quaderni di CABRIRRSAE

Presentazione a cura di:
Giuliana Bettini e Franca Noè

FLAT*landia*

anno VI

geometria on-line nella scuola secondaria

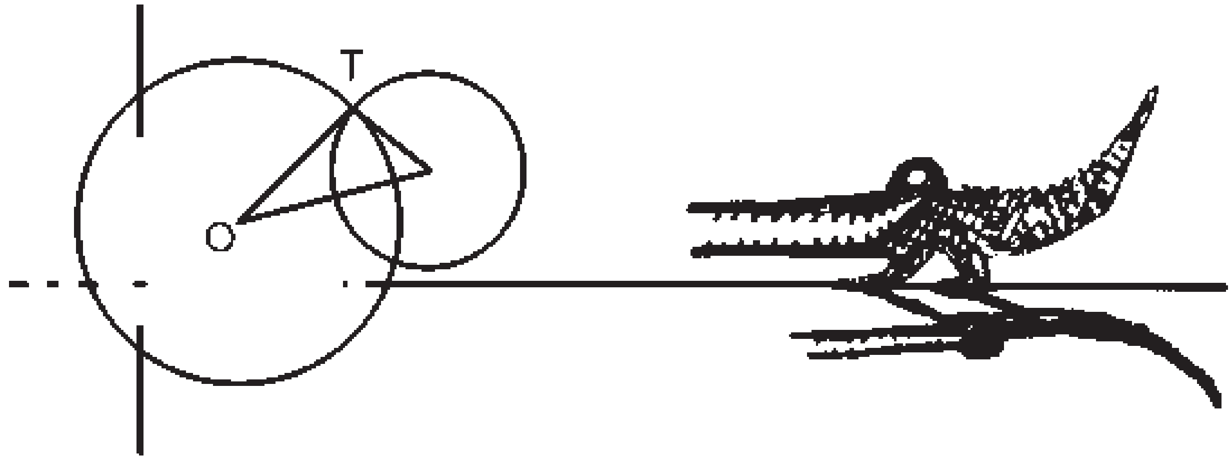
n°
25

Giuliana Bettini, insegnante di matematica, ha partecipato all'esperienza, fa parte della redazione del bollettino CABRI*RRSAE* e collabora con l'I.R.R.E. - E.R. in attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Franca Noè, insegnante di matematica, collaboratrice dell'I.R.R.E. - E.R., fa parte della redazione del bollettino CABRI*RRSAE* e partecipa da alcuni anni ad attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Released Information

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 • Tel. Fax (051) 30.70.73 - Modem (051) 42.920.47 • 40125 BOLOGNA



FLAT*landia*

anno VI

geometria on-line nella scuola secondaria

Indice

FLAT*landia*

E' un'attività dell'IRRSAE Emilia-Romagna rivolta in modo particolare agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.
Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.
Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il sesto anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.
Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, alle attuali ventiquattro con un picco di trentotto nell'anno 2000/2001.
Anche questo anno la partecipazione all'attività è stata allargata agli studenti del terzo anno di scuola superiore, limitatamente ai primi tre mesi dell'anno scolastico. Questo per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio.

Il progetto

E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.
L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.
In questo momento di forte auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.
I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche.
La partecipazione a FLATlandia può essere inoltre anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

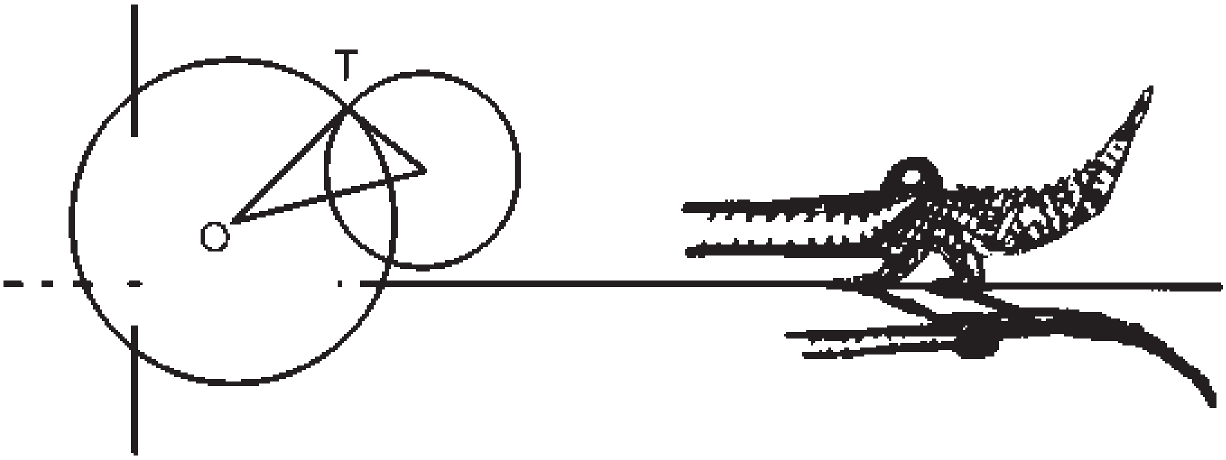
Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@kidslink.scuole.bo.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo: http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/
Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe.
Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica: flat@kidslink.scuole.bo.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

Ulteriori informazioni

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.

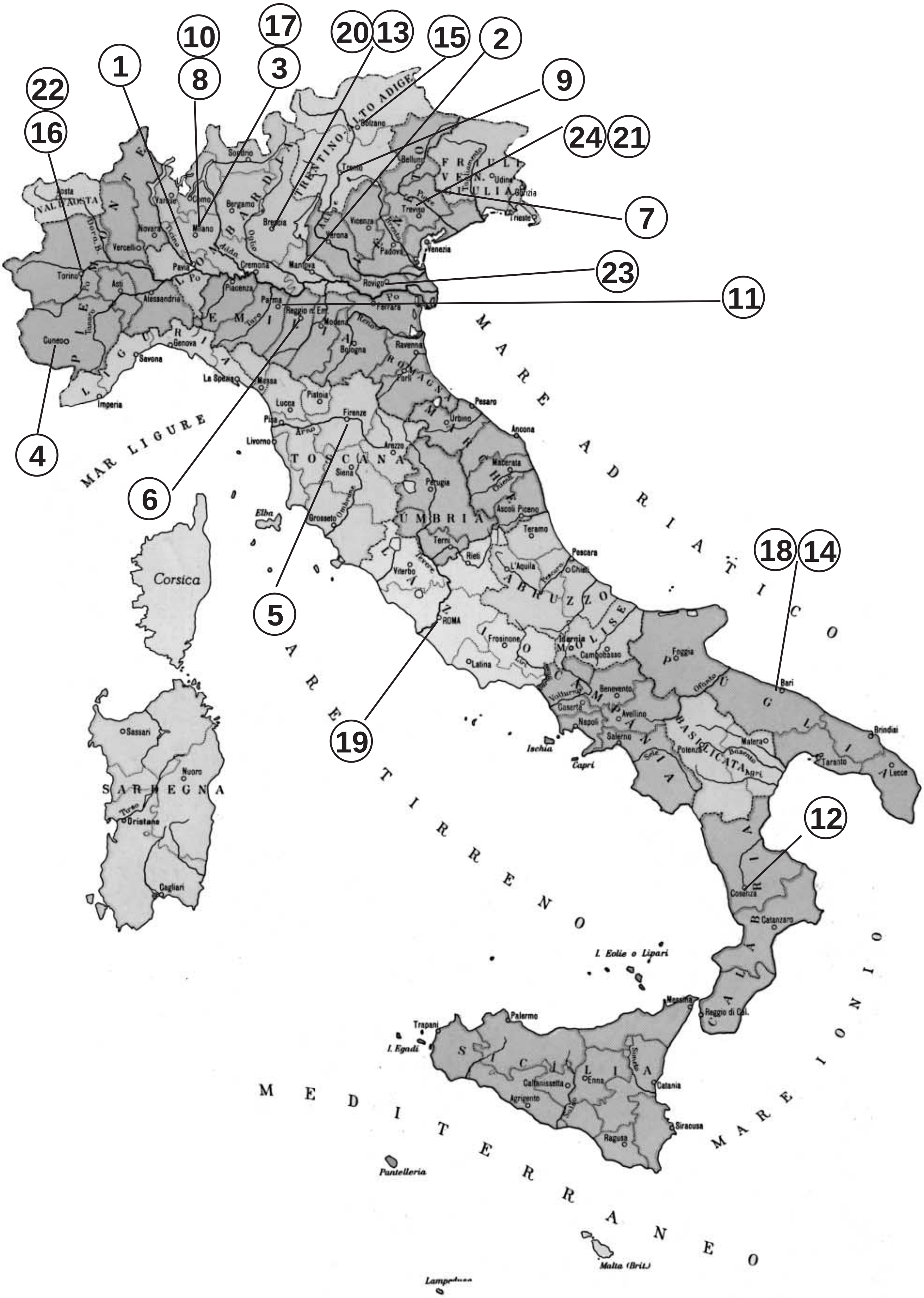
Anna Maria Arpinati



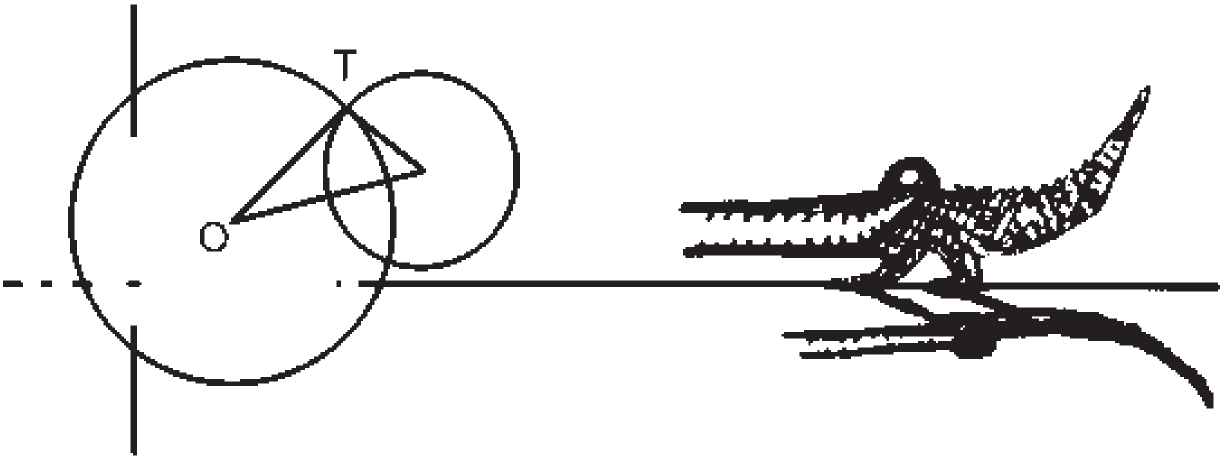
FLATlandia

Attività 2002-2003

Mappa delle scuole che hanno partecipato



		Scuola	Frequenza							
			O	N	D	G	F	M	A	M
MEDIE INFERIORI	1	SM “C.A. Dalla Chiesa”, S. Genesio (PV)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	
	2	IC Scuola Media di Marmirolo (MN)			◆					
	3	SM “G.B. Tiepolo”, Milano (MI)				◆				
	4	IC Scuola Media di Venasca (CN)				◆			◆	
	5	SM “L. da Vinci”, Rufina (FI)					◆			
	6	IC “I. Calvino”, Scuola Media di Rolo (RE)							◆	
	7	SM “Zanella”, Roveredo in Piano (PN)							◆	◆
ISTITUTI TECNICI	8	ITI, LST “A. Volta”, Lodi (LO)	◆							
	9	ITI, “M. Curie”, Pergine Valsugana (TN)	◆							
	10	ITI “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)		◆						
	11	ITI, LST “Bernini”, Fidenza (PR)			◆	◆	◆		◆	◆
	12	ITCG, “E. Majorana”, Castrolibero (CS)			◆					
	13	ITA “Pastori”, Brescia (BS)						◆		
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	14	LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)	◆	◆	◆	◆	◆			
	15	LS “B. Pascal”, Merano (BZ)	◆							
	16	LC “Cavour”, Torino (TO)		◆	◆					
	17	LC “Beccaria”, Milano (MI)		◆						
	18	LS “G. Galilei”, Bitonto (BA)		◆	◆	◆	◆			
	19	LS “F. d’Assisi”, Roma (RM)		◆	◆					
	20	LS “Leonardo”, Brescia (BS) due soluzioni		◆			◆			
	21	LS “G. Verdi”, Valdobbiadene (TV)			◆	◆				
	22	LS “Copernico”, Torino (TO)			◆					
	23	LS “G. Galilei”, Adria (RO)				◆				
	24	LS “Leonardo da Vinci” Treviso (TV)							◆	

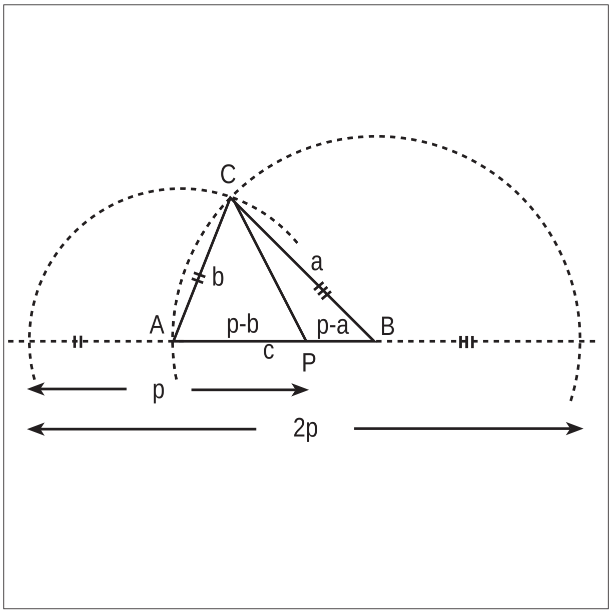


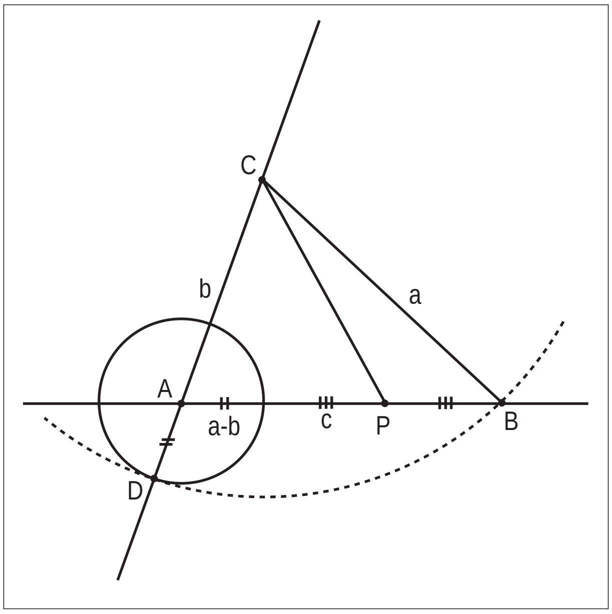
FLAT*landia*

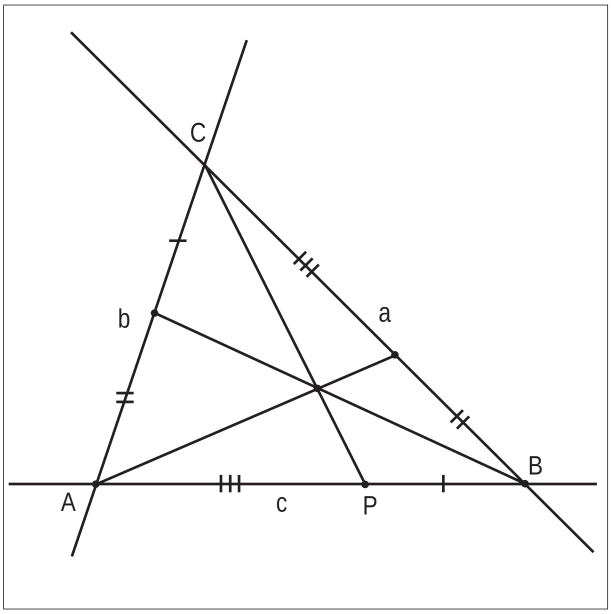
Problemi e soluzioni

7 - 21 Ottobre 2002

a) In un qualunque triangolo ABC costruire sul lato AB un punto P in modo che i triangoli PCA e PCB abbiano ugual perimetro. Giustificare la costruzione.
b) E' unico il punto trovato?
c) Ripetendo la costruzione sugli altri due lati di ABC si puo' osservare un fatto "notevole", di cui non si chiede la dimostrazione. Qual e'?







Commento

Abbiamo ricevuto in tutto sei risposte, una sola dalla scuola media inferiore.
Le scuole che hanno partecipato sono:

SM "Dalla Chiesa", S. Genesio Ed Uniti (PV)
ITI "M. Curie" Pergine Valsugana (TN)
LST "A. Volta", Lodi (LO)
LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
LS "B. Pascal", Merano (BZ)

Nel problema proposto si chiedeva di dividere in modo opportuno un qualunque triangolo in due parti isoperimetriche. Si chiedeva inoltre di indagare sulla "unicità" del risultato raggiunto e di scoprire una proprietà "notevole" della figura ottenuta.

Nelle risposte pervenute sono stati individuati due diversi percorsi per determinare la posizione del punto P, sul lato AB, da congiungere col vertice C; ciascuna costruzione porta ad un solo punto, come in tutte le risposte viene asserito e come viene bene puntualizzato dai ragazzi di Pergine che affermano: "Per come è stato costruito APC è unico"!
Forse non abbiamo posto in modo corretto la domanda del punto b). Lo scopo era di stimolare una indagine che andasse oltre la evidenza della costruzione eseguita, o ricercando un percorso alternativo, o ricorrendo ad un ragionamento per assurdo per poter concludere che si otteneva comunque sempre lo stesso punto.
La questione della unicità o meno di una soluzione viene spesso trascurata dagli studenti, che in generale si fermano al primo risultato ottenuto.

Il problema conduce poi alla scoperta di un punto "notevole" in quanto i tre segmenti che dividono il triangolo in due parti isoperimetriche, concorrono in uno stesso punto. Non abbiamo richiesto la dimostrazione di questa proprietà perché ci sembrava al di sopra delle possibilità di un biennio di scuola secondaria superiore. Alcuni spunti per la dimostrazione sono stati pubblicati sul bollettino CABRI*RRSAE* n. 15.
In una delle risposte questa proprietà non è stata scoperta, mentre in un'altra questa parte del problema non è stata affrontata.
Qualcuno invece è andato oltre rilevando una ulteriore caratteristica.

Abbiamo convenuto di riportare le seguenti risposte:

SM "Dalla Chiesa", la risposta completa con una nota al punto b)
LS "B. Pascal", parte a)
LS "G. Galilei", la parte c) preceduta dalle ultime considerazioni della parte a)
LST "A. Volta", la parte a), con una nota che riguarda la costruzione, diversa dalle precedenti e simile a quella dell'ITI "M. Curie"

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadre; in doppia parentesi quadra sono indicate invece le parti superflue o quelle omesse.

Soluzioni

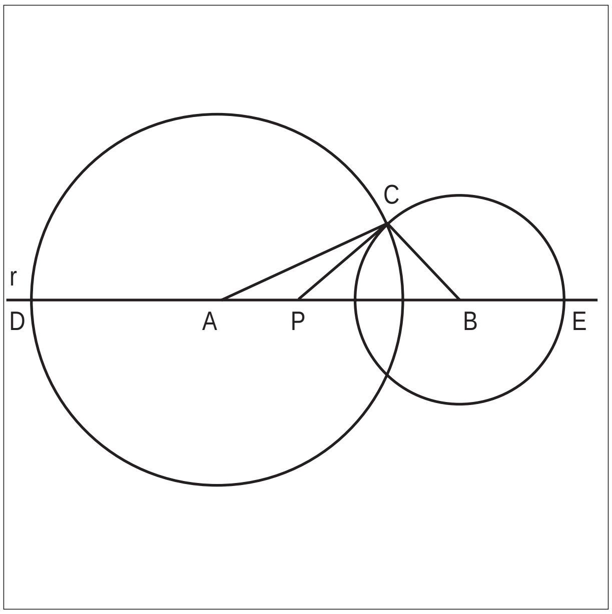
Classe 3P
Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"
S. Genesio Ed Uniti (PV)
Siamo i ragazzi della 3°P.
L'intuizione che ha avuto il nostro compagno Marco Zetti è stata poi elaborata dalla classe, ed ora vi inviamo la soluzione del problema di ottobre.
a) Dato che sappiamo per certo che i triangoli PCA e PCB in cui verrà divisa la figura avranno un lato in comune cioè CP, affinché i perimetri dei due triangoli siano uguali la misura di CP è ininfluente , è sufficiente che la somma dei lati CA + AP sia uguale alla somma di CB + BP.
Consideriamo la retta passante per i punti A e B, riportiamo con la funzione compasso puntando in A il segmento CA, puntando in B il segmento CB, chiamiamo i corrispondenti del punto C sulla retta, così ottenuti, C' e C''.
Troviamo il punto medio del segmento C'C''.
Questo è il punto P cercato.
Ripetiamo la costruzione per i lati CA e CB e otteniamo i punti P' e P''.

b) Il punto P trovato è unico essendo il punto medio del segmento C'C'' [risposta non soddisfacente, si veda in proposito quanto detto nel commento].

c) Abbiamo verificato, con il software Cabri, nella costruzione effettuata che i segmenti CP, BP', AP'' si incontrano in uno stesso punto come le altezze, le bisettrici, gli assi, le mediane di un triangolo.
I punti P, P', P'', dividono i lati del triangoli in sei segmenti a due a due di uguale lunghezza [quest'ultima affermazione poteva essere facilmente dimostrata].

Luna Tomisich, classe 2 sc.
Liceo scientifico "B. Pascal"
Merano (BZ)

a) Ho disegnato un triangolo qualunque ABC.
Ho costruito una retta r passante per il punto A e per il punto B.
Ho riportato la misura del lato AC sulla retta r mediante una circonferenza e ho trovato così il punto D.
Ho riportato la misura del lato BC sulla retta r mediante una circonferenza e ho trovato così il punto E.
Ho trovato il punto medio P del segmento DE.
Grazie al punto P trovato ho diviso il triangolo ABC in due triangoli: PCA e PCB.
PCA e PCB hanno lo stesso perimetro, infatti:
PC+AC+AP = PC+DA+AP = PC+DP = PC+EP = PC+EB+BP = PC+CB+BP.



b) **[[…]]**

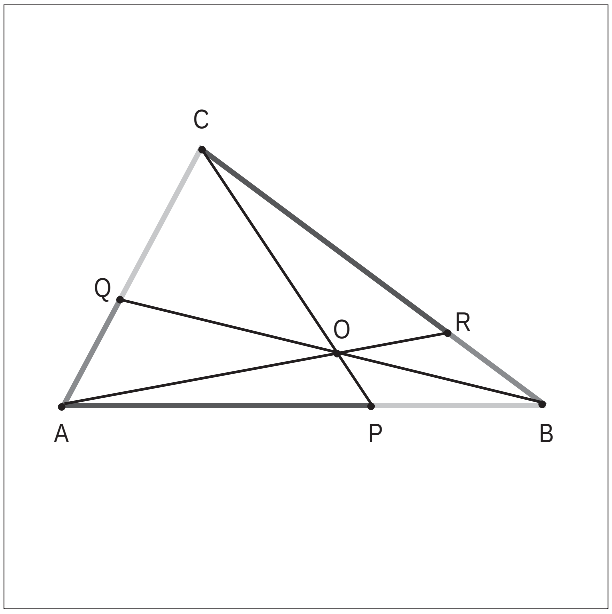
c) **[[…]]**

Classe 2 E
Liceo scientifico "G. Galilei"
Bitonto (BA)

a) [[…]]
Abbiamo anche osservato che ponendo AB=c, BC=a, AC=b e AP=z si ha che PB=c-z e quindi vale la seguente uguaglianza:
b+z=c-z+a, da cui AP=z=(a+c-b)/2, mentre PB=c-z=c-(a+c-b)/2=(c+b-a)/2.

b) [[…]] [vedi commento]

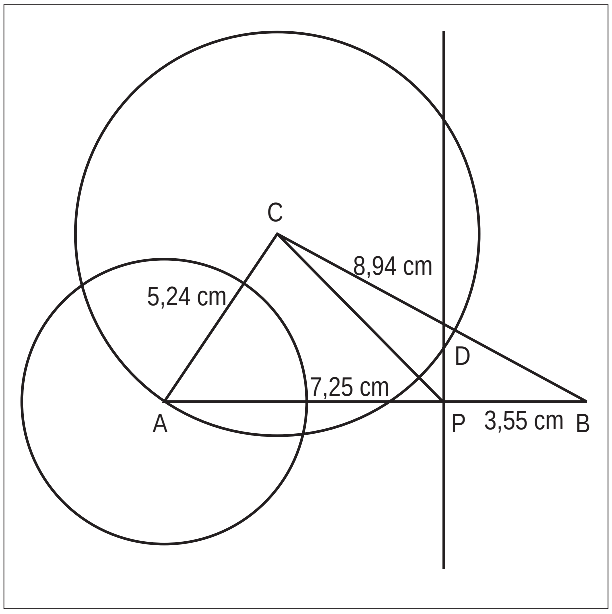
c) Ripetendo la costruzione sugli altri due lati di ABC si osserva che i segmenti CP, BQ e AR si incontrano nello stesso punto O, che appartiene all'asse della base nel caso ABC fosse isoscele e coincide con il centro se fosse equilatero.
Inoltre se AQ=x e CR=y, con calcoli analoghi al punto a):
AQ=x=(a+b-c)/2 e QC=b-x=(c+b-a)/2=PB
CR=y=(a+c-b)/2=AP e RB=a-y=(a+b-c)/2=AQ.
Dunque i punti P, Q, R dividono il contorno.[i lati] del triangolo in 6 segmenti a due a due congruenti: AQ=BR, QC=PB e CR=AP, come si evince dalla figura 2.



Marco Rossi e Matteo Geri, classe 3ST B
Liceo scientifico Tecnologico "A. Volta"
Lodi (LO)

a) Costruzione:
1) Per prima cosa abbiamo disegnato un triangolo scaleno qualunque ABC.
2) Abbiamo considerato il caso CB>AC. Puntando il compasso in C e con apertura AC abbiamo tracciato una circonferenza che ci ha permesso di trovare il punto D, interno al lato CB, intersezione tra la circonferenza e il lato stesso CB.
3) Puntando poi il compasso in A e con apertura BD abbiamo tracciato una circonferenza in modo da trovare il punto E, intersezione tra la seconda circonferenza e il lato AB. Siamo sicuri che E è interno al lato AB, infatti perché il triangolo sia costruibile AB deve essere maggiore della differenza degli altri due. [NOTA: Si ottiene lo stesso risultato sovrapponendo il lato maggiore sul minore; si veda in proposito la figura che precede il commento]
4) Infine [[abbiamo tracciato l'asse del segmento EB, determinando il suo punto medio]] [abbiamo trovato il punto medio di EB] che abbiamo chiamato P.

5) Il punto P è quello richiesto: per disegnare i due triangoli abbiamo unito il punto C con il punto P.



Giustificazione della costruzione:
Perché i perimetri siano uguali:
CP+AC+AP = CP+PB+CB
Sottraendo CP ad entrambi i membri:
AC+AP = PB+CB
Chiamiamo CB-AC = d (segmento differenza), quindi
CB = AC+d
e sostituiamo CB nell'espressione precedente:
AC+AP = PB+AC+d
Ora sottraiamo AC da entrambi i membri e otteniamo:
AP = PB+d.
Ora la soluzione è vicina: per trovare il punto P dobbiamo dividere AB = AP+PB in due parti in modo che la differenza tra le parti sia d e in modo che AP>PB.
Operativamente abbiamo trovato il punto E in modo che AE = d e abbiamo diviso EB in due parti congruenti, in questo modo il punto medio P di EB è proprio il punto cercato: infatti
EP = PB, AP = AE+EP = AE+PB = d+PB, come volevamo.

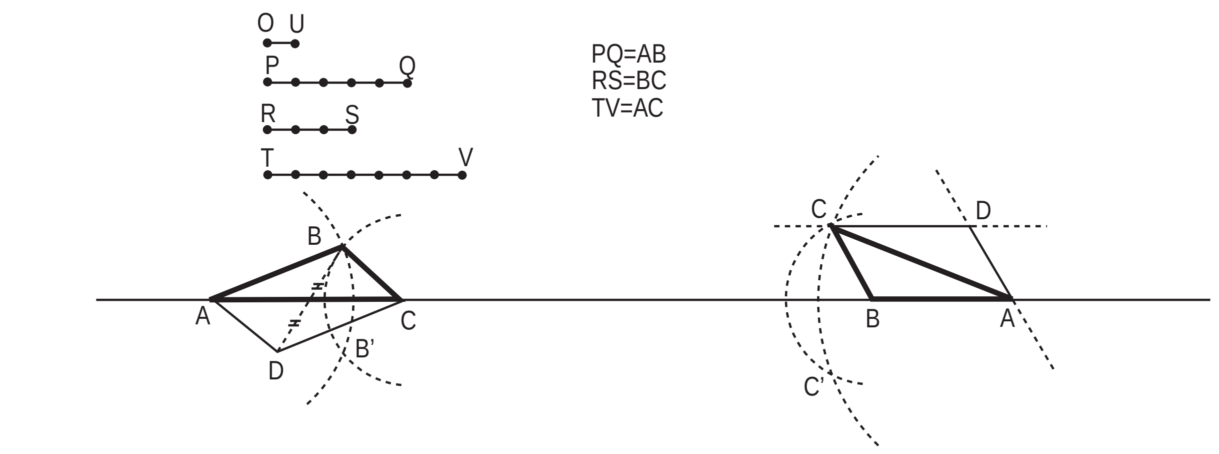
b) [[…]] [vedi commento]

c) [[…]]

4 - 18 Novembre 2002

Scelta a piacere una unità di misura OU, rappresentata da +—-+, e dati i tre segmenti
P+—-+—-+—-+—-+—-+Q
R+—-+—-+—-+S
T+—-+—-+—-+—-+—-+—-+—-+V,
costruire il parallelogrammo ABCD in cui due lati consecutivi misurino come PQ e RS, e una diagonale misuri come TV.
Sia I il punto medio del lato DC e K il punto in cui il segmento BI incontra la diagonale AC.

a) Qual è il rapporto fra KC e AC?
b) In quale punto la retta DK incontra il lato CB?
Giustificare le risposte.



Commento

Ci sono giunte risposte da otto scuole, una di queste risposte con due soluzioni distinte e una con due diversi percorsi nel secondo quesito. Anche questa volta ha partecipato una sola scuola media, la stessa dello scorso mese. Si tratta di una caduta di interesse per la geometria? Speriamo di no.

Queste le scuole che hanno partecipato:

LG “Cavour”, Torino (TO)
LST “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)
LG “Beccaria”, Milano (MI)
SM “C. A. Dalla Chiesa”, San Genesio (PV)
LS “G. Galilei”, Bitonto (BA)
LS “F. d’Assisi”, Roma (RM)
LS “Leonardo”, Brescia (BS) - (due soluzioni)
LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)

Nel problema proposto si assegnavano tre segmenti costruiti a partire da una unità prefissata e si chiedeva di costruire con essi un parallelogrammo, dati due lati e una diagonale. Seguivano poi due quesiti che non dipendevano dai segmenti assegnati, ma dalle caratteristiche generali dei parallelogrammi. Lo scopo della costruzione era di invitare i ragazzi ad eseguire con precisione la figura e ad indagare su eventuali diversi modi per ottenerla.
Sono quindi da considerarsi INCOMPLETE le risposte in cui non è stata illustrata la costruzione richiesta.
Sono stati individuati due diversi modi per ottenere il parallelogrammo: o utilizzando la caratteristica dei lati o ricorren-

do alla proprietà delle diagonali. Solo in una risposta è stata valutata la possibilità di ottenere più figure, fra loro congruenti, ma con lo stesso tipo di costruzione.

Nelle dimostrazioni dei due quesiti proposti sono stati seguiti diversi percorsi: chi ha utilizzato la similitudine fra triangoli, chi la congruenza, chi ha fatto ricorso al teorema di Talete (applicato al triangolo), chi ha usato la proprietà del baricentro.
Le giustificazioni sono in generale corrette e questo ci mette nell'imbarazzo della scelta delle risposte da riportare all'attenzione di tutti i partecipanti. Abbiamo riscontrato un solo errore di concetto (che segnaleremo alla classe interessata), e alcune imprecisioni sulle quali riteniamo opportuno soffermarci:
- nelle costruzioni non e' corretto riportare le "misure", le lunghezze si trasportano col compasso;
- le figure che si corrispondono nelle isometrie sono isometriche e quindi "congruenti" (sono anche equivalenti, ma non è vero il contrario: figure equivalenti NON SONO in generale congruenti);
- quando si chiede il rapporto fra due grandezze omogenee, la risposta corretta è un numero (nel nostro caso 1/3) e non la relazione che lega le due grandezze;
- tutte le affermazioni che discendono dalle ipotesi assegnate debbono essere giustificate, anche brevemente, e non basate sulla evidenza della figura.

Abbiamo stabilito di presentare le seguenti risposte:

SM "C. A. Dalla Chiesa", risposta completa in cui si fa ricorso alla similitudine in entrambi i quesiti (analogo percorso hanno seguito i ragazzi del LC "Beccaria" nella loro prima risposta);
LS "E. Amaldi", solo la costruzione, la più completa fra quelle ricevute;
LS "G. Galilei", risposta completa; in essa si fa ricorso al teorema di Talete (come in quella del LC "Cavour");
LS "F. d'Assisi", risposta completa (dimostrazioni analoghe sono quelle del LST "Cesaris" e del LS "Leonardo (prima soluzione));
LS "Leonardo", a testimonianza dell'impegno dimostrato dalla classe, la parte a) della seconda soluzione, in quanto si differenzia dalle precedenti.

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadre; in doppia parentesi quadra sono indicate invece le parti superflue o quelle omesse.

Soluzioni

Classe 3P
Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)

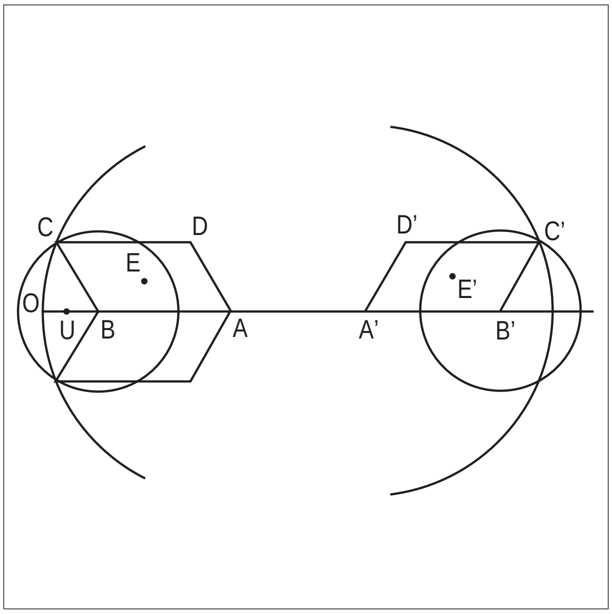
a) Abbiamo costruito con Cabri i segmenti PQ, RS e TV partendo da un segmento unitario mediante la simmetria centrale, nei rapporti stabiliti dal testo del problema.
Mediante la funzione "trasporto di misura" abbiamo costruito il segmento BC uguale a PQ e con la funzione "compasso" puntando rispettivamente in B e in C e con aperture rispettivamente uguali a RS e TV abbiamo costruito il lato AB consecutivo di BC e la diagonale AC del parallelogrammo.
Abbiamo trovato il quarto vertice tracciando la parallela a BC passante per A e la parallela ad AB passante per C.
Preso il punto I come il punto medio di CD consideriamo i triangoli ABK e CIK:
• Hanno l'angolo CKI uguale a BKA perché angoli opposti al vertice.
• L'angolo ICK uguale a BAK perché angoli alterni interni rispetto alle due rette AB e CD parallele tagliate dalla trasversale AC.
[[ABK è uguale a CIK perché è il terzo angolo di due triangoli con due angoli uguali.]]
Per questo motivo ABK e CKI sono triangoli simili e quindi hanno i lati in proporzione:
CI è uguale a un mezzo di CD quindi CI è uguale a un mezzo di AB, allora CK è uguale a un mezzo di AK e quindi CK = 1/3AC [quindi il rapporto fra CK e AC è 1/3, vedi commento].

b) Chiamo F l'intersezione della retta DK con BC.
Considero i triangoli CKF e AKD:
Hanno l'angolo CKF e AKD uguali perché angoli opposti al vertice.
L'angolo KCF è uguale a KAD perché angoli interni alterni rispetto alle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC.
[[ADK è uguale a KFC perché è il terzo angolo di due triangoli con due angoli rispettivamente uguali]].

Per questo motivo AKD e FKC sono triangoli simili quindi hanno i lati in proporzione.
Avendo dimostrato al punto a) che KC = (1/2)AK allora FC = (1/2) AD quindi F è il punto medio del lato BC.

Classe 2B
Liceo scientifico "E. Amaldi"
Bitetto (BA)

In riferimento alla figura allegata, su una semiretta di origine O, prendiamo un punto U così OU=u (unità di misura) e costruiamo il simmetrico B di O rispetto ad U, di U rispetto a B, sino ad arrivare in A; evidentemente AB=5u.
Dopo disegniamo le circonferenze di centro B e raggio 3u, di centro A e raggio OA=7u; il punto di intersezione C è tale che BC=3u e AC=7u.
Costruiamo il punto medio E tra A e C ed il simmetrico D di B rispetto ad E: il quadrilatero ABCD è un parallelogramma avendo le diagonali che si dimezzano.
Ripetendo la costruzione (traslando in A', altro punto della semiretta, il vettore OU), ma con le circonferenze di centro A' e raggio 7u, di centro B' e raggio 3u, si costruisce l'altro parallelogramma possibile. Quindi i parallelogrammi sono due, tra loro equivalenti [congruenti, vedi commento], poiché il secondo equivale [è congruente] al simmetrico del primo, rispetto alla retta della base: perciò ci riferiamo a quest'ultimo [in realtà si ottengono quattro parallelogrammi, considerando anche il simmetrico del secondo rispetto alla retta della base].



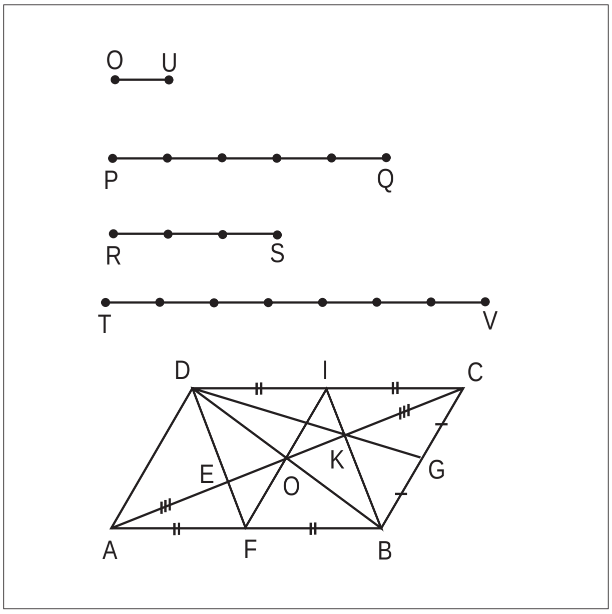
a) [[…]]

b) [[…]]

Classe 2E
Liceo scientifico "G. Galilei"
Bitonto (BA)

Costruiti i segmenti OU, PQ, RS, TV come richiesto con le funzioni compasso e simmetria centrale, abbiamo ottenuto il parallelogrammo ABCD nel seguente modo:
tracciata una semiretta di origine A, abbiamo riportato su di essa con la funzione compasso il segmento AB=PQ; sempre con la funzione compasso abbiamo trovato il punto C come intersezione delle circonferenze di centro B e raggio RS e di centro A e raggio TV; infine il punto D è stato individuato come punto di intersezione delle rette per A parallela a BC e per C parallela ad AB.

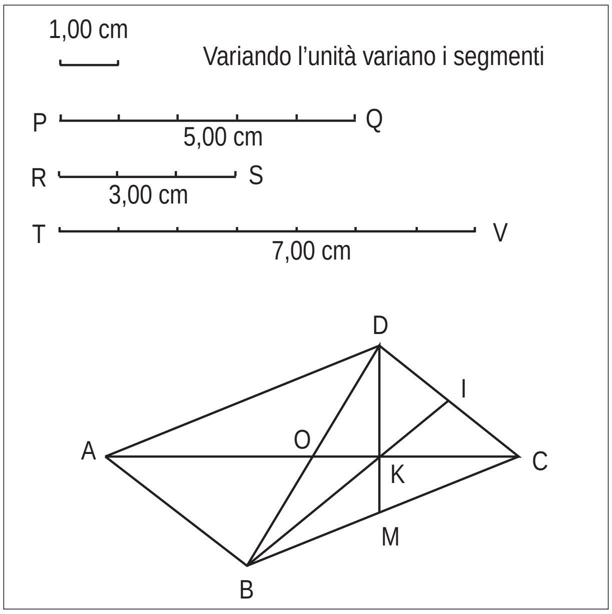
a) Detto I il punto medio del lato DC e K il punto in cui il segmento BI incontra la diagonale AC, abbiamo considerato il punto F medio del segmento AB e osservato che il quadrilatero FBID è un parallelogramma avendo FB parallelo a DI e FB=DI per costruzione; da ciò segue che DF è parallelo a IB. Sia E il punto intersezione fra AC e DF.
Applicando il teorema di Talete alle rette parallele DF e IB tagliate dalle trasversali DC e CA si ha che, essendo DI=IC per costruzione, anche EK=KC.
Applicando ancora il teorema di Talete alle stesse rette parallele tagliate da CA e AB si ha che: essendo AF=FB per costruzione anche AE=EK.
Per transitività si ha pertanto che AE=EK=KC e quindi il rapporto tra KC e AC è 1/3.



b) Tracciate le diagonali DB e IF del parallelogrammo FBID, queste si incontrano nel punto O medio per ciascu-

na diagonale poiché in un parallelogrammo le diagonali si tagliano scambievolmente a metà, pertanto DO=OB .
Nel triangolo BCD, il segmento CO è la mediana relativa al lato BD, il segmento BI è la mediana relativa al lato DC e dunque K, loro punto d'incontro, risulta essere il baricentro del triangolo; ne consegue che la retta DK, passando per il baricentro contiene la terza mediana del triangolo e quindi va ad intersecare il lato CB nel suo punto medio G.

Classe 2D
Liceo scientifico "Francesco d'Assisi"
Roma (RM)
Creo la retta r
Con il trasporto di misura [procedura non corretta, vedi commento] riporto [su r] il segmento TV lungo 7u di estremi AC.
Con centro in A raggio PQ traccio la circonferenza C1; con centro in C e raggio RS traccio la circonferenza C2. IL punto di intersezione tra le circonferenze lo chiamo D.
Creo la semiretta d'origine D passante per O punto medio di AC. Applico una simmetria centrale di centro O per il punto D, trovando così il punto B: questo è il quarto punto del parallelogramma richiesto.
Ho applicato le proprietà dei parallelogrammi:
1) Ogni diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
2) Il parallelogramma è un quadrilatero convesso dotato di un centro di simmetria.



a) Considero il triangolo BCD: K è il suo baricentro perché punto di incontro delle mediane IB e DM.
Sapendo che il baricentro divide ogni mediana in due parti tali che la parte contenente il vertice è doppia dell'altra, si ha: KC = 2OK. AO = OC per le proprietà dei parallelogrammi. OC = 3OK e quindi AC = 6OK.
Perciò KC/AC = 2OK/6OK = 1/3.
Quindi il rapporto tra KC e AC è 1/3.

b) La retta DK interseca il lato CB nel suo punto medio M perché K è il baricentro.

Classe 2F
Liceo Scientifico Sperimentale "Leonardo"
Brescia (BS)

[[…]]

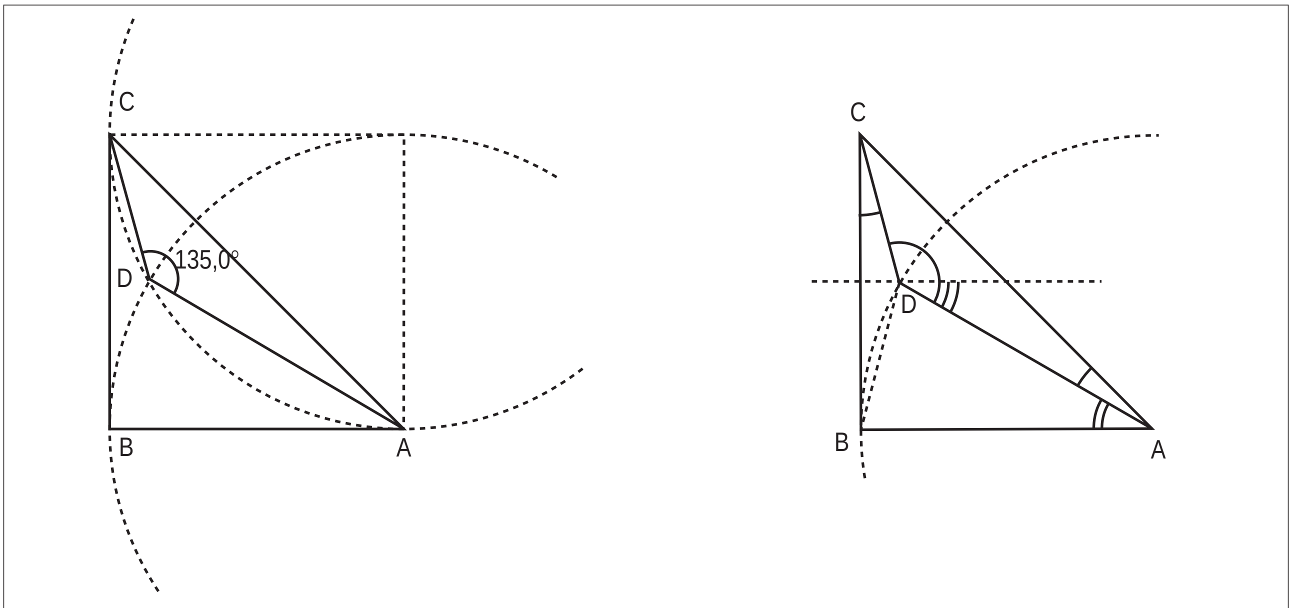
seconda soluzione:
Costruzione: **[[…]]**

a) Prolunghiamo i segmenti AI e CB e chiamiamo il loro punto di intersezione P. Si forma cosi il triangolo ABP.
Consideriamo ora i triangoli DAI e PIC:
$D\hat{I}A = P\hat{I}C$ perché opposti al vertice
DI = IC per costruzione
$A\hat{D}I = I\hat{C}P$ perché alterni interni rispetto alle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale DC
DAI risulta uguale a PIC, in particolare AI = IP e quindi per il teorema di Talete PC = CB. AC e IB sono quindi mediane. Per le proprietà delle mediane risulta KC = (1/3)AC [vedi commento].

b) [[…]]

2 - 16 Dicembre 2002

E’ dato un triangolo rettangolo isoscele ABC, di ipotenusa AC.
a) Individuare mediante una costruzione un punto D interno al triangolo, tale che sia DC = BC = BA e l’angolo DCB congruente all’angolo DAC
b) Determinare in tal caso la misura di ciascun angolo del triangolo CAD.
Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto nove risposte, di cui due provengono da scuole medie inferiori. Alcuni ragazzi partecipano per la prima volta a FLATlandia e, nel caso che non abbiano avuto successo, li invitiamo a non desistere e auguriamo loro un esito più soddisfacente con i prossimi problemi.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SM “C. A. Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti (PV)
IC, sezione Scuola Media, Marmirolo (MN)
ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR)
ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)
LS “G. Verdi”, Valdobbiadene (TV)
LS “G. Galilei”, Bitonto (BA)
LC “Cavour”, Torino (TO)
LS “Francesco d’Assisi”, Roma (RM)
LS “Copernico”, Torino (TO)
LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)

Nel problema proposto per il mese di Dicembre si chiedeva di costruire un punto, all’interno di un triangolo rettangolo isoscele, che soddisfacesse a due particolari condizioni. Sono stati individuati due diversi modi per ottenere tale punto: intersecando due opportune circonferenze oppure intersecando una determinata circonferenza con l’asse di un cateto.
Chi ha individuato la prima costruzione ha utilizzato, anche se in modo inconsapevole, la nozione di arco capace di un dato angolo (cioè tale che tutti gli angoli in esso inscritti sono congruenti all’angolo dato) ed ha saputo, in generale, giustificare il proprio operato.
Quelli che hanno invece proposto la seconda costruzione non hanno, nella maggior parte, saputo giustificarla oppure lo hanno fatto in modo non soddisfacente.
Ricordiamo ancora che le caratteristiche che vengono scoperte indagando su una figura con il software Cabri, debbono poi essere dimostrate.

Abbiamo stabilito di presentare le seguenti risposte:

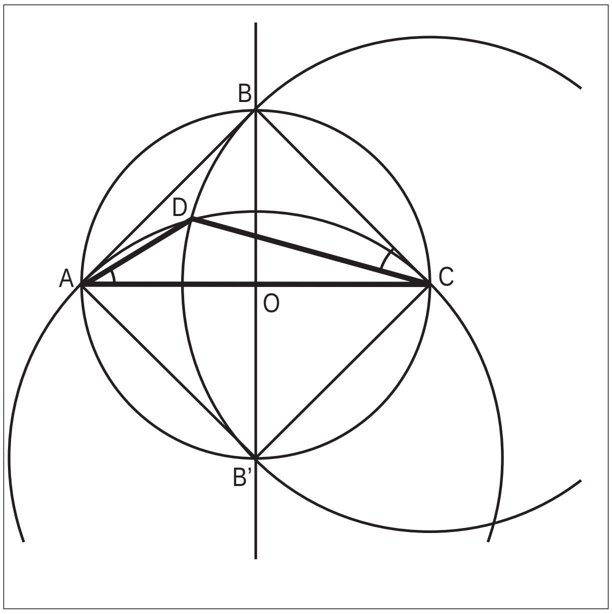
LS “Amaldi”, la risposta completa, in cui si propone la prima costruzione; una risposta analoga ha inviato la classe 2E del LS “G. Galilei”, che propone anche la seconda costruzione con una motivazione incompleta.
LC “Cavour”, solo la premessa alla prima costruzione (corredata da una nostra nota) in cui è evidente il ragionamento che porta alla nozione di arco capace di un dato angolo.
SM “C. A. Dalla Chiesa”, prima parte, in cui si giustifica la seconda costruzione ricorrendo alla simmetria; tale risposta sarà completata da alcune nostre osservazioni.

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadra; in doppia parentesi quadra sono indicate invece le parti superflue o quelle omesse.

Soluzioni

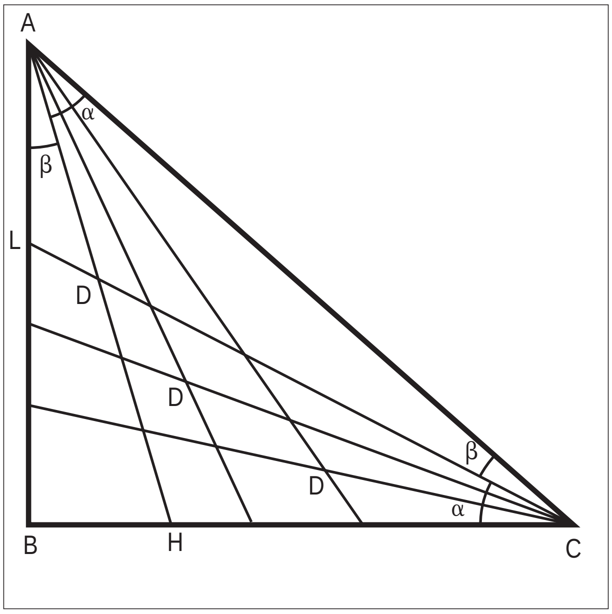
Classe 2B
Liceo scientifico “E. Amaldi”
Bitetto (BA)

In riferimento alla figura allegata, dato il segmento AC, disegniamo il suo asse e la circonferenza con centro nel punto medio O, di raggio OA. Dette B, O’ le intersezioni asse-circonferenza, AC e BO’ sono due diametri perpendicolari, per cui otteniamo il triangolo ABC rettangolo isoscele, essendo inscritto in una semicirconferenza ed essendo B sull’asse (lo è anche AO’C con angoloBCO’ = 90°).



a) Intersecando la circonferenza di centro C e raggio CB con quella di centro O’ e raggio O’C=O’A, otteniamo il punto richiesto D [[...]].
Infatti è DC = BC = AB e [nella circonferenza di centro O’] l’angolo BCD (con lato BC tangente, essendo BO’ raggio e BCO’ = 90°, e lato CD corda-secante [corda CD lato-secante]) è corrispondente [congruente] dell’angolo DAC poiché insistono sullo stesso arco DC.

b) Essendo angolo AO’C = 90°, il suo esplementare, concavo, misura 270° e l’angolo ADC alla circonferenza che insiste sullo stesso arco AC [[...]], misura 270°/2 = 135°. Inoltre il triangolo O’CD è equilatero (O’C = O’D perché raggi di una stessa circonferenza e O’C = BC = CD essendo anche [il triangolo] BCO’ rettangolo isoscele). Quindi angoloDCA = angoloDCO’ - angoloACO’ = 60°-45° = 15°. L’angolo DAC misura, infine, 180°-135°-15° = 30°.



Eleonora Bazzo, classe 1D
Liceo classico “C. Cavour”
Torino (TO)

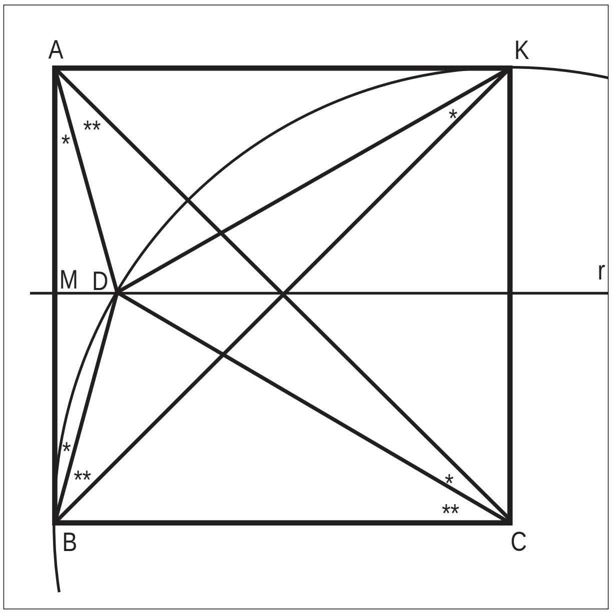
[Nel triangolo rettangolo isoscele ABC, di ipotenusa AC,] si tracci:
• la retta AH, che determina [un] angolo β rispetto ad AB;
• la retta CL, che definisce [l’angolo] α rispetto a BC tale che α = angolo(C-β).
Dall’angolo BAC si nota che $\alpha+\beta = 45°$. Perciò, dal triangolo ADC, [si ricava che] l’angolo in D =135°.
Cambiando i valori di α (e quindi di β), si otterrebbero i punti D’ e D”: anche in questi casi l’angolo in D è sempre uguale a 135°. Si è di fronte ad una serie di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC, che appar-

tiene ad una circonferenza il cui centro è sull'asse del lato AC; il centro è anche equidistante dai punti D, D', D" e da A e C. Unendo quattro di questi punti a due a due, si individuano due segmenti i cui assi si incrociano nel centro della circonferenza in questione [E].
L'arco di questa circonferenza, quindi, è il luogo dei punti individuati dal punto D al variare di α (e quindi di β).
Il punto D [...], perciò, si individua con l'intersezione dell'arco di circonferenza AC (con centro in E) con quello di BE (con centro in C [[...]]); entrambi hanno raggio BC.

[Non viene né qui né in seguito rilevato che il centro E è vertice del quadrato di lati AB e BC in quanto all'angolo alla circonferenza di 135° corrisponde un angolo al centro di 270°. Questa mancanza pregiudicherà la correttezza delle successive conclusioni.]

[[...]]

Valeria Cua, Andrea Maida, Marco Zetti
Classe 3P, Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)



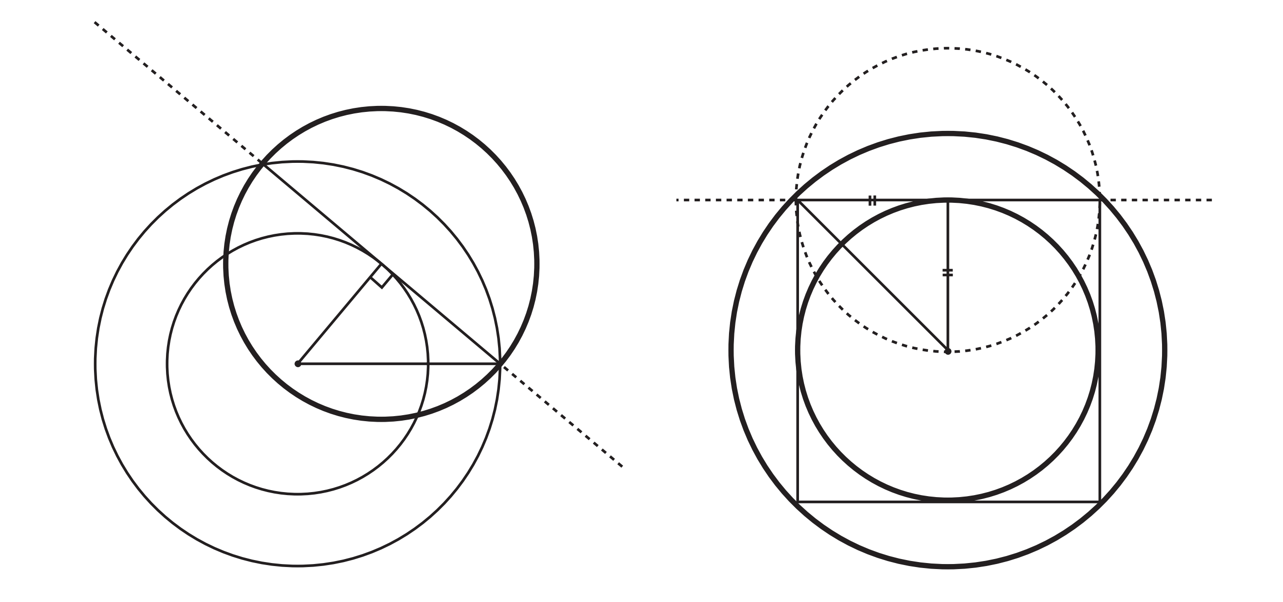
a) Costruiamo il triangolo [rettangolo] isoscele ABC di ipotenusa AC.
Disegniamo la circonferenza con centro in C e apertura CB, prendiamo il punto medio di AB e tracciamo la retta "r" parallela a BC passante per esso.
Chiamiamo D il punto di intersezione con la circonferenza, interno al triangolo.
Congiungiamo D con i punti A, C e B.
Costruiamo il simmetrico di ABC rispetto al lato AC e chiamiamo K il simmetrico di B [essendo anche il triangolo AKC rettangolo e isoscele di ipotenusa AC, il punto K è vertice del quadrato di lati BC e CA e si trova sulla circonferenza di centro C e raggio BC]; uniamo K con B.
L'angolo BCD è il doppio dell'angolo BKD perché [[...]] [rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza] che insistono su uno stesso arco, BD.
Chiamiamo "a" l'ampiezza di BKD e "2a" l'ampiezza di BCD.
La retta "r" [[...]], passante per D [,essendo perpendicolare al lato AB] è asse di simmetria del quadrato [ABCK] e quindi possiamo dire [[...]] che i triangoli BDK e ADC sono congruenti [essendo B, A e C, K coppie di punti corrispondenti] di conseguenza gli angoli DCA e DKB sono uguali.
Il triangolo ADB è isoscele perché "r" è l'asse del segmento AB e D si trova sull'asse: quindi ABD = BAD per costruzione.
Consideriamo il triangolo BCD, isoscele per costruzione:
CBD = (180°-2a)/2 = 90°-a quindi ABD = BAD = a
Poiché DAC = 45°-a, avrà ampiezza uguale a DCB.

b) [[...]]

7 - 21 Gennaio 2003

1) Data una corona circolare, costruire il diametro di un cerchio avente la stessa area della corona.
2) Determinare due cerchi concentrici tali che l'area della corona circolare da essi individuata sia uguale all'area del cerchio di raggio minore.

Giustificare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto dodici risposte, di cui tre provengono da scuole medie e cinque da una stessa scuola superiore (un gruppo di tre allievi di una classe prima e risposte singole o a coppie di allievi di una classe seconda). Siamo compiaciuti per tale partecipazione, anche se alcune di quelle risposte necessitavano di una maggior riflessione.
Nell'elenco delle scuole del mese di Dicembre è stato inserito in un secondo tempo il LS "G. Verdi", la cui risposta non era stata "vista" da tutti i componenti del gruppo di FLATlandia e quindi sfuggita nel controllo finale.

Queste sono le scuole che hanno partecipato:

SM "G. B. Tiepolo", Milano (MI)
Scuola Media, Ist. Compr. di Venasca (CN)
SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
ITI "Berenini", Fidenza (PA) - cinque risposte
LS "G. Verdi", Valdobbiadene (TV)
LS "G. Galilei", Adria (RO)

Il problema di questo mese aveva come argomento la corona circolare e proponeva due costruzioni, di cui la seconda era un caso particolare della prima. In due risposte non è stata eseguita la seconda costruzione; nelle altre, dove sono state individuate entrambe, non sempre sono state giustificate in modo esauriente. Come abbiamo detto più volte, poiché gli anni passano e i ragazzi cambiano, ripetiamo ancora che lo scopo della risoluzione di un problema non è solo trovare il risultato, ma saper giustificare in modo chiaro e completo il proprio operato, anche nei casi più evidenti. Ripetiamo inoltre che saremo più esigenti con i ragazzi del biennio che con quelli della scuola media inferiore.

Il problema non si prestava a molte interpretazioni, ma si sono evidenziati ugualmente due diversi percorsi nella risposta al primo punto, mentre nel secondo punto nessuno è giunto alla conclusione che la corona circolare richiesta fosse formata dalle circonferenze inscritta e circoscritta ad un quadrato.
L'esposizione è in generale corretta, tuttavia ci sembra opportuno fare alcune precisazioni:

- Col termine **congruente** si indica la “sovrapponibilità” di due grandezze omogenee (coppie di segmenti, di triangoli, di archi,…); la lunghezza, l’area, il volume sono misure e si dovrà dire, ad esempio, che l’area della figura F è **uguale** all’area della figura F’ qualora le due aree siano rappresentate dallo stesso numero rispetto alla stessa unità di misura.
- La corona circolare e il cerchio sono porzioni di piano di cui si può calcolare l’area; la circonferenza è una linea curva di cui si può calcolare la lunghezza.

Le risposte accolte sono sette ma non le presenteremo tutte:

Per le scuole medie
Scuola Media di Venasca, la prima parte.
SM “C. A. Dalla Chiesa”, la seconda parte.

Per le scuole superiori
LS “G. Galilei” di Bitonto, risposta completa.
LS “E. Amaldi”, risposta completa; nella parte a) si fa ricorso alla stessa proprietà utilizzata dai ragazzi del LS Galilei di Bitonto, ma si procede in modo diverso nella costruzione.
LS “G. Verdi”, la prima parte.
ITI LST “Berenini”, classe 1Bst, la seconda parte.

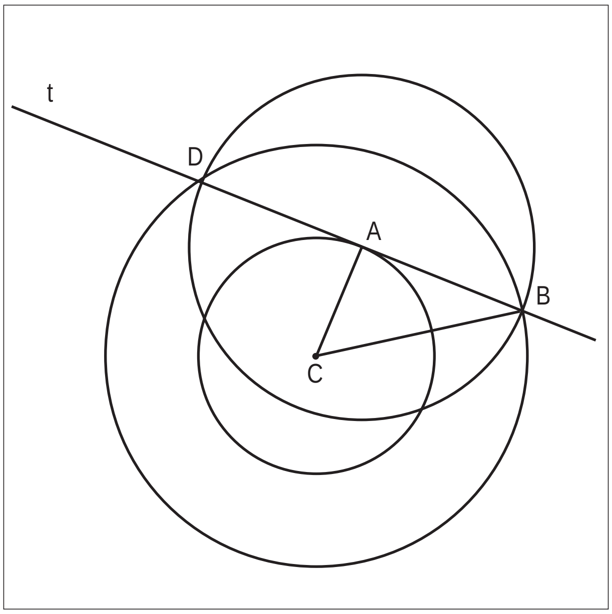
Segnaliamo inoltre la soluzione di Federica Rapaccioli e Alessandro Manfredi della classe 2Bst del Berenini, analoga alle ultime due citate sopra.

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadra; in doppia parentesi quadra sono indicate invece le parti superflue o quelle omesse.

Soluzioni

Classe 2B
Scuola media dell’Ist. Comprensivo
Venasca (CN)

1) Data una circonferenza di raggio r [CA nella figura 1], si costruisca la tangente [t] in A alla circonferenza[tracciando la retta perpendicolare in A al raggio AC]; costruita una seconda circonferenza concentrica con la prima e di raggio maggiore, R, si determinino le intersezioni della seconda circonferenza con la retta tangente t individuando i punti B e D. Il segmento CB risulta essere, ovviamente, il raggio R della seconda circonferenza e, poiché l’area della corona circolare è data da 3,14(R^2 – r^2), considerando che il triangolo ACB è rettangolo con ipotenusa CB (=R) e cateto CA (=r), il cateto AB risulterà essere il raggio di un cerchio avente la stessa area della corona circolare.
Pertanto la corda BD sarà il diametro del cerchio richiesto.



2) [[…]]

Classe 3P
Scuola media “C.A. Dalla Chiesa”
San Genesio ed Uniti (PV)

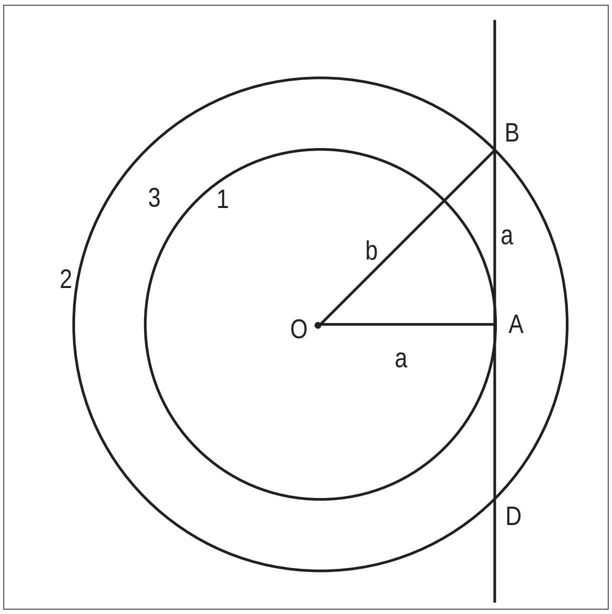
1) [[…]]

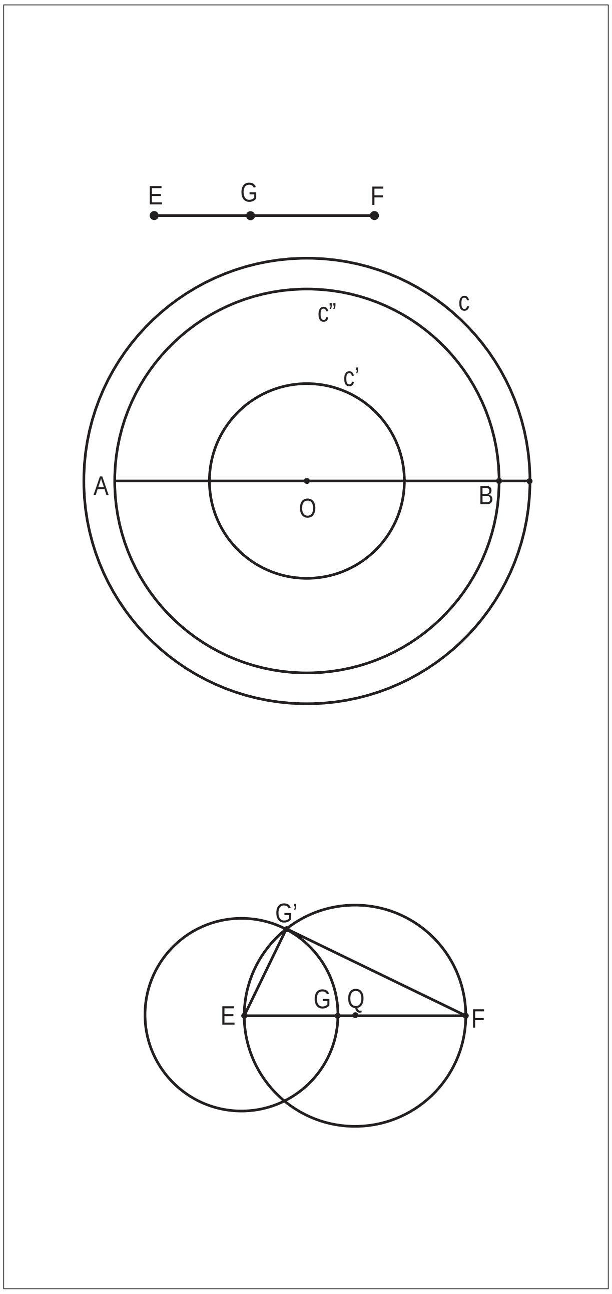
2) Costruiamo una circonferenza C_1 di centro O e tracciamo il raggio OA di misura “a” e la tangente a C_1 nel punto A; con il compasso, puntando in A, riportiamo la misura di “a” sulla retta tangente e chiamiamo B l’intersezione.

Il triangolo OAB è un triangolo rettangolo avente i cateti uguali [[…]].

[Tracciamo la circonferenza C_2 di raggio OB].

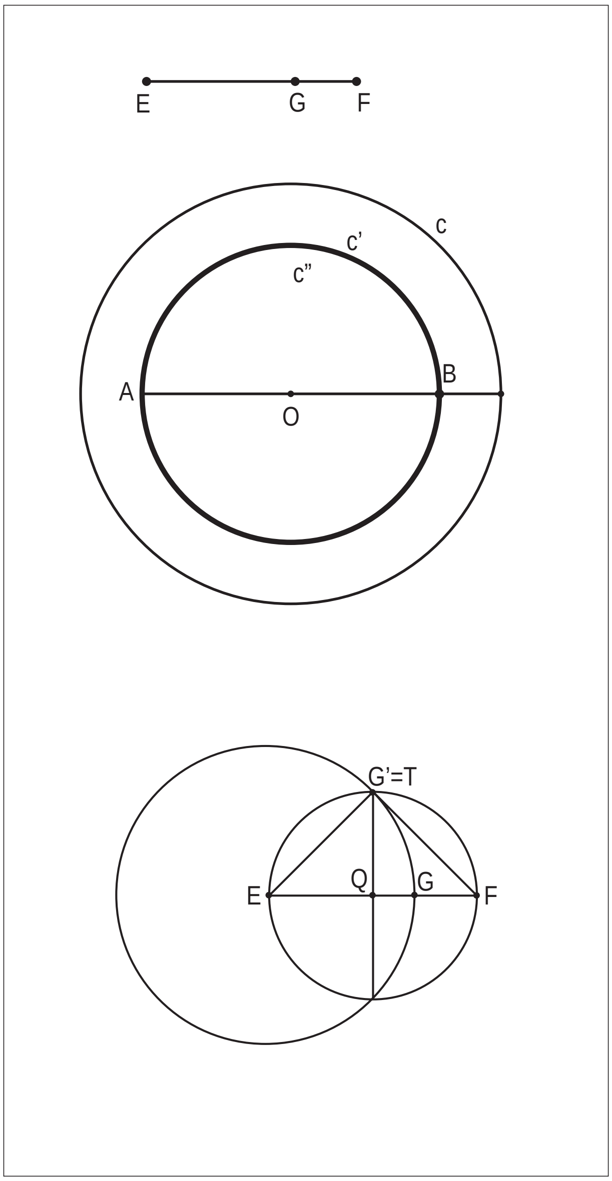
Poiché prima abbiamo dimostrato che la corona circolare ha la stessa superficie di un cerchio avente il raggio uguale al cateto AB, in questo caso AB = AO = a e perciò ha la stessa area di C_1.





Classe 2E
Liceo scientifico "G. Galilei"
Bitonto (BA)

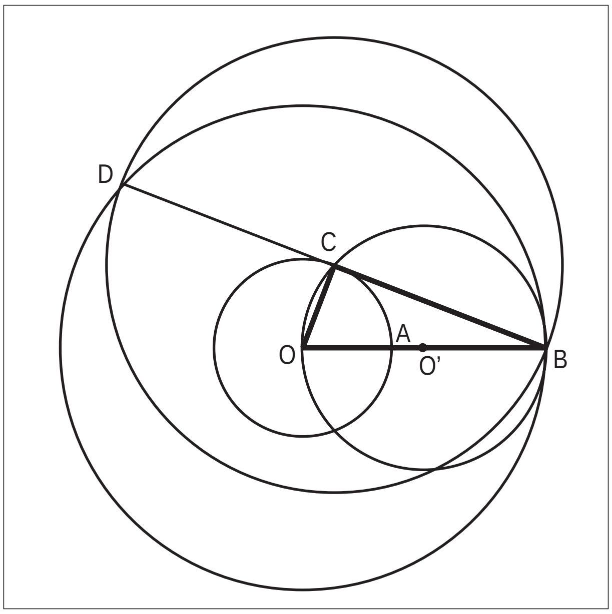
1) Sia r = EF il raggio del cerchio c e r' = EG il raggio circonferenza della c', con r'<r.
L'area della corona circolare individuata da c e c' misura A" = A-A' = rπ - r'π = (r - r')π, pertanto il raggio R del cerchio c" di area pari a quella della corona circolare sarà tale che
$R^2 = r^2 - r'^2$ e quindi $R = \sqrt{r^2 - r'^2}$. Questo risultato ci dice che R è il cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa r e cateto r'. A tal proposito basta tracciare la circonferenza di diametro EF, quella di raggio EG e, detto G' uno dei loro punti intersezione, G'F sarà il raggio R richiesto.
Puntando nello stesso centro O di c e c', tracciamo la circonferenza c" di raggio R = G'F e quindi il suo diametro AB =2R.



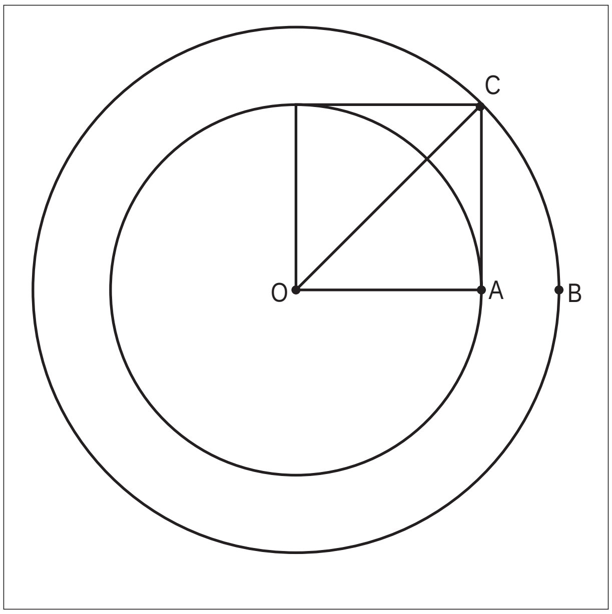
2) Se in particolare si vuole che l’area della corona circolare sia uguale a quella del cerchio di raggio minore, si deve avere che:
$(r^2 - r'^2)\pi = r'^2\pi \Rightarrow r^2 - r'^2 = r'^2 \Rightarrow 2r'^2 = r^2$
ed infine $r'^2 = r^2/2$, relazione che intercorre fra il cateto e l’ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele. A questo punto basta costruire il triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa EF (basta tracciare il diametro perpendicolare ad EF nella circonferenza di diametro EF, per avere ET nella relazione cercata con EF). [[…]] [Poiché T = G’] allora c” = c’. Pertanto la circonferenza di raggio $r' = \sqrt{(r^2/2)}$ divide il cerchio di raggio r, ad esso concentrico, in due parti equivalenti.

Classe 2B
Liceo scientifico “E. Amaldi”
Bitetto (BA)

In riferimento alle figure allegate:
1) Se la circonferenza esterna ha raggio OB = R e quella interna concentrica ha raggio OA = r, l’area della corona circolare è pi*(R^2-r^2), dove pi è il “p”greco.
Fissato il punto medio O’ del segmento OB, se C è una intersezione della circonferenza di centro O’ e raggio OO’ = O’B con la circonferenza interna di raggio r = OA = OC, il segmento BC risulta tangente alla circonferenza interna e perpendicolare al raggio r = OC nel punto di tangenza C (l’angolo OCB è 90° perché inscritto in una semicirconferenza).
Essendo quindi OB = R, OC = OA = r e angoloOCB = 90°, per il teorema di Pitagora sarà BC^2 = R^2-r^2 e la circonferenza [il cerchio] di raggio BC avrà area pi*(R^2-r^2) come quella della corona circolare.
Infine, se D è il punto diametralmente opposto a B nell’ultima circonferenza, il segmento BD è il diametro richiesto.

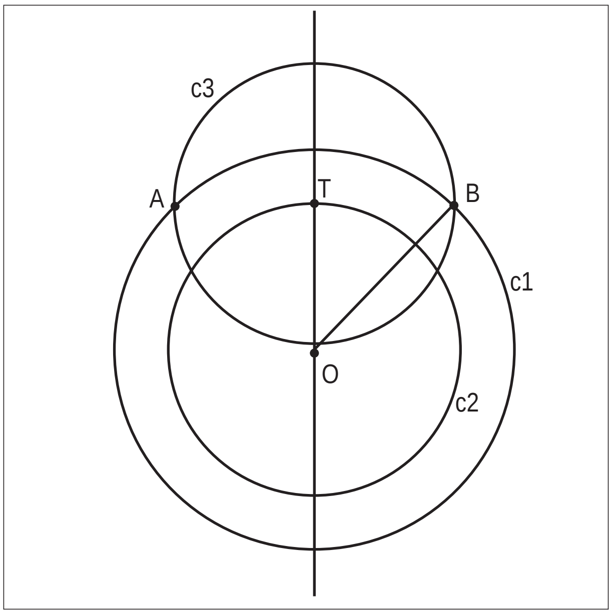


2) Data la circonferenza di raggio OA = r, costruito un quadrato su OA e di lato OA = r, la sua diagonale OC è r*rad(2). Pertanto la circonferenza ad essa concentrica e di raggio R = OC = r*rad(2) = OB è tale che l'area della corona circolare è pi*(R^2-r^2) = pi*(2r^2-r^2) = pi*r^2, [quindi uguale all'] area della circonferenza [cerchio] interna.



Elisabetta Andreola, Silvia Piazza e Monica Verri
Classe 2A, Liceo scientifico "G. Verdi"
Valdobbiadene (TV)

1) Disegno le circonferenze concentriche c1 e c2 (c2 di raggio minore) di centro O , che individuano una corona circolare.
Traccio per il punto O una retta r e chiamo T un suo punto d'intersezione con la circonferenza c2. Per T traccio la retta s perpendicolare alla retta r ed indico con A e B i punti d'intersezione di s con la circonferenza c1.
Poiché il triangolo OTB è rettangolo, per il teorema di Pitagora , si ha:
$TB^2 = OB^2 - OT^2$
Dall'uguaglianza a), moltiplicando ciascun termine per p, si ottiene l'uguaglianza b):
$pTB^2 = pOB^2 - pOT^2$
Il secondo membro dell'uguaglianza b) rappresenta l'area della corona circolare data, che è perciò equivalente all'area del cerchio delimitato dalla circonferenza c3 di raggio TB.
AB è una corda della circonferenza c1, perpendicolare ad r. Segue che la retta r divide la corda AB in due parti uguali (TA = TB) ed, essendo TB il raggio della circonferenza c3, AB ne è il diametro.

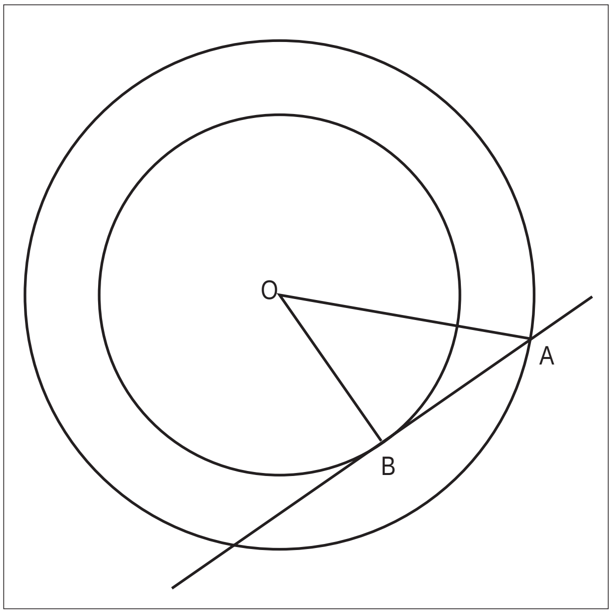


2) [[…]]

Classe 1Bst
ITI "Berenini"
Fidenza (PR)

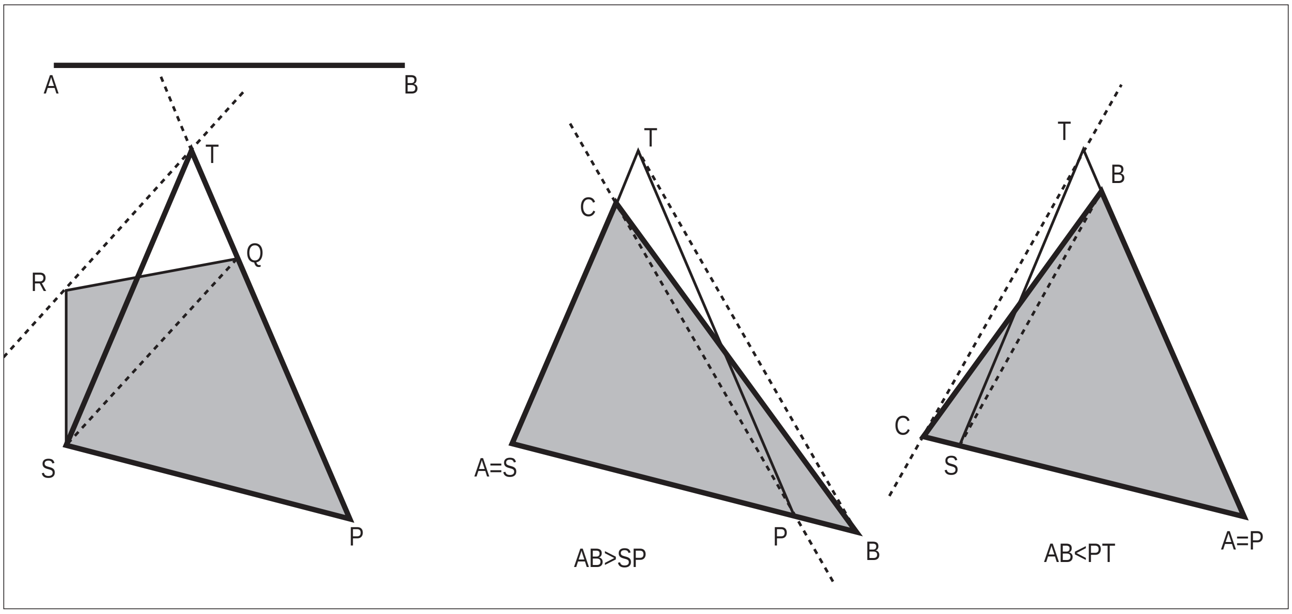
1) [[…]]

2) Data la circonferenza di raggio minore, disegnare il raggio (OB), trovare la retta perpendicolare a quest'ultimo nel punto B, riportare da B la misura del raggio sulla retta trovando A. Unendo il centro della circonferenza con il punto trovato sulla retta, si trova un triangolo rettangolo isoscele OAB i cui cateti sono congruenti al raggio. L'ipotenusa OA risulta essere il raggio del cerchio concentrico a quello di partenza e che forma con esso una corona circolare la cui area è uguale all'area del cerchio di raggio minore. Infatti applicando ancora il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo isoscele OAB si ha:
$OB^2 = OA^2 - OB^2$ quindi come nel punto precedente moltiplicando per p si ottiene l'uguaglianza tra le aree richieste.



3 - 17 Febbraio 2003

Dato un quadrilatero qualsiasi SPQR ed un segmento AB, trasformare il quadrilatero in un triangolo ABC ad esso equivalente.
Giustificare la costruzione.



Commento

Ci sono giunte sette risposte provenienti da sei scuole (due medie inferiori e quattro superiori). Abbiamo inoltre ricevuto altre risposte da almeno due mittenti, ma abbiamo dovuto eliminarle perché contenenti virus.

Le scuole che hanno inviato risposte sono:

LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
LS "Leonardo", Brescia (BS)
ITI, Lst "Berenini", Fidenza (PR) - due risposte
SM "L. da Vinci", Rufina (FI)
SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)

Il problema proposto per questo mese aveva come argomento l'equivalenza piana, forse non tutti i ragazzi che seguono FLATlandia hanno già trattato questo tema a scuola.
Si chiedeva di trasformare un quadrilatero in un triangolo equiesteso avente un lato già assegnato.
Il procedimento ottimale era quello di trasformare il quadrilatero in un triangolo equivalente e, dopo aver sovrapposto il segmento dato su uno dei lati del triangolo ottenuto, eseguire ancora una trasformazione con una costruzione analoga alla precedente.
Solo in tre delle risposte giunte è stato seguito questo percorso, ma in nessuna di esse sono state esplorate tutte le possibilità che potevano presentarsi: il segmento dato poteva essere minore, maggiore o banalmente uguale a un lato del triangolo ottenuto dalla prima trasformazione.
Il metodo di risoluzione era comunque lo stesso.
In due risposte sono stati seguiti percorsi diversi da quello prima citato. Una, in particolare, in cui sono stati operati nella seconda trasformazione due successivi passaggi basati sul secondo teorema di Euclide, è stata considerata corretta, ma eccessivamente laboriosa.
Nelle rimanenti è stato esaminato solo un caso particolare.

Per le scuole superiori è stata scelta la soluzione inviata dal

LS “Leonardo”, analoga a quelle giunte da LS “G. Galilei” e da Santi Luca dell’ITI “Berenini”.

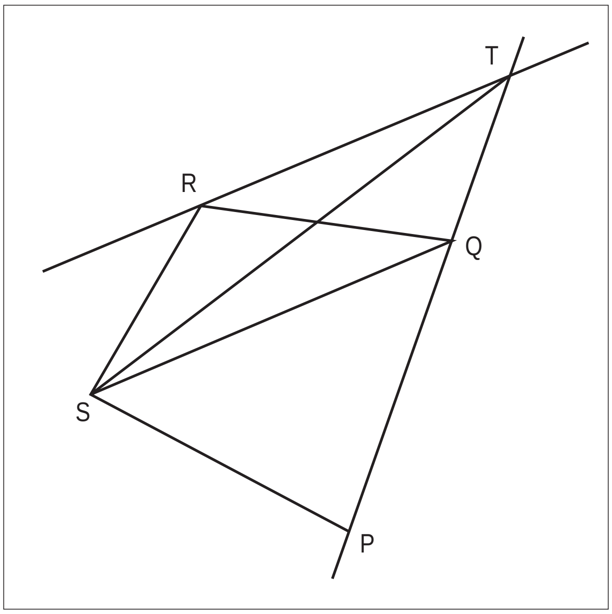
A testimonianza dell’impegno dimostrato vengono presentate entrambe le soluzioni proposte dalle due scuole medie inferiori, anche se una presenta solo un caso particolare e l’altra basa la sua costruzione su un calcolo algebrico.

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadra; in doppia parentesi quadra sono indicate invece le parti superflue o quelle omesse.

Soluzioni

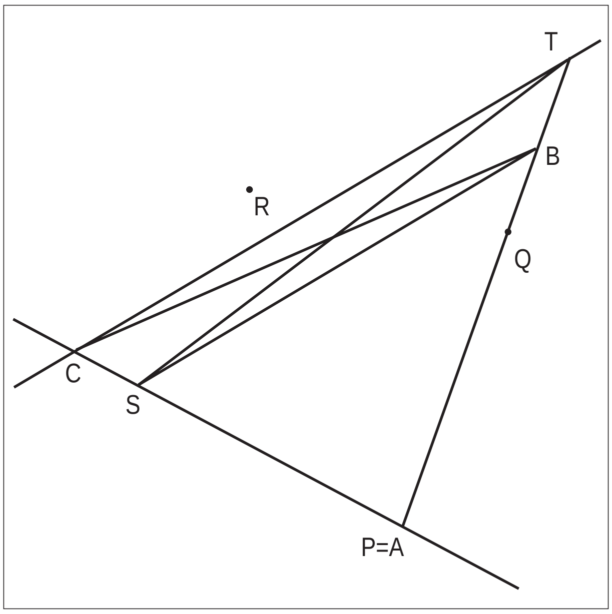
Classe 2F
Liceo scientifico sperimentale “Leonardo”
Brescia (BS)

Fig.1 [accanto al quadrilatero si doveva tracciare anche il segmento AB prescelto]
Dato il quadrilatero SPQR traccio la diagonale SQ e la sua parallela passante per R, indico con T il punto di intersezione tra tale parallela e il prolungamento del lato PQ.
Il triangolo SPT è equivalente al quadrilatero SPQR in quanto somma di triangoli equivalenti: entrambi sono composti dallo stesso triangolo SPQ e dai due triangoli SRQ e SQT equivalenti tra loro perché aventi la stessa base SQ e la stessa altezza [altezze congruenti] (la distanza fra le due rette parallele).



Ora si tratta di trasformare il triangolo SPT in un altro equivalente avente per lato il segmento assegnato AB:

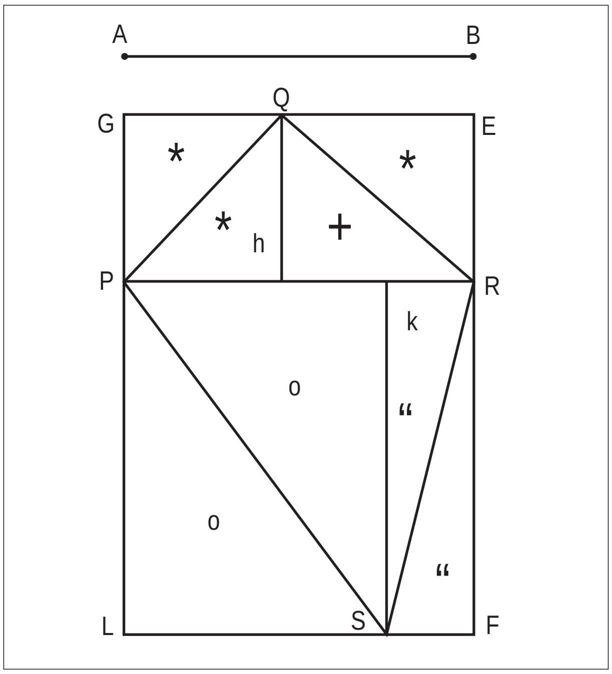
Sulla base PT del triangolo così ottenuto riporto AB in modo che A coincida con P. Unisco S con B e traccio la parallela a SB passante per T, indico con C il punto di intersezione tra tale parallele e la retta AS (C sarà interno al lato PS se B è esterno al lato PT).
Il triangolo ABC così ottenuto è equivalente al triangolo SPT perché somme di triangoli equivalenti [affermazione da giustificare come fatto nella prima parte].
Per la proprietà transitiva dell’equivalenza tra poligoni SPQR è equivalente al triangolo ABC.



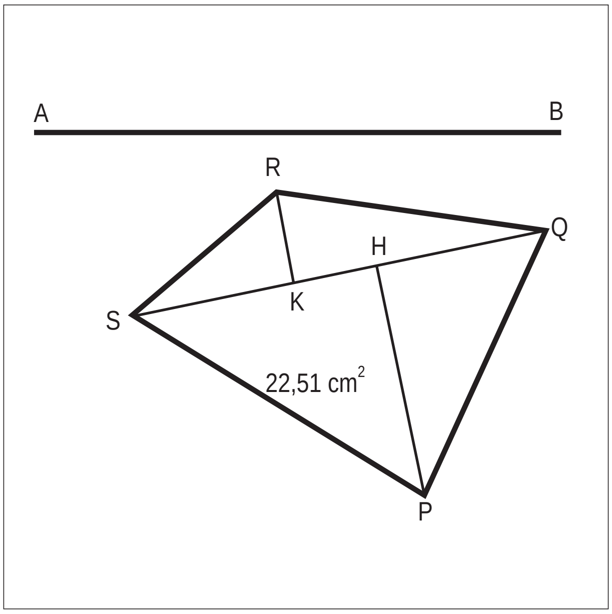
Valeria Cua, Andrea Maida, Marco Zetti, Marta Zuffi
Classe 3P, Scuola media “C.A. Dalla Chiesa”
S.Genesio ed Uniti (PV)

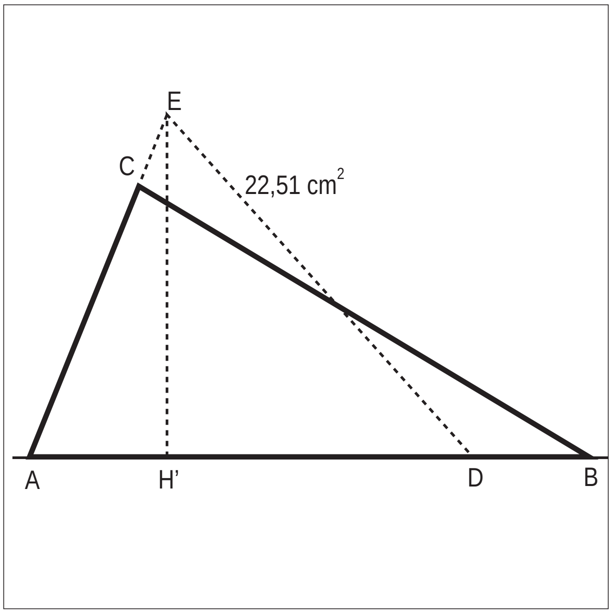
Abbiamo risolto parzialmente il problema, cioè solo nel caso cui AB è congruente alla diagonale PR del quadrilatero SPQR; [[…]].
Abbiamo considerato il quadrilatero SPQR e abbiamo tracciato due rette parallele alla diagonale PR passanti per Q ed

S, e due rette perpendicolari alle precedenti passanti per R e P.
Individuiamo i punti d'incontro delle rette tracciate e otteniamo così un rettangolo GEFL circoscritto al quadrilatero SPQR.
Il rettangolo ha una superficie doppia del quadrilatero come evidenziato nel disegno allegato.
Poiché una dimensione del rettangolo è uguale al segmento dato AB, considero il triangolo di vertici LFC, dove C è un punto qualunque del lato GE.
Questo triangolo avente una superficie che è la metà del rettangolo GEFL è equiesteso al quadrilatero SPQR.



Classe 2B
Scuola media "L. da Vinci"
Rufina (FI)
Abbiamo considerato il quadrilatero SPQR costituito dai due triangoli SPQ e SQR con la base SQ in comune.
Abbiamo inoltre costruito le altezze di tali triangoli, PH ed RK, relativamente alla base SQ.
Quindi l'area del quadrilatero SPQR può essere considerata come risultato della somma delle aree dei due triangoli SQR e SQP.
A(SPQR) = A(SQP) + A(SQR)
A(SQP) = (SQ * PH) /2; A(SQR) = (SQ * RK) /2
A(SPQR) = (SQ * PH) /2 + (SQ * RK) /2
e, mettendo in evidenza
A(SPQR) = SQ * (PH + RK) * 1/2
Abbiamo costruito il triangolo ADE avente la base AD congruente alla diagonale SQ e l'altezza EH' congruente alla somma delle altezze RK e PH [anche se si tratta di una costruzione semplice, sarebbe stato corretto indicare un procedimento (geometrico) per ottenere tale somma].
Quindi
A(SPQR) = A(ADE)
Per trasformare il triangolo ADE in un altro equivalente di base qualsiasi abbiamo seguito il seguente procedimento:
sulla retta r [[…]] [riportiamo il segmento AB (vedi figura)]. Uniamo il vertice E con il punto B e tracciamo la parallela al segmento BE passante per il vertice D.
Tale parallela interseca la retta AE nel punto C.
Il triangolo ADE è così composto dai due triangoli ADC e CDE.
Il triangolo CDB, è equivalente al triangolo CDE perché aventi base in comune CD e altezza congruente alla distanza del segmento BE con la sua parallela CD.
Il triangolo ABC, di base qualunque AB risulta quindi equivalente al triangolo ADE perché equicomposto con esso (ADC in comune e CDB equivalente CDE), e di conseguenza equivalente al quadrilatero dato SPQR.
[[…]]



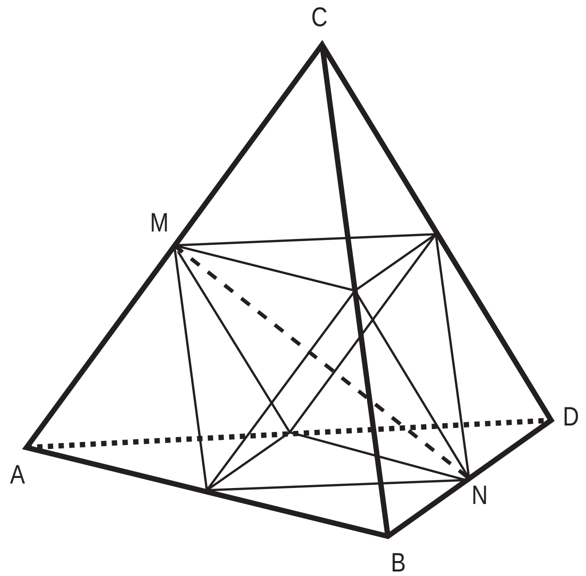


3 - 17 Marzo 2003

a) E' dato un tetraedro regolare ABCD di lato *l*. I punti medi di ciascuno spigolo, congiunti a due a due, formano dei triangoli: quanti sono quelli equilateri? Quale figura solida formano?
Giustificare le risposte.
b) Detto M il punto medio dello spigolo BD e N il punto medio di AC, calcolare la misura della distanza MN in funzione di *l*.

Commento

Prima parte (Marzo)
Non abbiamo ricevuto alcuna risposta al quesito proposto. Forse questo argomento di geometria dello spazio era prematuro per i ragazzi della scuola media inferiore e non rientra nel programma di molte classi del biennio superiore.
Ci sembra comunque importante acquisire un po' di dimestichezza con le figure tridimensionali e con le loro rappresentazioni nel piano, per cui non presentiamo per ora la nostra soluzione, ma lasciamo il quesito aperto fino al 19 Maggio 2003, data in cui termina l'attività di FLATlandia per questo anno scolastico. Se qualcuno vuole cimentarsi nella sua risoluzione può quindi inviarci la sua risposta.



Seconda parte (Maggio)
Non avendo ricevuto risposte al problema di Marzo entro il termine prestabilito, lo abbiamo riproposto spostando la presentazione della soluzione al 19 Maggio.
Ci sono pervenute due risposte in Aprile e a queste non se ne sono aggiunte altre.

Le scuole che hanno partecipato sono:
SM "C. A. dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)
ITA "Pastori", Brescia (BS)

Nel problema proposto si chiedeva di contare quanti triangoli equilateri si formano congiungendo i punti medi, e SOLO essi, degli spigoli di un tetraedro regolare e quale figura solida individuano tali triangoli. Si chiedeva poi di calcolare la lunghezza di un determinato segmento.

Ovviamente il solido richiesto è un ottaedro regolare, ma si dovevano giustificare le risposte; ad esempio:
- che i triangoli equilateri richiesti sono otto, fra loro congruenti;
- che gli otto triangoli formano due piramidi con base comune, quadrata (lati congruenti e diagonali congruenti);
- che la lunghezza richiesta è una diagonale di tale base.

In entrambe le risposte i ragazzi hanno contato, o tentato di contare, tutti i triangoli equilateri che si formano, senza però precisare quali sono quelli richiesti. In entrambe è corretto il calcolo della lunghezza richiesta.

Gli studenti della scuola media "C. A. dalla Chiesa" hanno fornito una descrizione corretta e molto chiara della figura, ma quasi priva di giustificazioni.

Gli studenti dell'ITA "Pastori", oltre ad alcune imprecisioni nel conteggio dei triangoli e a qualche carenza nelle giustificazioni, non hanno posizionato nel modo da noi proposto le lettere della figura. Questo ultimo fatto ha creato una certa confusione nella loro risposta ed impedito la sua possibilità di pubblicazione.

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadra; in doppia parentesi quadra sono indicate invece le parti superflue o quelle omesse.

Soluzioni

Classe 3P
Scuola media "C.A. dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)
Abbiamo costruito un modellino del tetraedro con le cannucce e i pulisci pipa e con ago e filo abbiamo unito i punti medi degli spigoli.
Il tetraedro [regolare] è un solido formato da 4 facce triangolari regolari.
In un triangolo equilatero [di lato *l*] il triangolo che si forma congiungendo i punti medi dei lati è, per il teorema di Talete, equilatero e la misura del lato è *l*/2.
Nel tetraedro si formano: 16 triangoli equilateri sulle facce e 4 all'interno del solido.
Il tetraedro di partenza ABCD lo possiamo vedere scomposto in 4 tetraedri di spigolo *l*/2 e in un ottaedro di spigolo *l*/2.
L'ottaedro regolare è formato da due piramidi uguali a base quadrata aventi la base coincidente; il segmento congiungente il punto M di BD e il punto N di AC è la diagonale di questo quadrato.
MN = sqrt((*l*/2)^2 + (*l*/2)^2) = sqrt((*l* ^2)/4 + (*l* ^2)/4) = *l*/sqrt(2)

1 - 15 Aprile 2003

1) Ritagliare da un cartoncino due triangoli rettangoli scaleni fra loro congruenti ed un terzo triangolo rettangolo, che, unito ai primi due come in un puzzle, formi un trapezio non rettangolo (per trapezio si intenda un quadrilatero con due lati paralleli e gli altri due non paralleli).
2) Considerato uno dei possibili trapezi così costruiti ed indicate con a, b, c le misure dei cateti e dell'ipotenusa dei due triangoli rettangoli congruenti, trovare il rapporto fra i lati obliqui di tale trapezio.
3) Si chiede inoltre se è possibile individuare a, b, c in modo che il trapezio considerato nel punto precedente abbia le dimensioni espresse da numeri interi.

Giustificare le costruzioni e motivare le risposte.

Figure realizzate da:
Valeria Cua, Andrea Maida e Marco Zetti
Classe 3P, Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"
S.Genesio ed Uniti (PV).

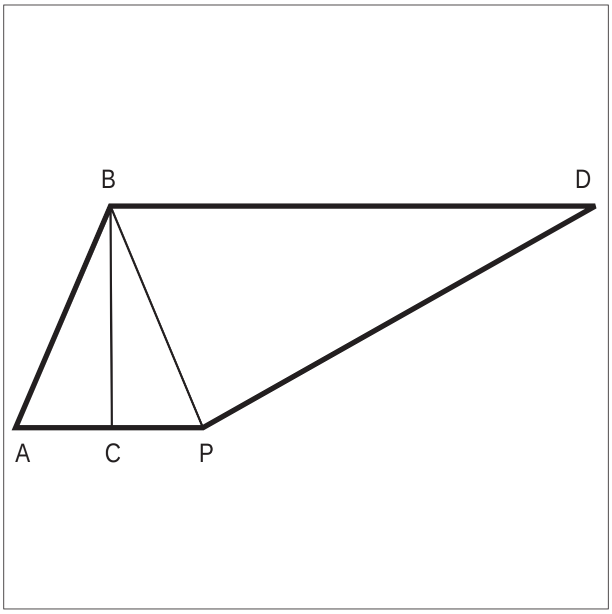


Fig.1: Costruisco il triangolo rettangolo scaleno ABC e il suo simmetrico rispetto al cateto maggiore, chiamo P il simmetrico di A. Traccio la parallela ad AP passante per B e la perpendicolare a BP passante per P. Ottengo il trapezio ABDP.

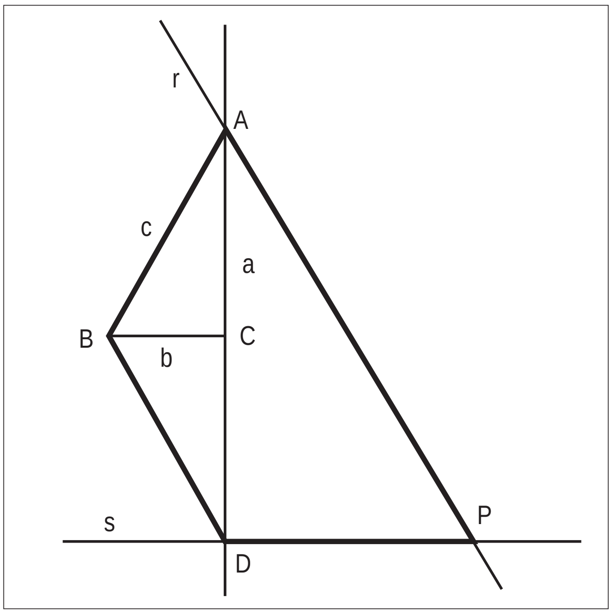


Fig.2: Costruisco il triangolo ABC e il suo simmetrico rispetto al cateto minore, chiamo D il simmetrico di A. Traccio la parallela a BD passante per A. Traccio la perpendicolare a DA passante per D. Chiamo P il punto in cui si incontrano. Ho ottenuto il trapezio ABDP

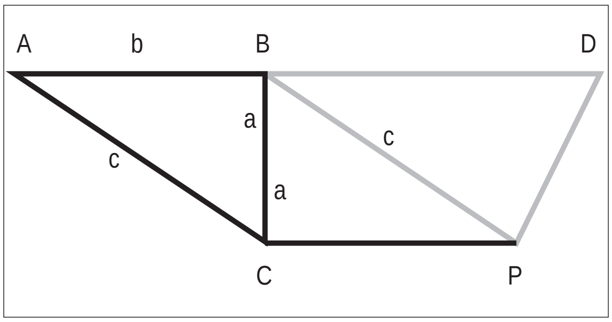


Fig.3: Ho costruito il triangolo ABC e ho trovato il corrispondente di ABC nella simmetria centrale con centro il punto medio di BC. Chiamo P il simmetrico di A.
Per costruire il terzo triangolo BPD traccio la perpendicolare a BP passante per P e chiamo D il punto di incontro con il prolungamento del lato AB.

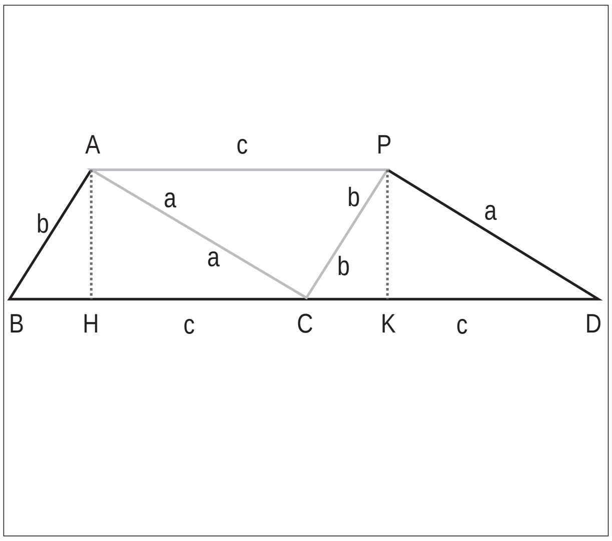


Fig.4: Ho costruito il triangolo rettangolo ABC e ho ottenuto il triangolo PCD congruente ad ABC traslando ABC di un vettore uguale a BC. Ora, per trovare il terzo triangolo rettangolo congiungo i vertici degli angoli retti. Il triangolo APC è rettangolo perché gli angoli ACB e PCD cono complementari. I segmenti AP e BD sono paralleli perché le altezze AH e PK sono congruenti essendo altezze relative all'ipotenusa di triangoli congruenti. Il terzo triangolo ottenuto è congruente ai primi due. [[…]]

Classe 2P
Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"

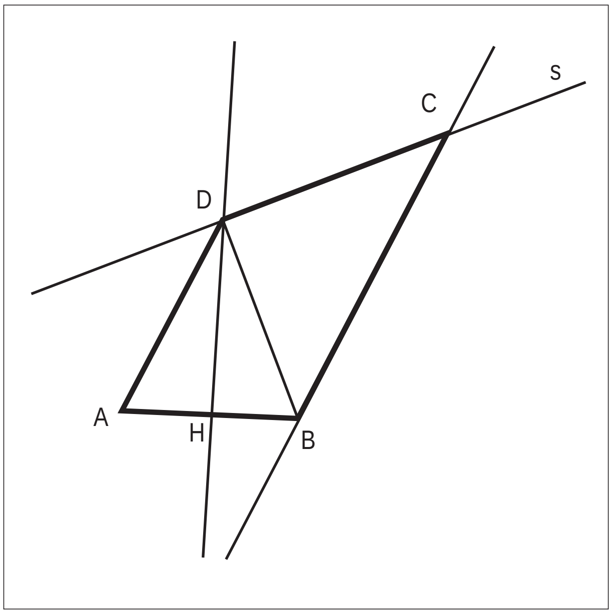


Fig.5:Abbiamo costruito il triangolo rettangolo scaleno DHA poi il suo simmetrico rispetto al cateto maggiore DH. Il punto B è il simmetrico di A. Abbiamo tracciato la parallela a DA passante per B e la perpendicolare a DB passante per D e abbiamo chiamato C il punto d'incontro tra le rette.
La figura ABCD è un trapezio perché ha due lati paralleli (AD e BC)

Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte dalle seguenti scuole:

SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV) - due risposte
IC "I. Calvino", Scuola Media di Rolo (RE)
ITI "F. Berenini", Fidenza (PR)
LS "Leonardo da Vinci", Treviso (TV)
SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
Scuola Media, IC di Venasca (CN)

Nel problema proposto si chiedeva di costruire un trapezio (non rettangolo) utilizzando tre triangoli rettangoli di cui due, fra loro congruenti, erano assegnati. Avevamo suggerito di ritagliare i due triangoli dati da un cartoncino; non sappiamo se i ragazzi di S. Genesio abbiano usato carta e forbici e poi tradotto le loro manipolazioni in disegni Cabri, tuttavia sono stati quelli che hanno presentato il maggior numero di modi per ottenere il trapezio:

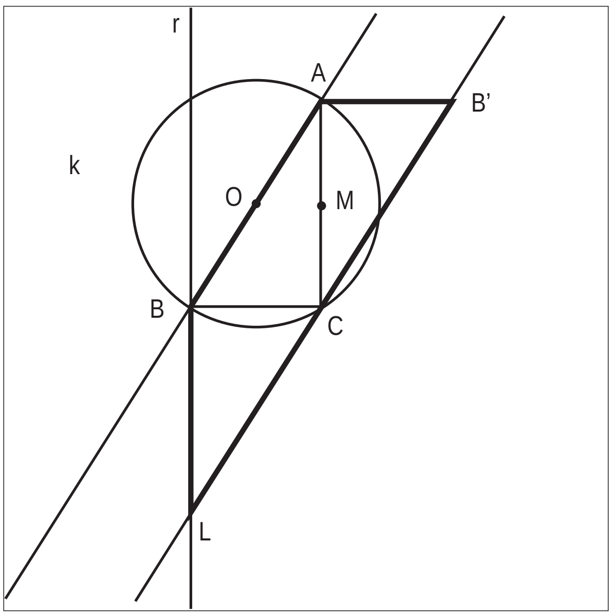
quattro diverse costruzioni sono state individuate da alcuni alunni della classe 3P, a cui se ne aggiunge una quinta fra quelle trovate dalla classe 2P.
Si proponeva poi di scegliere uno dei trapezi per determinare il rapporto fra i suoi lati obliqui e di individuare una terna di numeri, per i due triangoli assegnati, in modo che i lati di tale trapezio avessero misure intere.
Domande molto facili che potevano però portare a scoprire che in una delle possibili costruzioni (vedere la n° 5 di quelle a corredo del testo) i tre triangoli rettangoli non sono simili (o congruenti) come accade nelle altre figure, per cui non era possibile rispondere alle due domande con procedimenti di geometria elementare.
Al terzo punto bastava rispondere proponendo una terna pitagorica, trovata anche in modo empirico; tale risposta poteva risultare più o meno semplice o addirittura banale, a seconda della figura considerata. I ragazzi del LS "L. da Vinci" hanno elaborato, per una figura da loro scelta, una bella risposta fornendo un criterio generale, applicabile anche ad altre situazioni.

Nelle soluzioni pervenute si riscontrano imprecisioni e/o incompletezze per cui abbiamo convenuto di presentare le parti più significative di alcune di esse, in modo da dare un quadro completo delle risposte inviate. Per illustrare il testo del problema utilizzeremo le costruzioni inviate dalla scuola media di S.Genesio, corredate dalle loro descrizioni.
Queste sono quindi le risposte che vengono presentate:
Scuole medie inferiori
- SM "C. A. Dalla Chiesa", quattro costruzioni proposte dalla classe 3P e la prima fra quelle proposte dalla classe 2P (vedi illustrazioni al testo);
- SM "Zanella", prima e seconda parte;
- Scuola Media di Rolo, la cui soluzione è completata da alcune nostre osservazioni.
Scuole superiori
- LS "L. da Vinci", le prime due soluzioni proposte;
- ITI "Berenini", ha proposto una sola costruzione, analoga alla terza del "L. da Vinci", in cui la descrizione della figura viene completata da alcune nostre note.

NOTA: come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadra; con doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.

Soluzioni

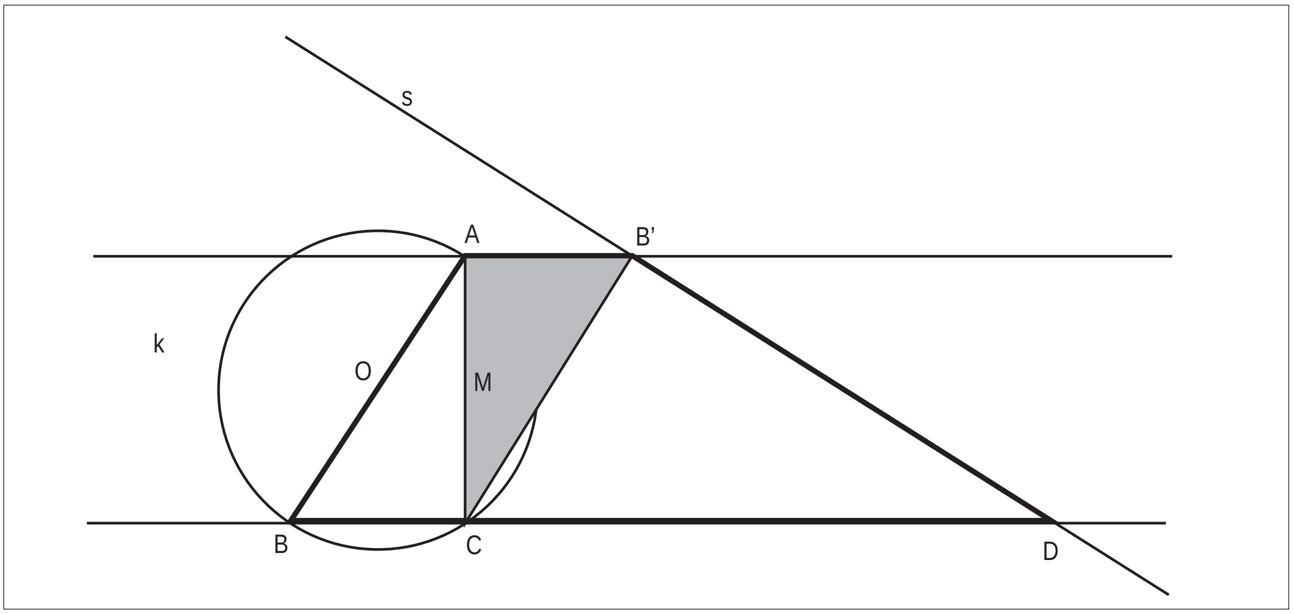
Classe 2A
Scuola Media di
Roveredo in Piano (PN)
1)
1. Punti A, B;
2. punto medio tra A e B: O;
3. circonferenza k di centro O passante per A;
4. triangolo [scaleno] ABC con C su k (il triangolo è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza).
5. punto medio del lato AC:M;
6. simmetria centrale del triangolo ABC rispetto M (A'B'C') (i vertici A', C' coincidono rispettivamente con C e con A).
Abbiamo disegnato due triangoli rettangoli congruenti, metà del quadrilatero ABCB' che risulta essere un parallelogramma (ogni parallelogramma ha come centro di simmetria il punto medio delle diagonali).



Caso a)
Tracciamo le rette per BA e CB' (sono parallele perché contengono lati opposti di un parallelogramma) e la retta r perpendicolare al lato BC passante per B; facciamo l'intersezione (L) di r con la retta B'C e otteniamo il triangolo BCL congruente con gli altri due triangoli (i triangoli

BCL e AB’C sono congruenti avendo due angoli ed il lato compreso congruenti: lato BC congruente con AB’, lati opposti di un parallelogramma; gli angoli di vertice B e A sono retti, gli angoli di vertici C e B’ sono congruenti essendo [angoli corrispondenti formati da] i lati BC e AB’ paralleli ed i lati CL e B’C [che] stanno sulle stessa retta).
Il testo non esclude esplicitamente che il terzo triangolo rettangolo non possa essere congruente con gli altri due, ma crediamo che il senso del testo non sia questo.

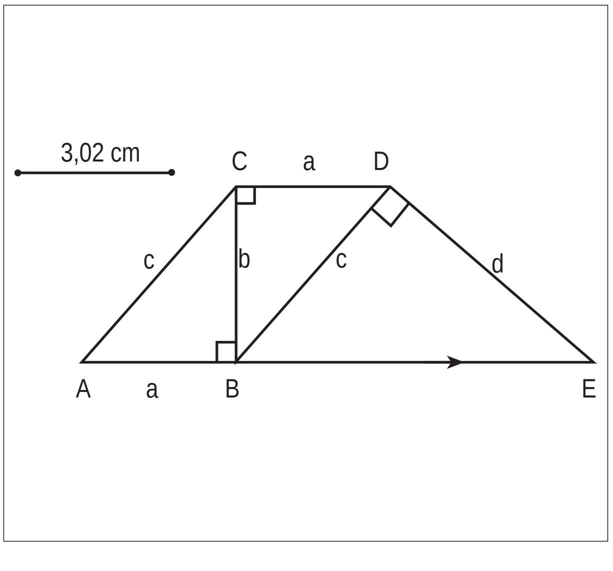
Caso b)
Dopo l’operazione 6.
Tracciamo: le rette che contengono i lati opposti del parallelogramma AB’ e BC (parallele), la retta s perpendicolare al lato CB’ passante per B’ e la sua intersezione con la retta BC (D).



2)
caso b)
Il triangolo CB’D è simile al triangolo ACB’ (gli angoli di vertici B’ e C del triangolo CDB’ sono congruenti con i rispettivi angoli di vertici A e B’ del triangolo CB’A: i primi sono retti, i secondi sono alterni interi se consideriamo le due rette parallele che contengono i lati AB’ e BD tagliate dalla retta che passa per CB’).
Indichiamo con: a, il cateto BC e AB’; b, il cateto AC ; c, l’ipotenusa AB e CB’ dei triangoli rettangoli ABC e CB’A.
Consideriamo i lati del triangolo CDB’: il cateto CB’ coincide con l’ipotenusa dei triangoli rettangoli congruenti, quindi è c; per il cateto DB’ vale la seguente proporzione, AC : DB’ = AB’ : CB’ : cioè b : DB’ = a : c da cui DB’ = b*c/a, consegue che il rapporto BA/DB’ = a/b

3) [[…]]

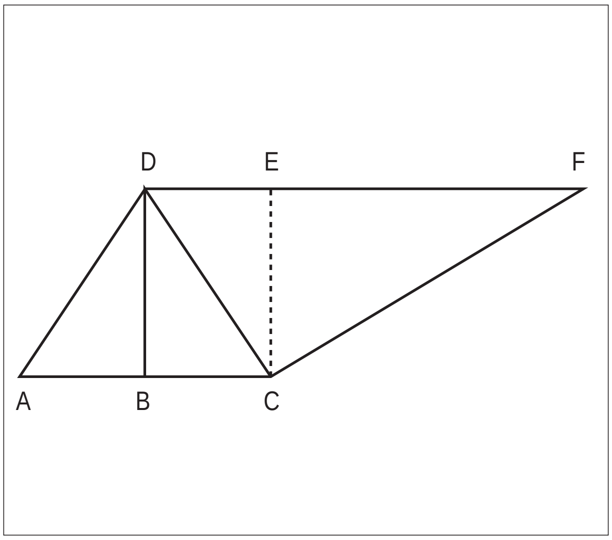
Classe 3A, Scuola Media di Rolo
Sezione staccata dell’I.C. “I. Calvino” di Fabbrico e Rolo (RE)
1) Con CABRI II abbiamo costruito i due triangoli rettangoli congruenti ABC e BCD e li abbiamo disposti in modo che coincidano i cateti congruenti BC, ottenendo così il parallelogrammo ABDC. Poi abbiamo tracciato la retta per D perpendicolare a DB e la retta per B parallela a DC, E è il punto di intersezione delle rette. ACDE è il trapezio richiesto.



2) Abbiamo scoperto che i triangoli ABC e BDE sono simili per l’evidente congruenza degli angoli acuti [è più corretto precisare quali e perché], (parallele AE e CD tagliate dalla trasversale BD). Possiamo quindi scrivere la proporzione che esprime l'uguaglianza dei rapporti fra i cateti dei due triangoli a : b = c : d da cui si deduce che il rapporto fra i lati obliqui del trapezio è uguale al rapporto fra i cateti del triangolo iniziale.

3) I lati del trapezio sono numeri interi se a,b,c costituiscono una terna pitagorica (derivata) in cui l'ipotenusa "c" è un multiplo del cateto "a", questo si deduce dalla proporzione precedente [essendo d = b*c/a è il prodotto b*c che deve essere multiplo di a].

Leone Cesare Cimetta
Classe 1F, LS "Leonardo da Vinci"
Treviso (TV)



Prima soluzione:
1) [manca la descrizione e relativa giustificazione della figura]

2) Siano a e b le misure dei cateti dei due triangoli rettangoli scaleni fra loro congruenti e sia c la misura della loro ipotenusa:

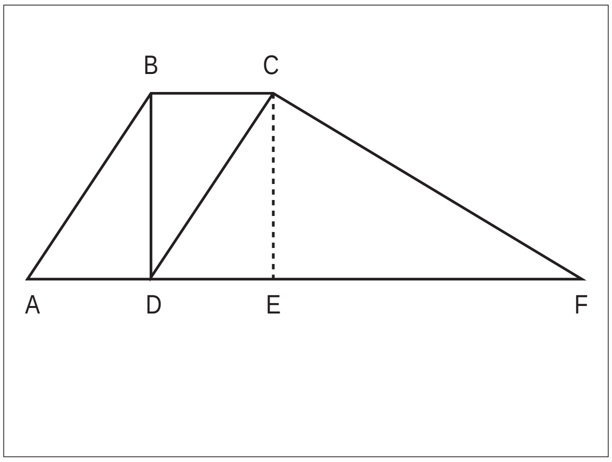
$a = \overline{AB} = \overline{BC}, \qquad b = \overline{BD} = \overline{CE}, \qquad c = \overline{AD} = \overline{CD}$

Inoltre, $a = \overline{DE} = \overline{BC}$, perché lati opposti del rettangolo BCED. Come si può evincere dalla figura, la misura della proiezione EF si può facilmente ottenere tramite il secondo teorema di Euclide, applicato al triangolo CDF, rettangolo in C per ipotesi: si ha infatti che DE : EC = EC : EF, quindi $a : b = b : \overline{EF}$;

dunque, $\overline{EF} = b^2/a$. Per il teorema di Pitagora, $\overline{CF} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{a^2}} = \sqrt{b^2\,\frac{a^2+b^2}{a^2}} = b\sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{bc}{a}$

Il rapporto $\overline{CF}/\overline{DA}$ (i lati obliqui del trapezio) è dunque uguale a $(bc/a)/c = b/a$, cioè al rapporto fra i cateti dei triangoli rettangoli scaleni congruenti. Tale risultato può anche essere ottenuto avvalendosi delle proprietà della similitudine: dal momento che, in ogni triangolo rettangolo, i due triangoli in cui esso è diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa sono simili, è sufficiente osservare che il rapporto di similitudine fra i triangoli DEC ed ECF è pari a CE/DE, cioè a b/a.

3) I lati del trapezio sono AC, CF, FD, DA, e quindi le loro misure, in funzione di a, b e c, sono rispettivamente uguali a $2a$, bc/a, c^2/a, c. Perché essi siano interi, è innanzi tutto necessario che a, b e c siano una terna pitagorica (intera), inoltre bc e c^2 devono essere divisibili per a. Questo si rivela impossibile per una terna primitiva, dunque quella cercata è una derivata. Poiché le precedenti condizioni siano soddisfatte, tale terna può essere soltanto una derivata che abbia i termini con massimo comune divisore $\sqrt{a}$: si consideri, per esempio la terna primitiva m, n, p: si moltiplichi ogni membro della terna per m, ottenendo così la nuova terna pitagorica m^2, mn, mp; si assegnino quindi i valori $a = m^2$, $b = mn$ ed infine $c = mp$. Risulterà dunque $bc/a = np$, numero naturale per le premesse. Per quanto riguarda il lato che misura c^2/a , sappiamo che tale misura è uguale a p^2, intero anch'esso per le premesse.

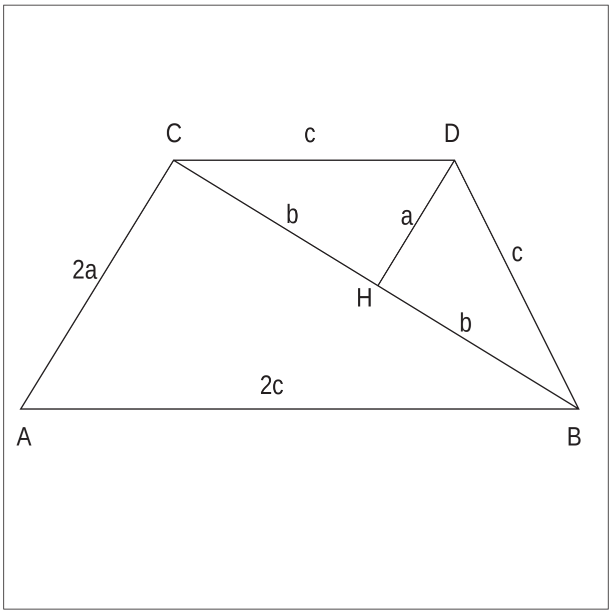


Seconda soluzione
Questa variante della figura si può facilmente ottenere tramite una rotazione del trapezio BCFD, rettangolo in BDF ed in CBD, intorno all'asse del lato BD. Il rapporto fra i lati obliqui resta invariato, come resta d'altronde invariata la condizione dei lati, enunciata nella soluzione precedente, necessaria perché essi siano interi; tali lati [AB, BC, CF, AF] misurano, in questa figura, c, a, bc/a, $(a^2+c^2)/a$.

Terza soluzione [[…]]

Bacchini Alessandro e Malvisi Michele
Classe 1Bst ITI “Berenini”
Fidenza (PR)

1) Disegnare due triangoli rettangoli congruenti DCH e BHC con il cateto minore CH in comune.
Disegnare un altro triangolo, rettangolo in D e simile ai primi due, ma con le misure dei lati doppie e con il cateto maggiore DB formato dai cateti maggiori DH e HB dei due triangoli congruenti.
La figura così ottenuta è un trapezio [occorre precisare perché] scaleno [potrebbe essere isoscele nel caso particolare in cui sia c = 2a].



2) Dalla similitudine dei triangoli ADB e DHC costruiti al punto 1), si ha la proporzione
AD : CH = DB : HB = 2 : 1 e quindi AD = 2a. Perciò il rapporto tra i lati obliqui del trapezio è
AD/BC = 2a/c.

3) Poiché sqrt(3^2 + 4^2) = 5, allora c = 5 , a = 3 e b = 4.

5 - 19 Maggio 2003

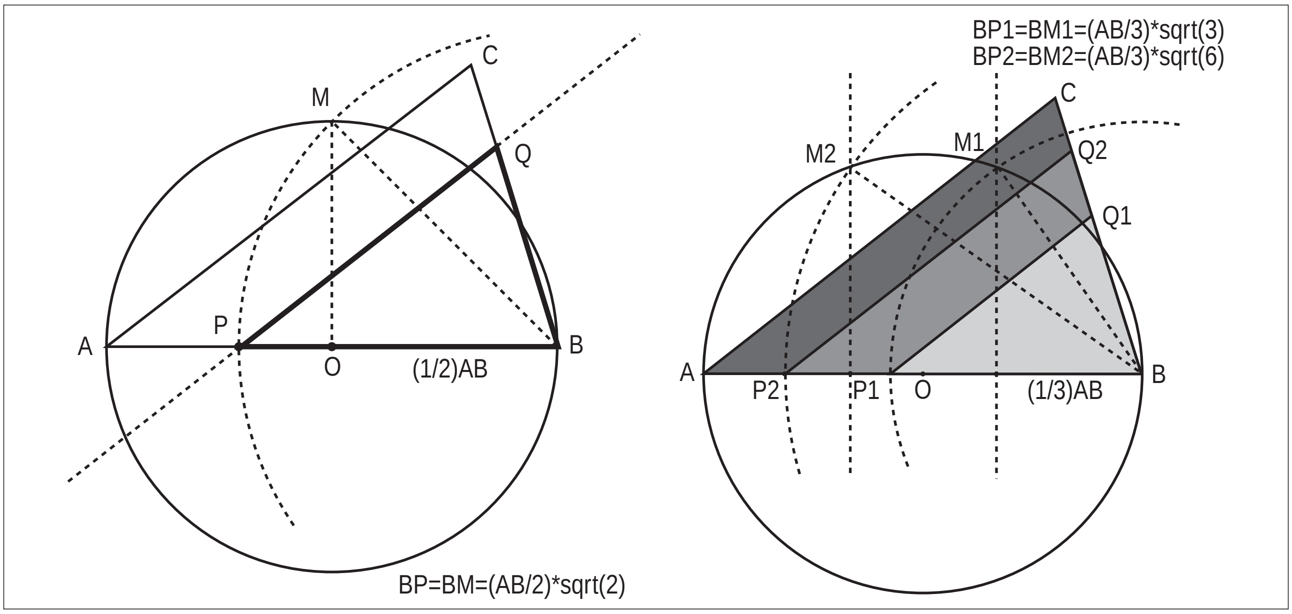
a) Dato un qualunque triangolo ABC dividere il lato AB in due parti congruenti.
La circonferenza k di diametro AB incontra l'asse di AB in P.
La circonferenza k' di centro B e raggio BP interseca AB in Q.
Tracciata per Q la retta r parallela ad AC dimostrare che essa divide il triangolo ABC in due parti equiestese.
b) Estendere la costruzione in modo che il triangolo ABC risulti diviso in tre parti equiestese. Giustificare la costruzione.

Commento

Prima parte (Maggio)
Abbiamo ricevuto due risposte provenienti da:
ITI "Berenini", Fidenza (PR)
SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)

Gli studenti della classe 2A di Roveredo hanno inviato una risposta completa e in generale corretta.
I due studenti della 2BST dell'ITI che hanno affrontato il problema hanno risposto in modo sostanzialmente corretto alla prima parte, ma non hanno interpretato correttamente la richiesta del secondo quesito del problema: non si chiedeva di dividere comunque in parti equivalenti un triangolo, ma di generalizzare il metodo proposto nella prima costruzione per ottenere, mediante segmenti paralleli ad uno dei lati, la suddivisione del triangolo in tre parti equiestese.
Tale procedura può essere estesa ulteriormente in modo da ottenere n parti fra loro equivalenti.
Poiché riteniamo che una simile costruzione possa avere una utilità pratica nell'attività lavorativa di un futuro tecnico, lasciamo aperto il problema di Maggio fino al 30 Settembre per dare la possibilità ai ragazzi dell'ITI "Berenini" di completare la loro risposta ed eventualmente ad altri di inviare le loro soluzioni.

Seconda parte (Settembre)



Nel commento di Maggio abbiamo lasciato aperto fino al 30 Settembre il termine per presentare la risoluzione del problema proposto in quel mese.
I ragazzi dell'ITI "Berenini", che non avevano interpretato correttamente la seconda domanda, ci hanno inviato la costruzione richiesta.
Non abbiamo ricevuto altre risposte.

Presentiamo quindi:
- la risposta completa della classe 2A della SM "Zanella", che, coadiuvata probabilmente dall'insegnante, ha inviato

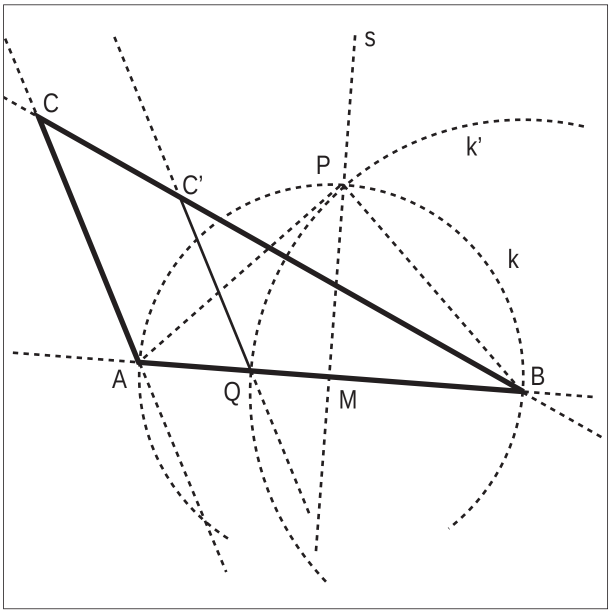
un'esauriente e corretta risoluzione;
- la seconda parte della risposta inviata dagli studenti Federica Rapaccioli e Galli Matteo, ora della classe 3BST dell'ITI "Berenini" (la prima parte, pur essendo corretta, è esposta in modo impreciso).

In entrambe le risposte non è stato però utilizzato, per risolvere la seconda parte del problema, il procedimento suggerito nel primo punto.
Nella seconda figura allegata al commento, viene da noi illustrato il percorso che permetterà di ottenere con una certa facilità la scomposizione di un triangolo in 3, 4, ...n parti equivalenti mediante segmenti paralleli ad un lato.
Basta dividere il lato AB in 3, 4, ...n parti congruenti e procedere come esposto nella prima parte del problema: tracciare la circonferenza di diametro AB, tracciare le perpendicolari ad AB nei punti di suddivisione, ...

NOTA(1): come di consueto le correzioni o le osservazioni sono racchiuse in parentesi quadra; con doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.
NOTA(2): Il problema da noi proposto a Maggio è stato presentato, in un caso particolare e poi generalizzato, da un gruppo di insegnanti che hanno partecipato ad un seminario residenziale, "Progetto Eccellenza: matematica e software didattici", tenutosi a Fiuggi nel 2001, organizzato dall'IRRE Lazio in collaborazione con l'IRRE Emilia-Romagna. (Nel sito di FLATlandia, in fondo alla presente nota, si trova un bottone che permette di prelevare il documento relativo)

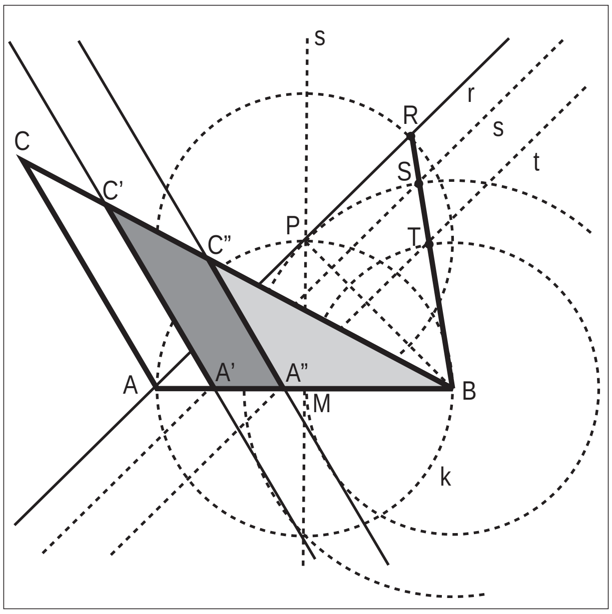
Soluzioni

Classe 2A
Scuola media "Zanella"
Roveredo in Piano (PN)
a)
1. Il triangolo PMB (M è il punto medio del segmento AB) è rettangolo isoscele per costruzione; se consideriamo MB come segmento unitario il segmento PB misura sqrt(2);
2. Il triangolo QBC' è simile al triangolo ABC avendo gli angoli [[corrispondenti]] congruenti (consideriamo le rette per AC e QC' parallele per costruzione e le rette per CB e AB: le coppie di angoli (dei triangoli QBC' e ABC) di vertici C' e C e Q e A sono congruenti perché corrispondenti; l'angolo di vertice B è in comune);
3. Se il segmento MB è unitario: il lato AB (triangolo ABC) misura 2 e il lato QB (corrispondente del [omologo di AB nel] triangolo QBR) misura sqrt(2) congruente con PB per costruzione (*); facendo il quadrato del loro rapporto (nelle figure simili il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto delle misure lineari corrispondenti) troviamo che l' area del triangolo QBC' è la metà di quella del triangolo ABC quindi uguale a quella del poligono QC'CA.



* Si poteva anche considerare il triangolo ABP, rettangolo e isoscele per costruzione: se un cateto è segmento unitario l'ipotenusa AB misura sqrt(2) e il segmento QB misura 1. Consegue che il rapporto tra le aree dei triangoli (vedi sopra) è 2 a 1.

b)
1. Retta r perpendicolare al segmento PB per P (passa per A, vedi considerazioni al punto precedente).
2. Circonferenza di centro P per M e sua intersezione R con r (BM, MP, PR sono segmenti unitari).



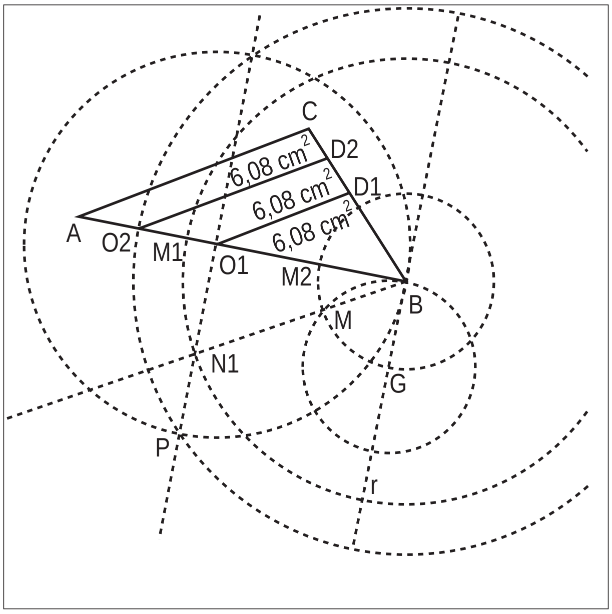
3. Segmento BR che misura sqrt(3) essendo BP di sqrt(2).
4. Circonferenze di centro B per P e per M e loro intersezioni S e T con BR.
5. Rette s e t parallele ad r per S e T, loro intersezioni con AB: A', A''.
6. Rette parallele al lato AC per A'', A' e loro intersezioni con BC: C'', C'.

Per il Teorema di Talete i segmenti BA'', BA', BA sono in proporzione rispettivamente con 1, sqrt(2), sqrt(3); le aree dei triangoli BA''C'', BA'C'' BAC sono nei rapporti 1 a 2 a 3 quindi per differenza la aree dei quadrilateri AA'C'C, A'A''C''C' sono uguali a quella del triangolo A''BC''.

Federica Rapaccioli e Galli Matteo, classe 3BST
ITI "Berenini"
Fidenza (PR).

Soluzione della seconda parte del problema

1) Si divide il segmento AB in tre parti congruenti mediante i punti M1 e M2 così determinati:
• Si traccia un segmento AF con lunghezza arbitraria partendo dal punto A
• Si traccia una circonferenza con centri in A e raggio arbitrario, l'intersezione tra la circonferenza e il segmento AF darà il punto M1'
• Si traccia un'altra circonferenza con centro in M1' raggio M1'A l'intersezione di quest'ultima circonferenza con il segmento AF darà il punto M2'
• Con centro in M2' e raggio M1' M2' si traccia un'altra circonferenza la quale interseca il segmento AF nel punto B'
• Si traccia il segmento B B'
• Si traccia la parallela a B B' passante per il punto M2' l'intersezione di questa con AB da il punto M2
• Si traccia la parallela a B B' passante per M1' l'intersezione di questa con AB da il punto M1



2) Divisione del triangolo in parti equivalenti:
• Si traccia la circonferenza con centro B e raggio BM1
• Si traccia la perpendicolare r ad AB passante per B
• Si traccia una circonferenza con centro in B e raggio arbitrario che interseca r in G
• Con centro in G e raggio BG che interseca la circonferenza del punto 4 in H
• Si traccia la semiretta passante per B e H
• L'intersezione tra la semiretta e la circonferenza di centro B e raggio BM1 darà il punto N1
• Si traccia la perpendicolare ad AB passante per N1, tale retta interseca AB in Q1
• Si traccia la parallela ad AC passante per Q1 che interseca CB in D1
• Si traccia la circonferenza di centro Q1 e raggio Q1B e la retta perpendicolare ad AB passante per Q1; la loro intersezione è il punto P
• Si traccia la circonferenza di centro B e raggio BP che interseca AB in Q2
• Si traccia la parallela ad AC passante per Q2 che interseca CB in D2
• Si osserva che il quadrilatero AQ2D2C, il quadrilatero Q2Q1D1D2 e il triangolo Q1BD1 sono equivalenti.

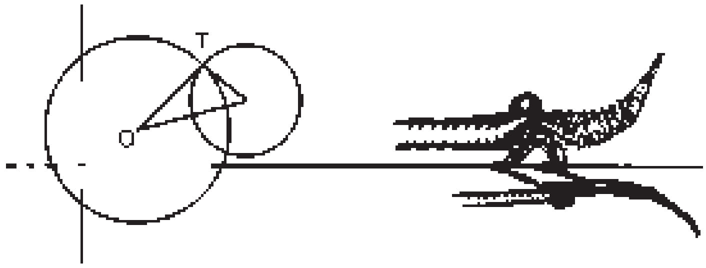
Giustificazione:
Q1B è stato costruito come altezza di un triangolo equilatero di lato M1B che è i 2/3 di AB pertanto
Q1B = (sqrt(3) / 2) * M1B = (sqrt(3) / 3)*AB
Pertanto, essendo il rapporto fra le aree di triangoli simili uguale al quadrato del rapporto tra lati omologhi, ed essendo il triangolo Q1BD1 simile al triangolo ABC, l'area del triangolo Q1BD1 è 1/3 dell'area del triangolo ABC
Q2B è stata costruita come diagonale del quadrato di lato Q1B pertanto
Q2B = sqrt(2) * Q1B
Pertanto essendo il triangolo Q2BD2 simile al triangolo Q1BD1, l'area del triangolo Q2BD2 è il doppio dell'area del triangolo Q1BD1
Per differenza l'area del quadrilatero Q2Q1D1D2 è 1/3 dell'area del triangolo ABC e Infine ancora per differenza l'area del quadrilatero AQ2D2C è 1/3 dell'area di ABC.

Alcune considerazioni

In questo ultimo anno di attività si è verificato un sensibile calo nella partecipazione, soprattutto da parte delle scuole medie inferiori. La tabella di pagina nove mette in evidenza anche una diminuita frequenza da parte di istituti “affezionati”. Fa eccezione la classe 3P della scuola media di San Genesio.
Ci auguriamo che questi dati non siano dovuti ad un diminuito interesse per la geometria e per l’uso di software ad essa dedicati, ma a difficoltà di adattamento della partecipazione a FLATlandia con l’attività scolastica.
Sicuramente sono gli insegnanti che, riconoscendo il ruolo formativo della geometria, stimolano nei loro allievi la curiosità per le questioni geometriche proposte e, probabilmente, non sempre la preparazione di questi è al passo con gli argomenti dei quesiti inviati mensilmente.
Una buona parte di istituti abbandonano l’attività dopo una prima apparizione. Non vorremmo che i ragazzi di queste scuole fossero demotivati dall’insuccesso della loro risposta.
L’attività di FLATlandia non deve essere considerata una “gara a premi”. Anche se le risposte da pubblicare vengono scelte fra le migliori e fra quelle che si distinguono per originalità, la partecipazione deve essere soprattutto la espressione di un interesse a misurarsi e a confrontarsi in un impegno logico-matematico, che si svolge tramite le nuove tecnologie, che accomuna scuole e ragazzi sparsi in tutta la nazione.

Ringraziamenti

Ancora una volta le curatrici di questo resoconto sull’attività di FLATlandia desiderano ringraziare: Anna Maria Arpinati e Valerio Mezzogori, per aver progettato e promosso questa attività;
Giuliano Mazzanti e Valter Roselli per il prezioso apporto delle loro competenze disciplinari nella scelta dei problemi e nella correzione degli elaborati;
Alberto Mingardi per la sua collaborazione nella gestione delle pagine web;
il Consiglio Direttivo dell’IRRE Emilia Romagna per avere approvato l’attività e messo a disposizione i mezzi dell’Istituto per la sua riuscita;
la società Media Direct di Bassano del Grappa (TV), distributrice del software Cabri-géomètre, per contribuire al proseguimento dell’iniziativa sostenendo le spese della presente pubblicazione.



"...Quando i teoremi sono difficili, bisognerebbe insegnarli inizialmente come esercizi di disegno geometrico, finché la figura è divenuta del tutto familiare; allora sarà un passo avanti piacevole apprendere i legami logici tra le varie linee o i vari circoli. E' anche desiderabile che la figura illustrante un teorema venga disegnata in tutti i casi e in tutte le forme possibili, di modo che le relazioni astratte di cui la geometria si occupa possano venire in luce da se stesse, come portato logico delle somiglianze esistenti tra situazioni apparentemente tanto diverse. Le dimostrazioni astratte dovrebbero rappresentare dunque soltanto una piccola parte dell'istruzione, e dovrebbero essere date quando, attraverso la familiarità acquisita con gli esempi concreti, esse possono essere accolte come generalizzazioni naturali di fatti visibili…"

Bertrand Russel(*)

(*)Da "Misticismo e logica", Londra 1917.

FLAT*landia*, geometria on-line

L'IRRE dell'Emilia Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto,
ha proposto questo servizio in rete
rivolto a docenti e alunni
che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97-'98
e giunto al suo settimo anno di attività,
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche
di vario tipo

Nel presente volumetto il resoconto
del sesto anno di attività

I.R.R.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 4 Luglio - Agosto 2003, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativa dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Franco Frabboni, Direttore edit. Arnaldo Luisi proprietà IRRE/ER