quaderni di CABRIRRSAE

Paolo Carboni
Lucio Carosati

Alcune proprietà delle CONICHE con Cabri géomètre

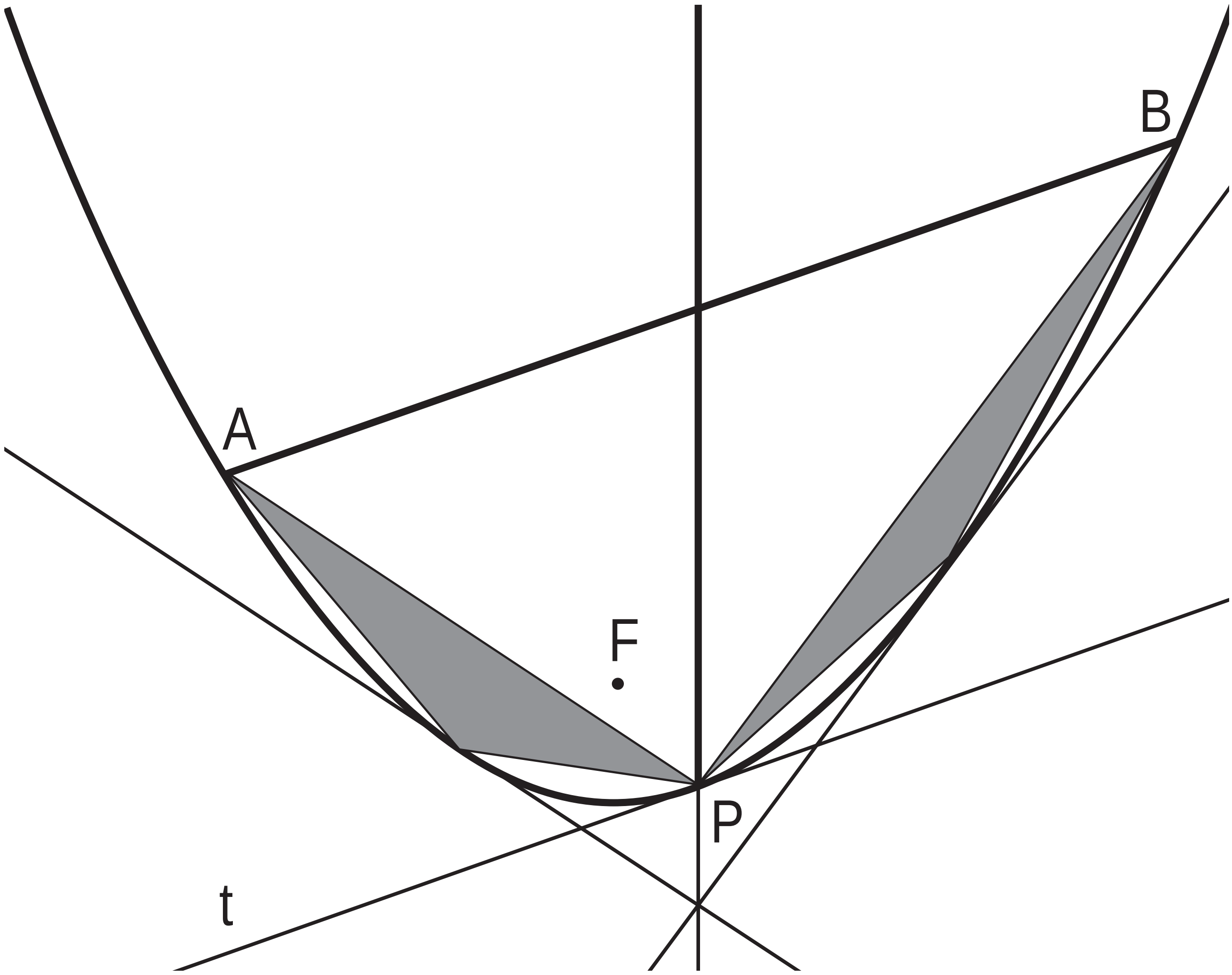
n° 27

Paolo Carboni, Liceo Scientifico Statale “G. Galilei” di Ancona

Lucio Carosati, Liceo Scientifico Statale “G. Galilei” di Ancona

Released Information

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 • Tel. Fax (051) 30.70.73 - Modem (051) 42.920.47 • 40125 BOLOGNA



Alcune proprietà delle CONICHE con Cabri géomètre

Introduzione [1]

Siamo arrivati allo studio, con *Cabri-géomètre*, di alcune proprietà delle coniche, partendo da un argomento del tutto diverso. Volevamo introdurre l'analisi matematica attraverso una breve trattazione del *metodo di esaustione* (detto di Eudosso-Archimede) e ci è sembrato che il problema del calcolo dell'*area del segmento parabolico* fosse adatto allo scopo (vedi **Appendice 1**), anche perché permette di manipolare facilmente gli oggetti (parabola, rette) pure in modo algebrico, disponendo così di due modalità di lavoro (sia geometrico-sintetica che algebrico-analitica).

Strada facendo, tale problema si è rivelato denso di conseguenze, in quanto capace di coinvolgere, nella ricerca della sua soluzione, altri concetti e teorie. Per questo possiamo classificarlo come un "buon problema".

Nella nostra impostazione (ripresa da Archimede e da Apollonio) volevamo riprodurre con Cabri i vari triangolini che ricoprono gradualmente il *segmento parabolico* e verificare che le loro aree si succedono in una opportuna successione geometrica. Lo scopo finale sarebbe stato quello di presentare uno dei problemi di base dell'analisi: il calcolo di aree di figure a contorno curvilineo.

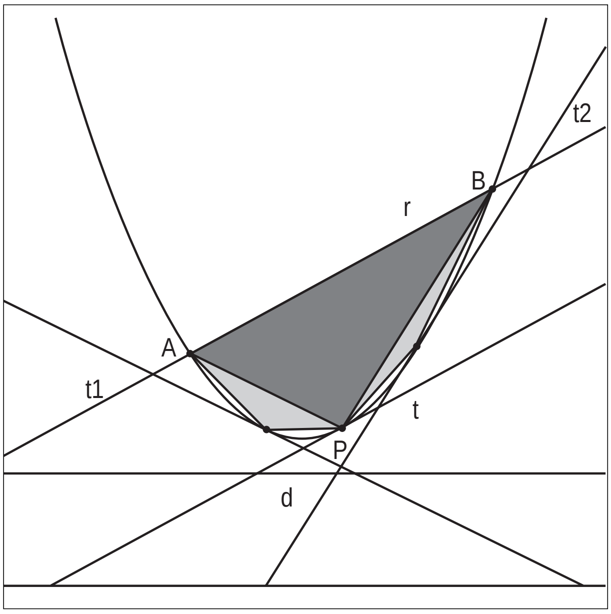


Fig. 1 [0 - Parabola1.fig] [2]

La prima necessità è quella di tracciare una retta tangente ad una parabola e parallela alla corda che delimita il *segmento parabolico* (Fig.1).
Questo perché il punto di tangenza è il terzo vertice del primo triangolo della sequenza di Archimede. I triangoli successivi si costruiscono allo stesso modo, continuando a trovare il punto di tangenza relativo alle nuove corde che si formano nella figura e quindi ai nuovi *segmentini parabolici*, sempre più piccoli.
Cabri fornisce già due macro (nella cartella "macro" che viene costruita durante l'installazione del programma) che permettono di tracciare tangenti ad una conica, ma nessuna delle due risolve il problema come necessario.
È proprio cercando una nuova macro che il discorso si è allargato e ci ha portato a "scoprire" con Cabri alcune proprietà delle coniche (arcinote) e a trovare un percorso operativo proponibile agli alunni di scuola media superiore, perché essi stessi possano arrivare alle stesse "scoperte" ed utilizzarle per risolvere il problema iniziale sul *segmento parabolico*.
In questo modo vengono esaminate proprietà delle coniche che in genere non compaiono nei percorsi didattici di scuola media superiore. Si pongono anche le basi per parlare in modo concreto e non banale di progressioni geometriche (successioni e serie) e, come già detto, si apre la strada al calcolo integrale e al concetto di limite (in questo caso solo intuito geometricamente) e perciò all'analisi.

[0 - Parabola1.fig]

[1] Al termine dei paragrafi vengono riportati i nomi dei file di Cabri (*.fig) da cui sono state estratte le figure e i file *.mac contenenti le macro citate nel paragrafo e descritte nella Appendice 4. Essi possono essere scaricati dal sito: http://www.fardiconto.it
[2] Le didascalie delle figure fanno riferimento ai file di Cabri da cui è stata estratta l'immagine.

L'idea

Il modo classico di procedere per costruire i triangolini è di dimostrare che il punto di tangenza P del primo triangolo è in una posizione "intermedia" (come ascissa) rispetto agli estremi della corda A e B (Fig. 2).
Esiste almeno una dimostrazione, piuttosto accessibile agli alunni, di tipo analitico, ma la curiosità e la sfida è stato di scovare un percorso puramente geometrico da seguire con Cabri, **a costo di qualche eventuale concessione sul piano della dimostrabilità di tutti i passi** (vedi **Appendice 2**).

Come dicevamo, in Cabri esistono due macro fornite con il programma:
• *tangenti ad una conica da un punto;*
• *tangente in un punto della conica*.
Nessuna delle due risolve il nostro problema.

Certamente possiamo costruire un segmento parabolico mediante la sequenza:
• traccio la tangente **t** in un punto P della parabola;
• prendo un punto A sulla parabola;
• traccio la parallela per A a **t**.
Si ha così la corda AB e un segmento parabolico.

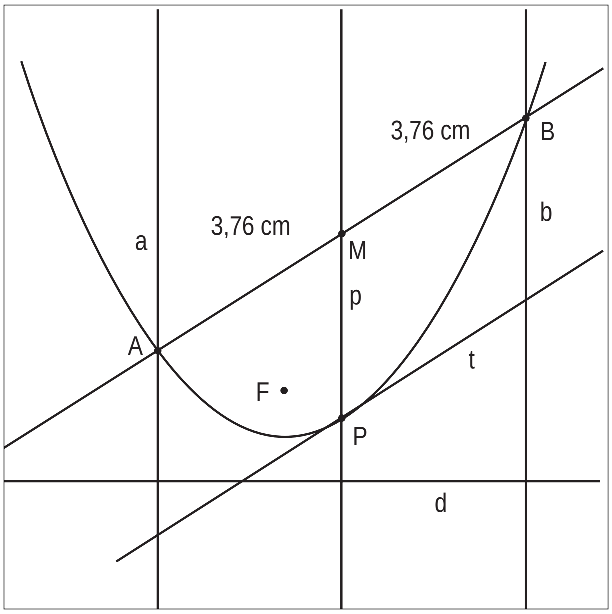


Fig. 2 [0 - Parabola2.fig]

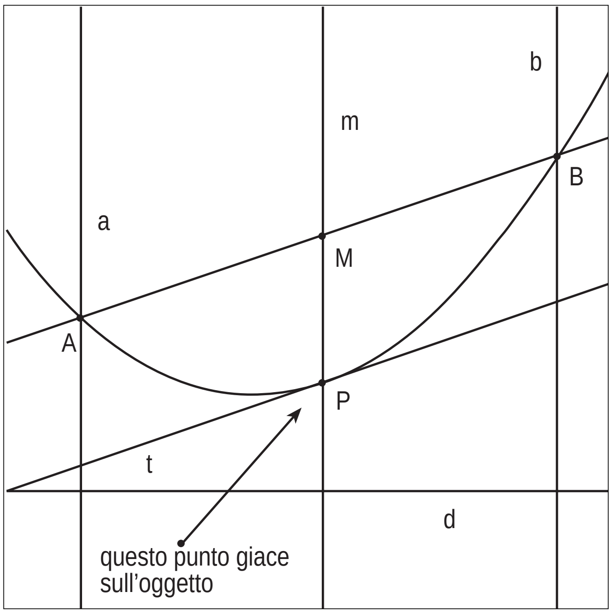


Fig. 3 [0 - idea.fig]

Se ora però prendiamo le corde AP e PB e i segmenti parabolici da esse delimitati, non abbiamo più strumenti per trovare i nuovi punti di tangenza P1 e P2, necessari per costruire i due nuovi triangolini della sequenza.

Serve poter tracciare le tangenti parallele alle due corde ed individuare i punti di tangenza, e non viceversa, come ci permette di fare Cabri.

Si può "dimostrare" con Cabri[3] (Fig. 3) che P si trova sull'asse di simmetria **m** della "striscia" compresa tra le due parallele **a** e **b** (rette perpendicolari alla direttrice **d** e passanti per A e B).
Si può anche "dimostrare" che il punto M, medio tra A e B, rimane tale al variare di A sulla parabola (Fig. 2).
Ciò potrebbe "bastare" per trovare i nuovi triangolini, ma sarebbe più interessante trovare i nuovi punti P proprio tracciando le tangenti parallele alle due corde AP e PB, svincolando il discorso da altri aspetti di carattere numerico.

A questo punto nasce l'idea di esaminare la proprietà di P, punto di tangenza, di trovarsi in posizione "intermedia" tra A

[3] Costruito il segmento parabolico (come detto in precedenza), il punto M (medio tra A e B) e la retta **m** per M parallela alle rette **a** e **b**, verificare l'appartenenza di P ad **m**.

e B anche per le altre coniche, oltre alla parabola.
Si tratta allora di sospendere il discorso sul *segmento parabolico* e cominciare ad indagare sulle coniche in generale.

[0 - Parabola2.fig; 0 - idea.fig]

1. L'ellisse e i "diametri"

Prendiamo un'ellisse e una corda CD. Della corda però forniamo innanzitutto la direzione. Quindi partiamo da una retta **r**, passante per un punto E, e da un punto C sull'ellisse. Poi prendiamo D come intersezione dell'ellisse con la retta per C parallela ad **r**.

Cerchiamo il luogo dei punti medi K della corda CD, al variare di C, e con "sorpresa" scopriamo che stanno su un segmento (Fig. 4).

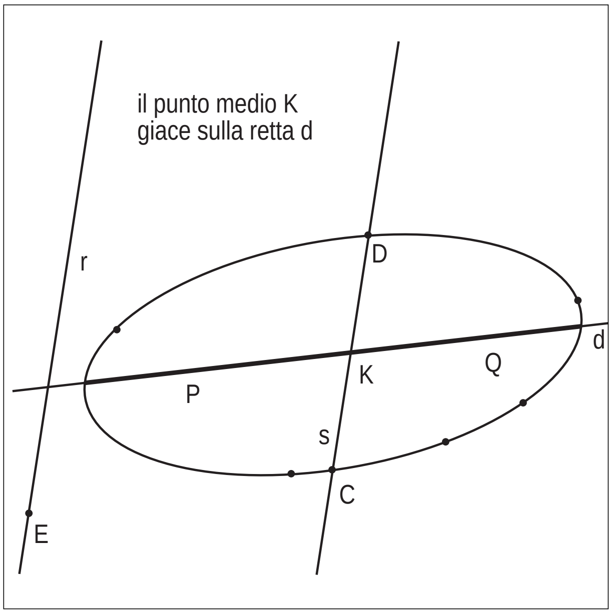


Fig. 4 [1 - Osservazione sull'ellisse.fig]

Abbiamo allora scoperto un teorema:

T1: *Il luogo dei punti medi di una corda CD di una ellisse, parallela ad una retta data* **r***, è un segmento con estremi sull'ellisse.*

In verità "sembra" un segmento.
La "dimostrazione" possiamo farla con Cabri:

Prendiamo la retta **d** *passante per due punti P e Q del luogo e chiediamo a Cabri di verificare l'appartenenza di K alla retta* **d**. *Con una animazione di C facciamo percorrere tutte le posizioni di C sull'ellisse e vedremo che il messaggio dell'appartenenza rimarrà costante*.
Quando C si porta da una semiellisse all'altra, anche D farà lo stesso; ed è logico pensare che passeranno entrambi per uno dei punti di intersezione dell'ellisse con la retta **d**. *In quel momento il punto K, medio tra C e D, sarà anch'esso su tale intersezione; il che dimostra che il luogo contiene anche le due intersezioni.*
Al variare di **r**, varierà la direzione della corda ma non le proprietà del luogo di K.

Viene spontaneo ora pensare alle altre coniche.

Modifichiamo l'ellisse in modo da avere delle iperboli (le parabole con Cabri II non riusciamo ad ottenerle)[4].

[4] Dati quattro punti nel piano, esistono infiniti punti che insieme ai precedenti determinano una ellisse o una iperbole; esiste un solo punto che determina invece una parabola. È impossibile, a tentativi, trovarlo con Cabri.

Basta spostare almeno un punto, di quelli utilizzati per costruire la conica, finché la conica non cambia caratteristica.

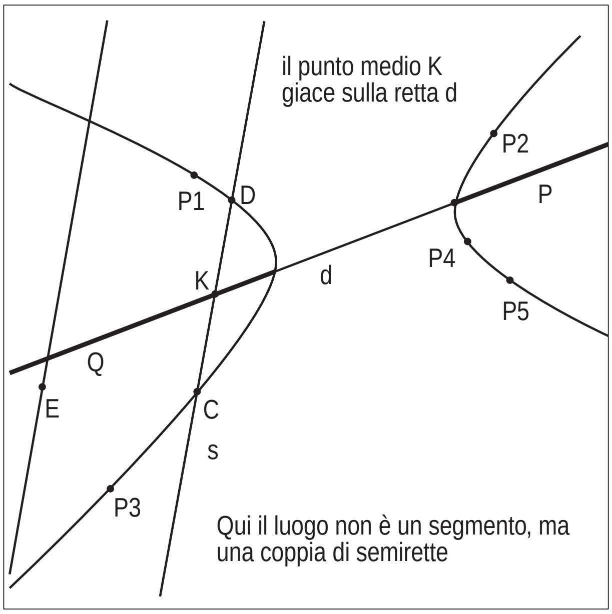


Fig. 5 [1.2 - Osservazione1 sull'iperbole.fig]

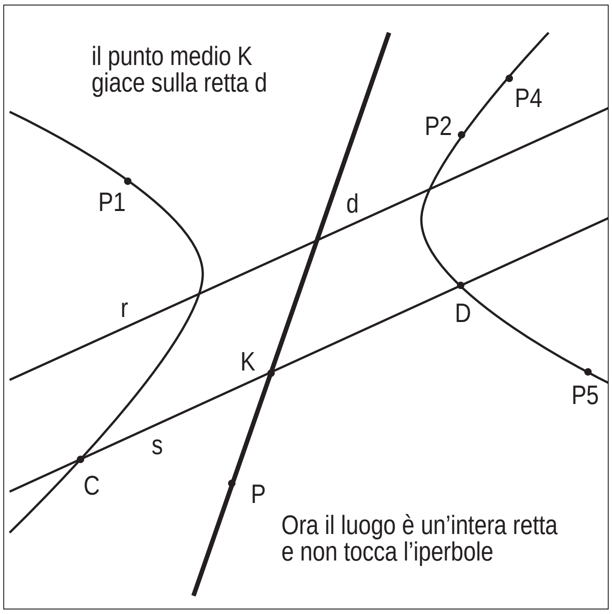


Fig. 6 [1.3 - Osservazione2 sull'iperbole.fig]

Con "sorpresa" ci si accorge che il *luogo* assume forme diverse: talvolta è una *coppia di semirette* che intersecano i due rami dell'iperbole, altre volte è *una retta* che passa tra i due rami (Fig. 5 e 6).
Abbiamo allora il nuovo teorema:

T2: *Per una iperbole il luogo dei punti medi K delle corde CD è:*
una coppia di semirette se la corda CD ha gli estremi su un solo ramo dell'iperbole;
una retta se la corda CD ha gli estremi su due rami distinti.

"Dimostriamo", di nuovo con Cabri, che il teorema è valido.

L'animazione di C, come in **T1**, *e l'osservazione costante della verifica dell'apparteneza di K alla retta* **d** *prova che i due luoghi stanno su una retta.*
Se C e D stanno sullo stesso ramo di iperbole la corda CD sta nella regione convessa come pure il punto medio K, che non potrà stare perciò nella regione non convessa. Il luogo è allora una coppia di semirette (ciascuna illimitata da una parte come il ramo dell'iperbole ad essa collegato).
Se C e D stanno su rami distinti allora la corda CD sta nella regione non convessa come pure i punti K. Il loro luogo perciò non interseca l'iperbole.

Questi diversi luoghi hanno una *proprietà in comune*: sono tutti contenuti in una retta, talvolta in parte, talvolta completandola.
Diamo un nome, allora, a tale retta: la chiamiamo *"diametro"* della conica (più avanti vedremo perché).
È però interessante dare un nome anche al *luogo* di K, ed infine ci potrebbe interessare anche il *segmento* che ha per estremi i punti di contatto del luogo con la conica (segmento che nell'ellisse coincide con il luogo, invece nell'iperbole non solo è tutta un'altra cosa, ma a volte è il complementare del luogo (a parte gli estremi) e altre volte non c'è proprio, se il luogo non interseca l'iperbole).

Conviene allora tenere in considerazione i tre tipi di oggetti e definirli in modo diverso ma collegato.
Chiamiamoli tutti *diametri,* con un termine composto:

diametro-luogo, *diametro-segmento*, *diametro-retta*.

Il più generale dei tre però è il *diametro-retta* sia perché è sempre lo stesso concetto per tutte le coniche sia perché è un oggetto più utile in Cabri.
Perché allora chiamarlo "*diametro*"?

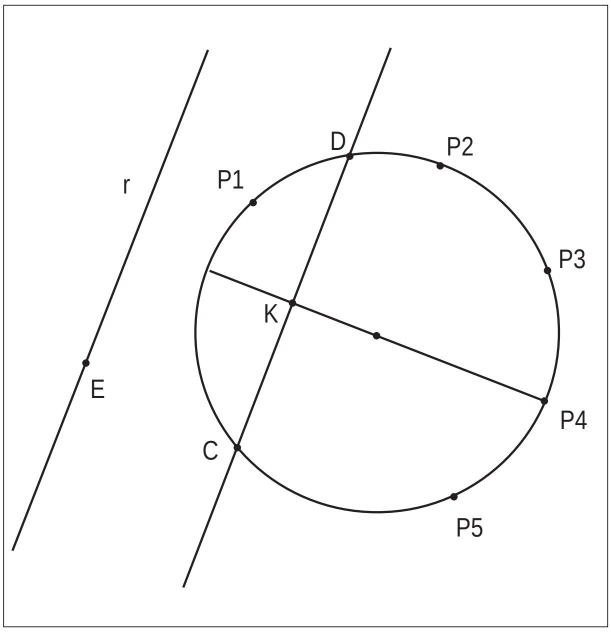


Fig. 7 - [1.6 - Perché diametri.fig]

Basta appoggiare la conica su una circonferenza e variare la retta **r** (cioè la direzione della corda CD), risulta evidente che i luoghi che otteniamo sono proprio i diametri della circonferenza (Fig.7).
Per estensione del concetto, possiamo allora chiamare diametri tutti gli oggetti ottenuti, distinguendoli quando necessario.
In conclusione, fissata una retta **r** e una conica, possiamo determinare i vari tipi di *diametri*, tra cui anche una retta (*il diametro-retta*).
Possiamo anche costruire delle macro per tracciare tali *diametri*.

[1 - Osservazione sull'ellisse.fig; 1.2 - Osservazione1 sull'iperbole.fig; 1.3 - Osservazione2 sull'iperbole.fig; 1.4 - Approfondimento1.fig; 1.5 - Approfondimento2.fig; 1.6 - Perché diametri.fig; 1.7 - Diametro di una conica - macro.fig]
[macro: diametro_retta.mac; diametro_luogo.mac; diametro_segmento.mac]

2. Le tangenti ad una conica

Spostando C fino agli estremi del *diametro-luogo* di una ellisse, scopriamo che i punti C, D e K vanno a coincidere (Fig. 8): il che significa che la retta **s** per C e D, parallela ad **r**, è la tangente alla conica nell'estremo del *diametro-luogo*. Ovviamente le tangenti saranno in generale due, quando ci sono (Fig. 9).

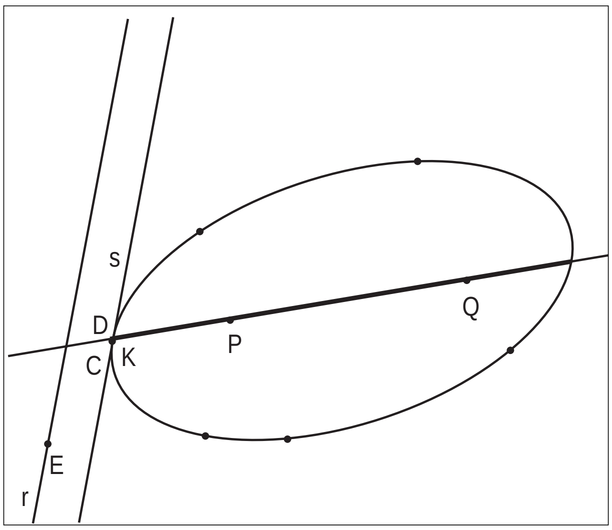


Fig. 8 [2 - Tangenti all'ellisse.fig]

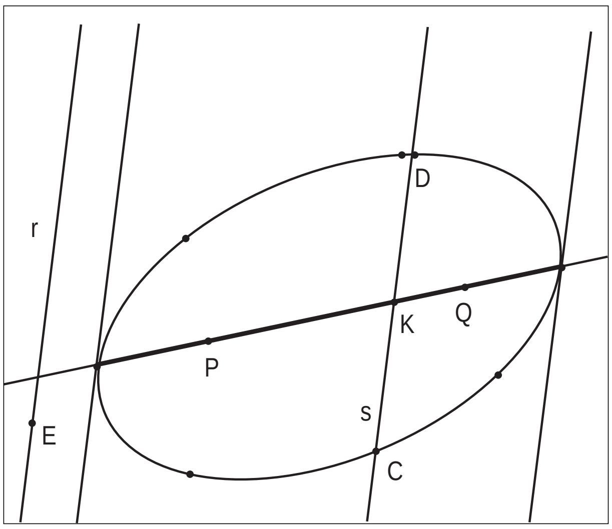


Fig. 9 [2.1 - Tangenti all'ellisse - macro.fig]

Abbiamo allora un altro teorema, “scoperto” con Cabri:

T3: *Le rette, parallele ad* **r**, *passanti per gli estremi del diametro-luogo, sono tangenti alla conica.*

Il teorema è valido anche per le iperboli, con una variante. Come già visto, se il *diametro-luogo* non interseca l’iperbole, allora non ci sono neanche i punti in comune con la conica e pertanto nemmeno le tangenti (Fig. 10 e 11).

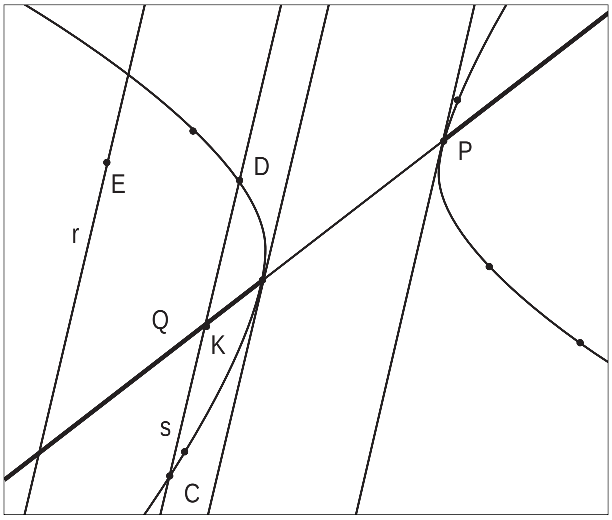


Fig. 10 [2.3 - Tangenti all’iperbole.fig]

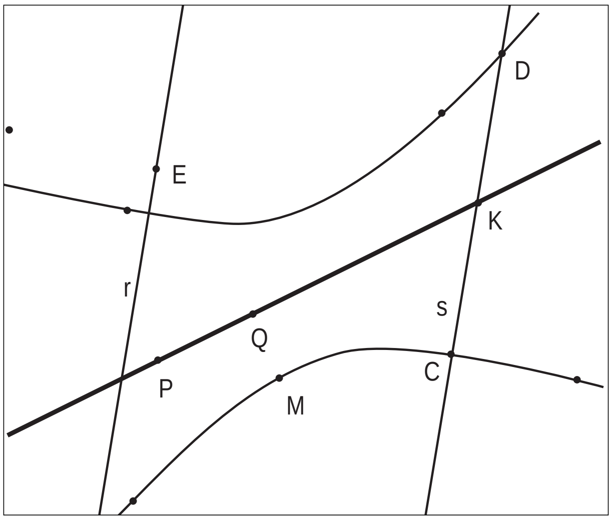


Fig. 11 [2.4 - Tangenti all’iperbole.fig]

Per tracciare le tangenti parallele alla retta **r** iniziale, possiamo costruire una macro.
Tale macro è funzionante anche per le parabole (costruite come luogo) e fornisce in questo caso l’unica tangente possibile.
Il problema iniziale sul *segmento parabolico* si può considerare concluso, perché ora possiamo tracciare con Cabri la tangente alla parabola parallela alla corda che delimita il *segmento parabolico*.
Ma ormai siamo in ballo e non ci piace rinunciare ad altre scoperte che si profilano dietro l’angolo.

[2 - Tangenti all’ellisse.fig; 2.1 - Tangenti all’ellisse - macro.fig; 2.2 - Tangenti alle coniche.fig; 2.3 - Tangenti all’iperbole.fig; 2.4 - Tangenti all’iperbole.fig]
[macro: tangenti_conica.mac]

3. Il centro di una conica

Se facciamo ora ruotare la retta **r**, che fornisce nelle nostre costruzioni la direzione delle corde (Fig. 12: la retta **r** è la retta AA’ passante per due punti della conica), ci accorgiamo che i *diametri* (*luogo* per le ellissi e talvolta per le iperboli, *retta* e *segmento* per tutte) passano sempre per uno stesso punto.

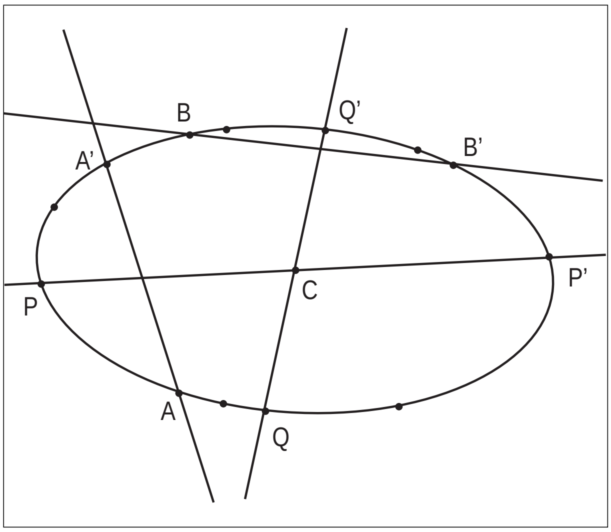


Fig. 12 [3.1 - Centro di una conica - scoperta.fig]

Si può facilmente verificare (sempre con Cabri) che il punto è anche *centro di simmetria* per le coniche stesse: basta tracciare un punto P sulla conica e il suo simmetrico P' rispetto al *centro*. Si tratta poi di far verificare a Cabri l'appartenenza di P' alla conica.

Abbiamo allora "scoperto" i teoremi:

T4: *Per le ellissi e le iperboli i diametri-retta (e gli altri quando è possibile) hanno un punto in comune, cioè costituiscono un fascio di rette.*

T5: *Esiste un centro di simmetria per ellissi ed iperboli ed è il centro del fascio dei diametri-retta.*

Il *centro* sarà quindi definito come il punto comune a tutti i *diametri-retta*.

Ora vorremmo costruire una macro che fornisca il *centro* a partire solo dalla conica (come oggetto iniziale): in effetti esso è un punto associato alla conica (se ce l'ha) e non dipende da altri oggetti.

Per ottenere un *diametro*, serve una retta qualunque **r**, ma nella nostra costruzione (che fornirà la macro "*centro*") dovremo prendere una retta che passa per due punti della conica.

In questo modo, selezionando la conica come unico oggetto iniziale, in realtà forniamo anche l'ambiente in cui varieranno le corde della conica e quindi le rette che le contengono, ed infine i *diametri-retta* associati.

Cabri, nel determinare il *centro*, cerca di individuarlo come luogo al variare degli oggetti che lo generano; poiché tali oggetti sono rette che partono da punti della conica e la conica viene fornita come oggetto iniziale, il programma è in grado di trovarlo.

[3.1 - Centro di una conica - scoperta.fig; 3.2 - Centro di una conica - macro.fig]
[macro: centro_conica.mac]

4. Diametri e coniche

La rotazione della retta **r**, che ha messo in evidenza il centro, fa emergere chiaramente anche un'altra particolarità: il *diametro-retta* **d**, associato alla retta **r**, cambia direzione se **r** ruota rispetto al punto E che è servito per costruirla (Fig. 13).
Se invece spostiamo E, mantenendo quindi **r** nel fascio improprio cui appartiene, il *diametro-retta* associato non cambia.
Allora il *diametro-retta* non è tanto associato alla retta **r**, quanto piuttosto alla sua direzione.

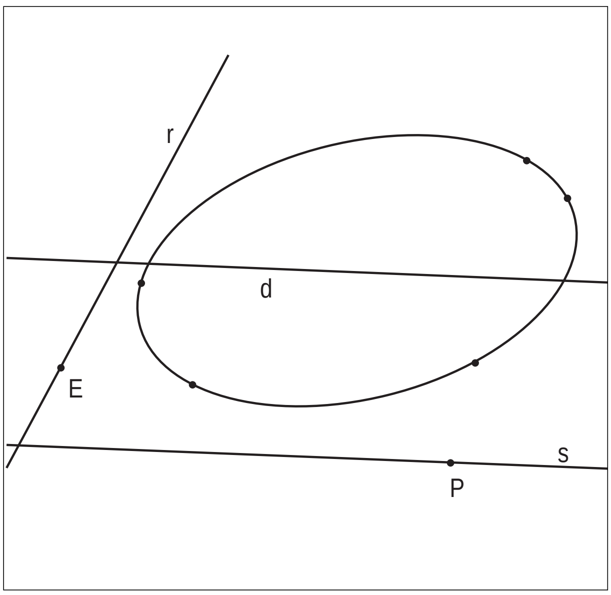


Fig. 13 [4.1 - direzioni coniugate - macro.fig]

Se poi prendiamo un punto qualunque P e la retta **s** parallela a **d** e passante per P, è evidente che **s** avrà sempre la stessa direzione del *diametro-retta* **d**, direzione legata a quella di **r**. Quindi le direzioni di **r** e di **s** sono in corrispondenza biunivoca.
Possiamo chiamarle **direzioni coniugate** (in presenza della conica).

Abbiamo un altro teorema:
T6: *Una conica induce una corrispondenza biunivoca tra direzioni*.

Continuando nell'osservazione, si può pensare di considerare E e P coincidenti; per cui possiamo affermare:
T7: *Dato un qualunque punto P ed una conica (che abbia il centro), essa induce una corrispondenza biunivoca tra le rette del fascio proprio di centro P*.

Infine, poiché il centro della conica è uno dei punti possibili del piano, si arriva alla conclusione che ogni *diametro-retta* della conica è associato ad un altro *diametro-retta*, quello che ha la direzione associata. Li chiameremo **diametri coniugati**.

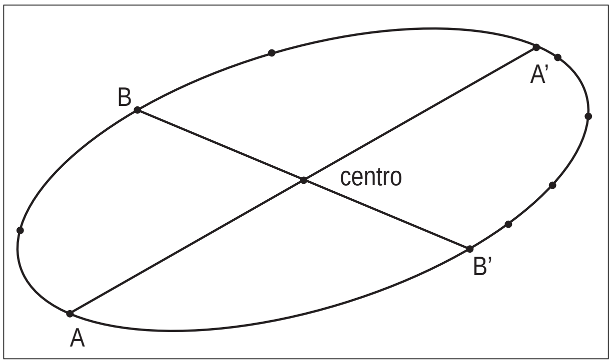


Fig. 14 [4.3 - diametri-segmento coniugati.fig]

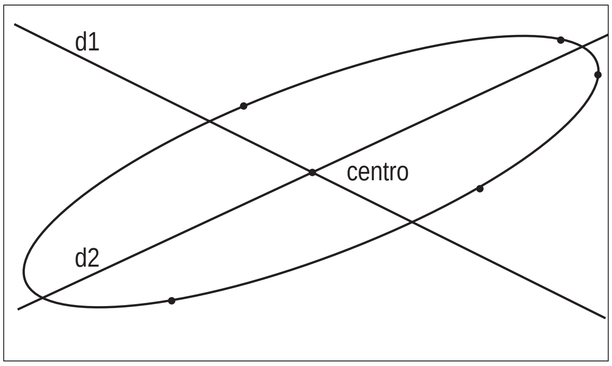


Fig. 15 [4.2 - diametri-rette coniugati.fig]

In definitiva:
T8: *Una conica (che abbia il centro) induce una corrispondenza biunivoca tra i suoi diametri-retta*.

Finora abbiamo parlato di *diametri-retta*, quelli più generali.
Che cosa accade ai *diametri-luogo* e ai *diametri-segmento* ?
Osservando le figure e giocherellando un po' con i punti che generano la conica, in modo da ottenere ellissi e iperboli, si nota bene che:

T9: *Per una ellisse, ad un diametro-luogo (cioè diametro-segmento) corrisponde in modo biunivoco un altro diametro-luogo*.

T10: *Per una iperbole, ad un diametro-luogo che la interseca (coppia di semirette) corrisponde, in modo biunivoco, un diametro-luogo che non la interseca (coincidente con un diametro-retta) e viceversa*.

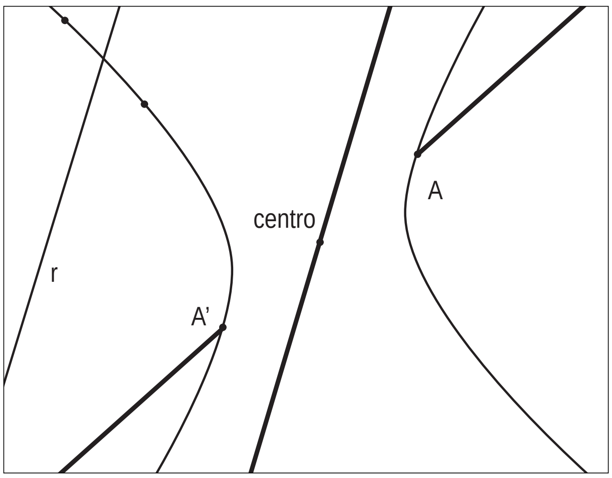


Fig. 16 [4.5.1 - diametri-luogo coniugati iperbole.fig]

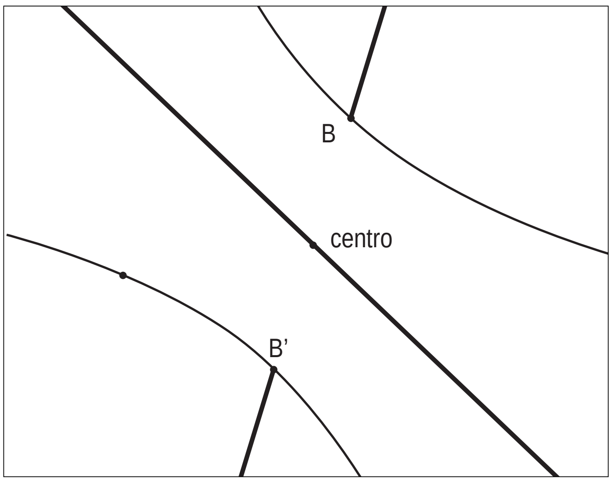


Fig. 17 [4.5.2 - diametri-luogo coniugati iperbole.fig]

Come in precedenza possiamo costruire delle macro per tracciare questi oggetti coniugati.

[4.1 - direzioni coniugate - macro.fig; 4.2 - diametri-rette coniugati.fig; 4.3 - diametri-segmento coniugati.fig; 4.4 - diametri-luogo coniugati.fig; 4.5.1 - diametri-luogo coniugati iperbole.fig; 4.5.2 - diametri-luogo coniugati iperbole.fig]
[macro: retta_coniugata.mac; diam_seg_coniugato.mac; diam_luogo_coniugato.mac]

5. Tangenti alle coniche

Queste scoperte ci permettono di risolvere elegantemente i problemi relativi alle tangenti alle coniche.
Ricordiamo che, data una direzione, la conica associa ad essa un'altra direzione (T6) e un *diametro-luogo*; se poi tale *diametro-luogo* interseca la conica allora possiamo trovare due tangenti, parallele alla prima direzione, nei punti di intersezione (T3).
Allora il problema della ricerca di tangenti è collegato con i *diametri* e le *direzioni coniugate*. Le soluzioni che troveremo sono strettamente legate alle macro che via via abbiamo prodotto: quindi riguardano problemi che possono essere risolti con Cabri.

Problema 1: *Trovare la tangente alla conica parallela ad una corda (o una retta).*

È il problema legato al segmento parabolico: data la corda vorremmo tracciare la tangente alla parabola parallela alla corda. Ora sappiamo risolverlo per tutte le coniche, ma ora parliamone solo per ellissi e iperboli.

Soluzione (Fig. 18)
- La corda data individua una direzione cui è associato il diametro coniugato (T6).
- Tale diametro interseca la conica (non sempre, ma se non la interseca il problema non ha soluzioni) (T1 e T2) in due punti, che sono i punti di tangenza cercati (T3).
- Le rette passanti per tali punti e parallele alla corda sono le tangenti cercate (T3). Sono due: bisognerà scegliere quella che interessa (Fig. 18).

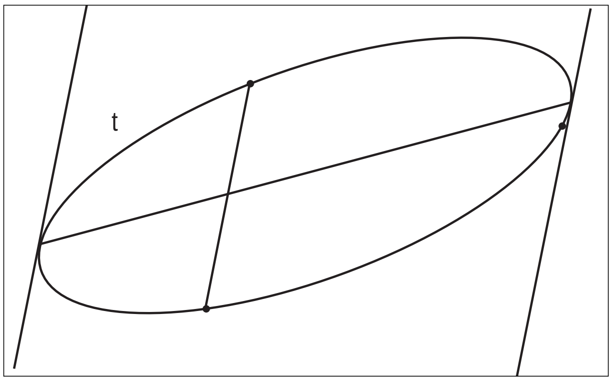


Fig. 18 [5.1 - tangente parall corda.fig]

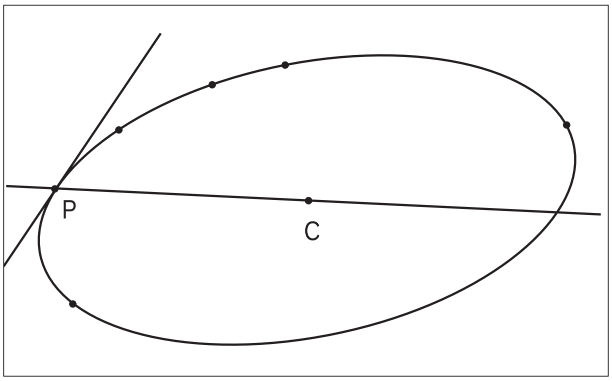


Fig. 19 [5.2 - tangente conica in P.fig]

Problema 2: *Trovare la tangente ad una conica in un suo punto P.*

Soluzione (Fig. 19)
• Trovare il *diametro-retta* che interseca la conica in P, che è la retta che passa per P e per il centro C della conica (T6).
• Individuata la retta PC, si trova la sua coniugata passante per P (T6): essa è la tangente cercata (T3).

Problema 3: *Data una corda su una conica, trovare il punto P da cui partono le tangenti alla conica negli estremi della corda*.
Soluzione (Fig. 20)
È un problema di facile soluzione ormai, visto che sappiamo trovare la tangente alla conica in un suo punto.
• Trovare le due tangenti negli estremi della corda.
• Trovare il punto P intersezione delle tangenti.

Di fatto abbiamo il cosiddetto **polo di r**, dove **r** è la retta che contiene la corda AB: essa è detta **polare di P**.

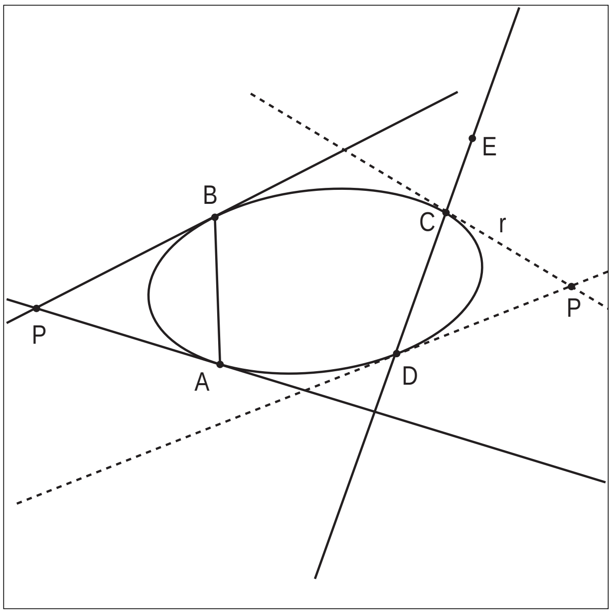


Fig. 20 [5.3 - P intersezione tangenti.fig]

Possiamo costruire due macro:
- una che associa P alla corda AB (*P_int_tang.mac*);
- un'altra che associa P alla retta **r** contenente AB, quindi che trova il polo data la polare (*polo_di_r.mac*) (questa macro trova il polo solo se **r** interseca la conica).

Il seguente problema è il problema inverso, ma è più difficile e per ora non abbiamo la soluzione in questo contesto (i problemi 2 e 4 sono già risolti dalle macro fornite con Cabri II, come già detto nel paragrafo "L'idea").

Problema 4: *Trovare le tangenti ad una conica passanti per un punto P che non sia sulla conica.*

[5.1 - tangente parall corda.fig; 5.2 - tangente conica in P.fig; 5.3 – P intersezione tangenti.fig]
[macro: tang_in_P.mac; P_int_tangenti.mac; polo_di_r.mac]

6. La parabola

Eravamo partiti dal segmento parabolico e, dopo qualche interessante digressione e scoperta, ci ritroviamo a dover parlare di parabole, finalmente.
Lavorando con le coniche di Cabri, si scopre che dai cinque punti necessari alla costruzione non si riesce ad ottenere una parabola. Si ottengono sempre ellissi o iperboli: sarà per la poca precisione del mouse, che si muove in modo teoricamente continuo, ma di fatto discreto o sarà per la mano malferma ... comunque le apparenti parabole che si ottengono evidenziano la loro natura di iperboli, quando andiamo ad esaminare l'intero foglio (File/Mostra il disegno). Lo stesso Cabri ci segnala, quando puntiamo vicino alla curva, che è un'iperbole (vedi nota 4 a pag.7).
Siamo costretti perciò a costruirci una macro che dia sicuramente una parabola e di conseguenza dovremo fornire inequivocabilmente sia il fuoco che la direttrice.

La costruzione è nota e piuttosto semplice, basata sulla definizione geometrica (Fig. 21 e 22 *vedi pagina seguente*).

Ottenuto il luogo geometrico, si costruisce la conica per cinque punti appartenenti al luogo e così abbiamo proprio una parabola. Cabri la riconosce come tale (avvicinandoci col mouse vediamo finalmente comparire la scritta "questa parabola") e ci permette di manipolarla come curva.

Dalla costruzione si deduce facilmente un metodo per trovare la tangente in un punto P della parabola (è l'asse del segmento FA (Fig. 22)).

[6.1- parabola(F,d) luogo.fig; 6.2 - parabola(F,d) curva.fig; 6.3 - tang_parabola in P.fig]
[macro: parabola_F_d.mac; tang_parabola_F_d in P.mac]

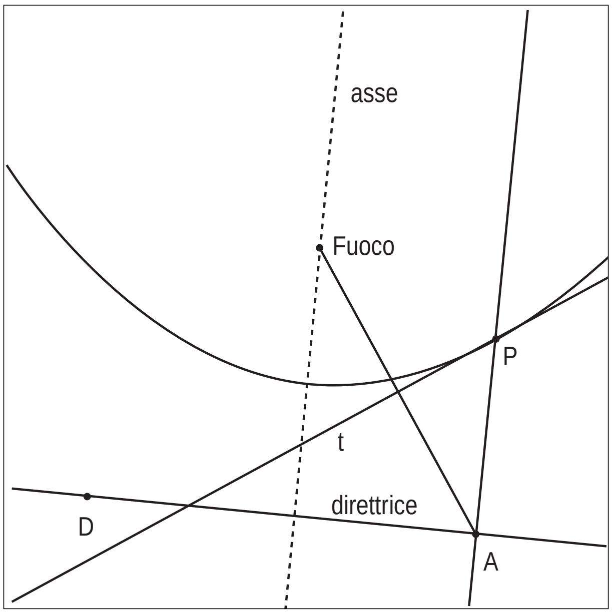


Fig. 21 [6.2 - parabola(F,d) curva.fig]

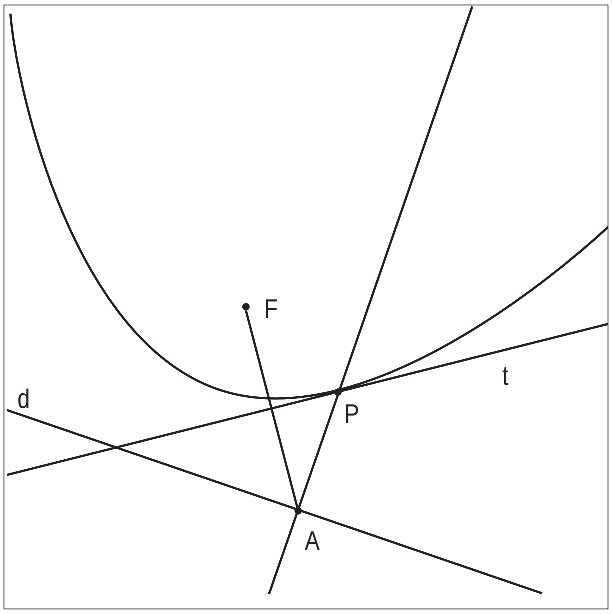


Fig. 22 [6.3 - tang parabola in P.fig]

7. I diametri della parabola

Per la parabola possiamo ripetere l'esperienza della ricerca del luogo dei punti medi K di una corda AB, che varia mantenendosi sempre parallela ad una direzione, data da una retta **r** (Fig. 23).

Per analogia con le altre coniche potremo parlare di *diametro-luogo* (troveremo una semiretta contenuta nella parte di piano convessa delimitata dalla parabola, quella che chiamiamo "dentro la parabola") e *diametro-retta* (la retta che contiene il *diametro-luogo*). Non ha senso il *diametro-segmento*, visto che la parabola è illimitata.
I *diametri* ottenuti hanno direzione perpendicolare alla direttrice della parabola, cioè sono paralleli all'asse (basta verificare la perpendicolarità con Cabri).

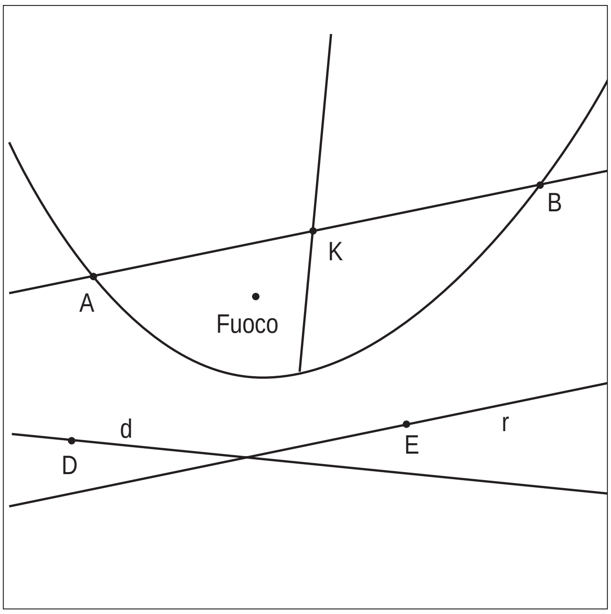


Fig. 23 [7.1 - diametri della parabola.fig]

Abbiamo, come in precedenza, dei teoremi.

T11: *Data una parabola e un fascio di corde parallele, il luogo dei punti medi K delle corde è una semiretta, interna alla parabola e con estremo su di essa. La direzione di tale luogo è quella dell'asse della parabola.*

“Dimostriamolo”

Che si tratti di punti allineati si riesce a “dimostrare” con Cabri come in **T1**. *Inoltre le corde sono interne alla parabola per definizione (la zona convessa è un insieme convesso) e quindi il luogo è nella zona convessa.*
Il luogo è illimitato. Infatti basta costruire la corda partendo da un punto A sulla parabola e poi tracciare la retta parallela ad una retta data **r**. *Poiché la parabola è illimitata, anche il luogo di K lo è. Inoltre quando A e B coincidono, la corda si riduce al punto K, che ovviamente sta sulla parabola e quindi l’estremo del luogo sta sulla parabola (sempre come in* **T1**).
Infine la perpendicolarità del diametro-luogo con la direttrice si “dimostra” con Cabri, verificando la perpendicolarità del diametro-retta che lo contiene.

Ora cambiamo la direzione di **r** (un’animazione come sempre ci è molto utile).
Ci sorprende osservare che i *diametri-luogo* (e *retta*) si mantengono paralleli.

T12: *I diametri di una parabola sono paralleli.*

Avevamo già verificato che il *diametro-retta* della prima costruzione era perpendicolare alla direttrice, quindi è ovvio che i *diametri* siano paralleli.

Ritroviamo, come per ellissi e iperboli, un legame tra *direzioni* (di **r**) e *diametri*.
Per la parabola però tutti i *diametri* hanno una sola *direzione*. Quindi la parabola non induce una corrispondenza biunivoca tra direzioni del piano, ma solo tra le *direzioni* e le *rette* del fascio parallelo all’asse.

T13: *Ogni direzione del piano è associata in modo biunivoco ad una retta del fascio parallelo all’asse della parabola, esclusa la direzione dell’asse stesso che non è associata ad alcuna retta di tale fascio.*

Continuiamo le osservazioni.
Se prendiamo una direzione qualunque e le corde che hanno tale direzione, otteniamo un solo *diametro*, che interseca la parabola in un determinato punto P. P è il punto K, quando la corda si riduce ad un punto (A e B coincidono) e la retta che contiene la corda diventa tangente alla parabola.

Allora, per avere la tangente parallela ad una corda, dovremo prima trovare il *diametro-luogo* associato alla direzione della corda, poi il *diametro-retta* che lo contiene, il punto P di intersezione con la parabola ed infine la retta parallela alla corda per P.

È così risolto, di nuovo, il problema posto all’inizio di questo lavoro (in un modo diverso e specifico solo per le parabole).

È possibile ora costruire le macro per trovare il *diametro-luogo* e il *diametro-retta* associati ad una direzione, la *tangente* alla parabola parallela ad una direzione determinata da una sua corda ed infine il *Triangolo di Archimede*, che ha un lato sulla corda e il terzo vertice nel punto P di intersezione tra la parabola e la sua tangente parallela alla corda.
Mediante l’ultima macro possiamo velocemente osservare il riempimento del segmento parabolico con i triangolini, sempre più piccoli e sempre più vicini alla parabola, previsti dal *metodo di esaustione*.

C’è un’ultima osservazione che possiamo fare.

Abbiamo trovato una corrispondenza biunivoca tra le direzioni del piano e i *diametri* della parabola, e quindi con i punti della parabola e anche le possibili tangenti.

C’è però una direzione che sfugge a questa corrispondenza, quella dell’asse (perpendicolare alla direttrice): in questo caso le corde parallele all’asse sarebbero semirette, quindi dovrebbero essere gli stessi diametri, e non avrebbero il punto medio.
Allora alla direzione dell’asse non corrisponde alcun diametro.

Riflettendo ancora possiamo notare che si viene a determinare una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e quelli di una parabola.

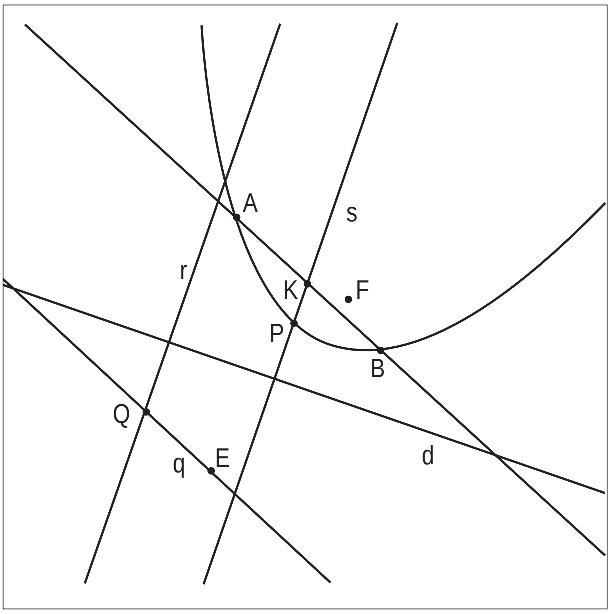


Fig. 24 [7.4 - diametri e direzioni.fig]

Prendiamo infatti una retta **r** parallela all'asse ed un punto esterno E (Fig. 24).

Consideriamo un punto Q sulla retta **r** e la retta EQ. Al variare di Q su **r**, otteniamo tutte le direzioni del piano, esclusa quella di **r**. Ad ogni direzione viene associato un fascio di corde parallele (sulla parabola) e ad esso un *diametro-luogo*, che ha con la parabola il punto P di contatto.
Quindi ad ogni direzione del piano, esclusa quella di **r**, è associato un punto P della parabola.

Viceversa, se prendiamo un punto P della parabola, possiamo prendere il *diametro-luogo* di cui è estremo e il fascio di corde parallele che lo genera; quindi la direzione del fascio ed infine il punto Q su **r**, tale che EQ abbia la direzione di tale fascio.

Se poi la retta **r** non è parallela all'asse, non è un problema, perché può essere posta in corrispondenza biunivoca con qualunque altra retta e quindi anche con una **t** parallela all'asse, e la corrispondenza biunivoca si mantiene.

Abbiamo dimostrato allora il teorema:

T14: *C'è una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta* **r** *parallela all'asse e quelli della parabola, anzi tra una qualunque retta e la parabola.*

C'è anche una interessante singolarità: ad entrambe (retta **r** parallela all'asse e parabola) manca qualcosa legato alla direzione di **r** (cioè dell'asse), quello che più in là si potrà chiamare il "punto all'infinito" (del fascio parallelo all'asse e della parabola).

[7.1 - diametri della parabola.fig; 7.2 - diametri della parabola - macro.fig; 7.3 - tangente parabola in P.fig; 7.4 - diametri e direzioni.fig]
[macro: diam_luogo_parabola.mac; diam_retta_parabola.mac; tang_parab_corda.mac; Triangolo_di_Archimede.mac]

8. Approfondimento: un luogo particolare

Tutti i ragionamenti sin qui svolti partono da considerazioni sul luogo del punto medio di una corda con direzione parallela ad una retta data.
Può essere interessante indagare sul luogo di M (punto medio della corda AB di una conica), quando la direzione della corda non è prefissata.

Allo scopo, iniziamo l'indagine dalla circonferenza.

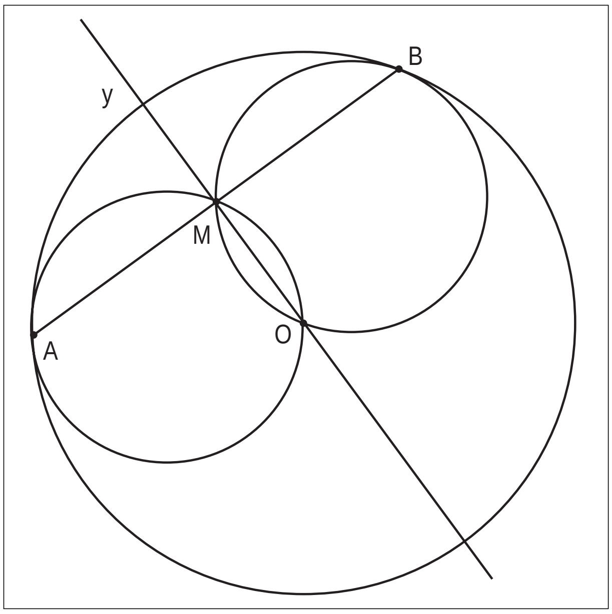


Fig. 25 [8.1 – Luogo di M, punto medio di AB, al variare di A e di B]

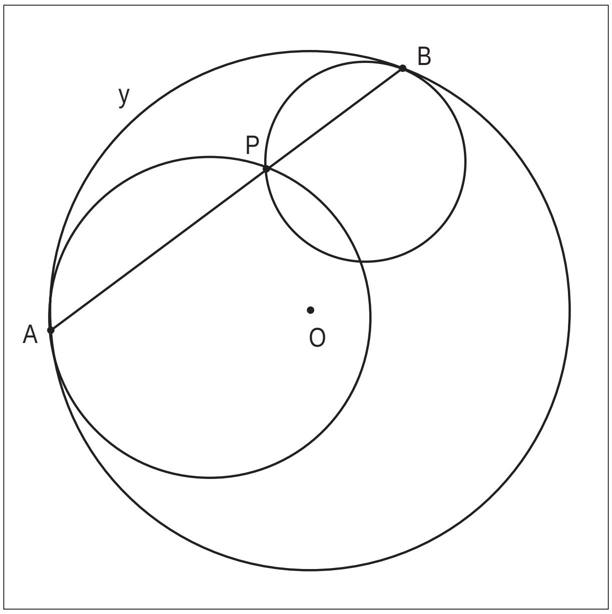


Fig. 26 [8.2 – Luogo di M, punto qualunque di AB, al variare di A e di B]

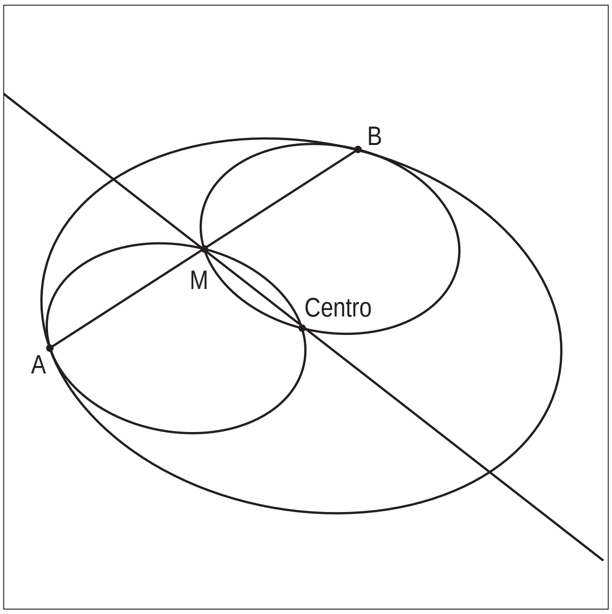


Fig. 27 [8.3 - 8.1 – Luogo di M, punto medio di AB, al variare di A e di B]

Nella prima figura (Fig. 25) troviamo i risultati ottenuti con Cabri.

Il luogo di M al variare di A è la conica MOA, il luogo di M al variare di B è la conica MOB.
Il comando conica ci ha permesso di "verificare" che il luogo di M al variare di B può essere una "ellisse circolare", cioè una circonferenza, come d'altra parte l'altra curva luogo di M al variare di A.
Quindi ammesso che i due luoghi siano due circonferenze, "si vede" che esse sono tangenti alla circonferenza originaria e hanno in comune i punti M ed O (centro della circonferenza iniziale); inoltre, tracciato il diametro coniugato alla corda AB, esso "risulta" l'asse radicale delle due circonferenze.

Per trarre ulteriori osservazioni, consideriamo un generico punto P di AB e con il comando luogo, tracciamo le curve descritte da P al variare di A e di B sulla circonferenza.

Dalla seconda figura (Fig. 26) appare evidente che qualunque sia il punto P su AB il luogo è in ogni caso una coppia di circonferenze tangenti a quella iniziale, passanti per P, ma non per O.

Per analogia, nel caso di un'ellisse, il luogo di M al variare di A e di B dovrebbe essere costituito da due ellissi tangenti all'ellisse iniziale e passanti per M e per il centro della conica.

La terza figura (Fig. 27) mostra che i risultati previsti sono tutti confermati.

Inoltre, tracciato il diametro coniugato alla corda AB, si può verificare che esso è la secante comune alle due *ellissi-luogo*.

Se, come già fatto nel caso della circonferenza, consideriamo un generico punto P sulla corda AB (Fig. 28); il luogo descritto da P al variare di A e di B è comunque costituito da due ellissi tangenti a quella iniziale e passanti per P, ma non per il centro della conica.

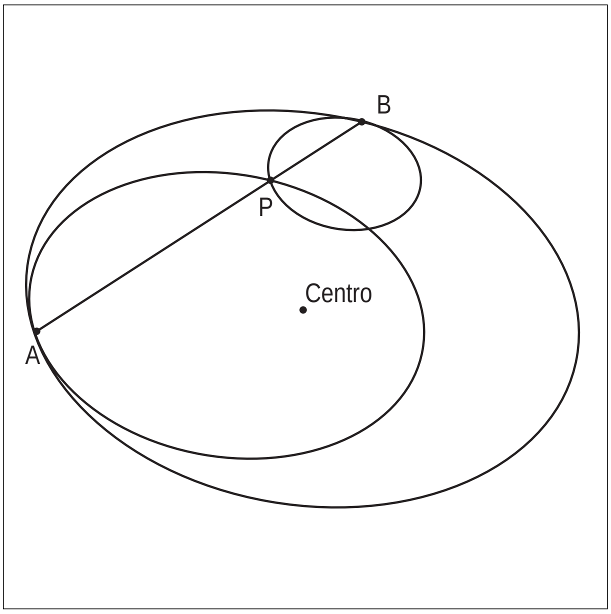


Fig. 28 [8.4 - 8.1 – Luogo di M, punto qualunque di AB, al variare di A e di B]

Le indagini svolte ci hanno condotto a determinare una nuova modalità di costruzione del diametro coniugato ad una corda e della determinazione del centro di una conica (Fig. 27).

Infatti, tracciata la corda AB ed individuato il suo punto medio M:
1. si tracciano i luoghi del punto M al variare di A ed di B, trasformandoli con il comando "conica" in altrettante coniche;
2. con il comando "intersezione di due oggetti" si individua il centro della conica C;
3. con il comando "retta" (per M e per C) si traccia il diametro coniugato ad AB.

Tutto ciò può essere trasformato in una macro.

9. L'esperienza in classe

Il lavoro sin qui presentato è il frutto di una ricerca didattica svolta, come più volte detto, a partire dalla necessità di affrontare con Cabri il problema dell'area del segmento parabolico.
Una volta chiariti tutti gli aspetti del problema, è nata l'esigenza di costruire un percorso didattico su cui far lavorare i nostri alunni in classe.
Sulla base della nostra esperienza abbiamo pensato di seguire, ancora una volta, una prassi didattica da noi più volte sperimentata.
Si tratta di una tecnica che possiamo definire "a spirale", perché, proprio come avviene se ci si muove lungo una spirale, partendo da una posizione distante, lentamente, ci si avvicina sempre più al centro.
Per ragioni soprattutto di tempo, abbiamo deciso di affrontare con la classe solo una parte del percorso sin qui illustrato, quello della scoperta dei diametri luogo e delle tangenti ad una conica.

La classe “cavia” era una classe terza P.N.I., giunta alla fine del percorso usuale di geometria analitica.

Fase 1. *Presentazione del problema e primo approccio con tutta la classe*

Durante la prima lezione, svoltasi nel laboratorio di informatica, l’insegnante ha illustrato alla classe il problema da indagare, così formulato:

“E’ data una parabola γ ed una sua corda AB. Determinare una costruzione in Cabri II che ci consenta di tracciare la retta tangente alla parabola parallela alla corda AB.
Come approfondimento, indagare una situazione analoga a quella proposta per una conica qualsiasi.”

Come primo approccio al problema si suggeriva di tracciare con Cabri II una parabola, sfruttando la sua definizione come luogo geometrico, e di fissare su di essa due punti A e B estremi della corda.
Poiché la cosa era già stata svolta in più di un’occasione, in pochissimo tempo, in tutti i monitor è apparsa la parabola richiesta, il suo fuoco, la sua direttrice e la corda AB.
Il compito successivo, ovviamente, era quello di disegnare la tangente alla parabola parallela alla corda tracciata.
Gli studenti sapevano dell’esistenza della macro che consente in Cabri II di disegnare la retta tangente ad una conica in un suo punto, ma solo alcuni di loro hanno pensato di servirsene per tentare di risolvere la questione proposta.
Questi ultimi, dopo aver disegnato un punto sulla parabola (con il comando “punto su un oggetto”) hanno tracciato la retta tangente in quel punto alla parabola, poi con il mouse hanno spostato il punto sulla parabola, fino a quando la retta tangente non risultava (“ad occhio”) parallela alla corda precedentemente tracciata.
Dopo aver illustrato a tutti questa possibilità e discusso sulla sua validità, abbiamo concordato che si dovesse procedere ad un’indagine più approfondita.
La prima lezione volgeva ormai al termine, per cui il compito di approfondire l’indagine veniva affidato ad un gruppo di sei studenti che si erano offerti di proseguire il lavoro a casa e di riferire (la settimana successiva) alla classe le conclusioni raggiunte.
L’insegnante aveva suggerito loro di rivedere, “passo a passo”, la costruzione della parabola!

Fase 2. *Discussione del lavoro di gruppo*

Alla fine della settimana di lavoro il gruppo che si era offerto di proseguire l’attività iniziata in classe riferiva a tutti i risultati raggiunti.
Riassumendo, si trattava di due importanti osservazioni:

1. Durante la costruzione della parabola si può notare che la retta asse del segmento FQ è anche tangente alla parabola nel punto P (Fig. 29).
   Condotta, quindi, la corda AB, si può muovere il punto Q sulla retta **d**, fino a che l’asse di FQ non diventa parallelo ad AB.

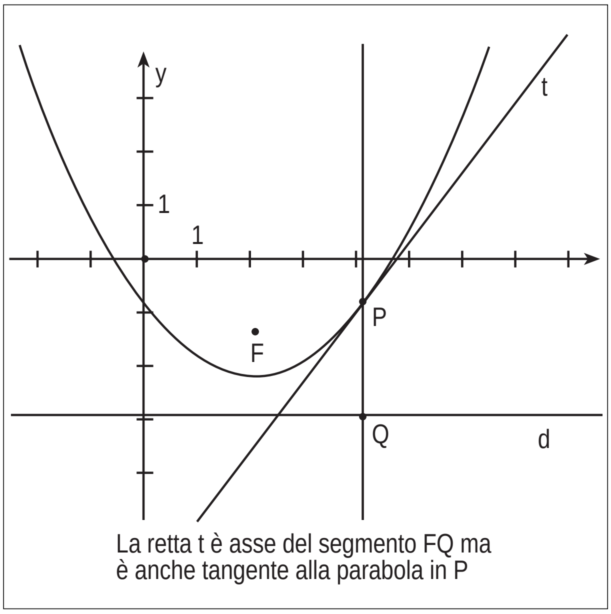


Fig. 29 [9.1 – 1° Osservazione]

2. Completata la costruzione, si può osservare che la retta PQ seca la corda AB nel punto M, che sembra essere il punto medio di AB stesso (Fig. 30).
   Questa proprietà può essere facilmente verificata, tracciando dal punto medio di AB la perpendicolare alla direttrice e dal punto d'intersezione Q, l'asse del segmento FQ. Chiedendo a Cabri II il parallelismo tra la tangente e la corda, otteniamo una conferma della validità della nostra osservazione.

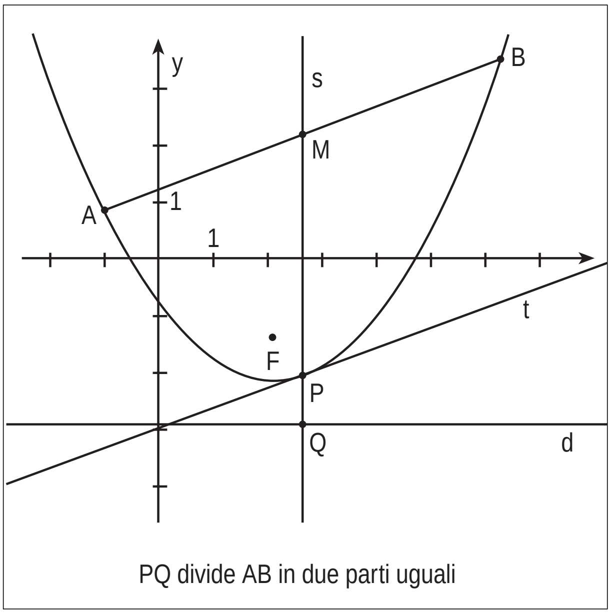


Fig. 30 [9.2 – 2° Osservazione.]

Fase 3: *Generalizzazione del problema ad una conica qualunque*

Le osservazioni e le conseguenti costruzioni risolvevano brillantemente la prima parte del problema.
Rimaneva da affrontare la generalizzazione al caso di una conica qualunque.
Era compito dell'insegnante guidare gli alunni lungo il percorso della generalizzazione.
Il problema da affrontare venne formulato in questo modo (Fig. 31):
"Tracciare una conica qualsiasi ed una retta **r** qualunque. Fissato sulla conica un punto A, disegnare la corda AB parallela ad **r** (Fig. 31).
Indagare e fare congetture sulle posizioni assunte dal punto medio M di AB al variare di A e in base ai risultati raggiunti, determinare come sia possibile ottenere le tangenti alla conica parallele ad AB. Si suggerisce di tracciare inizialmente un'ellisse e di generalizzare successivamente i risultati conseguiti a tutte le altre coniche."
Questo compito venne affidato a due gruppi di sei alunni ciascuno; gruppi nei quali tre degli elementi facevano parte del gruppo che aveva già determinato la soluzione della prima parte del problema.
Il tempo a disposizione era di sette giorni.

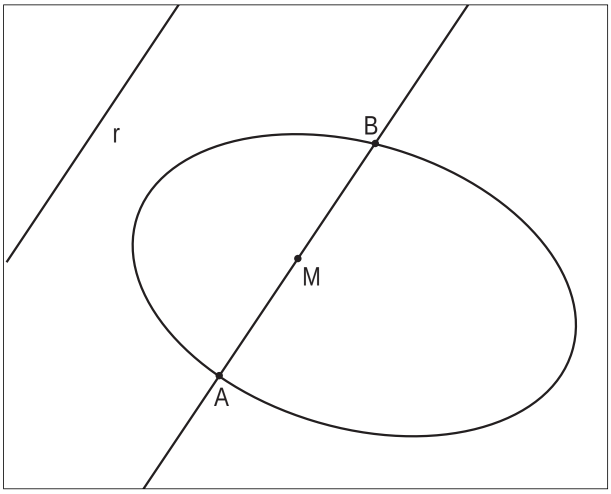


Fig. 31 [9.3 – L'approfondimento]

Fase 4: *Discussione del lavoro di gruppo*

Identifichiamo con G1 e G2 i due gruppi di lavoro.
Ecco i risultati da essi ottenuti:

G1
Utilizzando il comando “Traccia” per il punto M, il gruppo ha verificato che, al variare di A sulla conica, M sembra descrivere un segmento.
Per verificare meglio la cosa, ha proceduto a tracciare il luogo di M al variare di A.
Il segmento descritto da M appare ora molto meglio definito.
Per quel che concerne la possibilità di tracciare la tangente alla conica parallela ad AB, G1 ha concluso che era sufficiente disegnare le parallele ad **r**, passanti per gli estremi del segmento luogo di M.

G2
Per stabilire le posizioni di M al variare di A, il gruppo ha subito utilizzato il comando “Luogo”.
Per essere certi che si trattasse di un segmento, ha fissato due punti su di esso e ha tracciato la retta passante per essi. Il fatto che Cabri II, posizionato il mouse sopra la retta, ponga la domanda “Quale oggetto?”, è stata per loro la dimostrazione della congettura.
Successivamente hanno sperimentato la stessa cosa, facendo variare il tipo di conica ed osservando che il luogo in parecchi casi non era più un segmento.
Per quel che riguarda la tangente parallela alla corda la conclusione di G2 è simile a quella di G1, ma senza dubbio più completa, avendo quest’ultimo gruppo analizzato più casi relativi a coniche di diverso tipo.

Nella discussione che segue l’esposizione dei due gruppi, qualcuno fa notare che non si è dimostrata l’appartenenza degli estremi del segmento luogo alla conica e qualcun altro suggerisce di studiare i luoghi facendo variare la direzione della retta **r**.
Per motivi di tempo le questioni sollevate, per altro molto interessanti, non possono essere sviluppate ulteriormente.
Termina in questo modo l’attività proposta. Il problema ancora aperto, relativo all’indagine sul luogo di M al variare della direzione di **r**; problema che, come già ampiamente discusso, ci porta alla definizione di diametri coniugati e alla ricerca del centro di una conica, per motivi di tempo-scuola non può essere affrontato, ma può essere rimandato ad altre occasioni, come ad esempio lavori di approfondimento o compiti estivi.
La classe ha lavorato bene ed ha potuto sperimentare un percorso di scoperta guidata, che li ha entusiasmati ed aiutati a lavorare in gruppo e a condividere con altri le proprie esperienze.

Appendice 1: L'area del segmento parabolico

Per segmento parabolico si intende la regione finita di piano racchiusa da un arco di parabola e da una sua corda (Fig. 32).

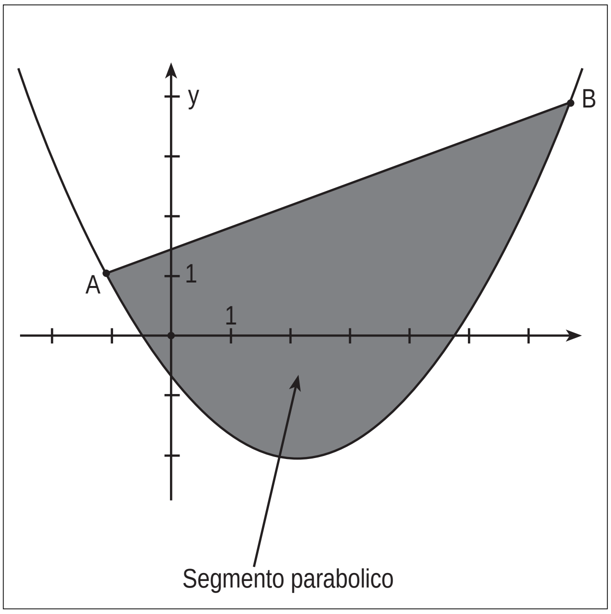


Fig. 32 [App. 1.1 – Il segmento parabolico]

Consideriamo la tangente alla parabola parallela alla corda AB e indichiamo con P il punto di tangenza.
Costruiamo il triangolo PAB e le tangenti alla parabola, parallele alle corde PA e PB.
Indicati con P_1 e P_2 i punti di tangenza, disegniamo i triangoli P_1AP e P_2BP.
Indichiamo con S_1 l'area del triangolo PAB e con S_2 le aree dei due triangoli P_1AP e P_2BP. Utilizziamo lo stesso simbolo per le aree dei due triangoli, perché, come è possibile dimostrare, essi sono equivalenti.
Come si può notare, osservando attentamente la figura (Fig. 33), se si prosegue nello stesso modo, si arriva a tappezzare il segmento parabolico di triangoli e a rendere sempre più piccoli gli spazi vuoti rimanenti.
L'area del segmento parabolico si può dunque ottenere sommando le aree degli infiniti triangoli che si ottengono secondo la modalità precedentemente illustrata.
Tecnicamente si tratta di calcolare la *somma di una serie*.

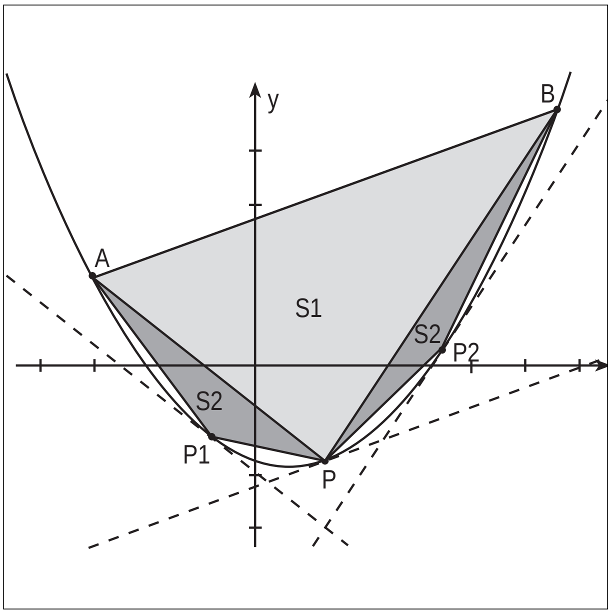


Fig. 33 [App. 1.2 – I triangolini che "tappezzano" il segmento parabolico]

Se si effettua con Cabri II la costruzione illustrata nelle figure 33 e 34 (ciò ovviamente comporta tutta una serie di difficoltà, dalle quali nasce la nostra ricerca sulle proprietà delle coniche), ci si accorge che l'area dei due triangoli AP_1P e BP_2P è la stessa ed è pari ad 1/8 dell'area del triangolo ABP.

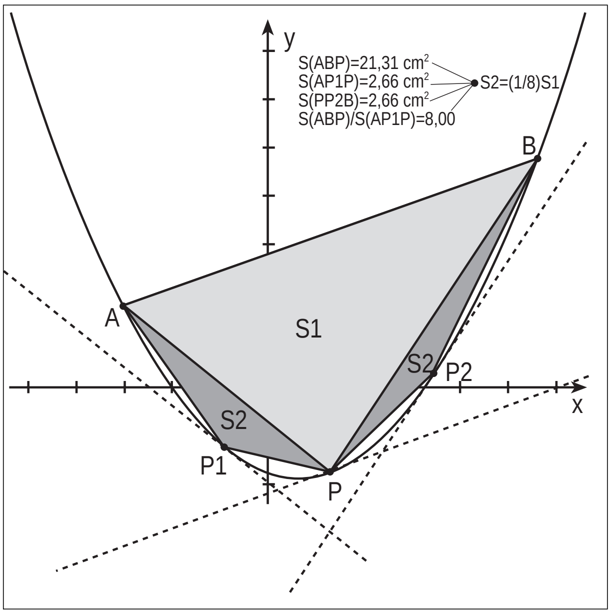


Fig. 34 [App. 1.3 – Le aree dei triangolini]

Riepilogando:

$$2S_2 = S(AP_1P) + S(BP_2P) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot S(ABP) = \frac{1}{4} S(ABP) = \frac{1}{4} S_1$$

e, quindi:

$$S_1 + 2S_2 = S(ABP) + S(AP_1P) + S(BP_2P) = S(ABP) + \frac{1}{4} S(ABP) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) S(ABP) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) S_1$$

Iterando il procedimento, come nella figura sottostante (Fig. 35):

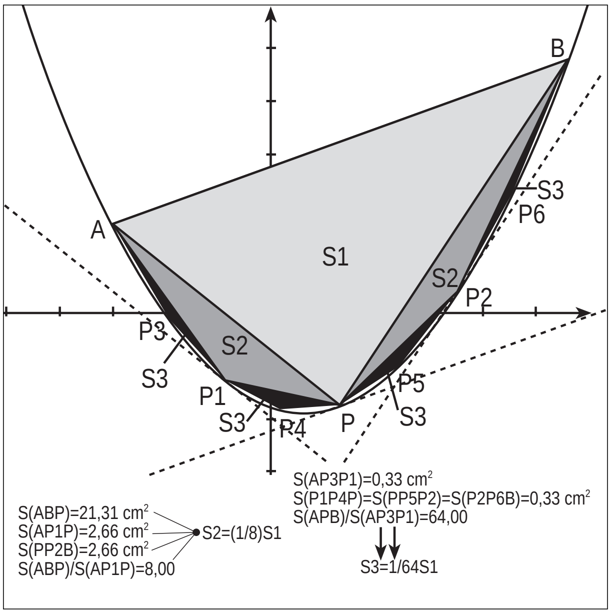


Fig. 35 [App. 1.4 – Le relazioni tra le aree dei triangolini]

si ricava che:

$$S_3 = S(AP_3P_1) = S(P_1P_4P) = S(PP_5P_2) = S(P_2P_6B) = \frac{1}{64} S(APB) = \frac{1}{64} S_1$$

e pertanto:

$$S_1 + 2S_2 + 4S_3 = S_1 + 2 \cdot \frac{1}{8} S_1 + 4 \cdot \frac{1}{64} S_1 = S_1 + \frac{1}{4} S_1 + \frac{1}{16} S_1 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) S_1 = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] S_1$$

Se si procede reiterando il ricoprimento precedente, si ottengono ulteriori triangoli.
La somma delle loro aree si avvicinerà sempre di più al valore dell'area del segmento parabolico.

Alla luce di ciò possiamo scrivere:

$$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] S_1 \to S_{seg.\ parabolico}$$ al tendere di *n* all'infinito.

Come si vede, il fattore moltiplicativo di S_1 è la somma dei primi *n* termini di una successione geometrica, di termine iniziale 1 e ragione 1/4.
Da ciò segue che:

$$1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} S_1 \to S_{seg.\ par.}$$ al tendere di *n* all'infinito

Si tratta dunque, per concludere, di risolvere il seguente limite:

$$S_{seg.\ par.} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} S_1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} S_1 = \frac{4}{3} S_1$$

Se si disegna il rettangolo *ABCD* come nella figura 36,

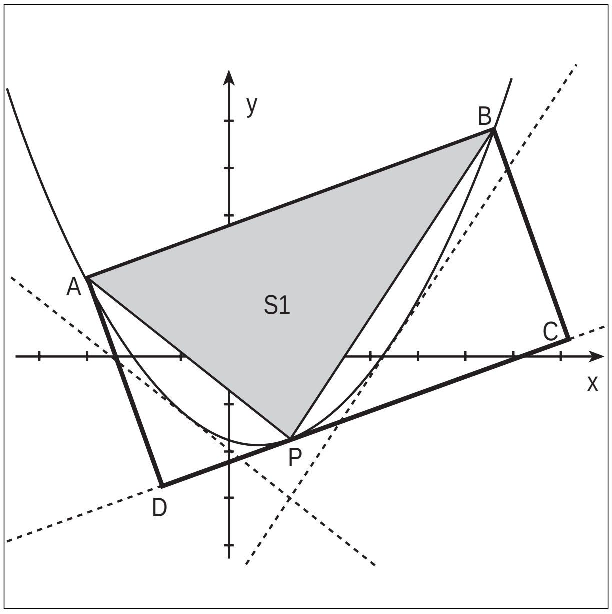


Fig. 36 [App. 1.5 – Il rettangolo ABCD]

poiché $S(ABCD) = 2S_1$ allora:

$$S_{seg.\ par.} = 2/3\ S(ABCD)$$

Appendice 2: È possibile fare dimostrazioni con Cabri?

Nuove possibilità nella didattica della geometria

Leggendo il presente lavoro si può rimanere *perplessi*, o anche contrariati, di fronte a certe affermazioni un po' … azzardate (sul piano matematico), per non dire errate.
La questione del come *insegnare in modo efficace* la Matematica ed in particolare la Geometria, e più in particolare la Geometria Euclidea, è stata affrontata in tempi recenti nei documenti ufficiali del MPI con la stesura dei *nuovi programmi per il P.N.I.*, in cui viene stravolto il concetto di programma, inteso come semplice giustapposizione di argomenti, in una sequenza ormai collaudata da una gloriosa tradizione didattica, per essere trasformato in un insieme di *temi da sviluppare* con una certa libertà e fantasia da parte dei docenti, fermi restando alcuni obiettivi fondamentali da perseguire.
Nella prassi didattica successiva, tuttavia, non viene mai affrontata decisamente e messa in pratica l'indicazione che la geometria possa essere sviluppata per "teorie locali", e che solo al termine degli studi (ultimo anno) si sarebbe dovuto rivisitare l'intero percorso della Geometria Euclidea alla luce di una diversa consapevolezza del cosa vuol dire in Matematica dimostrare e costruire una teoria coerente e completa.
Ne avrebbe dovuto fare le spese il metodo tradizionale che presentava la Geometria Euclidea nella sua "bellezza" astratta e "purezza" logica. Tuttavia la difficoltà di intaccare tale metodo e di individuare teorie locali adatte allo scopo, ha ritardato l'applicazione delle suddette indicazioni, fino a farle cadere nel dimenticatoio, almeno fino all'avvento delle *nuove tecnologie informatiche user-frendly*.
Con Cabri prima e con Derive e la TI-92 poi, le cose cambiano. È ora possibile avere in mano strumenti costruiti su basi matematiche sofisticate e corrette (basate su teorie assodate e condivise) che forniscono quindi risultati considerati attendibili, almeno sul piano del calcolo numerico.
Permane tuttavia il forte dubbio di come utilizzare risultati che intrinsecamente sono approssimati, essendo prodotti da macchine "finite", per trarre conclusioni nell'ambito dell'infinito e in particolare (e con più difficoltà) del continuo.
Diversi possono essere gli approcci a questo problema. Qui vorremmo discutere su un possibile impiego di Cabri all'interno di questo scenario.

"Teorie locali" e Cabri

Per "teoria locale", pensando alla didattica delle scuole superiori, potremmo intendere un *insieme di teoremi logicamente collegati e basati su premesse assunte come assiomi*.
Le *premesse* potrebbero essere *qualsiasi*, ma riteniamo importante che siano in qualche modo "plausibili", cioè che abbiano un *serio fondamento intuitivo* e basato su osservazioni non banali e/o che abbiano serie conseguenze.
Se con Cabri "sperimentiamo" su figure geometriche e alla fine "scopriamo" risultati che sembrano accettabili, potremmo essere di fronte a serie difficoltà teoriche, se volessimo *giustificare* tali teoremi all'interno della geometria euclidea (o di altro tipo).
Se però, dai risultati "scoperti" volessimo *dedurne altri logicamente* perché non farlo? Potremmo arrivare ad avere in mano un insieme di proposizioni "intriganti", quantomeno. Del resto, forse che i nostri grandi e bravi matematici del passato hanno trovato tutto subito, nella sequenza giusta? O piuttosto sono invece passati attraverso faticose indagini su problemi seri alla ricerca di strumenti per risolverli, per arrivare a nuove teorie mai viste prima e non sempre ben sistemate neppure da loro? Basta pensare a Newton, che faceva calcoli di analisi matematica (diremmo oggi) ben prima che venissero sistemati i numeri Reali, oggi alla base della comprensione e della correttezza logico-formale dell'Analisi Matematica stessa.
Quindi è accettabile, visti i precedenti, che in una fase di studio si possa lavorare su "teorie locali", come abbiamo detto prima.
C'è però un *problema*: si indaga con qualche nuovo strumento, potente se possibile, si cerca di trovare degli sviluppi teorici, e poi? Ovviamente quanto trovato *non* può essere spacciato per la *verità assoluta*: esiste una seconda (e ultima per gli studiosi di professione) fase dove si deve inquadrare logicamente quanto trovato all'interno dell'esistente o di dichiarare pubblicamente che si è inventato qualcosa di mai visto.
Qui sta il punto: l'alunno delle superiori non è in grado di inquadrare tutto, bene ed in modo completo. Nella prassi didattica tradizionale (ancora imperante) si pone come preliminare l'esigenza della correttezza formale di tutta la costruzione teorica (della Geometria). Ma questo costringe a "dimostrare" il teorema di Pitagora dopo le similitudini, al termine del percorso del primo biennio. Il teorema di Pitagora però era già noto dalla scuola media (lo usavano pure nell'antichità anche se non avevano studiato le isometrie e le affinità) e per l'alunno non opportunamente avvisato può essere un trauma ripresentarglielo dopo alcuni anni come una "novità" dell'ultim'ora.
Un'obiezione ai puristi: perché l'algebra non viene sviluppata allo stesso modo? C'è qualcuno che "dimostra" che "zero

è annullatore del prodotto”? Per quanto ne sappiamo (ma potremmo essere mal informati) solo G. Prodi in *Matematica come scoperta* [2] deduce dalla “proprietà distributiva” e da altre “cose note” tale teorema. E quanti “dimostrano” la proprietà distributiva? Perché non lo fanno? Quali sono gli assiomi su cui si basa il calcolo algebrico? Perché nessuno parte dagli assiomi di Peano e dal concetto di gruppo per giustificare tutto il resto?
Si può facilmente rispondere (ed è abbastanza condivisibile, pur con la necessità di approfondire il discorso) che non si può far tutto, specie le cose più da matematici e poco interessanti sul piano pratico. E poi non si arriverebbe mai a studiare quegli strumenti del calcolo così professionalmente necessari in seguito, specie per chi usa la Matematica. E perché allora non si taglia un po’ il pedante percorso iniziale della Geometria Euclidea e non si va a scoprire qualche proprietà delle coniche (con Cabri), almeno per capire cosa vuol dire curva parabolica e perché i fari delle auto sono superfici paraboliche e non sferiche? In auto, o in motorino, ci si va tutti i giorni e per diverso tempo al giorno.

Quanto detto è chiaramente provocatorio, ma vuol sollevare un problema: la cristallizzazione dell’insegnamento della Matematica e il suo rapporto con il contesto che sta vivendo chi la studia.

Una possibile metodologia.

A conclusione, vorremmo proporre una metodologia, crediamo condivisibile, per dare finalmente attuazione alla lettera dei programmi del P.N.I. (ormai trasformati in “Brocca” e successive elaborazioni).
Intanto, *abbandoniamo* l’idea che sia determinante insegnare un’intera teoria geometrica senza perdere nulla per strada: o perdiamo qualche passaggio logico (cioè lo enunciamo senza dimostrarlo) o perdiamo molti alunni.
Poi torniamo a *rivalutare l’intuito* [3], tanto importante nella risoluzione dei problemi: se qualcosa “si vede” non scandalizziamoci, perché l’evidenza è una bella cosa (ad esempio, la proprietà distributiva “si vede” tagliando con le forbici un foglio rettangolare; mica ci fermiamo perché dietro c’è il concetto di area e allora prima dobbiamo fare la teoria completa di tale concetto!).
Insegniamo a discutere tutto: una volta individuati dei risultati, giochiamo al “gioco del perché”: ovvero cerchiamo le connessioni logiche tra le parti del discorso. Di sicuro alcune ce ne sono e altre saranno più difficili, addirittura oscure.
Qui sta il bello: *chi garantisce* sulla correttezza di quanto andiamo affermando? Lo studente non è ancora uno studioso, perciò può essere garantito da documenti, libri o più semplicemente dall’insegnante che sa se quel tale teorema è vero o no. Però è bene che lo studente trovi anche risultati difficili: nel suo piccolo percorrerà la strada dei grandi matematici scopritori, e questo lo può interessare ben di più di una semplice ripetizione di risultati già noti. Se poi quanto trova è una novità anche per l’insegnante, meglio: insieme si potrà discutere, cercare risposte, crescere ed imparare (anche l’insegnante ha molte cose da imparare).
La consapevolezza che il percorso di una teoria matematica non può essere che logico e basato su *assiomi* iniziali è indispensabile, ma non è detto che debba essere acquisita subito: meglio *arrivarci un po’ alla volta*, dopo aver capito l’importanza della connessione logica tra i vari “si vede” dell’esperienza. È compito dell’insegnante vigilare su questo e organizzare il percorso didattico in modo che dal “si vede” si passi al “dimostriamo”.

Ultima questione: ci sono assiomi in una “teoria locale”?

Le *osservazioni* fatte attraverso l’esperienza (ad es. con Cabri) possono momentaneamente essere *assunte come assiomi*, cioè come *basi di partenza* (non è l’accezione pura di assioma, ma l’uso della parola … abitua … ad usarla in modo sempre più corretto):

prima vediamo se si trova qualcosa di interessante,
poi andremo a vedere se è tutto logicamente a posto,
successivamente vedremo se il tutto è inseribile nelle teorie note allo studente
ed infine se è inseribile nelle teorie matematiche ufficiali.

Se pretendessimo di arrivare (con i nostri alunni) al concetto di centro di una conica, passando per il birapporto, crediamo che ben presto ci troveremmo a parlare da soli (a meno di non avere in classe qualche futuro “normalista”).

Quindi riassumendo:

esaminare problemi (legati alle questioni teoriche),
cercare soluzioni logiche e sviluppi teorici (cioè deduzioni),
verificare e dimostrare (ove possibile) le connessioni tra quanto trovato.

Appendice 3: Tangente alla parabola in un suo punto

Problema: *come trovare la tangente ad una parabola in un suo punto, dati fuoco e direttrice.*

Teorema
HP: data la parabola γ, costruita come luogo di punti equidistanti dal fuoco F e dalla direttrice **d**;
TS: la retta **t** asse del segmento FA è tangente alla parabola in un punto P (Fig.37).

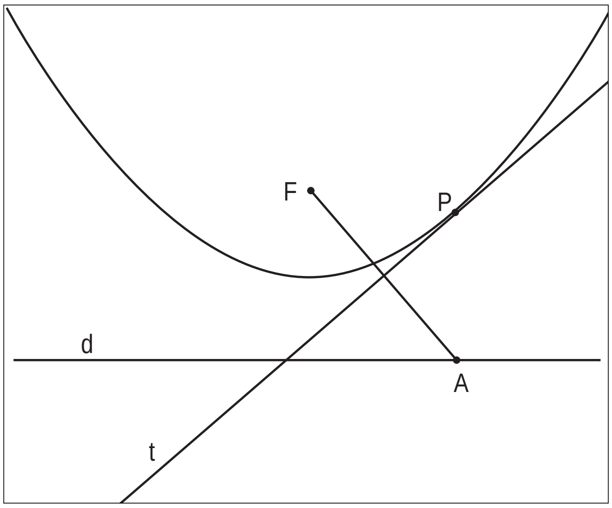


Fig. 37 [App. 3.1 L'asse di FA]

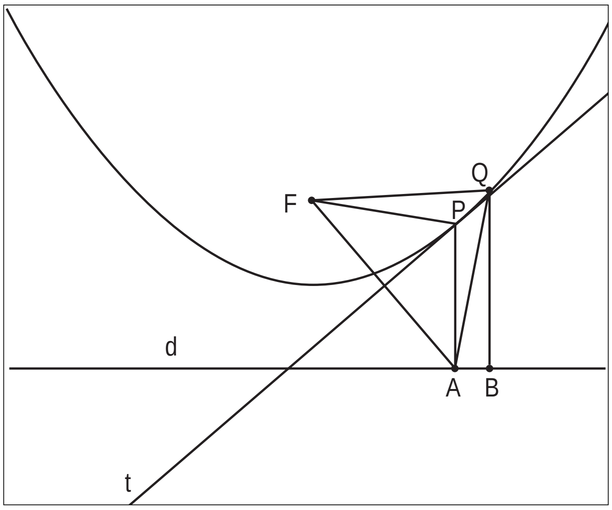


Fig. 38 [App. 3.2 – Q appartiene alla parabola?]

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che **t** non sia tangente, e che quindi sia secante la γ nei due punti P e Q (Fig.38).
La retta PQ è asse di FA, per costruzione.
Se passa anche per Q, si avrebbe QF=QA (**t** è asse di FA) ma anche QF=QB (Q sta sulla parabola γ), e quindi QF=QA=QB.
Inoltre QB è perpendicolare a **d**.
Ma QA=QB è **assurdo**, essendo ABQ un triangolo rettangolo in cui QA è l'ipotenusa e QB un cateto.
Perciò **vale la tesi**.

Possiamo allora risolvere il problema posto

Poiché l'asse di FA della costruzione della parabola è tangente in P alla parabola, dato P per costruire la tangente **t**, dovremo (Fig.39):
• Individuare il punto A sulla direttrice (mandare la perpendicolare per P alla direttrice).
• Trovare l'asse di FA, che è appunto la tangente cercata.

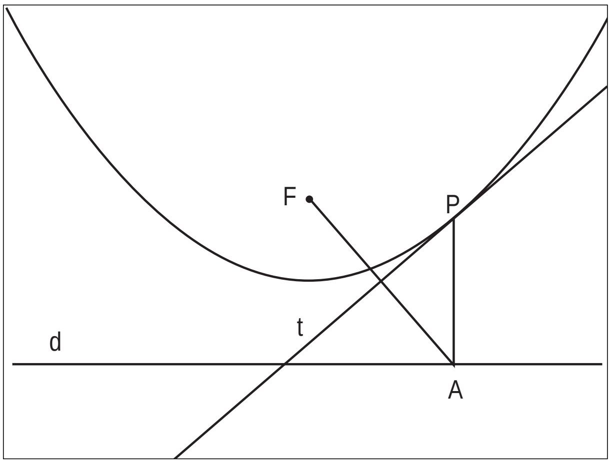


Fig. 39 [App. 3.3 – t è la tangente alla parabola]

Appendice 4 : descrizione delle macro citate nel testo.

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diametro_luogo **Paragrafo 1**	- una conica per cinque punti - un punto *E* del piano - la retta *r* per *E* - un punto *C* sulla conica - la retta *s* per *C* parallela ad *r* - il punto *D* d'intersezione tra la retta *s* e la conica - il punto medio *K* del segmento *CD* - il luogo del punto *K* al variare di *C*	una *conica* ed una retta *r* del piano	il *diametro-luogo*, luogo di *K*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diametro_retta **Paragrafo 1**	- una conica per cinque punti - una retta *r* - il diametro luogo ottenuto con la macro *diametro_luogo* - due punti *M* ed *N* qualsiasi del luogo. - la retta *d* passante per i due punti precedenti *M* ed *N*	una *conica* ed una retta *r* del piano	la retta *d* *diametro-retta*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diametro_segmento **Paragrafo 1**	- una conica per cinque punti - una retta *r* - il diametro retta *s* ottenuto con la macro *diametro_retta* - le due intersezioni *M ed N* tra *s* e la conica - il segmento *MN*	una *conica* ed una retta *r* del piano	il *segmento-luogo*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
tangenti_conica **Paragrafo 2**	- una conica per cinque punti - una retta *r* - con la macro *diametro_retta* tracciare la retta diametro della conica rispetto ad *r*. - individuare i punti d'intersezione M ed N della retta diametro con la conica - condurre da tali punti M ed N le rette *t1* e t2, parallele ad *r*	una *conica* ed una retta *r* del piano	le due *tangenti* ed i *punti di tangenza*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
centro_conica **Paragrafo 3**	- una conica per cinque punti - la retta *r* passante per due dei cinque punti che definiscono la conica - la retta *s* passante per altri due dei cinque punti che definiscono la conica (le rette *r* ed *s* devono risultare incidenti) - con la macro *diametro_retta* condurre le rette diametro corrispondenti ad *r* ed *s* - il punto d'intersezione tra le due rette diametro	una *conica* del piano	il *centro* della conica, punto d'intersezione tra due *rette diametro*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
retta_coniugata **Paragrafo 4**	- una conica per cinque punti - un punto *E* del piano ed una retta *r* per *E* - con la macro *diametro_retta* condurre la retta diametro corrispondente ad *r* - un punto *P* del piano - la retta *s* passante per *P* e parallela alla retta diametro	una *conica* del piano, una retta *r* ed un punto *P*	la retta *s*, coniugata di *r*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diam_seg_coniugato **Paragrafo 4**	- una conica per cinque punti - un punto *A* della conica - con la macro *centro_conica* il centro *C* della conica - la retta per *A* e per il centro *C* - l'altro punto *B* di intersezione della retta *AC* con la conica - il segmento *AB* - con la macro *diametro_retta* condurre la retta diametro corrispondente alla retta *AC* per il centro della conica - i punti d'intersezione *A'* e *B'* di quest'ultima retta con la conica - il segmento *A'B'* che li unisce	una *conica* del piano e un *diametro- segmento* (*AB*)	il *segmento A'B'*, coniugato di *AB*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diam_luogo_coniugato **Paragrafo 4**	- una conica per cinque punti - la retta passante per due punti *A* e *B* della conica - con la macro *diametro_luogo* tracciare il diametro luogo della retta *AB* - definire due punti *C* e *D* sul diametro-luogo trovato - tracciare la retta *CD* - con la macro *diametro_luogo* tracciare il diametro luogo della retta *CD*	una *conica* del piano e un *diametro-luogo* (il *diametro-luogo* della retta *AB*)	il *diametro-luogo* coniugato

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
tang_in_P **Paragrafo 5**	- una conica per cinque punti - un punto *P* della conica - con la macro *centro_conica* il centro della conica *C* - la retta *PC* - con la macro *retta_coniugata* la retta *t* coniugata della retta *PC* (quest’ultima è la tangente cercata)	una *conica* del piano ed un suo punto *P*	la retta *t* *tangente* in *P*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
P_int_tangenti **Paragrafo 5**	- una conica per cinque punti - una corda *AB* della conica - con la macro *tang_in_P* la tangente alla conica in *A* - con la macro *tang_in_P* la tangente alla conica in *B* - il punto *P* d’intersezione delle due tangenti in *A* e in *B*	una *conica* e una sua *corda AB*	il *punto P* intersezione delle due tangenti

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
polo_di_r **Paragrafo 5**	- una conica per cinque punti - una retta (per un punto e data direzione) che interseca la conica - i punti *A* e *B* di intersezione tra conica e retta - la corda *AB* - con la macro *P_int_tang* si trova il punto *P* d’intersezione delle due tangenti (se c’è)	una *conica* e una *retta*	il *punto P* associato alla retta (quando esiste)

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
parabola_F_d **Paragrafo 6**	- un punto qualunque *F* del piano - una retta *d* non passante per *F* - un punto *Q* qualunque su *d* - la retta *r* per *Q* perpendicolare a *d* - l'asse *v* del segmento *QF* - il punto *P* d'intersezione tra la retta *r* e la retta *v* - il luogo di *P* al variare di *Q* - cinque punti sul luogo - la conica per i cinque punti - nascondere il luogo e i cinque punti	la retta *d* ed il punto *F*	la *parabola* (di fuoco *F* e direttrice *d*)

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
tang_parabola _F_d in P **Paragrafo 6**	- un punto qualunque *F* del piano - una retta *d* non passante per *F* - con la macro *parabola_F_d* la parabola di fuoco *F* e direttrice *d* - un punto *P* della parabola - la retta *s* per *P* perpendicolare a *d* - il punto d'intersezione *Q* tra *s* e *d* - l'asse *t* di *QF*	punto *P* sulla parabola, fuoco *F* e direttrice *d* della *parabola*	la retta *t* *tangente* in P

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diam_luogo _parabola **Paragrafo 7**	- un punto qualunque *F* del piano - una retta *d* non passante per *F* - con la macro *parabola_F_d* la parabola di fuoco *F* e direttrice *d* - un punto *P* della parabola - una retta *r* qualsiasi del piano - la retta s per *P* parallela ad *r* - l'altro punto *Q* d'intersezione tra la retta *s* e la parabola - il punto medio *M* di *PQ* - il luogo di *M* al variare di *P*	la *parabola* e la retta *r*	il *diametro-luogo* legato alla retta *r* (luogo di *M*)

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
diam_retta_parabola **Paragrafo 7**	- un punto qualunque *F* del piano - una retta *d* non passante per *F* - con la macro *parabola_F_d* la parabola di fuoco *F* e direttrice *d* - una retta *r* qualsiasi del piano - con la macro *diam_luogo_parabola* il luogo associato alla parabola e a *r* - due punti *M* ed *R* qualunque sul luogo - la retta *MR* - il punto *P*, intersezione tra *MR* e la parabola	la *parabola* e la retta *r*	il *diametro-retta* della parabola associato alla direzione della retta *r* e il punto *P*

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
tang_parab_corda **Paragrafo 7**	- un punto qualunque *F* del piano - una retta *d* non passante per *F* - con la macro *Parabola_F_d* la parabola di fuoco *F* e direttrice *d* - una corda *AB* della parabola - la retta *AB* - con la macro *diam_retta_parabola* tracciare la retta diametro associata alla retta *AB* (viene prodotto anche il punto *P* di intersezione con la parabola) - la parallela alla corda *AB* passante per *P*	la *parabola* e una *corda AB* con estremi su di essa	la retta *tangente t* e il *punto P* di tangenza

Nome macro	Costruzione grafica iniziale	Oggetti iniziali	Oggetti finali
Triangolo_di _Archimede **Paragrafo 7**	- un punto qualunque *F* del piano - una retta *d* non passante per *F* - con la macro *Parabola_F_d* la parabola di fuoco *F* e direttrice *d* - una corda *AB* della parabola - con la macro *tang_parab_corda* tracciare la tangente associata alla corda *AB* e il punto *P* di tangenza - definire il triangolo *ABP* ed eventualmente riempirlo con un colore a scelta	la *parabola* e una *corda AB* con estremi su di essa	il *triangolo ABP*

Bibliografia essenziale

[1] M. Guilleraut, *Le point de vue de Cabri II sur les coniques*
(in http://www.cabri.net/abracadabri/Coniques/Guillerault/ConfGuillerault.html).

[2] G. Prodi, *Matematica come scoperta* (Ed. D'Anna).

[3] S. Invernizzi, *Quale matematica nei temi del SeT?* (§2. La rivalutazione dell'intuizione), Bollettino CABRI*RRSAE* n. 26 (in http://www.fardiconto.it ➤ CABRI*RRSAE* – Bollettini e Quaderni ➤ Bollettini CABRI*RRSAE*).

[4] Bollettini e Quaderni di CABRI*RRSAE* (vari articoli sulle coniche e le loro proprietà).

[5] P. Boieri, C. Dané, *Cabri, Laboratorio informatico per la Matematica* (Loescher Editore).

Indice

Partendo dal problema del segmento parabolico nasce l'idea e l'esigenza di indagare con Cabri sulle proprietà delle coniche.
Gli alunni sono quindi condotti alla scoperta di alcune proprietà, in genere non introdotte nei percorsi didattici per la loro complessità sul piano della trattazione teorica,
e al loro utilizzo per risolvere le questioni sorte con il problema inizialmente posto.

I.R.R.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 1-2 Marzo 2004, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativa dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. NA n. 28 del 16 - 03 - 2004.
Direttore resp. Antonio Crusco, Direttore edit. Franco Frabboni
proprietà IRRE/ER