



# EQUAZIONI LINEARI e SISTEMI LINEARI

# INDICE

Introduzione	Pag. 1
SCHEDA 1	Pag. 2
SCHEDA 2	Pag. 5
SCHEDA 3	Pag. 7
Verifica	Pag. 9
Osservazioni conclusive	Pag. 10

## La calcolatrice grafico-simbolica TI-89

### EQUAZIONI LINEARI E SISTEMI LINEARI

Docente: Angela Solera - e-mail: splash72@libero.it

**Classe** 2<sup>^</sup> Liceo della Comunicazione ad indirizzo sociale

**N° studenti:** 16

#### STRUMENTI

- una calcolatrice TI-89 per ogni studente;
- schede per le esercitazioni.

#### TEMPI

mese di febbraio, 3 ore/settimana, totale 12 ore circa.

#### METODI

- spiegazione introduttiva dei comandi ( lezione frontale );
- uso della TI-89 per la risoluzione guidata di esercizi → in pratica la classe è diventata il nostro “laboratorio”;
- il lavoro è stato svolto in gruppetti di 2 – 3 studenti o singolarmente.

#### PREREQUISITI

- saper risolvere le equazioni lineari;
- conoscere il significato degli operatori logici “AND” e “OR”;
- conoscere il significato di “funzione”;
- saper disegnare il grafico di una funzione a partire da una tabella di valori assegnati.

#### OBIETTIVI

- conoscenza degli ambienti HOME, Y=EDITOR, TABLE, GRAPH;
- significato geometrico di un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite;
- acquisizione del concetto di “soluzione simultanea”.

#### CONTENUTI

- **SCHEDA 1** : Introduzione e presentazione dell’ambiente di calcolo
- **SCHEDA 2** : Gli ambienti Y=EDITOR , GRAPH e TABLE
- **SCHEDA 3** : Esercitazioni

## SCHEMA 1

### Introduzione

Con una calcolatrice grafico–simbolica puoi risolvere gli esercizi noti di calcolo numerico (le espressioni) e di calcolo simbolico (le espressioni algebriche, le equazioni lineari e non, ...).

Iniziamo quindi con l'ambiente di calcolo HOME

1) Inserisci nella riga di introduzione le operazioni indicate

$3 + (-4) * (-7)$	N.B: Il “-“ unario ha un apposito simbolo $\boxed{-}$
$3^2 + 4^3$	N.B: Per inserire l'esponente: $3\boxed{\wedge}2 + 4\boxed{\wedge}3$ ENTER

2) Introduciamo ora l'espressione numerica

$$\frac{[(\frac{4}{3} : (\frac{5+1}{2})) * (\frac{3+1}{4})]}{2 + \frac{1}{3}}$$

La tastiera della TI-89 non consente la forma a cui sei abituata: bisogna usare la “scrittura in linea” → **attenzione all'uso delle parentesi!**

L'espressione indicata va introdotta così:

$$((4/3 / (5 + 1/2)) * (3 + 1/4)) / (2 + 1/3)$$

Dopo aver digitato ENTER noterai che l'espressione comparirà nella forma abituale; a destra trovi il risultato nella forma ESATTA. (Le frazioni vengono mostrate già semplificate).

Per ottenere il risultato in forma DECIMALE devi premere  $\boxed{\blacklozenge}$  prima di ENTER.

3) Introdurre le espressioni algebriche:

$a + 2b + 5a - 2b$	N.B: per inserire la lettera a, ad esempio, premi $\boxed{\text{alpha}}$ = per inserire la lettera b premi $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{[}$ e così via ...
$a^3 - 3ab + a^3 + 5ab$	N.B: fra 2 lettere è obbligatorio il simbolo di moltiplicazione (es. <b>5a*b</b> ), altrimenti <b>ab</b> viene identificata come unica variabile.

4) Il menu F2 Algebra

**HOME** **F2** 1 successione dei tasti per attivare il comando “solve”

Esempio 1 : risolvere l'equazione  $x + 3 = 5x - 2$

Devi digitare **HOME** **F2** 1 ENTER

Nella riga di introduzione quindi compare **solve(** , inserisci  $x+3=5x-2$  , **x**) **ENTER**

Esempio 2:  $3x - 1 = 3x - 1$

Esegui la sequenza vista nell'esempio 1.

Nota che il risultato della TI-89 è “**true**”. Questo significa che l'equazione è indeterminata.

Esempio 3:  $4x + 5 = 4x - 1$

Questa volta il risultato della TI-89 è “**false**” , cioè l'equazione è impossibile.

**HOME** **F2** 2 successione di tasti per attivare l'istruzione “factor”, per fattorizzare un polinomio.

Esempio 1 Scomponi in fattori  $a^3 - 4a^2 + 3a$

Quindi devi digitare **HOME** **F2** 2 ENTER.

Nella riga di introduzione trovi **factor(** poi inserisci il testo del polinomio e **)** **ENTER**.

Ora prova tu : scomponi 1)  $2(a - 1) + x(a - 1) - 2xy(a - 1)$

2)  $x^2 + x + 1$  N.B: se il polinomio non si scompone allora il risultato della scomposizione è il polinomio stesso .

**HOME** **F2** 3 successione di tasti per attivare l'istruzione “expand” con cui vengono svolti i calcoli indicati nel polinomio.

Esempio: Semplifica l'espressione  $(a - 2)(a - 1) + a - 1$

Devi digitare **HOME** **F2** 3 ENTER.

Nella riga di introduzione trovi **expand(** poi inserisci il testo del polinomio e **)** **ENTER** .

Ora prova tu e semplifica le seguenti espressioni:

1)  $(x + 2y)^3$

3)  $(a+b)(a - b)$

2)  $(2x - a)^2$

4)  $(1 - 3x^2) [(4x^3 + 12x^5) : (-4x^3)]$

N.B Al posto delle parentesi quadre e graffe digita sempre le tonde

Osserva che per l'esercizio 4) è indifferente digitare o meno il segno di moltiplicazione \* : il consiglio è comunque quello di inserirlo sempre o, almeno, fino a che non hai sufficiente dimestichezza con la calcolatrice.

### RISOLUZIONE ALGEBRICA DI UN SISTEMA LINEARE ( uso del comando “solve” )

.....

Vogliamo risolvere il sistema 
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

Successione dei tasti:

[HOME] [F2] 1 ENTER. Quindi nella riga di inserimento, dopo **solve**( inserisci la prima equazione seguita dall'operatore logico “and” ( puoi fare la sequenza di tasti [2nd] 5 8 8

oppure scriverlo direttamente ). Poi inserisci la seconda equazione e di seguito [ , ] (virgola) [ ] [X] [ , ] [Y] [ ] [ ] .

Nota che tra parentesi graffe devono essere specificate le incognite del sistema.

Per il sistema inserito otteniamo la soluzione “ **x = 3 and y = 2**” che equivale alla scrittura **(3;2)**.

Esempio 1 Risolvere 
$$\begin{cases} x - 2[y - (x + 1)] = 12 \\ 3x - 2(y + 3) = 4 \end{cases}$$

Ripetere la successione di tasti appena descritta; la calcolatrice dà la seguente soluzione

$x = \frac{2(@+5)}{3}$        $y = @$  , dove con @ si indica un numero reale qualunque.

**n.b:** questo significa che il sistema è **indeterminato**, cioè ha infinite soluzioni !

Infatti, se lo risolvi manualmente, dopo pochi passaggi ottieni una identità ( che, appunto, è verificata per ogni coppia di valori x e y che soddisfano l'equazione).

Esempio 2 Risolvere 
$$\begin{cases} 3x - 2(y+1) = x + 2(x - y) \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

Questa volta la calcolatrice dà la soluzione “**false**”, cioè il sistema è **impossibile**.

**SCHEDA 2****Gli ambienti Y = EDITOR e GRAPH**

- Per attivare  $y = \text{editor}$ , premi  $\square$   $\square$  **F1**.

Ti compare una schermata in cui puoi inserire le equazioni delle funzioni in forma esplicita rispetto alla  $y$ .

Un altro modo per entrare in  $y = \text{editor}$  è  $\square$  **APPS** 2 **ENTER** ( oppure,  $\square$  **APPS**  $\odot$  **ENTER** )

- Per visualizzare il grafico di una funzione inserita, controlla che essa sia selezionata, cioè che compaia il segno di spunta alla sinistra dell'equazione, quindi premi  $\square$   $\square$  **F3** ( oppure  $\square$  **APPS** 4 **ENTER** )

Esempio: tracciare il grafico della retta  $y = 3x - 4$

Fai così: in  $y = \text{editor}$  (  $\square$   $\square$  **F1** ) inserisci **3x - 4 ENTER** dopo aver premuto **ENTER** per posizionarti nella riga di introduzione

Quindi premi  $\square$   $\square$  **F3** ed ottieni il grafico.

Ora prova il menu  $\square$  **F2** ( Zoom ) :

NOTA: ogni opzione deve essere inserita premendo **ENTER**

$\square$ <b>F2</b> 4	<b>(ZoomDec)</b>	Ottieni un sistema di assi monometrico
$\square$ <b>F2</b> 6	<b>(ZoomStd)</b>	Il grafico viene “compresso” in verticale, cioè l'unità di misura sull'asse $y$ è minore rispetto a quella dell'asse $x$ .
$\square$ <b>F2</b> 1	<b>(ZoomBox)</b>	Puoi ingrandire una parte di grafico

- L'AMBIENTE **TABLE** -

Questo ambiente è molto interessante in quanto fornisce una tabulazione dei valori della funzione inserita (in  $y = \text{editor}$ ).

Si accede premendo  $\square$   $\square$  **F5** oppure con  $\square$  **APPS** 5 .

Per leggere i valori della tabella ti sposti con i “tasti freccia”  $\uparrow$   $\rightarrow$   $\leftarrow$   $\downarrow$ .

\* \* \*

**RISOLUZIONE GEOMETRICA DI UN SISTEMA LINEARE**

( uso di y = editor e graph )

A questo punto risolviamo graficamente il sistema

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

**PASSAGGI**

Inseriamo le due equazioni in y = editor:

- ◆ **F1** N.B. Se compare una schermata in cui trovi già inserite delle funzioni allora puoi cancellarle così:

seleziona una equazione per volta con i “tasti freccia” e poi premi **CLEAR**

Se invece vuoi solo fare in modo che il suo grafico non compaia allora:

seleziona l’equazione con i “tasti freccia” quindi premi ◆ **F4** (noterai che scompare il segno di spunta a sinistra dell’equazione).

Visualizziamo i loro grafici (simultaneamente):

- ◆ **F3** Compare, sullo schermo, l’intersezione delle due rette.

Ora puoi controllare la soluzione (x; y) usando **F3** (Trace) :

il cursore inizia a lampeggiare. Spostati con i “tasti freccia” lungo il grafico e leggi i valori x e y del punto di intersezione.

E’ utile controllare la soluzione anche dalla tabella di valori: ◆ **F5** (Table).

In questo caso puoi notare che in una tabulazione con passo  $x = 1$ , per esempio, non è possibile leggere il valore della soluzione dalla tabella, perché le rette sono valutate solo per valori interi della x.

## ESERCITAZIONI

- Usando i comandi noti, risolvi le seguenti equazioni ed approssima la soluzione :

**HOME** **F2** solve( ... , x) **ENTER**

$$6(x+2)-3(x+4)+3 = 2x + 4(x+1) \quad \text{R: } -1/3$$

$$(x-3)(x+3)+1-3x = (x-2)(x+2) + 4x - 5 \quad \text{R: } 1/7$$

- Traccia il grafico delle seguenti rette: ( in ambiente  $y = \text{editor}$   $\rightarrow$  altro modo di inserimento : **APPS** 2 )

a)  $y = 3x - 2$

b)  $y = 3x$

c)  $y = 3x + 1$       Quale caratteristica hanno in comune? ...

E quelle seguenti?  $\rightarrow y = 2x + 1$  ;  $y = -(1/2)x$  ...

d)  $2y + 4x - 1 = 0$

e)  $10x + 5x - 10 = 0$

Per le rette d), e) fai così: **HOME F2 (solve ... , y) ENTER** quindi importa il risultato nella riga di inserimento evidenziandolo con i tasti freccia + **ENTER**. Cancella la parte iniziale dell'equazione ( cioè  $y =$  ) poi, col cursore all'inizio della riga, fai **F2 propFrac( ... )** Quindi in ambiente  $y = \text{editor}$  ( **APPS** 2 ) ricopia l'equazione ottenuta e traccia il suo grafico : **APPS**

## OPZIONI PER LA GRAFICA

- Traccia il grafico dell'equazione  $y = x^3 - 4x$ 
  - 1) Con **F3** ( TRACE ) + freccia blu ds/sn puoi visualizzare il cursore sulla linea del grafico e le coordinate corrispondenti.
  - 2) Dall'ambiente  $y = \text{editor}$  evidenzia l'equazione scritta, fai **F6** ( 2<sup>nd</sup> **F1** ) quindi scegli, una per volta , le opzioni di disegno dell'equazione  $\rightarrow$  per vedere il grafico devi tornare all'ambiente di grafica ( **APPS** 4).
  - 3) Per inserire una **scritta nello schermo di grafica** fai 2<sup>nd</sup> **F2** 7 (text): il cursore diventa a forma di crocetta; posizionalo nella zona dello schermo in cui vuoi inserire il testo quindi scrivi.  
 $\rightarrow$  prova quindi a selezionare le altre voci del menu **F7** ( 2<sup>nd</sup> **F2** ). Per cancellare tutti gli elementi accessori inseriti, scegli **F4** .

*IN QUESTO FOGLIO DI ESERCIZI VENGONO PROPOSTE ANCHE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO.*

- Trova la forma esplicita delle seguenti rette:

- a)  $2x + 4 - y = 0$
- b)  $3y - 6x + 12 = 0$
- c)  $y - 2 = 0$
- d)  $x - 4 = 0$
- e)  $x + \frac{1}{2} = 0$

- Fai il loro grafico.

Qual è la caratteristica dei grafici rappresentati da equazioni del tipo  $y = n$  ?

E quella dei grafici dedotti da equazioni del tipo  $x = n$  ?

- Risolvi le seguenti equazioni di 2° grado (con la TI-89 e a mano):

Per ognuna completa il seguente schema:

- a. lista dei tasti per inserire l'equazione .....
- b. A mano ottieni la /le soluzioni .....
- e con la calcolatrice .....
- c. Valori esatti  $\rightarrow$  .....
- d. Valori approssimati  $\rightarrow$  .....

- a)  $x^2 + 2 = 0$
- b)  $x^2 + 5x = 0$
- c)  $\frac{2+3x}{2} = \frac{x^2-1}{3}$

- d)  $2x^2 - 4 - x = 0$
- e)  $x^2 + 4x + 4 = 0$

- Risolvi il sistema 
$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y + 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

e verifica la soluzione in ambiente TABLE.

SCHEMA DI VERIFICA classe 2<sup>a</sup> Liceo della comunicazione ad indirizzo sociale

Nome: \_\_\_\_\_

tempo 1h e 30'

1) Fra le seguenti rette individua quelle fra loro //:

a)  $2x + 3y = 0$

b)  $4x + y - 1 = 0$

c)  $4x + 6y - 2 = 0$

d)  $y - 3 = 0$

e)  $8x + 12y = 0$

A. Passaggi per la risoluzione : ..... → successione dei tasti corrispondente.

B. Copia i grafici delle rette parallele

2) Risolvi il sistema con metodo grafico ( => si usano gli ambienti ..... e .....  
..... )

e con metodo algebrico ( =&gt; si usa l'ambiente ..... )

$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

a. Ottieni la soluzione: ...

b. A cosa serve l'ambiente "TABLE" ?

c. Riporta alcuni valori tabulati ed evidenzia la soluzione dalla tabella.

d. Descrivi i passaggi da fare con la TI-89 per risolvere graficamente il sistema.

e. Scrivi quello che hai nella riga di inserimento prima di premere ENTER per trovare la soluzione con metodo algebrico:

.....

3) Trova la soluzione di  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$   $x = \dots\dots\dots$  $y = \dots\dots\dots$ 

Qual è il significato geometrico della soluzione trovata?

**ESITO DELLA PROVA:** solo due studenti hanno riportato risultati negativi (e questo per il loro poco impegno dimostrato nella fase della sperimentazione).

Gli altri 14 studenti hanno avuto valutazioni dal più che sufficiente al più che discreto.

I risultati sono stati migliori rispetto alle aspettative.

### **OSSERVAZIONI CONCLUSIVE**

L'esperienza è stata accolta dagli studenti con un forte entusiasmo: quasi nessuno conosceva la calcolatrice TI-89 e comunque nessuno l'aveva usata prima .

I commenti iniziali dei ragazzi mi hanno lasciato supporre che si potesse lavorare bene senza troppe dispersioni di tempo: quindi ho approfittato del modo diverso di lavorare per approfondire i concetti presentati in questa unità didattica.

I ragazzi hanno collaborato aiutandosi nell'uso "tecnico" della TI-89 ( ricerca dei tasti, metodo di inserimento delle istruzioni); hanno inoltre discusso sui risultati ottenuti (spesso non coincidevano le soluzioni.... Perché? ) ... e con la parte di grafica si sono (ci siamo) anche divertiti.

Ho notato che "i meno bravi" nel calcolo algebrico hanno potuto finalmente ottenere la soluzione corretta degli esercizi, valorizzando le loro abilità nel metodo risolutivo.

Gli studenti sono d'accordo nel ripetere l'esperienza con le calcolatrici TI-89 il prossimo anno.

### **GUADAGNO FORMATIVO**

L'uso della calcolatrice mi ha permesso di trattare i sistemi sia dal punto di vista algebrico che geometrico, collegando quindi i due concetti già in seconda (anticipo di alcuni aspetti della geometria analitica ).

### **MATERIALE DI SUPPORTO PER LA STESURA DELL'UNITÀ DIDATTICA:**

- Schede utilizzate dai formatori nel corso
- "Informatematica" - M. Venè Michelotti - ED.: Sansoni

## **RISULTATI DEL QUESTIONARIO DI GRADIMENTO PROPOSTO AL TERMINE DELLA SPERIMENTAZIONE**

N° studenti che hanno risposto al questionario: 11

1) Prima del corso le tue competenze sull'utilizzo di una calcolatrice grafico-simbolica erano:

nulle → 6/11

scarse → 4/11

discrete → 1/11

2) In base alle tue precedenti competenze, il lavoro svolto durante il corso ti è stato utile:

abbastanza → 11/11

3) La durata del corso ti è sembrata:

insufficiente → 1/11

sufficiente → 10/11

4) Ritieni sia più utile:

avere a disposizione la calcolatrice a scuola → 10/11

non averla 1/11

5) L'uso della calcolatrice ha favorito l'apprendimento dei contenuti?

Abbastanza → 5/11

Poco → 6/11

6) Ti è piaciuto il corso? Ecco alcune risposte:

Sì perché

- ho imparato delle cose;
- era divertente ed interessante;
- non è cosa da tutti i giorni;
- è un metodo più semplice e veloce;
- aiuta a collegare la matematica con l'informatica;
- è positivo l'utilizzo a scuola di macchine tecnologicamente sempre più avanzate;
- è stata una sperimentazione nuova, a mio parere utile;
- mi è servito ad approfondire le mie competenze sulla calcolatrice;
- mi ha messo a disposizione metodi diversi per risolvere gli esercizi.

7) Ritieni utile l'utilizzo di tale strumento durante l'attività scolastica?

Sì, ... ( 8 risposte ) perché

- dà un metodo risolutivo veloce;
- è un modo più divertente di fare matematica;
- aiuta nell'apprendimento

No, se si usa la calcolatrice troppo, perché poi ci si disabituava al calcolo mentale.

8) Hai qualche proposta o consiglio da dare per un eventuale corso da riproporre?

Durata maggiore del corso.

**Articolo scritto dopo la sperimentazione con le calcolatrici per il giornalino dell'Istituto****MATEMATICA E TECNOLOGIA: UN BINOMIO VINCENTE?**

Può suscitare oggi un certo interesse la matematica ( amata?, temuta?, rifiutata? ) fra gli studenti?

E quale può essere un modo più coinvolgente e curioso per proporla?

Abbiamo trovato una risposta realizzando una sperimentazione basata sull'uso delle calcolatrici grafico-simboliche: in modo particolare ogni studente ha potuto usare, durante le ore di matematica, una calcolatrice TI-89, uno strumento ad elevate potenzialità di calcolo e di grafica rese possibili da software specifici.

Per l'intero mese di febbraio quasi tutte le classi dei due istituti sono state coinvolte nell'esperienza. In 2<sup>a</sup> Liceo, in particolare, è stata trattata, in modo più approfondito, l'unità didattica sui sistemi lineari.

Quindi la classe si è trasformata in un vero e proprio laboratorio in cui la didattica tradizionale ha lasciato spazio alla scoperta guidata di soluzioni a problemi proposti ed alla visualizzazione di oggetti matematici.

In tal modo, con un buon utilizzo della tecnologia nella didattica della matematica e, in generale, delle discipline scientifiche, abbiamo potuto porre maggior attenzione agli aspetti concettuali della materia e minore a quelli di calcolo; di conseguenza è stato dato ampio spazio alla discussione sul metodo risolutivo dei problemi e sul significato dei risultati.

Inizialmente stupiti delle potenzialità di calcolo di queste calcolatrici, gli studenti si sono poi cimentati con curiosità nella risoluzione di equazioni e nella visualizzazione di grafici.

Certo, non è mancata qualche difficoltà iniziale per familiarizzare con le modalità di inserimento dei testi degli esercizi, ma è prevalso comunque l'interesse verso il nuovo modo di risolvere gli esercizi senza troppi calcoli.

Ma allora non c'è davvero più bisogno di "saper far di conto"?

Beh, non è proprio così: infatti, un buon utilizzo di questi strumenti presuppone la capacità di risolvere gli esercizi con carta e penna!

Gli stessi studenti, aperti ed entusiasti nell'usare le nuove tecnologie, dichiarano: "l'esperienza è stata interessante e ci piacerebbe ripeterla il prossimo anno; comunque usare troppo la calcolatrice disabitua la mente a ragionare ed a calcolare".

Come insegnanti aggiungiamo che, valutando il lavoro svolto, l'obiettivo primario della matematica, che è lo sviluppo dei processi logici mentali, non viene tradito dall'utilizzo di queste nuove tecnologie.

Angela Solera Gloria Nobili  
(insegnanti di matematica)

LICEO DELLA COMUNICAZIONE PARITARIO "S.PIO X°"  
E IPSC "Suore Visitandine"