

FUNZIONE LINEARE ED ESPONENZIALE

COME MODELLI PER LA

MATEMATICA FINANZIARIA

Grazia Grassi – I.T.I.S. “E. MAJORANA” S. Lazzaro di S. (BO) - grazigr@tin.it

Roberto Ricci – I.T.C.S. “G. SALVEMINI” Casalecchio di R. (BO) – bicicletta@tin.it

Cristina Rizzoli – Specializzata S.S.I.S. di Bologna 2002 - cristinarizzoli@hotmail.com

INDICE

Regime di capitalizzazione semplice

- **Presentazione** pag. 1
- **Scheda docente** pag. 3
- **Scheda studente** pag. 5

Regime di capitalizzazione composta

- **Presentazione** pag. 11
- **Scheda docente** pag. 13
- **Scheda studente** pag. 14

- Considerazioni sulla sperimentazione* pag. 20

PRESENTAZIONE: REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

INTRODUZIONE

L'utilizzo della calcolatrice grafico-simbolica è stata previsto per presentare in modo più chiaro ed incisivo il ruolo della matematica nella modellizzazione di fenomeni reali, economico-finanziari nel caso in esame.

L'introduzione della calcolatrice grafico - simbolica per la trattazione di problemi di tipo finanziario si propone di favorire:

- ✓ Un atteggiamento maggiormente costruttivo verso la soluzione dei problemi prospettati;
- ✓ Un miglioramento delle capacità critiche verso le condizioni e restrizioni poste;
- ✓ Un atteggiamento "sperimentale" verso la disciplina;
- ✓ Un uso della calcolatrice come strumento per porre e verificare ipotesi.

DESTINATARI: allievi del triennio della scuola media superiore

PREREQUISITI

- Risolvere problemi con l'uso di percentuali e proporzioni
- Risolvere problemi con le equazioni anche esponenziali e logaritmiche
- Saper rappresentare ed interpretare grafici di funzioni nel piano cartesiano
- Conoscenze di base relative all'uso della calcolatrice Ti92

OBIETTIVI

- Calcolare i valori delle grandezze finanziarie (montante e valore attuale in regime di capitalizzazione semplice e composta; sconto razionale, commerciale e composto; somma scontata)
- Costruire grafici nel piano cartesiano relativi alla capitalizzazione semplice e composta
- Interpretare grafici nel piano cartesiano relativi alla capitalizzazione semplice e composta attribuendo il corretto significato in ambito finanziario
- Utilizzare gli ambienti di lavoro della calcolatrice grafica Ti92 (algebrico, grafico, Table) per formulare congetture e verificarle.

CONTENUTI

- L'asse dei tempi come modello per la risoluzione di problemi finanziaria
- Le leggi della capitalizzazione e dello sconto
- La capitalizzazione semplice e la capitalizzazione composta
- Conoscenze tecniche relative all'uso della Ti92

STRUMENTI:

- Calcolatrici TI-92 Plus (una per studente);
- View screen;
- Lavagna luminosa;
- PC.

TEMPI

- 8 h.

METODI

In ogni scheda di lavoro si partirà da una *situazione* problematica proponendo sia lavori individuali che di gruppo. L'insegnante svolgerà, all'inizio, un ruolo di guida e coordinamento, avviando gli studenti all'analisi e alla concettualizzazione, riservando alla fase di sintesi la sistematizzazione e la presentazione dei concetti matematico-finanziari introdotti.

ATTIVITÀ

Fase 1

Costruzione di una tabella di valori tempi-montante in regime di capitalizzazione semplice in ambiente **Data / Matrix**, per un prefissato valore di i .

Utilizzo dell'ambiente **Home** per ricavare per altra via le coppie di valori tempo-montante

Fase 2

Costruzione di un grafico per punti tempi – montante (in ambiente **Data / Matrix** selezionare: **F2 Plot / setup**)

Formulazione di congetture circa la curva che meglio approssima l'insieme dei punti dati.

Fase 3

Verifica, mediante l'interpolazione lineare (**F5 Calc; Linreg**) che la curva interpolante è del tipo: $y = ax + b$ e che, quindi, vale la seguente relazione: $M = C(1 + it)$.

Fase 4

Rappresentazione grafica di $M = C(1 + it)$ considerando prima come variabile indipendente t e poi i .

Fase 5

Esercizi di consolidamento

Fase 6

Rappresentazione grafica della legge di attualizzazione in regime di capitalizzazione semplice.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AA.VV (2001), *Il progetto Labclass*, Quaderno n° 44 del M.P.I.
- [2] AA.VV (2002), *Probabilità e statistica con l'ausilio del calcolatrici grafico-simboliche*, Progetto SeT del M.I.U.R.
- [3] M. IMPEDOVO (1999), *Matematica: insegnamento e computer algebra*, Springer Verlag Italia, Milano.
- [4] W. MARASCHINI, M. PALMA (2000), *Format, Pro, Paravia*.

SCHEDA DOCENTE: LE LEGGI FINANZIARIE IN REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Premessa

Il regime di capitalizzazione semplice (*RCS*) è caratterizzato da un interesse proporzionale al capitale ed al tempo. Questo regime si usa comunemente soltanto per durate brevi; quindi, anche se teoricamente si può operare qualunque sia t , intero o no, generalmente è $t \leq 1$. Si ricordi che il tempo deve essere espresso nella stessa unità di tempo a cui è riferito il tasso.

Le schede di lavoro prevedono l'uso della calcolatrice grafico-simbolica *Ti92* (o anche *Ti89*) per lo studio delle leggi finanziarie in regime di capitalizzazione semplice.

Scopo di queste schede è quello di studiare graficamente il comportamento delle leggi di capitalizzazione e di attualizzazione. Le ben note formule dirette ed inverse per il calcolo di montante, interesse, valore attuale sono infatti interpretabili come funzioni (in senso matematico) di opportune variabili quali, ad esempio, il tempo t o il tasso di interesse.

Fase 1

Obiettivo: ricavare, mediante un'esemplificazione numerica, la procedura di calcolo che consente la generalizzazione nella legge in *RCS*: $M = C(1 + it)$

In ambiente *Data/Matrix*, viene costruita una tabella di valori tempo-montante, per un fissato valore di $i = 0,03$ annuo e per $C = 1$ dove con C si indica il capitale iniziale.

I valori del montante ottenuti in corrispondenza dei tempi vengono ritrovati effettuando i calcoli in ambiente *Home*.

Fase 2 – Fase 3

Obiettivo: analizzare un fenomeno mediante la sua rappresentazione grafica

Obiettivo: ricavare il modello matematico per la variazione del capitale al trascorrere del tempo

Lo svolgimento di questa fase richiede come prerequisito la conoscenza di elementi di base di statistica, in particolare il concetto di curva interpolante un insieme di punti nel piano cartesiano.

Viene utilizzata l'interpolazione lineare, cioè l'interpolazione mediante una retta espressa nella forma: $y = ax + b$, in riferimento alle coppie di valori della tabella tempo-montante.

L'espressione $M = C(1 + it)$ viene interpretata come funzione della variabile tempo t , per i fissato,

Di tale funzione sono date rappresentazioni in diversi registri semiotici (tabulare, grafico, algebrico)

La formulazione di congetture (si tratta davvero di una legge di linearità?) da verificare consente di sottolineare l'aspetto semantico dei simboli utilizzati.

Fase 4

Obiettivo: rappresentare graficamente le leggi di capitalizzazione semplice; studiare graficamente l'andamento della funzione $M = C(1 + it)$ utilizzando come variabile indipendente prima il tasso d'interesse i e poi il tempo t .

Lo scopo dell'analisi proposta è quella di rappresentare su uno stesso grafico l'andamento della $M = C(1 + it)$ in modo da chiarire il ruolo matematico e finanziario delle diverse variabili in gioco.

Nei tradizionali corsi di studio della Scuola superiore è prassi didattica diffusa giungere alla visualizzazione grafica di una funzione come punto di arrivo.

Nelle proposte che sono formulate in questo percorso didattico la visualizzazione, invece, è intesa come *un mezzo didattico potente, dalla straordinaria efficacia intuitiva* (Bagni, 1997) da affiancare agli altri registri rappresentativi per l'apprendimento dei concetti matematici. Infatti, una didattica che vede la visualizzazione come solo punto di arrivo finisce per trascurare la visualizzazione come elemento fondamentale nella fase di apprendimento che precede l'astrazione.

Fase 5

Obiettivo: Svolgere esercizi di consolidamento

In tale fase il docente può utilizzare le conoscenze e le competenze matematiche e tecniche acquisite che si suppongono acquisite dagli studenti nelle fasi precedenti per proporre alla classe lo svolgimento di esercizi di consolidamento o di semplici problemi da svolgersi individualmente o, preferibilmente, in piccoli gruppi.

Fase 6

Obiettivo: Comprendere il significato della legge di attualizzazione in regime di capitalizzazione semplice (sconto razionale)

Lo scopo dell'analisi proposta è quella di rappresentare su uno stesso grafico l'andamento della funzione nella variabile t definita come: $C = \frac{M}{1+it}$ in modo da chiarire il ruolo matematico e finanziario delle diverse variabili in gioco. Rimangono valide le considerazioni relative alla visualizzazione espresse nel paragrafo relativo alla Fase 4. Si raccomanda di scegliere in modo opportuno i parametri relativi allo schermo della TI92 .

Bibliografia

- Bagni G. T. (1997). Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, pp. 310-333
- Sfard A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, vol.22, n.1, 1-36
- Re Fraschini, Grazi, Spezia, *Matematica: strumenti per l'economia* – vol.3°, Atlas, Bergamo, 1998;
- Gambotto Manzone, Consolini, *Conoscere e applicare la matematica 3*, Tramontana, Milano, 1996.

SCHEDA STUDENTE: LE LEGGI FINANZIARIE IN REGIME DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Problema 1:

Si dispone del capitale di € 1 e lo si deposita per otto mesi presso una banca che pratica un tasso d'interesse annuo del 3%. Di quanto si disporrà alla fine dell'operazione?

Fase 1

Obiettivo: ricavare, mediante un'esemplificazione numerica, l'insieme dei passaggi che permettono di giungere alla legge in RCS:

$$[1] \quad M = C(1 + it)$$

Nell'ambiente DATA/MATRIX si cercherà di dare una risposta alla domanda contenuta nel problema 1.

Creare un folder (cartella) dal nome *SKRCS* mediante i seguenti comandi:

- **[2nd]** [VAR-LINK];
- **[F1]** 5: Create folder.

Con il comando Apps accedere all'ambiente DATA/MATRIX, ottenendo una schermata come quella presentata in fig. 1:

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	Anni	M					
	c1	c2	c3	c4	c5		
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
c1=							
SKRCC BAD APPROX FUNC							

Fig. 1

Nella colonna c1 inserire il numero dei mesi, da 1 a 12, e nella colonna c2 il risultato dell'applicazione della legge di capitalizzazione in regime semplice (RCS). In sostanza si deve riprodurre sulla matrice della fig. 1 la situazione:

1	$1 + 0,03 \cdot \frac{1}{12}$	$1 + 0,03 \cdot \frac{2}{12}$	$1 + 0,03 \cdot \frac{3}{12}$
0	1	2	3 ...

Trasferire l'evoluzione del capitale presentata può essere trasferita sulla matrice 12×2 della Fig. 1 mediante i seguenti comandi:

- in c1 seq(x, x, 1, 12);
- in c2 seq(1+0,03*c1[x]/12, x, 1, 12).

Si ottiene così il risultato rappresentato nella Fig. 2:

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1	1.0025				
2	2	1.005				
3	3	1.0075				
4	4	1.01				
5	5	1.0125				
6	6	1.015				
7	7	1.0175				

c2=seq(1+.03*c1[x]/12,x,1,12)

Fig. 2

Fase 2

Obiettivo: analizzare un fenomeno mediante la sua rappresentazione grafica

- Rappresentare graficamente la tabella di dati contenuti nelle colonne [c1,c2]

- Premere [F2] e poi [ENTER] per entrare in Plot Setup. All'interno dell'elenco che compare, posizionarsi su Plot1 e premere [F1] per definire il grafico. Muovendo il cursore con \otimes inserire le informazioni in modo da ottenere la schermata seguente:

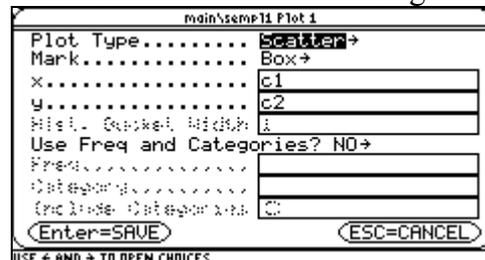


Fig. 3

- Premere [ENTER] e poi [F5] per ottenere il grafico. Premendo [F3] si attiva la modalità Trace che consente di percorrere il grafico utilizzando \otimes . In alto compare l'indicazione del grafico P1 (plot 1) e in basso le coordinate del punto, come nella schermata seguente:

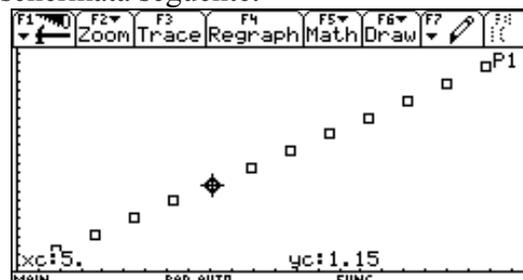


Fig. 4

Esiste una certa regolarità nell'evoluzione del fenomeno nel tempo?
 Qual è il suo andamento?
 Che cosa si può osservare circa l'andamento del montante nel corso dei dodici mesi dell'anno?

Fase 3

Obiettivo: Ricavare il modello matematico per la variazione del capitale al trascorrere del tempo

- Il modello più semplice è quello lineare. Ipotizzando un trend di tipo lineare, mediante la TI-92 Plus è possibile determinarne i parametri.

$a = \dots\dots$

$b = \dots\dots$

$r = \dots\dots$

$r^2 = \dots\dots$

L'indice di determinazione R^2 nel caso lineare, e solo in quel caso, coincide con il quadrato del coefficiente di correlazione lineare r e pertanto la TI-92 Plus indica con r^2

*In base al valore del coefficiente di correlazione lineare ed a quello dell'indice di determinazione lineare, cosa puoi dire in merito all'adeguatezza del modello lineare?*¹

- Visualizzare adesso la retta del trend sovrapponendola al grafico dei dati rilevati.

Il modello lineare descrive correttamente la crescita del montante?
E' possibile visualizzare meglio l'andamento al tempo $t=0$?

- Tornare alla schermata Data/Matrix Editor e premere [F4] e poi nell'ordine 3:Regressions, 2: LinReg(ax+b) Nella schermata che si ottiene, inserire opportunamente i nomi delle colonne da considerare fino ad avere la schermata seguente.

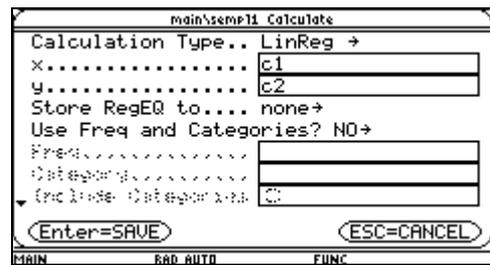


Fig.5

premere [ENTER]. Dopo qualche secondo compare la schermata dei risultati dei parametri a e b della retta, e i valori di r e di r^2 .



Fig. 6

- Premere [GRAPH] per ottenere la schermata

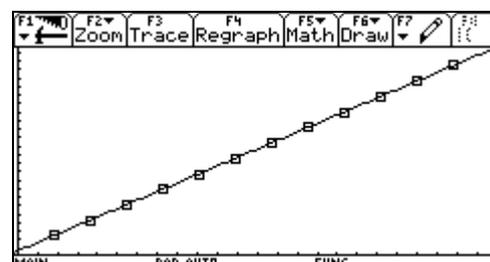


Fig. 7

Rimane ora da verificare che il risultato così ottenuto è lo stesso di quello che si sarebbe ricavato applicando la [1].

Effettuare la verifica in ambiente Home .

¹ Per la trattazione della parte in corsivo è opportuno che siano stati trattati elementi di base di statistica

Fase 4

Obiettivo: rappresentare graficamente le leggi di capitalizzazione semplice

Studiare graficamente l'andamento della funzione [1] sia utilizzando come variabile indipendente il tasso d'interesse i sia il tempo t .

Prima di procedere all'analisi con la TI-92, rispondere alle seguenti domande:

1. Se la variabile indipendente è i , che tipo di funzione è la [1]?
2. Se la variabile indipendente è t , che tipo di funzione è la [1]?

Lo scopo dell'analisi di seguito proposta è quella di rappresentare su uno stesso grafico l'andamento della [1] in modo da chiarire il ruolo matematico e finanziario delle diverse variabili in gioco.

Caso A: variabile indipendente t

La TI-92 consente in modo facile ed immediato di rappresentare su uno stesso grafico la funzione:

$$[2] \quad y = 1 + ix$$

E' evidente che la [1] e la [2], al di là della simbologia, rappresentano lo stesso modello matematico-finanziario, con la sola differenza che si sono indicate le variabili oggetto d'interesse come indicato nella calcolatrice.

Poiché la [2] rappresenta il valore del montante (y) di un capitale unitario al variare del tempo (x), quale restrizione del campo di esistenza della [2] sarà necessaria affinché essa rappresenti adeguatamente il fenomeno economico indagato?

Considerare i tassi d'interesse del 3%, 6% e 9% annui e inserire le tre rispettive funzioni come indicato nella fig. 3:

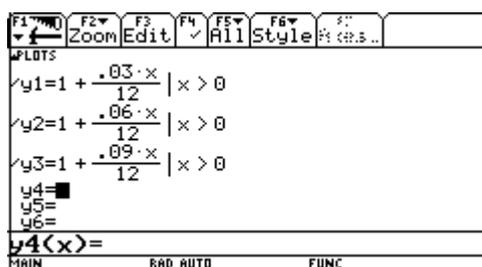


Fig. 8

Il simbolo \geq si ottiene con la seguente successione di comandi: 1. $[2nd][CHAR]$, 2. selezionare l'opzione E della voce **Math**.

A questo punto risulta molto semplice la rappresentazione delle tre funzioni. Si ha infatti:

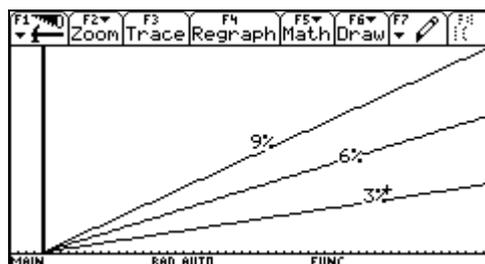


Fig. 9

Si consiglia di utilizzare i comandi

- $[F2]$ A: Zoomfit

per meglio visualizzare il grafico delle tre funzioni lineari rispetto alla variabile x

L'inserimento delle legende si ottiene selezionando i seguenti comandi:

- $[F7]$ 7: Text;
- il simbolo % con $[2nd][CHAR]$;
- Punctuation, opzione 5.

Come esercizio inserire altre legende che migliorino la comprensibilità del grafico della fig. 9. e, con i comandi della TI-92, migliorare la visualizzazione dei diversi grafici agendo sui singoli parametri.

Sulla base dei grafici della fig. 9 rispondere ora alle seguenti domande:

1. Quali sono le coordinate del punto d'intersezione con l'asse delle ordinate?
2. Qual è il significato finanziario di tale punto?
3. qual è l'andamento della funzione [2] per $x \rightarrow +\infty$? ha significato dal punto di vista finanziario?

Caso B: variabile indipendente i

Analizzare ora l'andamento della funzione:

$$[3] \quad y = 1 + xt$$

Si consideri un tempo pari a 12 periodi di capitalizzazione (N.B. periodi di capitalizzazione e non anni!) e si rappresenti la [3] nella restrizione del suo campo di esistenza $[0; 0,1]^2$.

Sulla base delle considerazioni emerse nel caso A e del grafico della [3] si risponda alle seguenti domande:

1. La [3] è ancora una funzione lineare?
2. Quali sono le coordinate del punto d'intersezione con l'asse delle ordinate?
3. Qual è il significato finanziario di tale punto?
4. La restrizione $[0; 0,1]$ ha anche un significato finanziario?

² il massimo valore del tasso di interesse è stato fissato, a fini esemplificativi, al 10%

Fase 5

Obiettivo: Svolgere esercizi di consolidamento

Problema 2

Si dispone del capitale di € 25 e lo si deposita per otto mesi presso una banca che pratica un tasso d'interesse annuo del 3%. Di quanto si disporrà alla fine dell'operazione?

Ripetere l'esercizio come in Problema 1

Fase 6

Obiettivo: Comprendere il significato della legge di attualizzazione in regime di capitalizzazione semplice (sconto razionale)

Problema 3

Calcolare la somma scontata e lo sconto relativi ad un credito di EUR 1600 esigibile tra 5 mesi che si conviene di pagare oggi applicando lo sconto razionale con il tasso di interesse del 4%

Applicare la legge di attualizzazione in RCS:

$$[4] C = \frac{M}{1 + it}$$

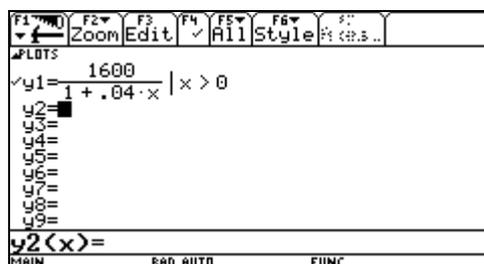


Fig.10

Per una migliore visualizzazione del grafico in Fig.11, utilizzare i parametri come in Fig.12

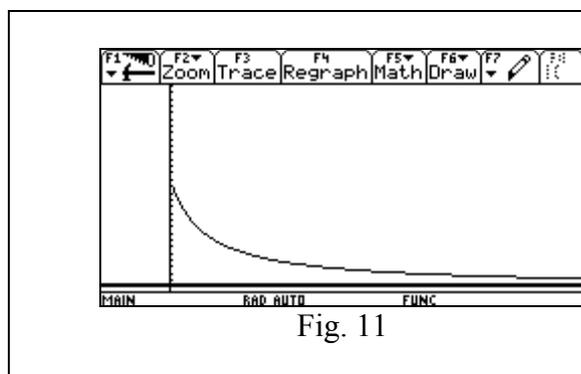


Fig. 11

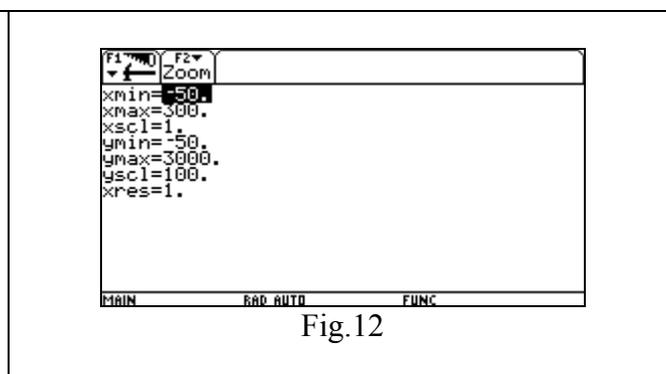


Fig.12

Interpreta il grafico ottenuto dal punto di vista matematico e finanziario.

PRESENTAZIONE: REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTO

DESTINATARI: allievi del triennio della scuola media superiore

PREREQUISITI:

- Equazioni lineari e funzione lineare;
- Potenze e loro proprietà;
- Equazioni esponenziali e funzione esponenziale;
- Progressione geometrica;
- Comandi di base della calcolatrice grafico-simbolica.

OBIETTIVI:

- Saper cogliere e comprendere situazioni problematiche;
- Impostare valide strategie di soluzione;
- Mostrare il collegamento fra argomenti di studio e problemi reali;
- Interpretare le conoscenze acquisite come metodo, strumento e linguaggio per analizzare situazioni problematiche del contesto in cui si opera;
- Acquisire i concetti di operazione e di scambio finanziario ed il principio di equivalenza finanziaria;
- Acquisire i concetti di montante, di tasso d'interesse e di valore attuale;
- Modellizzare e risolvere situazioni problematiche relative a capitalizzazione semplice e composta;
- Comprendere il concetto di rendita;
- Comprendere e saper calcolare montante e valore attuale di rendita.

CONTENUTI:

- La legge di capitalizzazione semplice;
- Rappresentazione grafica della legge di capitalizzazione semplice;
- La legge di attualizzazione razionale in regime di capitalizzazione semplice;
- La legge di capitalizzazione composta;
- Rappresentazione grafica della legge di capitalizzazione composta: $M = f(i)$, $M = f(t)$
- Valore attuale di una rendita in regime di capitalizzazione composta;
- Studio delle discontinuità della funzione del punto precedente;
- Valore attuale di una rendita di infiniti termini (perpetuità) in regime di capitalizzazione composta.

STRUMENTI:

- Calcolatrici TI-92 Plus (una per studente);
- View screen;
- Lavagna luminosa;
- PC.

TEMPI:

- 8 h

METODI:

In ogni scheda di lavoro si partirà da una *situazione* problematica proponendo sia lavori individuali che di gruppo. L'insegnante svolgerà, all'inizio, un ruolo di guida e coordinamento, avviando gli studenti all'analisi e alla concettualizzazione, riservando alla fase di sintesi la sistematizzazione e la presentazione dei concetti matematico-finanziari introdotti.

BIBLIOGRAFIA:

G.C. BAROZZI, S. CAPPuccio (1997), *LE CALCOLATRICI GRAFICHE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA*, PITAGORA EDITRICE, BOLOGNA.

Gambotto Manzone, Consolini, (1996), *Conoscere e applicare la matematica 2*, Tramontana, Milano.

M. IMPEDOVO (1999), *MATEMATICA: INSEGNAMENTO E COMPUTER ALGEBRA*, SPRINGER VERLAG, MILANO.

W. MARASCHINI, M. PALMA (2000), *FORMAT, PRO*, PARAVIA, TORINO.

Re Fraschini, Grazi, Spezia (1999), *Matematica: strumenti per l'economia*, vol. II, Atlas, Bergamo.

SCHEDA DOCENTE: LE LEGGI FINANZIARIE IN REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

PROBLEMA 1: La legge di capitalizzazione

DEFINIZIONE DEL PROBLEMA: La ricerca del montante viene affrontata partendo dall'analisi di un problema in modo che lo studente possa cogliere il significato interpretativo della legge finanziaria introdotta ed acquisisca familiarità con la costruzione di modelli matematici rappresentanti fenomeni reali.

Si è preferito lavorare in ambiente DATA/MATRIX piuttosto che con le LISTE poiché queste ultime richiedono l'installazione di Applicazioni Flash della TI-92 Plus (o della TI-89) non sempre disponibili.

In particolare si è cercato di dare rilievo ai seguenti aspetti:

- ◆ individuazione della variabile nella legge di capitalizzazione (tempo e tasso d'interesse);
- ◆ rappresentazione di una funzione il cui campo di esistenza è stato sottoposto ad una restrizione dettata dalle caratteristiche del fenomeno indagato;
- ◆ analisi grafica del problema.

PROBLEMA 2: Il valore attuale di una rendita

DEFINIZIONE DEL PROBLEMA:

L'approccio al problema 2 è stato lo stesso di quello al problema precedente, con l'intento di approfondire lo studio di particolarità matematiche molto interessanti e dal punto di vista particolare e da quello generale.

Si è cercato di focalizzare l'attenzione dell'allievo sui seguenti aspetti:

- ◆ individuazione dei vantaggi e dei limiti dell'analisi grafica condotta con la calcolatrice grafico-simbolica (punti di discontinuità);
- ◆ studio del comportamento al limite di una funzione sotto il profilo grafico senza procedere ad una definizione formale.

ATTUAZIONE DELLA SPERIMENTAZIONE:

La scheda relativa alla capitalizzazione composta è stata sperimentata in una classe quarta di 17 alunni dell'indirizzo per programmatori (corso Mercurio) di un istituto tecnico commerciale. Le ore settimanali curriculari di matematica sono cinque di cui una in laboratorio con la presenza dell'insegnante tecnico-pratico.

BIBLIOGRAFIA:

G.C. BAROZZI, S. CAPPuccio (1997), *LE CALCOLATRICI GRAFICHE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA*, PITAGORA EDITRICE, BOLOGNA.

Gambotto Manzone, Consolini, (1996), *Conoscere e applicare la matematica 2*, Tramontana, Milano.

M. IMPEDOVO (1999), *MATEMATICA: INSEGNAMENTO E COMPUTER ALGEBRA*, SPRINGER VERLAG, MILANO.

W. MARASCHINI, M. PALMA (2000), *FORMAT, PRO*, PARAVIA, TORINO.

Re Fraschini, Grazi, Spezia (1999), *Matematica: strumenti per l'economia*, vol. II, Atlas, Bergamo.

SCHEDA STUDENTE: LE LEGGI FINANZIARIE IN REGIME DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Il regime di capitalizzazione composta (*RCC*) è caratterizzato da una durata dell'operazione finanziaria superiore al periodo di capitalizzazione del tasso d'interesse utilizzato. Scopo di questa scheda è quello di studiare graficamente il comportamento della legge di capitalizzazione e di attualizzazione.

Problema 1:

Si dispone del capitale di € 1 e lo si deposita per dieci anni presso una banca che pratica un tasso d'interesse annuo del 3%. Di quanto si disporrà alla fine dell'operazione?

Analisi con la TI-92:

Si cercherà ora di riprodurre, mediante un'esemplificazione numerica, l'insieme dei passaggi che permettono di ricavare la nota legge in *RCC*:

$$[1] \quad M = C(1 + i)^n$$

Come è noto, in *RCC* gli interessi si rendono disponibili al termine del periodo di capitalizzazione del tasso per produrre nuovi interessi. Nell'ambiente DATA/MATRIX si cercherà di dare una risposta alla domanda contenuta nel problema 1.

Si crei un folder (cartella) dal nome *SKRCC* mediante i seguenti comandi:

- **[2nd]** [VAR-LINK];
- **[F1]** 5: Create folder.

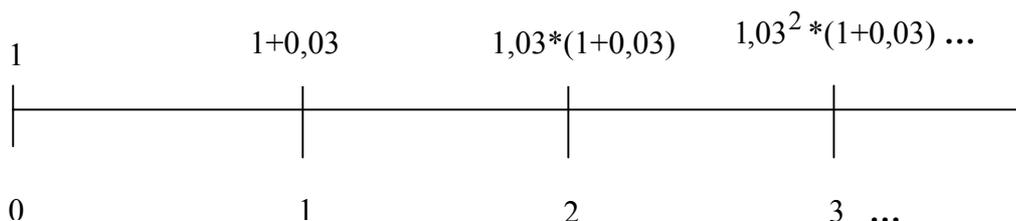
Con il comando **Apps** si acceda all'ambiente DATA/MATRIX, ottenendo una schermata come quella presentata in fig. 1:

DATA	Anni	M	c3	c4	c5
1	c1				
2					
3					
4					
5					
6					
7					

c1 =
SKRCC FUNC

fig. 1

Nella colonna *c1* si vuole ora inserire il numero degli anni, da 1 a 10, e nella colonna *c2* il risultato dell'applicazione della legge di capitalizzazione in regime semplice (*RCS*) anno per anno, cioè prendendo come capitale iniziale per ogni periodo il risultato ottenuto dalla capitalizzazione precedente. In sostanza si deve riprodurre sulla matrice della fig. 1 la nota situazione:



L'evoluzione del capitale presentata può essere facilmente trasferita sulla matrice 10 × 2 della fig. 1 mediante i seguenti comandi:

- in c1 seq(x, x, 1, 10);
- in c2 seq(1.03^(c1[x]-1)*1.03, x, 1, 10).

Si ottiene così il risultato rappresentato nella fig. 2:

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	Anni	M					
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	1.	1.03					
2	2.	1.0609					
3	3.	1.0927					
4	4.	1.1255					
5	5.	1.1593					
6	6.	1.1941					
7	7.	1.2299					

fig. 2

Rimane ora da verificare che il risultato così ottenuto alla fine dell'operazione è lo stesso di quello che si sarebbe ricavato applicando la [1]. In ambiente Home la verifica risulta immediata.

Rappresentazione grafica delle leggi di capitalizzazione e di attualizzazione in RCC (capitale unitario)

Si vuole ora studiare graficamente l'andamento della funzione [1] sia utilizzando come variabile indipendente il tasso d'interesse *i* sia il tempo *t*.

Prima di procedere all'analisi con la TI-92 si risponda alle seguenti domande:

3. Se la variabile indipendente è *i*, che tipo di funzione è la [1]?
4. Se la variabile indipendente è *t*, che tipo di funzione è la [1]?

Lo scopo dell'analisi di seguito proposta è quella di rappresentare su uno stesso grafico l'andamento della [1] in modo da chiarire il ruolo matematico e finanziario delle diverse variabili in gioco.

Caso A: variabile indipendente t

La TI-92 consente in modo facile ed immediato di rappresentare su uno stesso grafico la funzione:

$$[2] \quad y = (1 + i)^x$$

E' evidente che la [1] e la [2], al di là della simbologia, rappresentino lo stesso modello matematico-finanziario, con la sola differenza che per le variabili oggetto d'interesse si sono scelte le lettere utilizzate nella calcolatrice.

Poiché la [2] rappresenta il valore del montante (y) di un capitale unitario al variare del tempo (x), quale restrizione del campo di esistenza della [2] sarà necessaria affinché essa rappresenti adeguatamente il fenomeno economico indagato?

Si considerino i tassi d'interesse del 5%, 8% e 10% e si inseriscano le tre rispettive funzioni come indicato nella fig. 3:

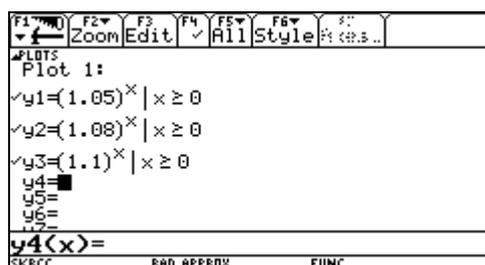


fig. 3

Il simbolo \geq si ottiene con la seguente successione di comandi: 1. $[\text{2nd}][\text{CHAR}]$, 2. e poi selezionando l'opzione E della voce Math.

A questo punto risulta molto semplice la rappresentazione delle tre funzioni. Si ha infatti:

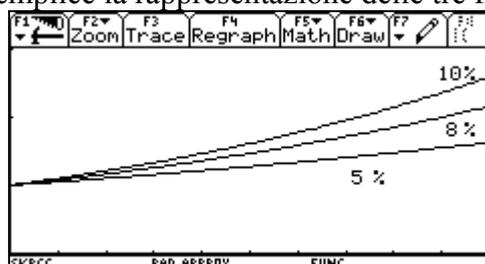


fig. 4

L'inserimento delle legende si ottiene selezionando i seguenti comandi:

- $[F7] 7$: Text;
- il simbolo % con $[\text{2nd}][\text{CHAR}]$;
- Punctuation, opzione 5.

Si lascia come esercizio l'inserimento di altre legende che migliorino la comprensibilità del grafico della fig. 4.

La modalità di presentazione della fig. 4 è stata ottenuta mediante la scelta dei parametri di visualizzazione come indicato in fig. 5:

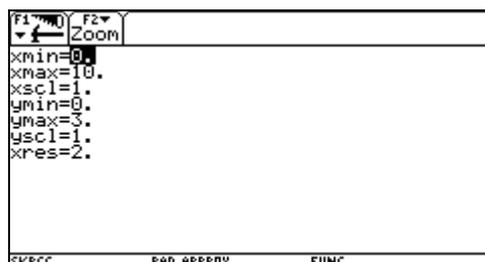


fig. 5

Come esercizio per impraticarsi con i comandi della TI-92 può essere migliorata la visualizzazione dei diversi grafici agendo sui singoli parametri.

Sulla base dei grafici della fig. 4 si risponda ora alle seguenti domande:

4. Quali sono le coordinate del punto d'intersezione con l'asse delle ordinate?
5. Qual è il significato finanziario di tale punto?
6. La [2] ha un andamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$? Perché?

Caso B: variabile indipendente i

Si vuole ora analizzare l'andamento della funzione:

$$[3] y = (1 + x)^t$$

Se si prende un tempo pari a 15 periodi di capitalizzazione (N.B. periodi di capitalizzazione e non necessariamente anni!) e si rappresenta la [3] nella restrizione del suo campo di esistenza $[0; 0,1]$, si ottiene la fig. 6:

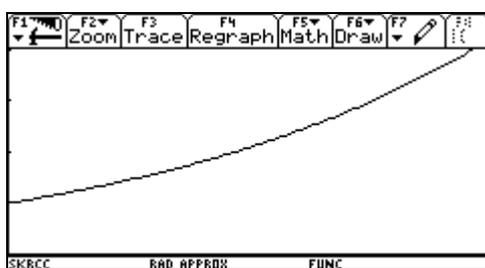


fig. 6

Sulla base delle considerazioni emerse nel caso A e del grafico della [3] si risponda alle seguenti domande:

5. La [3] è ancora una funzione esponenziale?
6. Quali sono le coordinate del punto d'intersezione con l'asse delle ordinate?
7. Qual è il significato finanziario di tale punto?
8. La restrizione $[0; 0,1]$ ha anche un significato finanziario?

Si lascia come esercizio lo studio della legge di attualizzazione in *RCC*:

$$[4] V_0 = C(1 + i)^{-t}$$

secondo le modalità proposte per la legge di capitalizzazione in *RCC*.

Problema 2:

Si ha diritto a riscuotere per 10 anni una rendita di rata unitaria (€ 1) posticipata.

Analisi con la TI-92:

Si cercherà ora di studiare graficamente la legge che consente di determinare in *RCC* il valore attuale della rendita ad un dato tasso di valutazione (annuo, in questo caso):

$$[5] V_0 = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Se si utilizzano i simboli della TI-92 la [5] diviene (ponendo $R = 1$):

$$[6] y = \frac{1 - (1 + x)^{-n}}{x}$$

Si vuole ora rappresentare la [6] nell'intervallo $[-0,1; 0,2]$. La scelta dell'intervallo di rappresentazione suscita perplessità di ordine:

1. analitico?
2. finanziario?

Posta la fondatezza delle suddette obiezioni, si è comunque scelto l'intervallo proposto per richiamare l'attenzione sulle necessarie precauzioni che devono essere adottate nell'interpretazione dei risultati ottenuti con la TI-92.

Nella fig. 7 è stata inserita la [6] in y5:

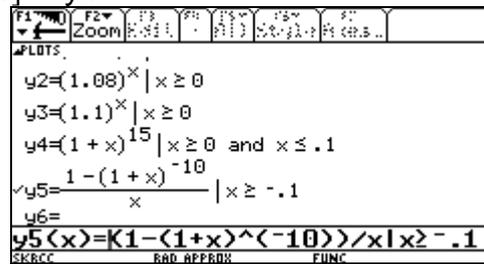


fig. 7

Le figg. 8 ed 9 mostrano il grafico ottenuto e la scelta dei parametri di visualizzazione:

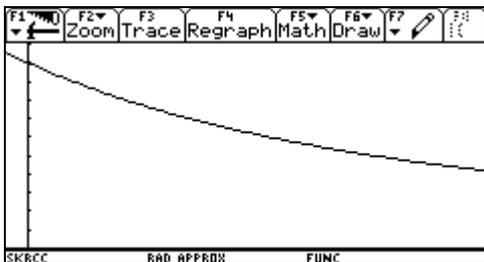


fig. 8

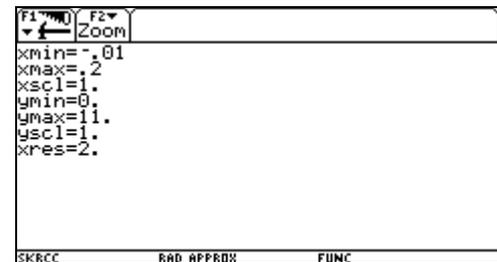


fig. 9

Per dare una risposta alla prima domanda, si calcoli il $y5(0)$ e si ottiene il seguente risultato:

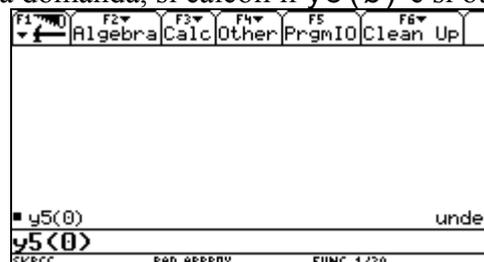


fig. 10

Che spiegazione si potrebbe fornire del risultato ottenuto? Che tipo di discontinuità ha la [6] nel punto di ascissa nulla?

La fig. 8 non mette affatto in luce il problema appena sollevato e quindi bisogna prestare particolare attenzione nell'interpretazione dei risultati.

Quale spiegazione finanziaria si potrebbe proporre del fatto che la funzione della fig. 8 sembra passare per il punto (0; 10)?

Un altro strumento molto utile per evidenziare problemi come quelli rappresentati in fig. 10 è la *tabulazione* della funzione mediante il comando Table della TI-92. Le figg. 11 e 12 mostrano il funzionamento di quest'ultima strategia risolutiva:

x	y5				
-.1	18.68				
-.05	13.404				
0.	undef				
.05	7.7217				
.1	6.1446				
.15	5.0188				
.2	4.1925				
.25	3.5705				
x = -.1					

fig. 11

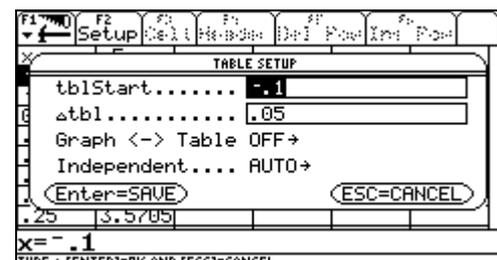


fig. 12

Quindi la *tabulazione* può essere sempre utile per individuare punti "particolari" di una funzione non evidenziati dai grafici.

Si propone come esercizio l'analisi secondo lo stesso schema della legge che fornisce il montante di una rendita in *RCC*.

Approfondimento del problema 2:

Si supponga di avere diritto di riscuotere una rendita perpetua (composta da infiniti termini) di rata annua posticipata pari a € 1. Si vuole calcolare il valore ad oggi di questa particolare rendita ad un tasso di valutazione del 3% annuo.

Analisi con la TI-92:

Per risolvere il quesito posto bisogna riconsiderare la [5] e la [6] e vedere cosa succede quando $n \rightarrow +\infty$.

Come primo passo si consideri il fattore:

$$[7] (1 + i)^{-n}$$

e si rappresenti la funzione:

$$[8] y = 1,03^{-n}$$

dove n è un intero non negativo.

Mediante le stesse procedure utilizzate nell'analisi del primo problema, si costruisce una schermata come la seguente, dove in *c1* e *c2* sono stati inseriti i seguenti comandi:

- in *c1* seq(x, x, 0, 150);
- in *c2* seq(1.03^-c1[x], x, 1, 151):

DATA	n	(1+i) ⁻ⁿ			
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.	1.			
2	1.	.97087			
3	2.	.9426			
4	3.	.91514			
5	4.	.88849			
6	5.	.86261			
7	6.	.83748			

c2.Title="(1+i)^-n"

Fig. 13

La rappresentazione grafica dei dati della fig. 13 chiarisce l'andamento della [8].

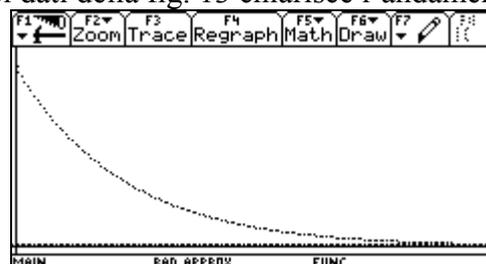


Fig. 14

La lettura del grafico della fig. 14 mostra che il fattore [7] tende a zero al crescere di n ; da ciò discende che nel caso di una rendita perpetua posticipata la [5] si modifica nel seguente modo:

$$V_0 = R \frac{1}{i}$$

Problema 3:

Il valore attuale di una rendita unitaria posticipata di 10 rate è di € 7,31. Qual è il tasso di valutazione applicato?

Suggerimenti: si utilizzi la *tabulazione* per determinare gli estremi dell'intervallo della variabile indipendente in base ai quali effettuare l'interpolazione lineare.

Considerazioni sulla sperimentazione

- La partecipazione degli allievi si è rivelata più entusiastica e produttiva rispetto ad un approccio tradizionale poiché la disponibilità della calcolatrice sul banco ha favorito un atteggiamento propositivo ed attivo;
- gli studenti si sono dimostrati più inclini a proporre delle ipotesi ed ad utilizzare la calcolatrice come strumento di verifica;
- la calcolatrice ha favorito la concentrazione degli studenti sul modello matematico presente nei diversi regimi finanziari piuttosto che concentrarsi sugli aspetti calcolatori e ripetitivi;
- la disponibilità continua della calcolatrice (di proprietà dell'istituto) ha contribuito a creare un'abitudine all'analisi grafica di un problema;
- talvolta, specie all'inizio della sperimentazione, gli studenti non hanno colto che la calcolatrice era uno strumento alternativo per fare lezione e non un momento di svago per il quale non ci sarebbe stata alcuna verifica;
- lo svolgimento dell'intera unità con la calcolatrice ha dato un ritmo più serrato all'attività didattica rendendo più complesso il recupero degli allievi in difficoltà o assenti. A tal riguardo è stato molto utile il view-screen che ha consentito di proiettare a tutta la classe i passaggi più delicati o le soluzioni più brillanti proposte da qualche allievo;
- l'uso della calcolatrice ha messo in maggiore evidenza le differenze all'interno della classe confermando che l'introduzione delle tecnologie nella prassi didattica richiede un ripensamento generale dell'azione di insegnamento.