

- Definizione di successione monotona
  - Studiare il comportamento della successione $a_n = \frac{1}{2^n}$
  - Studiare il comportamento della successione $a_n = n^3$
  - Studiare il comportamento della successione $a_n = n \cdot \text{sen}(n\frac{\pi}{2})$
  - …

- Esempio di successione aritmetica: $\{3,6,9,...,3n,...\}$ - Definizione di successione aritmetica - Si può dimostrare che $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$

- Esempio di successione geometrica: $a_n = (0,2)^n$ - Definizione di successione geometrica - Si può dimostrare che $S_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}$.

II LEZIONE (2 ore)

I Parte

- Introduzione all' uso della calcolatrice TI89, con particolare riferimento agli ambienti HOME, Y-EDITOR, GRAPH e TABLE.

II Parte

- Rappresentazione grafica di successioni con la TI89

Esempio 1 **:** $a_n = \dfrac{3n+1}{2n+3}$

PASSAGGI	TI89 TASTI DA PREMERE
1. Visualizzare la finestra di dialogo MODE. Impostare il modo GRAPH su SEQUENCE	[MODE] ▶ **4** [ENTER]
2. Visualizzare Y-EDITOR e digitare, a fianco di u1= , la legge di definizione della successione. (Si digiti (3*n+1)/(2*n+3) . Per le lettere usare il tasto ALPHA; Si può omettere il simbolo * : viene immesso direttamente dalla TI89 che lo considera sottinteso. Non si utilizzi l'espressione ui1=, che serve per definire le successioni in modo ricorsivo. Per selezionare e deselezionare una legge di definizione di una su successione usare il tasto F4. In ambiente GRAPH vengono tracciate tutte le funzioni selezionate.)	[APPS] ▼ [ENTER] **(3* [alpha]n +1)/(2* [alpha]n +3)** [ENTER]
3. Visualizzare Window Editor. Impostare le variabili Window . (nmin=1, nmax=50, plotstrt=1, plotstep=1, xmin=0, xmax=50, xscl=10, ymin=0, ymax= 2, yscl=1). Per una dettagliata descrizione delle stesse si veda la tabella n°1	[APPS] ▼▼ [ENTER] **1▼50▼1▼1▼0▼50▼10▼0▼2▼1**
4. Visualizzare lo schermo dei grafici. (Lo stile di visualizzazione delle successioni di default è SQUARE. Per modificarlo digitare dall' ambiente Y-EDITOR 2nd F6. Per modificare il formato grafico da Y-EDITOR digitare F1 9.)	[APPS] ▼▼▼ [ENTER]

5. Selezionare TRACE (F3 dall' ambiente GRAPH). Spostando il cursore sul grafico con il tasto > , vengono visualizzati sullo schermo in basso i valori di n,x,y corrispondenti al punto selezionato. 6. Per determinare le coppie corrispondenti (n,u1) si può anche attivare l' ambiente TABLE . Per ottenere i 5 valori della pagina seguente digitare 2nd⊖. Per ottenere valori a partire da n diverso da 1 e/o cambiare il passo a n ,digitare F2 (TABLE SETUP) e inizializzare il valore di tblstrart e/o Δ tbl)	F3 APPS ⊖⊖⊖⊖ ENTER

TABELLA N°1 : VARIABILI WINDOW

VARIABILE	**DESCRIZIONE**	**VALORI STANDARD**
nmin, nmax	Valori minimo e massimo di n da calcolare	nmin=1, nmax=10
plotstrt	Numero del primo elemento tracciato	plotstrt=1
plotstep	Valore incrementale di n per la sola rappresentazione grafica	plotstep=1
xmin, xmax ymin, ymax	Estremi della finestra di visualizzazione	xmin=-10, xmax=10 ymin=-10, ymax=10
xscl,yscl	Distanza fra i punti segnati degli assi x e y	xscl=1, yscl=1

Utilizzando allo stesso modo la TI89 rappresentare anche le seguenti successioni, impostando la calcolatrice per ottenere una buona visualizzazione dei grafici :

Ex 2 : $a_n = \dfrac{n^2 - 2}{n}$; Ex 3 : $a_n = \dfrac{n + (-1)^n \cdot n}{n/2}$

- Situazione problematica:
  Quando di una successione abbiamo il termine generale, possiamo individuarne le caratteristiche, ma il nostro vero interesse è riuscirne a dominare il comportamento quando n diventa molto grande e i valori della successione sfuggono alle elementari possibilità di calcolo.
  Analizzare il comportamento della successione di termine generale $a_n = 1 + \frac{1}{n^3}$ all' aumentare di n , utilizzando il grafico (ymax=2) e la tabella dei valori o il comando TRACE (F3).

  Si osserva che i valori della successione all'aumentare di n si avvicinano rapidamente a uno. Dall'ambiente TABLE si osserva, per esempio, che per n=10, an=1.001 , per n=15, an=1.0003, per n= 20, an=1.0001, per n=…

- Primo approccio alla definizione di limite di una successione per n tendente a $+\infty$:
  DEF: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall p > 0 \; \exists n \in N : \forall m > n \; |a_m - l| < p$
  <u>*Per ogni numero reale p, piccolo quanto si vuole, si può sempre trovare un numero naturale n tale che, per ogni m>n si ha che* $l - p < a_m < l + p$.</u>

Con la TI89, impostata in modo da ottenere una buona rappresentazione grafica, e con l'aiuto delle istruzioni riportate nella tabella che segue, interpretare geometricamente la definizione di limite delle seguenti successioni:

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $a_n = \frac{5n - 7}{-2n + 3}$
3. $a_n = \frac{1 - 4n}{2 - 2n}$

PASSAGGI	**TI89** **TASTI DA PREMERE**
7. Visualizzare la finestra di dialogo MODE. Impostare il modo GRAPH su SEQUENCE	[MODE] ▶ **4** [ENTER]
8. Visualizzare Y-EDITOR e digitare, a fianco di u1= , la legge di definizione della successione. (Si digiti 1/n). Per le lettere usare il tasto ALPHA; Si può omettere il simbolo * : viene immesso direttamente dalla TI89 che lo considera sottinteso. Non si utilizzi l'espressione ui1= , che serve per definire le successioni in modo ricorsivo. Per selezionare e deselezionare una legge di definizione di una su successione usare il tasto F4. In ambiente GRAPH vengono tracciate tutte le funzioni selezionate.	[APPS] ▼ [ENTER] **(3*[alpha] n +1)/(2*[alpha]n +3)** [ENTER]
9. Visualizzare Window Editor. Impostare le variabili Window . (nmin=1, nmax=20, plotstrt=1, plotstep=1, xmin=0, xmax=20, xscl=2, ymin=-2, ymax=2, yscl=0.5). Per una dettagliata descrizione delle stesse si veda la tabella n°1	[APPS] ▼▼ [ENTER] **1 ▼20 ▼1 ▼ 1▼ 0▼20 ▼10 ▼ -2 ▼ 2 ▼ .5**
10. Visualizzare lo schermo dei grafici. (Lo stile di visualizzazione delle successioni di default è SQUARE. Per modificarlo digitare dall'ambiente Y-EDITOR 2^{nd} F6. Per modificare il formato grafico da Y-EDITOR digitare F1 9.)	[APPS] ▼▼▼ [ENTER]
11. Visualizzare Y-EDITOR e digitare, a fianco di u2= , la legge di definizione della successione costante uguale ad ½(si digiti u2=1/2). A fianco di u3 digitare la legge della successione costante uguale a –1/2(si digiti u3=-1/2).	
12. Visualizzare lo schermo dei grafici.	

13. Selezionare TRACE (F3 dall'ambiente GRAPH). Spostando il cursore sul grafico con il tasto > , vengono visualizzati sullo schermo in basso i valori di n,x,y corrispondenti al punto selezionato. 14. Per determinare le coppie corrispondenti (n,u1) si può anche attivare l'ambiente TABLE . Per ottenere i 5 valori della pagina seguente digitare 2nd⊝. Per ottenere valori a partire da n diverso da 1 e/o cambiare il passo a n ,digitare F2 (TABLE SETUP) e inizializzare il valore di tblstrart e/o Δ tbl)	[F3] [APPS] ⊝⊝⊝⊝ [ENTER]

- N.B. Sono da interpretare alcuni risultati che possono venire forniti dalla calcolatrice : per esempio, per n=28, nell'esercizio sopra svolto il risultato è a_n=1. Ciò non è da interpretare supponendo che a_n sia realmente 1 poichè l'algebra ci dice che ciò è impossibile. Se con il cursore evidenziamo a_n=1. , nella riga di introduzione appare 1.0000455539359 . Ciò ci fa comprendere che a_n=1. è un dato scritto in modo approssimato per motivi di spazio. La stessa interpretazione (sempre per i limiti di approssimazione di ogni calcolatore) si potrà dare se anche nella riga di introduzione ci sarà un valore di n che potrà dare tutte le (max) 13 cifre decimali nulle .
- Si osservi che $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+3}=\frac{3}{2}$. Utilizzando gli esempi si formulano le definizioni di successioni convergenti, divergenti, oscillanti.

III LEZIONE (1 ora)

- Situazione problematica :
  In riferimento al paradosso di Zenone, supponiamo che Achille si muova a velocità costante e che impieghi t minuti a coprire la distanza iniziale x_0 che lo separa dalla tartaruga che però si è spostata di un tratto x_1 . Per percorrere il nuovo tratto , supponiamo che Achille abbia impiegato un tempo t/2 minuti, poi t/4 minuti per percorrere l'ulteriore tratto x_2 e così via. Calcolare se e in quanto tempo Achille raggiungerà la tartaruga.

- Si osserva che
  - ⇒ La successione dei tempi parziali si può scrivere come una successione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$. Infatti a_0=t; a_1=t/2; a_2=t/4…Supponiamo per comodità t=1. Quindi avremo a_0=1 ; a_1=1/2 ; a_2=1/4 ;…Si osservi che i tempi successivi diminuiscono.
  - ⇒ Per percorrere x_0 Achille ha perciò impiegato un tempo s_1=1, per percorrere x_0 e x_1 un tempo s_2=1+1/2, per percorrere x_0, x_1 e x_2 un tempo s_3=1+1/2+1/4, e così via secondo la tabella qui sotto riportata

spazio	**tempo**
x_0	$s_1\ =1$
x_0+x_1	$s_2\ =1+1/2$
$x_0+x_1+x_2$	$s_3=1+1/2+1/4$
…	…
$x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n$	$s_n=1+(1/2)+(1/2)^2+\ldots+(1/2)^n$

  - ⇒ il tempo da calcolare si potrà scrivere come somma dei termini della successione geometrica di ragione ½.
  - ⇒ Definizione di somme parziali. Poiché conosciamo $s_n=\dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2}=2-2^{-n}$ possiamo studiare la successione delle somme parziali con la TI89 :possiamo disegnarne il grafico e osservare che al tendere di n a infinito questa converge a 2.
  - ⇒ Definizione di serie numerica.
  - ⇒ Con la TI89 si può calcolare l'espressione s_n nel modo seguente:

PASSAGGI	TASTI DA PREMERE
1. In ambiente HOME digitare F3-Calc ed evidenziare l' operatore somma	[HOME] [F3] ▼ ▼ ▼ [ENTER]
2. Digitare la richiesta di somma da 0 a n-1 dei termini della successione an=1/(2)^k. Nel risultato si ottiene 2-2^(-n).	**(1/2)[^]k,k,0,n-1)**
3. Evidenziare l' ultimo risultato (2-2^(-n)) e copiarlo nella riga di introduzione	▲ [ENTER]
4. Definire una successione di termine generale (2-2^(-n))	[STO▸]**→u1(n)** [ENTER]
5. Ritrovata la successione in u1 di Y-EDITOR selezionarla e rappresentarla.	[APPS] ▼ [Y=] **SELEZIONARLA CON IL CURSORE**
6. Con TRACE o in ambiente TABLE verificare che all' aumentare di n la successione tende a 2.	

Con la TI89 si può calcolare anche il valore del limite delle s_n cioè la somma della serie nel seguente modo :

PASSAGGI	TASTI DA PREMERE
1. In ambiente HOME digitare F3-Calc ed evidenziare l' operatore somma.	[HOME] [F3] ▼ ▼ ▼ [ENTER]
2. Digitare la richiesta di somma da 0 a ∞ dei termini della successione an=1/(2)^k. Nel risultato si ottiene 2.	**(1/2)[^]k,k,0, ∞)**

IV LEZIONE (due ore)

Con la TI89 e facendo riferimento alle tabelle della III lezione, si analizzino le successioni delle somme parziali S_n ed i rispettivi grafici e la somma della serie il cui termine generale è:

1. $a_n = \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$
2. $a_n = \dfrac{1}{n}$
3. $a_n = (-1)^n$

- Osservando il diverso comportamento delle serie di termine generale riportato negli esempi, si può dare la definizione di serie convergente, divergente ed oscillante.

- Situazione problematica.
  Consideriamo il numero finito $\dfrac{10}{9}$. Se eseguiamo la divisione tra numeratore e denominatore notiamo che l'operazione non si arresta mai, dando sempre resto uguale ad 1. Possiamo, cioè, scrivere questo numero come somma di infiniti altri nel seguente modo:
  $$\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots$$
  Al numero periodico $\dfrac{10}{9}$ corrisponde così la serie numerica convergente $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$.
  Generalizzando l'esempio sviluppato con il numero periodico, si può studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ che si presenta come somma dei termini di una progressione geometrica di primo elemento 1 e di ragione q; la serie studiata è detta serie geometrica di ragione q.

- Con la TI89 e facendo riferimento alle tabelle della III lezione, si analizzino le successioni delle somme parziali S_n ed i rispettivi grafici e la somma della serie il cui termine generale è:
  1. $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
  2. $a_n = \dfrac{2^n}{3}$
  3. $a_n = (-1)^n$
  4. $a_n = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^n$

Esercizio: dimostrare la regola della frazione generatrice del numero periodico N=12,345(6789).

V LEZIONE (2 ore)

Cenni sulla storia del numero π

Il numero π, usato per esprimere il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, è sempre stato oggetto di accurato studio fin dall' antichità ed è legato a due problemi fondamentali che riguardano il cerchio e la circonferenza, cioè il problema della ***quadratura del cerchio*** e quello della ***rettificazione della circonferenza***. Quadrare un cerchio significa costruire un quadrato di area uguale a quella del cerchio. Questo problema è strettamente legato a quello della rettificazione della circonferenza, che consiste nel costruire esattamente, con riga e compasso un segmento lungo quanto una circonferenza.
Il simbolo π, iniziale della parola $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\xi$ (perimetro) oppure di $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ (periferia) , per esprimere il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro , usato per la prima volta nel 1706 dal matematico britannico William Jones, divenne di uso generale dopo la pubblicazione dell' Analisi Matematica di Eulero (1748).
Le ricerche sul problema della quadratura del cerchio risalgono all' antichità : il problema è affrontato nel ***Papyrus Rhind***, ora conservato al British Museum a Londra, databile attorno al 1700 a.C. e attribuito allo scrittore egiziano Ahmes. Nel papiro viene indicata come regola di quadratura, senza darne la dimostrazione, la seguente : è equivalente al cerchio un quadrato che ha per lato gli 8/9 del diametro del cerchio. Ciò implica per π un valore di 3.1604…. Si ignora come gli egiziani possano aver ottenuto una tale precisione.
Le prime notizie riguardanti il problema della rettificazione della circonferenza risalgono ancora agli Egiziani: ci giunge notizia che ai tempi di Seti I e Ramses (che regnarono dal 1300 al 1200 a.C.) furono costruite nella città di Karnak delle colonne con misure del diametro e della circonferenza tale da ottenere per π il valore 2.9.
Un valore migliore, insieme a un chiaro cenno alla rettificazione della circonferenza ci viene dagli Ebrei e si trova nella Bibbia, nel capitolo VII del Libro dei Re . Qui si dice che il re Salomone, sul trono di Gerusalemme dal 970 al 930 a.C. , fece costruire il tempio e la reggia da un certo Hiram di Tiro, nella Fenicia. Questo architetto , tra l' altro, costruì una vasca di bronzo fuso di 10 cubiti di diametro, 5 di altezza, 30 di circonferenza, attribuendo, quindi, a π il valore 3.
Però soltanto presso i Greci il problema della determinazione dell' area del cerchio e della misura della circonferenza furono affrontati in modo sistematico e scientifico.
Archimede, uno dei maggiori scienziati dell' antichità vissuto a Siracusa dal 287 al 212 a.C. , nella sue opera "La misura del circolo", partendo dall' esagono regolare inscritto e circoscritto al cerchio, calcolò i perimetri di questi poligoni e di quelli da questi ottenuti raddoppiandone successivamente il numero dei lati. Arrivò fino ai poligoni regolari inscritti e circoscritti di 96 lati, stabilendo la notevolissima disuguaglianza $3+10/71<\pi<3+10/70$ ($3.1414<\pi<3.1417$).
In tempi molto più recenti, nel 1500, l' olandese Adriano Mezio, grazie al perfezionamento del calcolo mediante l' introduzione della notazione decimale, avvenuta nei secoli precedenti, trovò per π il valore 3.141592, che è diverso dal valore "vero" solo alla settima cifra decimale. Nella speranza che π potesse risultare razionale, nel periodo successivo si calcolarono molti altri decimali : nel 1621 Snell calcolò fino alla 35-esima cifra dopo la virgola, eseguendo calcoli riferiti al poligono con 2^{30} lati.
In questo periodo furono studiate , anche mediante gli strumenti della geometria analitica e del calcolo infinitesimale , molte curve e si trovò che di alcune l' area poteva venire espressa mediante π, che non risultò più essere legato solo al cerchio.
Nel 1600 π oltrepassò i confini della geometria, perché i matematici si staccarono dal metodo geometrico e tentarono nuove vie per calcolarlo utilizzando gli sviluppi in serie. A cominciare dal tardo 1600, furono scoperte molte serie numeriche convergenti a π. Alcune di esse sono :

1. la serie di Leibnitz (1671)
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \qquad ;$$
2. la serie di Machin (1706)
$$\pi = 16(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^3} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + ...) - 4(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - ...) =$$
$$= 16\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4\sum (-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}} \qquad ;$$
3. la serie di Eulero (1746)
$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad .$$

La serie di Leibnitz e quella di Machin sono ottenute a partire dallo sviluppo in serie della funzione $y = \text{arctg}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, con $x \in [-1,1]$. Mentre la serie di Leibnitz è a convergenza molto lenta, cioè occorre sommare un gran numero di termini per avere una buona approssimazione di π, la serie di Machin converge assai più rapidamente. Con essa vennero determinate 101 cifre decimali di π.

Nel **1766**, il matematico **Johann Heinrich Lambert**, utilizzando precedenti risultati di Eulero, dimostrò che π **è un numero irrazionale**.

Rimaneva aperto una altro problema: pur essendo $\sqrt{2}$ un numero irrazionale è possibile costruire con riga e compasso un segmento di tale lunghezza. E' possibile costruire con riga e compasso anche π? Questo quesito ripropone il problema della rettificazione della circonferenza , poiché costruire un segmento lungo π non significa altro che trovare un segmento pari alla lunghezza della circonferenza.

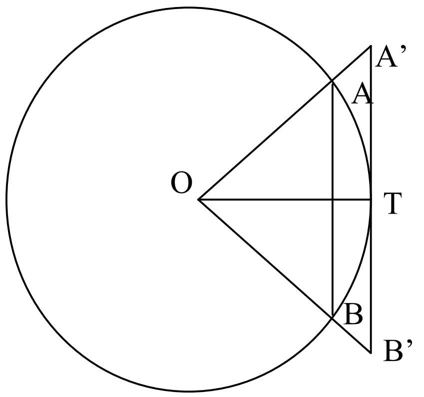
A questo problema fu data risposta negativa nel **1882** dal matematico **Ferdinand Lindemann**, che dimostrò che π **è un numero trascendente** (vedi nota), e che, quindi, **non si può costruire con riga e compasso un segmento lungo π.** Resta perciò affermata anche la impossibilità della rettificazione della circonferenza e della quadratura del cerchio utilizzando solo riga e compasso.

Dopo la dimostrazione di Lindemann la ricerca delle cifre decimali di π cessò fin verso il 1950, quando lo sviluppo dei calcolatori elettronici ad alta velocità diede nuovi mezzi per il calcolo. Oggi è difficile essere al corrente di tutta l' attività in questo ramo, anche perché tale ricerca non ha utilità pratica né teorica. Due matematici americani della Columbia University hanno stabilito nell' agosto 1989 un nuovo primato calcolando il valore di π con più di un miliardo di decimali.

N.B. Un numero x si dice algebrico se soddisfa a una equazione algebrica del tipo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, con $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ e dove i coefficienti a_k sono interi. I numeri non algebrici sono detti trascendenti .

E' stato dimostrato che tutti i numeri costruibili con riga e compasso sono algebrici.

- Situazione problematica:
  si ricerchino le formule che permettono di determinare i perimetri pn e Pn dei poligoni regolari di n lati inscritto e circoscritto ad una circonferenza di diametro unitario.



E' data una circonferenza di centro O e diametro unitario. Sarà perciò $\overline{OT} = 1/2$. Sia AB il lato del poligono regolare di n lati inscritto e A'B' il lato del poligono regolare di n lati circoscritto.

Il corrispondente angolo al centro è $A\hat{O}B = \frac{360°}{n}$, mentre $A\hat{O}T = \frac{180°}{n}$.

Applicando i noti teoremi di trigonometria si ha

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{180°}{n} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \operatorname{sen} \frac{180°}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{pn} = n \cdot \operatorname{sen} \frac{180°}{n} \quad .$$

$$\overline{A'T} = \frac{1}{2} \cdot tg \frac{180°}{n} \quad \Rightarrow \quad \overline{A'B'} = tg \frac{180°}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{Pn} = n \cdot tg \frac{180°}{n} \quad .$$

Abbiamo ottenuto perciò due successioni : all' aumentare di n pn è crescente, mentre Pn è decrescente. Quando n tende a infinito pn e Pn convergono alla lunghezza della circonferenza cioè a π.

- Mediante la TI89 si possono definire le successioni pn e Pn . Occorre attivare con il tasto MODE l' opzione Angle $\rightarrow$ Degree . Selezionando entrambe le successioni e settando ymin di WINDOW EDITOR per esempio a 6, si osservano i due grafici convergere Per determinare la convergenza a π, si può utilizzare l' ambiente TABLE.

Per esempio per	n=10	pn=3.0901699437495
		Pn=3.2491969623291
	n=20	pn=3.1286893008046
		Pn=3.1676888064908
	n=50	pn=3.1395259764657
		Pn=3.1457333626825
	n=56	pn=3.1399450452828
		Pn=3.1448925430019
	n=57	pn=3.1400023402843
		Pn=3.1447776334416
	n=100	pn=3.1410759078128
		Pn=3.1426266043351
	n=1000	pn=3.1415874858796
		Pn=3.1416029890562

VI LEZIONE (un'ora)

Cenni sulla storia di un numero famoso: il numero *e*

John Napier (o Giovanni Nepero) non era un matematico di professione. Era un ricco proprietario terriero scozzese di famiglia nobile e si interessò soltanto a certi aspetti della matematica, soprattutto a quelli che si riferivano al computo ed alla trigonometria. I "bastoncini di Nepero" erano dei parallelepipedi di legno a base quadrata, sulle cui facce erano incise delle tavole di moltiplicazione, che si servivano di particolari tecniche mnemoniche applicate alla trigonometria sferica. Napier afferma di aver cominciato a lavorare alla sua invenzione dei logaritmi già dal 1594; nel 1614, in seguito al fatto di essere venuto a conoscenza della tecnica matematica della prostaferesi, largamente usata negli osservatori astronomici danesi per fare i calcoli, pubblicò la sua *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi).

L'idea centrale su cui si basa l'invenzione di Napier è semplice: per mantenere vicini tra loro i termini di una progressione geometrica delle potenze intere di un dato numero, Napier decise di usare il numero $1-10^{-7}$ (ossia 0,99999999). I termini della progressione delle potenze crescenti sono troppo vicini tra loro: per ottenere un maggior equilibrio e per evitare cifre decimali N. moltiplicò ciascuna potenza per 10^7. Se $N = 10^7(1-\frac{1}{10^7})^L$, allora L è il "logaritmo" neperiano del numero N. Dividendo per 10^7 i numeri e i logaritmi, si sarebbe potuto ottenere un sistema di logaritmi con base *1/e*. La definizione di logaritmo data da N., però, era diversa dalla nostra. I principi da lui fissati erano spiegati in termini geometrici nel modo seguente:
Siano dati un segmento lineare AB e una semiretta CDE (vedi figura)

Un punto P parte da A e si muove lungo AB con velocità variabile decrescente in rapporto alla sua distanza da B; contemporaneamente un punto Q partendo da C comincia a muoversi lungo CDE con velocità costante uguale a quella che P aveva all'inizio del moto. Napier chiama questa distanza variabile CQ il logaritmo della distanza PB.
Napier, ovviamente, costruì le sue tavole numericamente e non geometricamente e coniò per i suoi indici di potenze il termine composto dalle due parole greche *logos* (ragione o rapporto) e *arithmos* (numero). Napier non aveva nessuna idea di una base per il suo sistema, ma compilò le sue tavole mediante ripetute moltiplicazioni, equivalenti a potenze di 0,99999999; era perfettamente al corrente delle regole dei prodotti e delle potenze, in quanto osservò che tutti i numeri che sono in rapporto di 2 a 1 hanno differenze di 6.931.469,22 in logaritmi e tutti quelli che sono in rapporto di 10 a 1 hanno differenze di 23.025.842,34 in logaritmi. In queste differenze, se si sposta la virgola, si vedono i logaritmi naturali dei numeri due e dieci e per questo non è irragionevole chiamare "neperiani" i logaritmi naturali, anche se questi logaritmi non sono, rigorosamente , quelli che Napier aveva in mente.

Il concetto di funzione logaritmica è implicito nella definizione di Napier e in tutte le sue ricerche sui logaritmi, ma tale relazione non era così importante per lui: egli aveva laboriosamente costruito il suo sistema in vista della semplificazione dei calcoli, soprattutto dei prodotti e dei quozienti, e di calcoli trigonometrici (egli chiamava logaritmo di un seno quello che noi chiamiamo logaritmo neperiano di un numero.

Il sistema dei logaritmi fu pubblicato nel 1614 ed ebbe un immediato riconoscimento, ma occorre sottolineare che l'invenzione dei logaritmi non fu opera di un uomo solo: idee molto simili in proposito erano state sviluppate più o meno negli stessi anni dal matematico svizzero Jobst

Burgi, che invece di partire da un numero leggermente minore di 1 ($1-10^{-7}$) scelse un numero leggermente maggiore di 1 : il numero $1+10^{-4}$; invece di moltiplicare le potenze di questo numeor per 10^7 Burgi le moltiplicò per 10^8 e nelle sue tavole moltiplicò tutti gli indici delle potenze per dieci.

L'invenzione dei logaritmi ebbe un influsso notevole sulla struttura della matematica: i logaritmi vennero accolti con entusiasmo da Keplero perché fornivano agli astronomi un efficace strumento per effettuare con facilità i calcoli. Si può osservare che per tutto il XVI secolo i matematici teorici, sia di professione che dilettanti, mostrarono vivo interesse per le tecniche di calcolo: ciò contrastava nettamente con la dicotomia tra attività pratica e speculazione teorica sottolineata da Platone due millenni prima.

Dal 1727 al 1783 Eulero contribuì con nuove conoscenze a quasi ogni branca della matematica pura ed applicata ed usò un linguaggio e una notazione che per molti aspetti corrispondono a quelli usati oggi; usò la lettera *e* per rappresentare la base del sistema dei logaritmi naturali o neperiani (questo simbolo apparve per la prima volta in un'opera stampata nella Maccanica di Eulero pubblicata nel 1736. La notazione *e* fu forse suggerita dalla prima lettera del termine" esponenziale" e divenne presto convenzionale.

Dimostrare che un qualsiasi numero reale particolare, come e o π, non è un numero algebrico è solitamente abbastanza difficile. Liouville riuscì a dimostrare, in un articolo pubblicato sul suo *Journal* nel 1844 che né *e* né e^2 possono essere la radice di un'equazione di secondo grado con coefficienti interi; pertanto, dato un segmento lineare unitario, le linee di lunghezza e ed e^2 non sono costruibili con strumenti euclidei. Passeranno quasi trent'anni prima che un altro matematico francese, Charles Hermite (1822-1901), sviluppando le idee di Liouville, riesca a dimostrare, in un articolo pubblicato sui *Comptes Rendus* dell'Académie des Sciences del 1873, che *e* non poteva essere la radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali, ossia che *e* è trascendente.

Il geometria il numero *e* compare nelle equazioni di diverse curve, quale, ad esempio, la catenaria.

Il numero *e* riveste un ruolo importante anche nella teoria della probabilità ed importanti applicazioni nella teoria dei numeri pura.

<u>Il numero *e* è una delle più importanti costanti numeriche.</u>

- Situazione problematica:

  dato un certo capitale iniziale C, supponendo che gli interessi su di esso maturati potessero fruttare istantaneamente, quale capitale C* maturerebbe al termine del periodo $\Delta t = 1$? Si otterrebbe un valore di C* finito oppure no?

  Si intuisce e si può dimostrare che il capitale C_n, maturato dopo n-1 interruzioni , equidistanti nel tempo e con relativi reinvestimenti, vale $C_n = C(1+1/n)^n$.

  La risposta alla seconda domanda è affermativa: al crescere di n, cioè approssimandoci all'istantanea capitalizzazione degli interessi, il corrispondente capitale C_n tenderebbe a stabilizzare il suo valore. La dimostrazione rappresenta un importante capitolo dell'Analisi matematica.

  Il numero e può essere approssimato per difetto calcolando $(1+1/n)^n$ per un certo valore di n, per eccesso ricorrendo a $(1+1/n)^{n+1}$.

  La doppia disuguaglianza $(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}$ consente di precisare ulteriormente le cifre di *e* e il grado di precisione dell'approssimazione, prendendo valori di n sempre più grandi.

- Una interessante implicazione

  Pensiamo di aver investito un capitale di cento euro e di averne maturato cinquecento. La cifra, però, non è significativa di per sé: sono diverse le valutazioni che facciamo del tipo di investimento se tale incremento è ottenuto in dieci anni, in un anno o in un giorno. Questa osservazione introduce al concetto di rapidità di crescita, che si intuisce essere un concetto puntuale, cioè corrispondente ad ogni x. Si può dimostrare che

    - Tra le diverse funzioni esponenziali a^x, quella di base a=e ha una velocità di crescita uguale al valore che essa raggiunge punto a punto.

  Oppure, se x indica il tempo, si può affermare che:

    - Esiste una funzione di crescita che cresce con una rapidità uguale ai valori raggiunti nel tempo: la funzione di equazione $y = e^x$.

- **<u>Uso della TI89 per approssimare e determinare il numero *e*</u>**

  Utilizzando la TI89 nel modo indicato nella II lezione, studiare e rappresentare la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Facendo riferimento alla Tabella N°1 impostare la calcolatrice per ottenere una buona visualizzazione del grafico. Dallo studio della successione determinare il numero *e.*

- Facendo riferimento alla IV lezione, studiare la serie di termine generale $a_n = \frac{1}{n!}$. Approssimare e determinare con questa serie il numero *e*.

VII LEZIONE (1 ora)

- Situazione problematica:
  Dato un triangolo equilatero di lato unitario, si costruisca su ogni lato, verso l'esterno, un triangolo equilatero di lato 1/3, dividendo ogni lato del triangolo dato in tre parti uguali e sul segmento centrale si costruisca il triangolo cancellando il segmento stesso. Studiare le successioni costituite dai perimetri e dalle aree delle successive figure così ottenute.

- La figura che si ottiene è detta curva di Koch chiusa o isola di Koch o fiocco di neve di Koch . Essa costituisce un esempio di figura frattale.

  Si può visualizzare il fiocco di neve di Koch, utilizzando l'ambiente di programmazione (PROGRAM-EDITOR) della TI89

  .

- Si studia la successione dei perimetri delle figure ottenute: indicato con p_0 il perimetro del triangolo iniziale, di lato 1, si ottiene p_n **= ((4/3)^n)** p_0

  La successione dei perimetri è perciò una successione geometrica di ragione 4/3>1.
  Utilizzando la TI89 con le modalità viste nelle lezioni II e III possiamo rappresentare la successione dei perimetri e verificare che quando n tende a $+\infty$, p_n diverge a $+\infty$.

- Si studia la successione delle aree delle figure ottenute.

.

Iterando il procedimento otterremo $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right)\right)$.

$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i$ rappresenta perciò la somma n-esima dei primi n termini della serie geometrica di ragione 4/9<1. Utilizzando la TI89, come indicato nella terza lezione possiamo calcolare l' espressione $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}$, e la somma della serie che risulta 9/5. Sostituendo si otterrà perciò $A_\infty = \frac{2}{5}\sqrt{3} = \frac{8}{5} A_0$, che rappresenta l' area racchiusa dalla curva di Koch.

Si può notare che l'area risulta finita, mentre il perimetro tende a infinito.

- Qualche cenno sulla teoria dei ***frattali***.
  La parola "frattale" è un neologismo coniato da **Benoit Mandelbrot** nel 1970, che deriva dal latino "fractus", che significa **interrotto, irregolare.**
  La geometria frattale o **geometria dell'irregolare** sta trovando ampia applicazione nella descrizione dei fenomeni naturali. E' nata all'inizio del 1900, ma ha trovato il massimo sviluppo con l'avvento degli elaboratori che hanno permesso la visualizzazione delle curve frattali.
  Le forme geometriche classiche sono quelle della geometria euclidea (retta, coniche,…). In natura esistono però forme molto diverse da quelle descritte dalla geometria euclidea. Esse presentano ramificazioni (alberi, coralli, fulmini,…) o frastagliature come le coste di un' isola.

I frattali sono oggetti matematici complessi di forma irregolare, interrotta che possono essere generati per lo più attraverso semplici algoritmi iterativi.
Le figure frattali sono **autosomiglianti** o **autosimili** :un oggetto si dice autosomigliante o autosimile quando lo si può pensare ottenuto a partire da n oggetti che altro non sono che l' oggetto di partenza ridotto di un certo rapporto di omotetia. Una figura si dice perciò autosomigliante o autosimile se ripete, in scala sempre più piccola la sua forma.
Gli oggetti frattali hanno una dimensione frattale, opportunamente definita, maggiore della dimensione topologica.
Gli oggetti frattali hanno infine perimetro infinito, anche se l' area è finita.

Qualche esempio di frattali
Un frattale geometrico: la **curva di Koch** o **fiocco di neve di Koch** (vederne la costruzione all'inizio della lezione).
L'insieme di Cantor: si inizia con una linea di lunghezza unitaria($0 \le x \le 1$) e si rimuove il terzo centrale ($1/3 < x < 2/3$); si procede in modo iterativo rimovendo ad ogni passo il terzo centrale degli intervalli rimasti al passo precedente. L'insieme sarà formato da linee sempre più piccole fino ad arrivare al limite, cioè al punto: questo insieme viene chiamato polvere di Cantor (in geometria frattale il termine polvere indica insiemi con dimensione frattale compresa tra 0 ed 1).
Il triangolo di Sierpinski: è generato da una successione infinita di rimozioni. Si inizia con un triangolo equilatero pieno e dal suo interno si rimuove il triangolo centrale orientato verso il basso e da ciascuno dei triangoli equilateri rimasti si rimuove il triangolo equilatero centrale, lasciando i tre triangoli ad esso adiacenti. La figura che rimane alla fine di tutte le rimozioni e detta triangolo di Sierpinski.
L'insieme di Julia e **l'insieme di Mandelbrot** sono altri esempi di frattali.

Molte forme in natura richiamano la teoria dei frattali, così come anche in campo architettonico si possono trovare delle forme che seguono la teoria dei frattali (anche nella progettazione assistita dal computer); molti artisti hanno subito il fascino della teoria dei frattali.
Computer sempre più veloci hanno permesso di realizzare programmi che si basano su algoritmi frattali.
Per concludere, occorre ricordare che gli studi che sono alla base della geometria dei frattali sono molto complessi e strettamente legati alla teoria del caos e ai sistemi dinamici.

BIBLIOGRAFIA

- Progetto Labclass: Un approfondimento sulle progressioni geometriche A.Travaglino
- Percorsi didattici con l'uso delle calcolatrici grafico-simboliche: Zenone di Elea- -Il paradosso della dicotomia-Una spiegazione "intuitiva" N.Nolli
- Andreini, Manara, Prestipino, Matematica controluce Vol.3-tomo1 Ed Mc Graw Hill
- Zwirner, Scaglianti, Analitica e trigonometria Vol 1B Ed Cedam
- Didattica delle Scienze n.216 novembre 2001, "I frattali in natura, nell'arte e nell'architettura /1" Nicoletta Sala
- Didattica delle Scienze n.217 gennaio 2002, "I frattali in natura, nell'arte e nell'architettura /2" Nicoletta Sala
- Morris Kline,"Storia del pensiero matematico" Biblioteca Einaudi
- Lamberti-Nereu-Nanni,"Corso di matematica" Etas Libri
- Dodero-Baroncini-Manfredi,"Nuovi elementi di matematica" Ghisetti&Corvi
- Manuale TI89 Texas Instruments

VERIFICA FINALE

Agli alunni è stata poi proposta la seguente prova finale di valutazione da svolgersi in un' ora di tempo:

LICEO SCIENTIFICO STATALE 'A.F.FORMIGGINI'-SASSUOLO
COMPITO IN CLASSE DI MATEMATICA/INFORMATICA - Classi 4A/B - 16 febbraio 2002

COGNOME NOME ________________________________CLASSE________________________

ESERCIZIO n°1
Scrivere i successivi due termini della seguente sequenza $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{2}{3\cdot 4}$, $\frac{3}{4\cdot 5}$, $\frac{4}{5\cdot 6}$, ... ed il termine generale di una possibile successione che ammetta gli stessi come termini **.**

ESERCIZIO n°2
Dopo averle rappresentate sullo schermo della TI89, descrivere le caratteristiche delle seguenti successioni :

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} \quad ; \quad b_n = 1 + (-1)^n \quad ; \quad c_n = 2 - 3n^2 \quad .$$

ESERCIZIO n°3
Considerata l' espressione "$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathrm{N} \quad / \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \varepsilon$" , relativamente alla successione di termine generale $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ variando opportunamente i valori di TblStr e costruendo le rispettive tabelle, determinare il valore di n_ε per

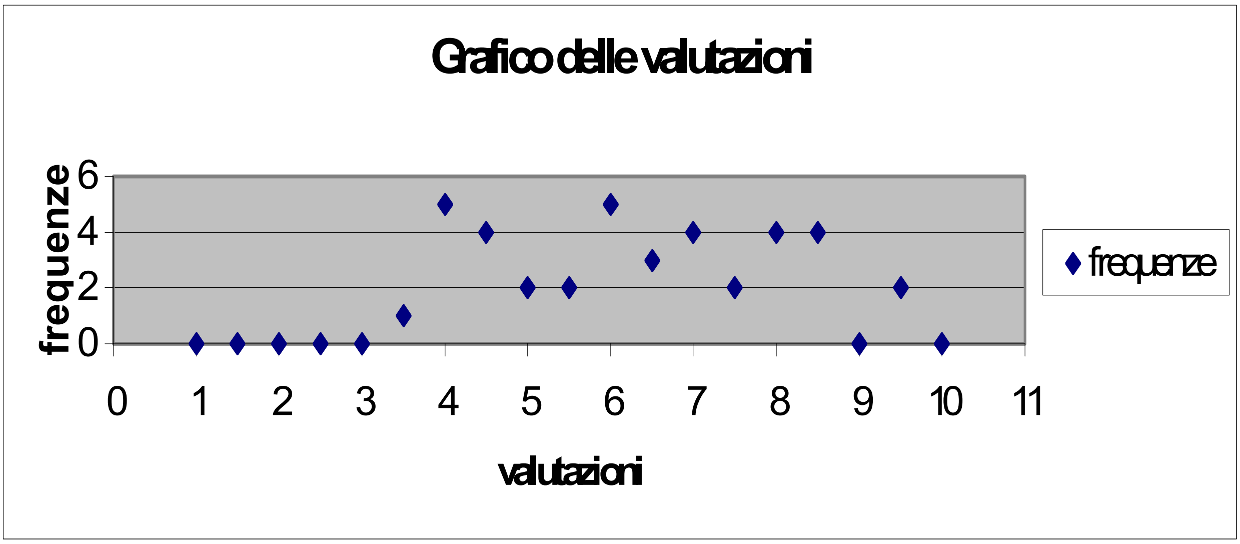
a) ε =0.3 ; b) ε =0.1 .

ESERCIZIO n°4
In un riferimento cartesiano ortogonale xOy , è data la retta di equazione $y = \frac{1}{3}x + 1$. Costruire il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A_0 intersezione della retta data con l' asse delle ascisse e il vertice A_1 intersezione della retta data con l' asse delle ordinate. Condurre per A_1 la perpendicolare alla retta data che incontra l' asse delle ascisse in A_2 e condurre per A_2 la perpendicolare ad A_1A_2 che incontra l' asse delle ordinate in A_3 , e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all' asse delle ordinate e quelli di indice pari all' asse delle ascisse.

a) Dimostrare che le lunghezze dei lati $l_1 = \overline{A_0A_1}$, $l_2 = \overline{A_1A_2}$,…, $l_n = \overline{A_{n-1}A_n}$,… della spezzata sono in progressione geometrica e determinarne la ragione;
b) calcolare la lunghezza $S_n = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}$ della spezzata ;
c) verificato che si ottiene $S_n = \frac{3\sqrt{10}}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, tracciare il grafico della successione delle somme parziali S_n sullo schermo della TI89 e studiarla elencandone alcune proprietà ;
d) utilizzando i comandi TRACE o TABLE determinare i valori di S_1, S_2, S_{10}, S_{20} ;
e) calcolare la somma della serie.

VALUTAZIONE ______________________

Alla verifica sono risultati presenti 38 dei 42 alunni coinvolti.
I risultati si possono leggere nel seguente grafico, in cui sulle ascisse sono rappresentate le valutazioni da 1 a 10 e sull'asse delle ordinate le rispettive frequenze.



OSSERVAZIONI NELLA FASE DI SPERIMENTAZIONE

UNITÀ DI LAVORO: Introduzione alle successioni e serie: alcuni esempi notevoli

ATTIVITA': Utilizzo in classe della TI89 in classi 4^PNI
DOCENTI: Maria Cecilia Zoboli e Mirta Debbia

CLASSI: 4^A e 4^B PNI LSS"Formiggini" di Sassuolo
Numero alunni: 20 + 22 = 42

1. **PERIODO:** 4 febbraio2002 – 16 febbraio 2002

2. **DURATA:** 15 ore di lezione svolte nel periodo di due settimane

3. COMPOSIZIONE DELLA CLASSE DURANTE L'ATTIVITÀ

Le due classi hanno svolto l'attività in modo indipendente e gli alunni hanno lavorato a coppie durante le lezioni.

4. ATTIVITÀ SVOLTE DAI DOCENTI

lezioni frontali:

- introduzione, definizione ed esempi di successione numerica e di successione monotona
- definizione di limite di una successione per n tendente all'infinito; definizione di successione convergente, divergente ed oscillante
- definizione di serie numerica; definizione di serie convergente, divergente ed oscillante; definizione di serie geometrica
- storia e mito di un numero antico:*pigreco*
- storia e mito di un numero famoso: il numero e

attività preliminari:

- introduzione all'uso della calcolatrice TI89: ambienti HOME, Yeditor; Graph e Table, attività di laboratorio:
- utilizzo del view-screen per l'esposizione dei concetti ed attività fondamentali

5. ATTIVITÀ SVOLTE DAGLI STUDENTI:

attività di ricerca guidata:

- Determinazione delle lunghezze dei segmenti ottenuti dimezzando successivamente un segmento di lunghezza assegnata e calcolo della possibilità o meno di coprire l'intera distanza assegnata e del conseguente tempo impiegato, attraverso una somma parziale di addendi variabili in successione
- Ricerca delle formule che permettono di determinare i perimetri dei poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti ad una circonferenza di raggio assegnato
- Ricerca dell'espressione approssimante il numero e, ottenuta per successivi incrementi finiti dell'ordinata della curva di equazione $y = (1+1/n)^n$ nell'intervallo $[0,1]$
- Ricerca della successione delle aree e dei perimetri delle figure che si ottengono a partire da un triangolo di lato 1 assegnato ed in cui venga costruito un triangolo equilatero verso l'esterno di lato 1/3, sulla terza parte, che viene cancellata, di ogni lato del triangolo dato

Attività di laboratorio con la TI89:

- Utilizzo di schede guida per l'introduzione all'uso della TI89, con particolare riferimento alle sequences
- Studio di particolari successioni assegnate, mediante gli ambienti Home, Yeditor, Graph e Table
- Studio di particolari serie assegnate
- Studio dei numeri pigreco ed e attraverso particolari successioni e serie

Attività pomeridiane suggerite:

- Revisione e riorganizzazione degli appunti
- Rielaborazione anche autonoma di situazioni problematiche ed esercitazioni, in forma cartacea e senza la TI89

6. DA ANNOTARE:

- Quasi tutti gli alunni, abituati ad un utilizzo più o meno consapevole delle tecnologie, imparano in fretta la manipolazione della calcolatrice
- Molti studenti avrebbero preferito poter utilizzare la calcolatrice anche a casa, per ripetere ed estendere concetti ed applicazioni

7. ELEMENTI DI PARTICOLARE POSITIVITÀ/NEGATIVITÀ (TECNICA E/O DIDATTICA) EMERSI:

- Gli studenti sono tutti bendisposti ad imparare e ad utilizzare la calcolatrice grafico/simbolica; diversa è, invece, la resa di ciascuno di loro: chi affronta il problema in maniera autonoma e critica trae il maggior beneficio dall'utilizzo della calcolatrice e se ne serve anche come strumento di indagine in situazioni nuove. Gli studenti che si servono della calcolatrice in maniera passiva ne interpretano l'utilizzo come "scatola nera" che può risolvere qualunque problema: questo li pone in una situazione di ulteriore svantaggio, in quanto non si impegnano adeguatamente nella risoluzione dei problemi proposti; per alcuni di loro, infatti, si è notato un ulteriore calo nel rendimento
- Sarebbe sicuramente proficuo poter avere a disposizione le calcolatrici ogni qualvolta costituiscano uno strumento utile per una miglior trattazione degli argomenti
- Con particolare riferimento agli argomenti presentati, l'utilizzo della TI89 è stato un valido strumento
- Nel calcolo del termine n-esimo di particolari successioni, per valori grandi di n, abbiamo riscontrato una eccessiva lentezza della TI89
- E' importante che gli studenti imparino ed interpretino i limiti della calcolatrice, per non incorrere in errori

8. ADEGUATEZZA/INADEGUATEZZA DELLA SCANSIONE TEMPORALE PREVISTA:

- La scansione temporale è stata dilatata rispetto a quanto previsto: si è preferito lasciare agli studenti il tempo necessario per acquisire manualità e consapevolezza nell'utilizzo della TI89 in classe
- per quanto riguarda attenzione, partecipazione ed interesse ci è parso proficuo svolgere l'attività in modo concentrato nell'arco di due settimane di scuola (le due classi hanno lavorato con le calcolatrici per otto ore settimanali circa)

QUESTIONARIO DI GRADIMENTO E RISULTATI

E' stato infine somministrato agli alunni il questionario di gradimento dei progetti facente parte della griglia di istituto per il monitoraggio delle attività i cui dati sono così riassunti:

Il corso è risultato	molto	36%	interessante.
	abbastanza	58%	
	poco	0%	
	per niente	6%	

La conoscenza dell' argomento scelto è stata	molto	28%	utile.
	abbastanza	58%	
	poco	14%	
	per niente	0%	

La metodologia utilizzata è stata	molto	47%	efficace.
	abbastanza	50%	
	poco	0%	
	per niente	3%	

Gli argomenti proposti sono risultati	molto	14%	comprensibili.
	abbastanza	75%	
	poco	8%	
	per niente	3%	

Il corso ha risposto alle mie esigenze conoscitive	molto	36%	
	abbastanza	53%	
	poco	11%	
	per niente	0%	.

Il corso è stato organizzato in modo	molto	61%	efficiente.
	abbastanza	36%	
	poco	0%	
	per niente	3%	