quaderni di CABRIRRSAE

Paolo Dall'Aglio e Daniele Gouthier

proble MATEMATICA mente

2001 - 2002

n° 23

Paolo Dall'Aglio
SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati
Daniele Gouthier
SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Released Information
Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 BOLOGNA

INDICE

INTRODUZIONE

Nell'ambito del progetto Fardiconto dell'IRRE E.R. si è articolata la terza edizione di probleMATEMATICAmente, un'attività rivolta principalmente alle scuole superiori.
Ogni mese viene pubblicato all'indirizzo http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/probmat un problema, gli studenti sono invitati a risolverlo e a inviare per posta elettronica la soluzione entro due settimane. Il mese successivo, col testo del nuovo problema, vengono pubblicate le risposte più interessanti accompagnate da un commento. In questo quaderno, sono riportati tutti i problemi del terzo anno, con le soluzioni pubblicate in rete e i commenti.

I problemi vengono scelti in modo da poter essere affrontati con strumenti matematici vari, con bagagli culturali anche molto diversi e potrebbero sembrare difficili allo studente perché, in generale non fanno riferimento a nessuna parte del programma scolastico in particolare, ma, potenzialmente, a tutte: cerchiamo di portare gli studenti fuori dalla gabbia degli esercizi per stimolare la ricerca di strumenti adatti a quel singolo problema.
Nonostante questo, va sottolineato che probleMATEMATICAmente non è il tentativo di proporre un altro metodo di insegnamento, ma vuole essere solamente uno strumento da affiancare a quelli tradizionali.

Nell'elaborazione del commento alle risposte ricevute, abbiamo cercato di mettere in evidenza la molteplicità degli approcci e di dare un ampio spazio alle soluzioni degli studenti, valorizzando quelle più interessanti. Le soluzioni vengono raggruppate a seconda della via seguita, inserendo integralmente quelle più chiare e complete di ciascun gruppo. In questo quaderno, queste soluzioni sono esposte nei paragrafi su due colonne, per simulare la struttura ipertestuale della versione in rete.

La partecipazione è stata più scarsa che negli anni passati. Si è trattato soprattutto di singoli studenti, ma quasi tutti hanno partecipato più di una volta. Inoltre non ci sono state risposte da parte di classi o gruppi di studenti. Da segnalare la partecipazione di alcuni appassionati di matematica.

NOTA ALLA VERSIONE STAMPATA

Rispetto alla versione in rete, in questo quaderno abbiamo curato alcuni dettagli. Mentre nel riportare i testi degli studenti in rete abbiamo sempre cercato di non apportare modifiche, qui ci siamo permessi di correggere qualche errore e anche di migliorare qualche frase. Alcune figure sono state modificate, per esempio unificando la notazione o correggendo qualche imprecisione.

RINGRAZIAMENTI

All'IRRE E.R. che ci offre lo spazio in rete e la collaborazione per realizzare mensilmente probleMATEMATICAmente, va la nostra gratitudine.
Un grazie di cuore ad Annamaria Arpinati che ha fortemente voluto la nostra attività, a Franca Noè che ci ha spianato la strada con Flatlandia e al professor Barozzi che ha fatto da supervisore per i contenuti matematici.
La collaborazione tecnica di Alberto Mingardi è stata preziosa, alleviandoci molti problemi di gestione informatica.
Una citazione va poi fatta alle biblioteche della SISSA (Scuola Internazionale di Studi Superiori Avanzati) e dell'ICTP (International Center of Theoretical Physics) di Trieste presso le quali sono state fatte molte delle ricerche bibliografiche essenziali all'attività..

Ecco le scuole che hanno partecipatoalmeno una volta

1 - LS Boggio Lera - Catania

2 - LS Mattioli - Vasto CH

3 - LS Leonardo da Vinci - Gallarate VA

4 - LS Galilei - Catania

5 - LS Galilei - Adria RO

6 - LS Vittorio Veneto – Milano

La partecipazione degli studenti

	classe	**scuola**	**numero di partecipanti**
Sandro Campigotto	appassionato		x
Francesco Caracciolo	III		x
Giampiero Caruso	IV	LS1	xx
Francesco D'Aurizio	III	LS2	x
Jacopo D'Aurizio	IV	LS2	xxxxxx
Maurizio Melchiorre,	appassionato		xx
Luca Sacchetto	III	LS5	xx
Marco Sandano	III	LS5	xx
Enrico Tombetti	IV	LS3	xxxxxx
Daniele Urzì	IV	LS4	xx
Giovanni Viglietta	appassionato		x
Umberto Villa	V	LS6	x
Marco Zaro	III	LS3	xx

Bibliografia

[CR] R. Courant, H. Robbins,
Che cos'è la matematica?,
Bollati Boringhieri, 1971

[KRA] S.G.Krantz,
Techniques of problem solving,
AMS, 1997.

[LAR] L.C. Larson,
Problem solving through problems,
Springer-Verlag, 1983.

[OLI] AA.VV.,
XXXVI olimpiadi di matematica (selezione italiana di Cesenatico),
AgipPetroli, 1996.

[SNS] AA.VV.,
I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa,
Bollati Boringhieri, 1985

[UD] AA.VV.,
Venti anni di gare matematiche,
Mathesis, sezione di Udine, 1997

[UMI] *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, 1998 - 2000.

Ottobre 2001

Dimostra che l'equazione $x^2+y^2=z^n$ ha soluzione con x, y e z numeri naturali, per ogni esponente n naturale.

Sono arrivate otto risposte:
Sandro Campigotto, appassionato di matematica;
Francesco Caracciolo, 3superiore;
Giampiero Caruso, 4A, LS Boggio Lera, Catania;
Jacopo D'Aurizio, 4A, LS Mattioli, Vasto;
Maurizio Melchiorre, appassionato di matematica;
Enrico Tombetti, 4C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA);
Daniele Urzì, 4B, LS Galilei, Catania;
Marco Zaro, 3A, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA).

Bentornati e benvenuti!
Innanzitutto preghiamo, per il futuro, tutti i partecipanti: preparate con cura la risposta e mandateci un ***unico*** mail quando siete sicuri della vostra soluzione.

Notiamo, di passaggio, che non avendo escluso esplicitamente la possibilità di avere x, y, z nulli, sono possibili molte soluzioni banali: per esempio *(0, 0, 0).*
Dalle soluzioni arrivate, si possono evidenziare tre approcci diversi al problema

Approccio 1 ■ Caracciolo, Melchiorre e Campigotto costruiscono esplicitamente le soluzioni separatamente per il caso pari

Francesco Caracciolo
Per dimostrare il caso pari ragioniamo per induzione. Notiamo che per $n = 2$ l'equazione è soddisfatta per $x = 3$, $y = 4$, e $z = 5$ (terna pitagorica). Se ora moltiplichiamo x, y e z per 5, ci viene una nuova terna pitagorica $15,20,25$ e poichè $15^2+20^2 = 25^2 = 5^4$ si ottiene che anche per $n = 4$ si può trovare una soluzione intera dell'equazione. Moltiplicando poi la terna pitagorica 15, 20 e 25 per 5, e applicando lo stesso procedimento si ottiene una nuova soluzione dell'equazione iniziale per $n = 6$ e così via fino all'infinito.

e il caso dispari

Sandro Campigotto
Il caso $n = 2k+1$ sembra più complicato, in realtà basta accorgersi di una semplice proprietà per determinare subito una soluzione dell'equazione:
Infatti l'equazione da risolvere è $z^{2k+1} = x^2+y^2$. Nessuno ci vieta di prendere $x = y = a^2$. In questo caso, l'equazione è del tipo: $z^{2k+1} = a^{2k}+a^{2k}$ cioè $z^{2k+1} = 2a^{2k}$. Ora scegliendo $a = 2$ si ha che $z^{2k+1} = 2^{2k+1}$ che ci da $z = 2$.
Morale del discorso: $(2^k,2^k,2)$ è una terna di numeri naturali che è soluzione dell'equazione di partenza.

Approccio 2 ■ Urzì, Zaro e Tombetti generalizzano il caso pari dell'Approccio 1 e risolvono entrambi i casi, presentando, a partire da un'unica terna pitagorica, una soluzione per ciascun naturale n.

Enrico Tombetti
Prendiamo una qualunque terna pitagorica $(x_p; y_p; z_p)$. Potrebbe essere, per esempio, la terna $(3; 4; 5)$.
Ovviamente la terna è soluzione dell'equazione per $n = 2$.
Per n numero naturale qualunque, poniamo:

$$x = x_p\, z_p^{(n-1)}$$
$$y = y_p\, z_p^{(n-1)}$$
$$z = z_p^2$$

Verifichiamo:

$$(x_p\, z_p^{(n-1)})^2 + (y_p\, z_p^{(n-1)})^2 = (z_p^2)^n$$
$$x_p^2\, z_p^{2(n-1)} + y_p^2\, z_p^{2(n-1)} = z_p^{2n}$$
$$x_p^2\, z_p^{2n}\, z_p^{-2} + y_p^2\, z_p^{2n}\, z_p^{-2} = z_p^{2n}$$
$$x_p^2\, z_p^{-2} + y_p^2\, z_p^{-2} = 1$$
$$x_p^2 + y_p^2 = z_p^2$$

L'uguaglianza è vera essendo $(x_p; y_p; z_p)$ una terna pitagorica.
Risulta dunque dimostrato che per ogni esponente n naturale si possono trovare tre numeri naturali $(x; y; z)$ che costituiscono soluzione dell'equazione data.

Approccio 3 ■ D'Aurizio riconduce la soluzione del problema dato a quella del problema con esponente n-2.

Jacopo D'Aurizio
Dimostriamo ora la risoluzione del problema con $n = k$ può esser sempre ricondotta alla risoluzione del medesimo con $n = k-2$

$$x^2 + y^2 = z^n \qquad \text{(a)}$$

ponendo $x=Xz$ e $y=Yz$

$$X^2 + Y^2 = z^{(n-2)} \qquad \text{(b)}$$

se quest'ultima equazione ha almeno una soluzione *(X,Y,z)* anche la (a) avrà almeno una soluzione, in particolare nella forma *(Xz, Yz, z)* Questo ci permette di affermare che per dimostrare la tesi basta dimostrare la verità dell'enunciato per i casi $n = 2$, $n = 1$.

Caso n=2: sappiamo bene che $x^2+y^2 = z^2$ ha infinite soluzioni primitive: $x = u^2-v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2+v^2$ con u e v numeri naturali, primi tra loro e non entrambi dispari.

Caso n=1: $x^2+y^2 = z$ è abbastanza ovvio che un'equazione del genere abbia infinite soluzioni in *N*.

Sfruttando questa stessa idea, era anche possibile provare il problema per induzione separatamente sui numeri pari e dispari:
per provare che l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^{2n}$$

ha sempre soluzione, il ragionamento per induzione è il seguente. La base dell'induzione è data dall'esistenza di tutte le terne pitagoriche che risolvono l'equazione con $n = 1$.
Supponiamo allora che, per ipotesi induttiva, la soluzione esista per $n = k$, allora, per $n = k+1$, si ha

$$x^2 + y^2 = z^{2(k+1)} = z^{2k} z^2$$

Allora, se *(a, b, c)* è una soluzione per $n = k$, *(ac, bc, c)* risolve quest'ultima equazione.
Per il caso dispari

$$x^2 + y^2 = z^{2n+1}$$

Il ragionamento è analogo. Di fatti, la base dell'induzione, $n = 0$, è ovviamente soddisfatta e la dimostrazione induttiva è la stessa che nel caso pari, si ha cioè che se *(a, b, c)* è una soluzione per $n = k$, *(ac, bc, c)* risolve l'equazione con $n = k+1$.

Una soluzione radicalmente diversa si ha sfruttando i numeri complessi:
sia $z = a + ib$, con a e b interi. Allora risulta

$$(a^2 + b^2)^n = (|z|^2)^n = (|z|^n)^2$$

Scriviamo ora

$$z^n = x + iy$$

Naturalmente, x e y sono interi perché a e b lo sono. Quindi si ha

$$(|z|^n)^2 = |x + y|^2 = x^2 + y^2.$$

Novembre 2001

Siano r ed s due rette. Descrivi il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze di P dalle due rette sia minore o uguale a 1.

Sono arrivate sei risposte:
Giampiero Caruso, 4A, LS Boggio Lera, Catania;
Jacopo D'Aurizio, 4A, LS Mattioli, Vasto;
Maurizio Melchiorre, appassionato di matematica;
Enrico Tombetti, 4C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA);
Daniele Urzì, 4B, LS Galilei, Catania;
Umberto Villa, V, LS Vittorio Veneto Milano;
Marco Sandano, 3B, LS Galilei, Adria (RO).

Benvenuto Marco Sandano!

Le soluzioni pervenute, tutte molto interessanti, per quanto riguarda le rette incidenti, si possono dividere in due gruppi.

Villa e D'Aurizio scelgono un sistema di riferimento nel quale fanno un ragionamento trigonometrico. Villa sfrutta il fatto che le due bisettrici sono perpendicolari, mentre D'Aurizio usa direttamente *r* ed *s* come riferimento (non ortogonale). Peccato che la sua dimostrazione non sia completa.

1 ■ Umberto Villa[1]

Date le rette *r* ed *s* incidenti nel punto *O*, fissiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che:
l'origine degli assi sia *O*;
l'asse delle ascisse sia la bisettrice dell'angolo acuto compreso tra *r* ed *s*;
l'asse delle ordinate sia la bisettrice dell'angolo ottuso compreso tra *r* ed *s*.

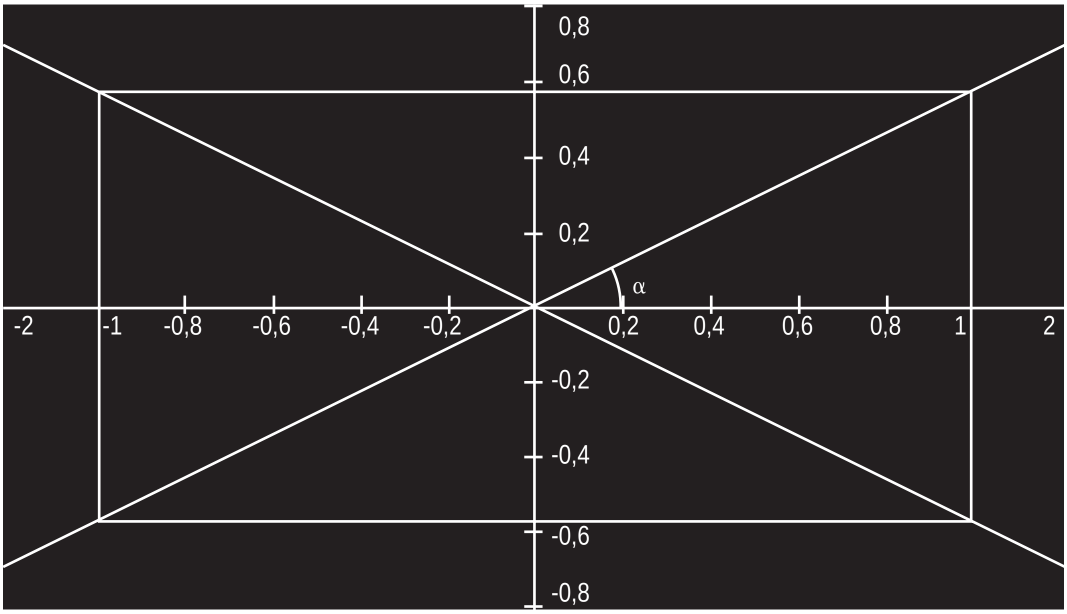
Chiamo α l'angolo acuto formato dall'asse delle ascisse e dalla retta *r* ($0 \leq \alpha \leq \pi/4$) per le condizioni sopra imposte).

2 ■ Jacopo D'Aurizio

Caso 1) Rette incidenti in *O*.
Prendiamo un punto *A* su *r* e un punto *B* su *s*. Tracciamo le parallele ad *s* e *r* da *A* e da *B*, e diciamo che queste due nuove rette si intersecano in *C*. Chiamiamo *D* la proiezione di *C* su *r* e *E* la proiezione di *C* su *s*. Troviamo il luogo dei punti tale che la somma delle distanze da *r* e da *s* valga *1*:

$$CAD = BOA \mapsto CD = OB \text{ sen } BOA$$
$$EBC = BOA \mapsto EC = OA \text{ sen } BOA$$

se *C* appartiene al luogo, chiamando *OB y*, e *OA x*, e



[1] *Questa non è una vera dimostrazione, ma è un'osservazione molto suggestiva, vera solo nel caso r = s.*

segue **1**

L'equazione di r ed s è:

$$r: y = tg\alpha x$$

$$s: y = -tg\alpha x \qquad 0 \le \alpha \le \pi/4$$

Ricordo che la distanza di un punto $P(x_P\ ;\ y_P)$ dalla retta $ax + by + c = 0$ è: $d_p = \dfrac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Il luogo geometrico cercato è formato dai punti appartenenti alla superficie limitata dalla spezzata di equazione:

(1) $\begin{cases} \tan\alpha x_p - y_p \ge 0 \\ \tan\alpha x_p + y_p \ge 0 \\ x_p = \dfrac{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}{-2\tan\alpha} = -\dfrac{1}{2sin\alpha} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \tan\alpha x_p - y_p \le 0 \\ \tan\alpha x_p + y_p \ge 0 \\ x_p = \dfrac{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}{2} = \dfrac{1}{2\cos\alpha} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \tan\alpha x_p - y_p \le 0 \\ \tan\alpha x_p + y_p \le 0 \\ x_p = \dfrac{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}{-2\tan\alpha} = -\dfrac{1}{2sin\alpha} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \tan\alpha x_p - y_p \ge 0 \\ \tan\alpha x_p + y_p \le 0 \\ x_p = \dfrac{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}{-2} = -\dfrac{1}{2\cos\alpha} \end{cases}$

$$\frac{|\tan\alpha x_p - y_p|}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} + \frac{|-\tan\alpha x_p - y_p|}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} = 1$$

Tale superficie è un rettangolo (in quanto ha i lati perpendicolari fra loro) con le seguenti caratteristiche:

Lati: $\dfrac{1}{sin\alpha}$; $\dfrac{1}{\cos\alpha}$

Diagonali: $\dfrac{2}{sin2\alpha}$ essendo $\sqrt{\left(\dfrac{1}{sin\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)} = \dfrac{2}{2sin\alpha\cos\alpha}$

Nel caso particolare in cui r ed s siano perpendicolari ($\alpha=\pi/4$) otteniamo un quadrato di lato $\sqrt{2}$.

segue **2**

prendendo r ed s come assi, si dovrà verificare :

$$(x\ senB\hat{O}A) + (y\ senB\hat{O}A) = 1$$

Indipendentemente dall'angolo formato dagli assi di un sistema di riferimento cartesiano piano, una equazione del tipo

$$x + y = k$$

è sempre una retta perpendicolare alla bisettrice degli assi nel 1° 3° quadrante. Nel nostro caso si avrà

$$OA = OB = 1 / sen(BOA)$$

quindi

$$dist(B,r) = dist(A,s) = 1$$

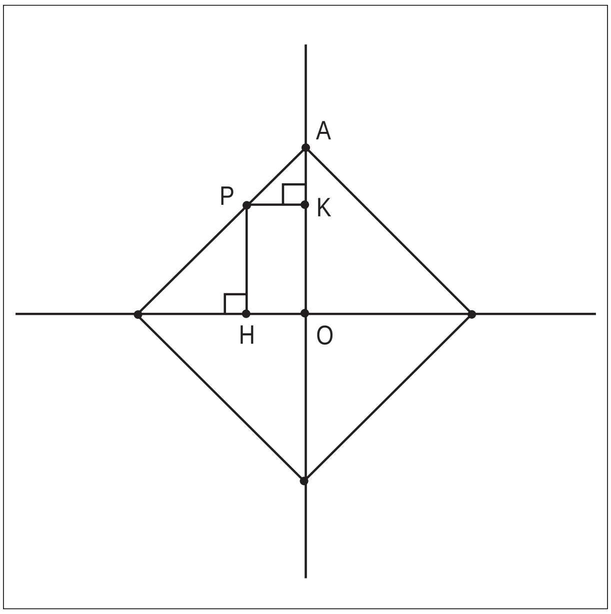
Le tre soluzioni puramente geometriche, leggermente diverse tra loro, sono quelle di Caruso, Sandano e Tombetti,

3 ■ Giampiero Caruso

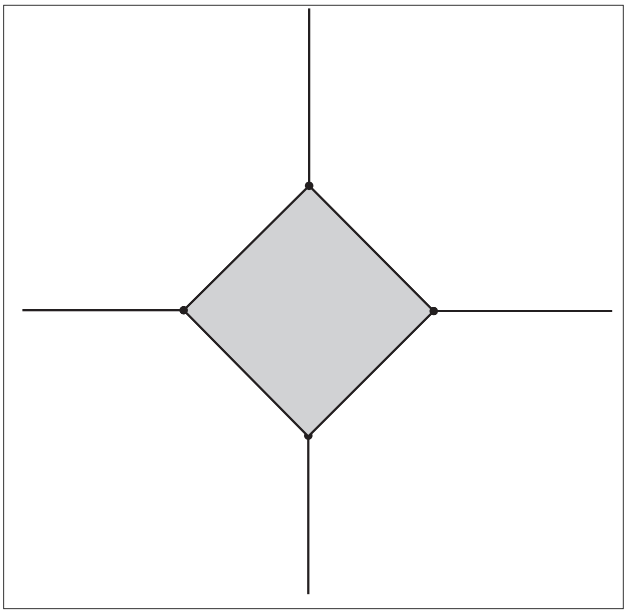
RETTE INCIDENTI

Un caso particolare di rette incidenti sono le rette perpendicolari. In tal caso il luogo coincide con l'insieme dei punti interni al quadrato i cui vertici giacciono sulle due perpendicolari e il cui lato è uguale a $\sqrt{2}$.

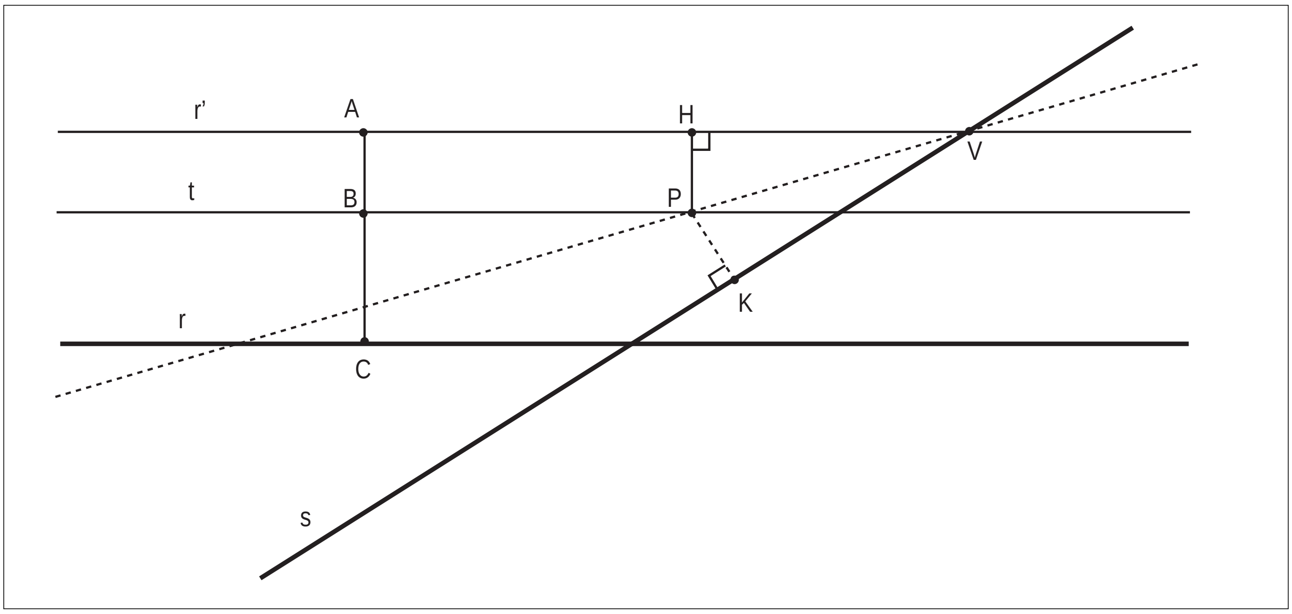
Si dimostra infatti che $PH+PK = AO$ (semidiagonale del quadrato): $AO = AK+KO$; essendo $KO = PH$ ($PKOH$ è un rettangolo) e $AK = PK$ (il triangolo AKP è isoscele poiché rettangolo e perché l'angolo $PAK=45°$) sia ha che $PH+PK = AO$.



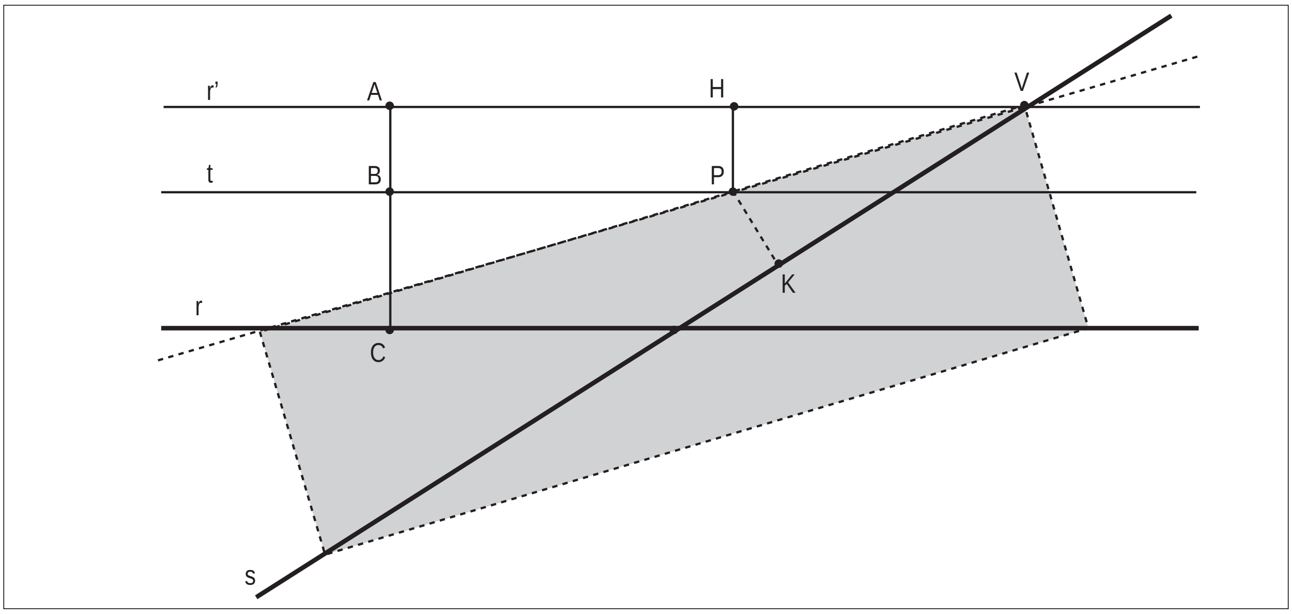
Ponendo *AO = 1* possiamo affermare che il perimetro di tale quadrato è il luogo dei punti *P* tali che la somma delle distanze di *P* dalle due rette sia uguale a *1*, affinché possa essere anche minore di *1* i punti *P* devono essere pure interni al quadrato.



Più in generale possiamo descrivere tale luogo, per quanto riguarda rette incidenti generiche, con la seguente costruzione:



Tracciamo la retta *r'* parallela ad *r* la cui distanza da quest'ultima sia uguale a *1* (*AC = 1*). Stabiliamo arbitrariamente la distanza *BC* (con *0 < BC < 1*) che *P* deve avere dalla retta *r* e costruiamo la retta *t* parallela ad *r* e passante per *B*. Affinché *BC+K = 1* dobbiamo porre *PK = AB = HP*, essendo *AB+BC = AC = 1*. Affinché *PK = HP* il punto *P* deve appartenere alla bisettrice (luogo dei punti equidistanti da due rette: *r'* ed *s*) dell'angolo *HVK*. Notiamo quindi che qualunque sia la distanza *BC* che *P* ha dalla retta *r*, il punto *P* giace sulla bisettrice dell'angolo *HVK*. Estendendo questo tipo di costruzione anche alla retta *s* e considerando che ciascuna delle rette *r* ed *s* ha due possibili rette parallele la cui distanza è *1*, possiamo definire il luogo dei punti *P* tali che la somma delle distanze di *P* dalle due rette sia minore o uguale a *1* come l'insieme dei punti interni al rettangolo (fig.8) i cui vertici sono ottenuti dall'intersezione delle rette *r* ed *s* rispettivamente con le rette parallele ad *s* ed *r* la cui distanza da quest'ultime sia uguale a *1*.



4 ■ Marco Sandano

Siano *r* ed *s* due rette incidenti in un punto *Z*. Prendiamo *P* come punto appartenente alla bisettrice dell'angolo *AZB* formato dalle due rette ed avente distanza uguale a *0,5* da entrambe le rette (*HP+PK = 3D0,5+0,5 = 3D1*). E' evidente che tutti i punti sulla bisettrice compresi tra *P* e *Z* avranno distanza minore di *0,5* sia da *r* che da *s*: infatti i triangoli *HPZ* e *OTZ* sono simili, poiché hanno i tre angoli corrispondenti isometrici, ed essendo *ZO* certamente minore di *ZH* per rapporto di similitudine anche *TO* è minore di *HP*. Tracciamo ora la perpendicolare alla bisettrice passante per *P* e prendiamo a caso su *AB* un punto *P"*. Tracciamo le distanze *P"O* e *P"N* dalle rette *r* ed *s*. I triangoli *AHP*, *PKB*, *AOP"*, *NP"B* sono simili, in quanto sono tutti triangoli rettangoli e gli angoli *ZAB* e *ZBA* sono isometrici, poiché gli angoli *AZP* e *PZB* sono isometrici, come anche gli angoli *ZPB* e *ZPA*.

Allora ponendo:

$$AP=z,\quad AP''=k,\quad P''B=u,\quad PH=x,\quad P''O=y,\quad PK=m,\quad P''N=n$$

si possono formulare le seguenti proporzioni:

$$x : m = z : (k-z+u) \quad \text{e} \quad y : n = k : u$$

$$(x+m) :x = (z+k-z+u) : z \quad \text{e} \quad (y+n) : n = (k+u) : u$$

$$k+u = z(x+m)/x \quad \text{e} \quad k+u = u(y+n)/n$$

quindi:

$$z(x+m)/x = u(y+n)/n$$

$$nz(x+m) = xu(y+n)$$

$$\text{ma } nz = xu,$$

perché $u : z = n : x$, poiché *APH* e *P"BN* sono chiaramente simili, quindi:

$$x+m = y+n, \mapsto PH + PK = P''O + P''N$$

Quindi ogni punto del segmento *AB* ha somma delle sue distanze dalle rette *r* ed *s* uguale a *1*. Questo principio si può applicare nello stesso modo a tutti i punti del seg-

5 ■ Enrico Tombetti

Consideriamo per primo il caso in cui le rette sono parallele e *d* è la distanza tra esse. Si presentano allora tre possibili situazioni:

$d > 1 \mapsto$ non esiste alcun punto che soddisfi la condizione richiesta.

$d = 1 \mapsto$ per ogni punto delle due rette e per ogni punto della parte di piano compresa tra le due rette la somma delle distanze è pari ad *1*. Non ci sono punti con somma delle distanze inferiore ad *1*.

$d < 1 \mapsto$ tracciamo *r'* parallela ad *r*, distante *(1-d)/2* da *r*, nel semipiano non contenente *s*. Tracciamo *s'* parallela ad *s*, distante *(1-d)/2* da *s*, nel semipiano non contenente *r*. I punti delle rette *r'* ed *s'* hanno somma delle distanze pari ad *1*. Tutti i punti della parte di piano compresa tra *r'* ed *s'* hanno somma delle distanze inferiore ad *1*.

Consideriamo ora il caso più generale in cui *r* ed *s* sono incidenti.

Con riferimento alla figura, tracciamo *r'* ed *r"* parallele ad *r*, ognuna distante *1* da *r*. Analogamente tracciamo *s'* ed *s"* parallele ad *s*, ognuna distante *1* da *s*.

Individuiamo così *4* parallelogrammi: notato che ciascuno di essi ha entrambe le altezze pari ad *1*, essi risultano *4* rombi tra loro congruenti. Tracciate le diagonali *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, esse, per le proprietà dei rombi, risultano bisettrici dei rispettivi angoli e perpendicolari tra loro. Il quadrilatero *ABCD* così individuato è dunque un rettangolo.

Preso sul lato *BC* un qualunque punto *Q*, da esso tracciamo la perpendicolare ad *r*. Essa intercetta *r* in *K* ed *r'* in *H*. Poiché *r'* dista *1* da *r*, avremo *HQ+QK = HK = 1*. Poiché i punti di una bisettrice sono equidistanti dai lati, avremo *Q H1 = QH* e quindi *QK+Q H1 = 1*. Questo vuol segue **4**

mento *PZ*, ottenendo così il triangolo *AZB*, i cui punti hanno tutti somma delle distanze dalle rette *r* ed *s* minore o uguale a *1*.
La dimostrazione non è valida solo per l'angolo *AZB*, ma anche per tutti gli altri tre angoli (*AZW*, *WZD*, *DZB*) individuati dalle due rette incidenti. Infatti se tracciamo la bisettrice *l* di *BZD*, che è ovviamente perpendicolare alla bisettrice di *AZB* e quindi parallela ad *AB*, e conduciamo la perpendicolare ad *AB* per *B*, individuiamo così su *l* il punto *F*, le cui distanze *FG* e *FJ* da *r* e da *s* misurano entrambe *0,5*. Infatti i triangoli rettangoli *FGZ* e *PKB* sono isometrici, perché *ZF = PB* e *PBZ = BZF*, in quanto angoli alterni interni, rette parallele *AB* e *l*, trasversale *r*. Quindi *FG = PK = FJ = PH*. Così ragionando per tutti e quattro gli angoli si ottiene il rettangolo *ABWD*, che è il luogo dei punti *P* tali che la somma delle distanze di *P* dalle due rette sia minore o uguale a *1*. Se *r* ed *s* sono tra loro perpendicolari allora il luogo dei punti corrisponde a tutte le descrizioni sopra fatte ed, in più, si può dire che è un quadrato, infatti, in questo caso, i triangoli *AZB*, *BZD*, *DZW*, *WZA* sono isometrici tra loro e, quindi, *AB = BD = DW = WA*.

segue **5**

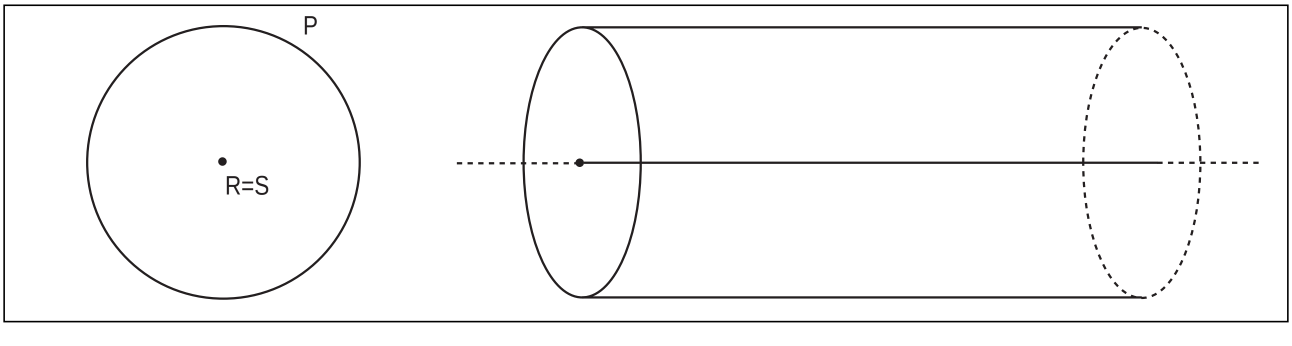
dire che la somma delle distanze di *Q* da *r* (*QK*) e da *s* (*QH1*) è pari ad *1*. Analogo ragionamento può essere ripetuto per ognuno degli altri lati del rettangolo. Si può perciò concludere che il perimetro del rettangolo *ABCD* è il luogo dei punti tali che la somma delle distanze dalle due rette è uguale ad *1*. Osservando che, se avessimo tracciato *r'*, *r"*, *s'*, *s"* considerando una distanza inferiore ad *1* avremmo ottenuto un rettangolo interno ad *ABCD* col quale ripetere la dimostrazione appena fatta, possiamo concludere che i punti interni allo stesso rettangolo *ABCD* sono il luogo in cui la somma delle distanze dalle due rette è inferiore ad *1*.

Infine, notiamo che carognescamente non avevamo detto espressamente dove considerare il problema, se nel piano o nello spazio, proprio per vedere chi si accorgeva di quest'incompletezza. Il problema era effettivamente da risolvere nel piano, essendo piuttosto difficile nello spazio.

Su questa generalizzazione ha lavorato Caruso, il quale espone con molta chiarezza anche il caso delle parallele.

6 ■ Giampiero Caruso

Sarebbe interessante descrivere tale luogo nello spazio. Consideriamo i casi in cui le rette *r* ed *s* coincidono oppure sono parallele. In tali casi la sezione del solido che descrive il luogo è sempre costante ed è costituito da due punti (*R* ed *S*) che rappresentano la sezione delle rette *r* ed *s*. Nel caso in cui le rette coincidono anche i punti *R* ed *S* coincidono quindi la sezione del luogo sarà costituita da un cerchio di raggio *1* e in generale il luogo è descritto nella figura come l'insieme dei punti *P* interni al cilindro la cui altezza è infinita e alla cui base vi (o meglio: la cui sezione) è il cerchio (precedentemente descritto) il cui centro appartiene alla retta *r* (quindi alla retta s) e il cui raggio è uguale a *1*.
Una costruzione analoga si può fare nel caso in cui le rette *r* ed *s* sono parallele. L'unica differenza consiste nel fatto che la sezione in tal caso è un'ellisse i cui fuochi sono i punti *R* ed *S* e il cui asse maggiore è uguale a *1*. Per questo i punti *R* ed *S* possono distare al massimo *1* e in tal caso la costruzione del luogo nello spazio coincide con quella nel piano precedentemente esposta (vedi il caso "rette parallele", per *d=1*).



che trova il luogo quando le rette sono parallele nello spazio. I casi restanti, rette incidenti o sghembe, li lasciamo come problema aperto.

Dicembre 2001

Presi 51 numeri distinti tra 1 e 100 inclusi, mostra che almeno uno di essi ne divide un altro.

Sono arrivate due risposte entrambe purtroppo sbagliate, da parte di:
Marco Zaro, 3A pni, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA);
Enrico Tombetti, 4C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA).

A differenza del solito, abbiamo deciso di analizzarle lo stesso, dal momento che presentano elementi di interesse.

Tombetti parte da un insieme di *50* elementi nel quale nessuno ne divide nessun altro e tenta di far vedere che è impossibile costruirne uno di *51* elementi. La costruzione che propone (sostituire *k* elementi con altri *k+1*) permette di avere tutti i possibili sottoinsiemi richiesti. Purtroppo, fa vedere solo in un caso particolare che questa sostituzione immette forzatamente nell'insieme un divisore. Ci sembra che cercare di generalizzare l'analisi porti a un'esplosione di casi particolari non gestibili.

1 ■ Enrico Tombetti

Possiamo notare che esistono diversi insiemi di *50* numeri che non si dividono tra loro: ad esempio l'insieme *A* dei numeri tra *51* e *100* inclusi, oppure gli insiemi ottenuti dal precedente sostituendo ad alcuni numeri pari le corrispondenti metà.
Osserviamo poi che ogni numero tra *1* e *50* inclusi, divide almeno un numero tra *51* e *100* inclusi. Infatti:
ogni numero tra *26* e *50* inclusi, moltiplicato per *2* dà un numero tra *51* e *100*;
ogni numero tra *13* e *25* inclusi, moltiplicato per *4* dà un numero tra *51* e *100*;
ogni numero tra *7* e *12* inclusi, moltiplicato per *8* dà un numero *51* e *100*;
ogni numero tra *1* e *6* inclusi, ha notoriamente dei multipli tra *51* e *100*.
Non è quindi possibile aggiungere alcun numero inferiore a *51* all'insieme *A* che non divida uno dei suoi numeri.
Non è neppure possibile sostituire *k* numeri di *A* con almeno *k+1* numeri tra *1* e *50* inclusi in modo da ottenere un insieme di *51* numeri che non si dividono tra loro. Dovremmo poter prendere almeno una volta i due fattori il cui prodotto era un numero dell'insieme dei *50* che non si dividono tra loro. Il fatto è che i *40* numeri non primi di *A* (*50*, *51*, *52*, *54*,..., *100*) sono ottenibili da soli *14* fattori primi (*2*, *3*, *5*, *7*, *11*, *13*, *17*, *19*, *23*, *29*, *31*, *37*, *41*, *47*): *91* può essere sostituito dai fattori *13* e *7*, ma poi *7* divide *56*, *63*, *70*, ... *98*; e *13* divide *52*, *69* ...
Possiamo ulteriormente notare che il problema poteva essere generalizzato dicendo che presi *n+1* numeri distinti tra *1* e *2n* inclusi, almeno uno di essi ne divide un altro.

Quanto a Zaro, anche il suo approccio sembra interessante. Suddivide i numeri primi e i numeri non primi in gruppi separati: il numero *1* che se è presente risolve tutti i problemi; i *16* primi che hanno multipli minori di *100*; gli altri *10* primi; i *33* nonprimi che hanno multipli; e i *40* rimanenti.

Zaro ritiene erroneamente che analizzare i casi estremi sia sufficiente. In realtà, sono proprio quelli intermedi a presentare le maggiori difficoltà. E, nuovamente, il numero di casi particolari è enorme.

2 ■ Marco Zaro

Tra *1* e *100* abbiamo *27* numeri primi e *73* composti. Tra i numeri primi *17* hanno un multiplo minore di *100*, dieci no. Quindi questi dieci, se estratti, non servirebbero a niente. Tra i composti, *33* sono anche divisori di numeri minori di *100*, gli altri *40* no.
Consideriamo il caso più pessimistico: i dieci numeri primi in questione vengono tutti estratti, abbiamo altri *41* numeri da estrarre
Se si estrae l'*1*, abbiamo risolto il problema, in quanto divide tutti i numeri interi
Se si estraggono altri *16* primi (tutti eccetto l'*1*), i rimanenti *25* soddisferanno sicuramente le condizioni.
Se si estraggono i *40* multipli non divisori, il *41*esimo estratto sarà sicuramente un loro divisore
Anche volendo estrarre tutti i numeri superiori al *50* (sono *50*), quindi che non dividono nessun numero, il *51*esimo divide sicuramente uno di essi, essendone sicuramente la metà

Veniamo ora alla soluzione. Come giustamente ha osservato Tombetti, il problema vale più in generale: è sempre vero che presi *n+1* numeri tra i primi *2n*, almeno uno di questi ne divide un altro. Come spesso succede, era molto più facile dimostrare il risultato generale, rispetto al problema con i *100* numeri.

Una possibile soluzione del problema generale viene ottenuta ragionando per induzione su *n*. La base è vera: infatti se *n = 1*, si hanno i due interi *1* e *2*, e il problema è soddisfatto in quanto *1* divide *2*.
Adesso, l'ipotesi induttiva ci assicura che comunque prendiamo *n+1* numeri minori di *2n*, almeno uno di questi ne divide un altro.
Consideriamo ora *k+2* numeri interi tra *1* e *2n+2*, e diciamo che formano l'insieme *A*. Se *A* non contiene né *2n+1* né *2n+2*, allora l'ipotesi induttiva ci garantisce che *A* ha la proprietà richiesta.
Se *A* contiene uno solo tra *2n+1* e *2n+2*, allora per l'insieme *A* privato di questo numero vale l'ipotesi induttiva, e quindi *A* ha la proprietà richiesta.
L'ultimo caso è che *A* contenga sia *2n+1* che *2n+2*. Consideriamo allora l'insieme *A'* in cui *2n+2* viene sostituito da *n+1* (che non sta in *A*, perché se no il problema è già risolto). Per *A'* vale il caso precedente: cioè esistono due elementi *a* e *b*, tali che *a* divide *b*. Se *b = n+1*, allora *a* divide anche *2n+2* e la proprietà è vera anche per *A*. Altrimenti *a* e *b* sono contenuti anche in *A*.

Un'ulteriore soluzione è la seguente.
Siano *x(0), … ,x(n)*, *n+1* numeri minori di *2n*. Possiamo scriverli tutti come *x(i) = 2h(i)y(i)*, dove *h(i)* può anche essere uguale a *1*, e *y(i)* è sempre dispari. Detto altrimenti, se *x(i)* è dispari si ha *x(i) = y(i)*. Se invece è pari, lo dividiamo per *2* tante volte quante possiamo, e *y(i)* è il risultato finale di tutte queste divisioni.
Tra *1* e *2n* ci sono solo *n* numeri dispari. D'altra parte gli *y(i)* sono *n+1*, quindi due di loro devono essere uguali. Diciamo che sia *y(j) = y(k)*. Allora, se *h(j) < h(k)*, si ha che *x(j)* divide *x(k)*. Altrimenti vale il viceversa.

Gennaio 2002

Dato un triangolo *ABC*, acutangolo in *A*, sia *AD* l'altezza relativa a *BC* e siano *E* ed *F* i punti di incontro di *AD* con le bisettrici degli angoli *ABC* e *BCA*, rispettivamente. Dimostrare che, se *BE* è uguale a *CF*, allora il triangolo *ABC* è isoscele.

Sono arrivate quattro risposte, da parte di
Jacopo D'Aurizio, 4A pni, LS Mattioli, Vasto (CH);
Francesco D'Aurizio, 3A pni, LS Mattioli, Vasto (CH);
Luca Sacchetto, 3A, LS Galilei, Adria (RO);
Enrico Tombetti, 4C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA).

Jacopo D'Aurizio e Enrico Tombetti hanno costruito una funzione di cui studiando l'andamento scoprono che è iniettiva.

1 ■ Enrico Tombetti

Pongo $\alpha = D\hat{C}F$. Per un dato valore dell'altezza *AD*, che pongo uguale a *k*, studio come varia *FC* in funzione di α. Ovviamente avremo $0<\alpha<\pi/4$.
Si ha:

$$FC = DC / \cos\alpha$$
$$DC = k / \mathrm{tg}2\alpha$$
$$FC = k / (\mathrm{tg}2\alpha \cos\alpha)$$
$$FC = k (1 - \mathrm{tg}^2\alpha) / (2\sin\alpha)$$

*F*C tende a ∞ per α che tende a *0*, tende a *0* per α che tende a $\pi/4$.
Se calcoliamo la funzione derivata prima, troviamo:

$$FC' = k ((-2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\mathrm{tg}\alpha \sin\alpha-(1-\mathrm{tg}^2\alpha)\cos\alpha) / (2\sin^2\alpha)$$

e, dopo alcuni passaggi:

$$FC' = -(k/2) (1+2\sin^4\alpha)/\cos \sin^2\alpha).$$

Ebbene, per $0<\alpha<\pi/4$ risulta sempre *FC'* negativo e questo significa che *FC* decresce monotonamente da ∞ a *0*.
FC funzione di è una funzione iniettiva: per ogni valore di α c'è un solo valore di *FC*. Dunque può essere definita la funzione inversa nella quale per ogni valore di *FC* esiste un solo valore di α.
A questo punto torniamo a considerare il triangolo *ABC* dato. Per quanto appena visto se *BE = CF* allora gli angoli *DCF* e *DBE* sono uguali. Risultano quindi uguali gli angoli *BCA* e *ABC* e questo vuol dire che il triangolo *ABC* è isoscele sulla base *BC*.

Francesco D'Aurizio affronta il problema in maniera quasi puramente geometrica.

2 ■ Francesco D'Aurizio

Perfeziono il lavoro di mio fratello fornendovi una soluzione geometrica (quasi completamente) pura.
Ecco una seconda soluzione del problema, questa indubbiamente più elegante. Prendiamo un triangolo *ABC* con *AC > CB*. Sia *D* la proiezione di *C* su *AB*. Tracciamo la bisettrice dell'angolo *A*. Questa taglierà *CD* in *E* e *CB* in *G*. Tracciamo la bisettrice dell'angolo *B*. Questa taglierà *AC* in *H*, *CD* in *F* e *AG* in *I*. *I* sarà necessariamente l'incentro di *ABC*, in particolare la retta per *C* e per *I* sarà bisettrice dell'angolo *C*. Se *CI* taglia *AB* in *J*, notiamo che si ha *AJ > JB* poichè, per il teorema della bisettrice, *AJ:AC = JB:BC*. Visto che è anche

$$CJA>CJB \qquad (a)$$

applicando meccanicamente il teorema di Carnot otteniamo

$$AI > IB \qquad \text{(b)}$$

ma dalla (a) segue anche
$CJB<\pi/2$, $\pi/2- B < C/2$, $BCF < BCJ$
il che vuol dire che i punti *E* ed *F* cadono all'interno dell'angolo *BCJ*. Alla luce di queste considerazioni possiamo quindi dire che dalla (b) segue, a maggior ragione
$AI + IE > IB – IF$

$$AE >> BF \qquad \text{(c1)}$$

Se avessimo posto come ipotesi iniziale *AC<BC* saremmo giunti, in modo perfettamente analogo, alla conclusione

$$AE << BF \qquad \text{(c2)}$$

Questo significa che per ottenere come tesi *AE = BF* dobbiamo partire, per il principio del terzo escluso, dall'ipotesi *AC = BC* In questo caso le rette per *C*, *I*, *J* per *C*, *E*, *F* vengono a coincidere, così come vengono a coincidere i punti *E* ed *F*. La dimostrazione può ritenersi conclusa.

Una soluzione simile è la seguente:

Supponiamo che sia *AB < AC*, allora vale anche la disuguaglianza tra gli angoli *ACB < ABC*.
Poiché questi angoli sono acuti, si ha cos *ACB* > cos *ABC*.
Per il teorema della bisettrice si ha che *DF/FA = DC/CA* = cos *ACB* > cos *ABC* = *DB/BA = DE/EA*. Quindi *E* sta

tra *F* e *D*. Nel triangolo rettangolo *BDF*, *BE* < *BF*. Dato che *AB* < *AC*, la retta *AD* è più vicina a *B* che a *C* e *BF* < *CF*. Quindi *BE* < *BF* < *CF*. Contraddizione.

Una soluzione esclusivamente geometrica è invece la seguente:
Supponiamo *AB* < *AC*. Allora *BD* < *CD*. Sia *B′* il simmetrico di *B* rispetto a *D*. Se *E* fosse tra *D* e *F*, si avrebbe *BE* = *B′E* < *CE* < *CF*, che è assurdo. Pertanto *E* stra tra *A* e *F*. Allora *B′E* e *CF* si incontrano in *X*. Per costruzione, *X* giace sulla bisettrice di *ACB* (e quindi è equidistante da *AC* e da *AB*) e su quella di *AB′B* (ed è equidistante da *AB′* e da *AB*. Ne segue che *d(X, AC) = d(X, AB′)*, che è impossibile.
Pertanto *E* coincide con *F* e il triangolo *EBC* è isoscele con angoli alla base uguali che sono la metà di quelli di *ABC*.

Febbraio 2002

Se a, b, c sono numeri interi dispari, dimostra che $ax^2 + bx +c = 0$ non può avere soluzioni razionali.
Che cosa si può dire nel caso in cui uno o più coefficienti siano pari?
Che cosa si può dire dell'equazione di terzo grado $x^3 + 2ax^2 + ax + b = 0$, con a e b interi dispari?

Abbiamo ricevuto un'unica soluzione da Jacopo D'Aurizio, 4A, LS Mattioli, Vasto (CH).

Jacopo affronta in modo corretto il problema:

1 ■ Jacopo D'Aurizio

Abbiamo l'equazione

$(2a'+1) x^2 + (2b'+1)x + (2c'+1) = 0$ (a)

ponendo che questa equazione abbia una soluzione razionale $x = p/q$, con $MCD(p,q) = 1$, otteniamo $(2a'+1)p^2 + (2b'+1)pq + (2c'+1) q^2 = 0$ dunque dev'essere necessariamente

$p^2 + pq + q^2 = 0 \quad MOD\ 2$ (b)

p e q devono essere quindi necessariamente entrambi pari, contraddicendo l'ipotesi iniziale $MCD(p,q) = 1$. L'equazione (a) non ha dunque soluzioni razionali.

La stessa soluzione si poteva semplificare dicendo che se p/q è una soluzione con p e q coprimi, poichè si ha $ap^2 + bpq + cq = 0$, p e q non possono essere entrambi pari.
Se uno è pari e l'altro è dispari, nella relazione due termini sono pari e il terzo è dispari: quindi la somma non può essere 0. Se sono entrambi dispari, la somma di tre numeri dispari non può essere nuovamente zero.
In alternativa è possibile partire dalla classica formula risolutiva e osservare che le soluzioni sono razionali se e solo se $b^2 - 4ac$ è un quadrato perfetto, che deve essere per forza dispari, dal momento che b è dispari. Scriviamo quindi $b^2-4ac = (2n+1)^2$, dalla quale si ottiene $b^2-1 = 4[n(n+1)+ac]$. Siccome uno tra n e $n+1$ è pari, la parentesi quadra è dispari. Di conseguenza il secondo membro è divisibile per 4 ma non per 8. Invece $(b-1)(b+1)$ è divisibile per 8 perchè uno dei due fattori è pari e l'altro è addirittura un multiplo di 4. Contraddizione.

2) Per quanto riguarda il secondo punto era sufficiente esibire un controesempio: ad esempio, $x^2-2x+1 = 0$.

3) Anche per il terzo punto, riportiamo la risposta di Jacopo:

$x^3 + 2ax^2 + ax + b = 0$
$a = 2a'+1$
$b = 2b'+1$ (e)

poniamo che questa equazione abbia una soluzione razionale $x = p/q$ con $MCD(p.q) = 1$, allora

$$p^3 + 2a\,p^2q + apq^2 + bq^3 = 0$$
$$p^3 + apq^2 + bq^3 = 0 \ MOD\ 2$$
$$p^3 + pq^2 + q^2 = 0 \ MOD\ 2$$

da questa congruenza segue $p = q = 0\ MOD\ 2$, assurda poichè, per ipotesi, avevamo $MCD(p,q) = 1$.
La (e) non ha dunque soluzioni razionali.

Marzo 2002

Sia dato un pentagono (convesso) *ABCDE*. Le aree dei triangoli *AED*, *EAB*, *ABC*, *CDE* sono tutte uguali a *1*. Calcolare l'area di *ABCDE*.

Sono arrivate due risposte, da parte di
Jacopo D'Aurizio, 4A pni, LS Mattioli, Vasto (CH);
Enrico Tombetti, 4C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA).
che sono entrambe esatte e che propongono una costruzione esplicita della soluzione.

1 ■ Jacopo D'Aurizio

Lemma A Sia *ABCD* un trapezio (*AB*//*CD*) e sia *E* il punto d'intersezione delle sue diagonali. Si ha 1) *ABD* =*ABC* (triangoli stessa base e identica altezza) 2) *AED* = *BEC* (sottraendo *AEB* ambo i membri) 3) *ADC* = *DCB* (sommando *CED* ambo i membri).
Preso un segmento *AE*, tracciamo la parallela *r* ad *AE* in modo che si abbia, detta *d* la distanza tra *AE* ed *r*, *AE*d = 2*.
Prendiamo un punto *C* nel piano in modo che *C* ed *A* stiano da parti opposte rispetto a *r*. Tracciamo la parallela a *CE* per *A* fino a intersecare *r* in *B*, e tracciamo la parallela ad *AC* per *E* fino ad intersecare *r* in *D*. Avremo innanzitutto *AED* = *BAE* = *AE*d/2* = *1*. *AECD* e *AECB* sono trapezi per costruzione, in virtù del lemma A avremo quindi *CDE* = *DEA* e *CBA* = *BAE* il pentagono *ABCDE* godrà quindi della proprietà richiesta dal problema. La sua area, essendo strettamente dipendente dalla posizione del punto *C*, non assumerà un valore fisso, bensì varierà tra 3 (*C* preso su *r*) e infinito. Se *C* viene preso tra *AE* ed *r* otteniamo un pentagono concavo, se *C* viene preso su *AE* otteniamo un pentagono degenere in una retta.
That's all.
NdR: Siamo proprio sicuri che il triangolo *BCD* non dovesse avere, anch'esso, area *1*?

2 ■ Enrico Tombetti

Siccome i triangoli *AED* ed *EAB* hanno la stessa base *EA* e sono equiestesi, dovranno avere le loro altezze congruenti. Perciò *B* e *D* si troveranno su una retta parallela alla base *EA* che dista *2/EA* da essa. Per analogia, considerando i triangoli *CDE* ed *EAD*, con base comune *ED*, si deduce che i punti *A* e *C* devono trovarsi su una retta parallela ad *ED*. Per ulteriore analogia, considerando i triangoli *EAB* e *ABC*, con base comune *AB*, si deduce che i punti *E* e *C* devono trovarsi su una retta parallela ad *AB*. Val la pena di osservare che esistono infiniti pentagoni che soddisfano i requisiti in ipotesi: partendo dal lato *EA*, scelti *B* e *D* sulla parallela distante *2/EA*, basta che il punto *C* sia scelto come punto di intersezione tra la parallela a *ED* per *A* e la parallela ad *AB* per *E*. Immaginando di far scorrere il punto *D* (o il punto *B*) sulla retta *BD* si nota che *C* si sposta rispetto ad *EA* sia in direzione parallela che normale. Per rispettare la convessità del pentagono ci si deve limitare a posizioni di *C* che non siano sullo stesso lato di *EA* rispetto a *BD*. L'area del pentagono è pari alla somma delle aree dei tre triangoli *CDE*, *ABC* e *ACE*. I primi due hanno ciascuno area uguale ad *1* per ipotesi, *ACE* ha altezza uguale o superiore a *2/EA* per cui la sua area è uguale o superiore ad *1*. Pertanto l'area del pentagono *ABCDE* è uguale o superiore a *3*.

Se, come chiedeva in conclusione Jacopo D'Aurizio, anche il trangolo *BCD* avesse avuto area *1*, il valore dell'area sarebbe stato totalmente determinato.
In questo caso per determinarlo, si può procedere così: poiché hanno la stessa area e la stessa base, i triangoli *EDC* e *BCD* devono avere la stessa altezza rispetto alla base *DC*. Ne segue che le rette *EB* e *DC* sono parallele. Allo stesso modo, tutte le diagonali risultano parallele ai lati opposti ad esse.

Indichiamo ora con *P* l'intersezione tra le diagonali *EC* e *BD*. Per quanto osservato, il poligono *ABPE* è un parallelogramma e *EPB* ha area *1*.
Chiamiamo adesso *x* l'area di *PDC*:

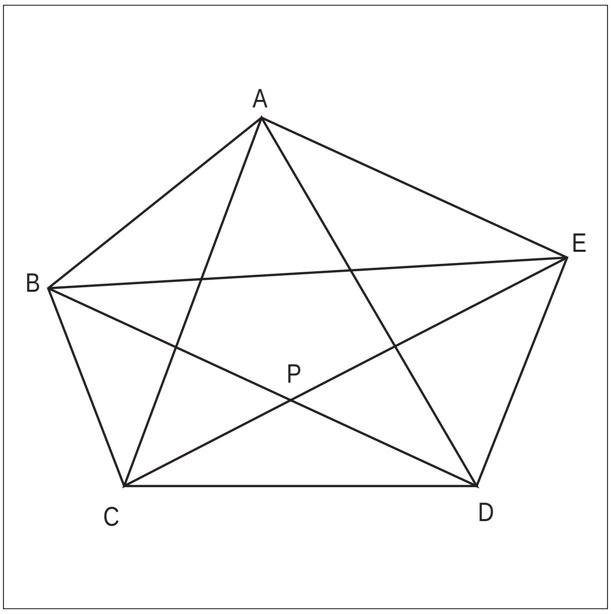
$$\text{area}(PDC) = x$$

e con *y* l'area di *BPC*

$$\text{area}(BPC) = \text{area}(EDP) = y.$$

Si ottiene allora la doppia uguaglianza

$$\text{area}(EDP)/\text{area}(EPB) = DP/PB = \text{area}(PDC)/\text{area}(PCB)$$
$$y : 1 = x : y.$$



D'altra parte, per come abbiamo scelto *x* e *y*, abbiamo anche che $x+y = 1$. Risolvendo il sistema che abbiamo ottenuto, si ottengono

$$y = (\sqrt{5}-1)/2 \quad \text{e} \quad (3-\sqrt{5})/2$$

Per mezzo dei quali è facile calcolare che

$$\text{area(ABCDE)} = (5+\sqrt{5})/2$$

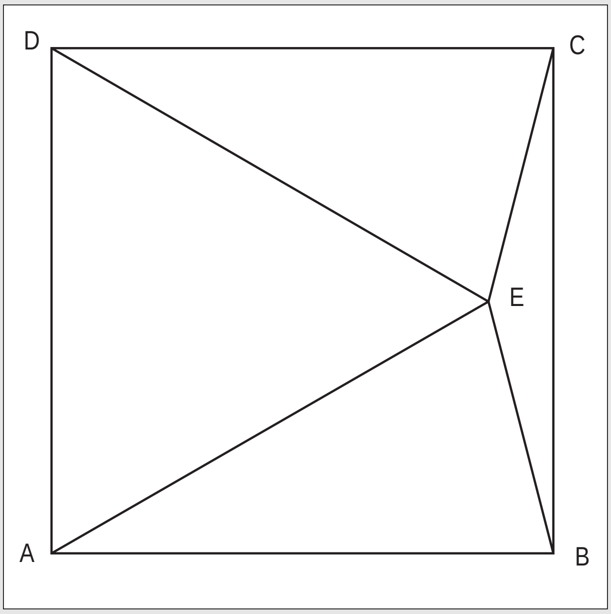
È interessante osservare che anche in questo caso (cioè quando l'area di tutti e cinque i triangolini vale *1*) si può ottenere una costruzione di infiniti pentagoni che godano della proprietà data.
Si parte prendendo un triangolo *PDC* con area

$$(3-\sqrt{5})/2.$$

Di questo rettangolo si prolungano i due lati *PD* e *PC* sino ai punti *B* ed *E* rispettivamente, in modo che i due triangoli *EDC* e *BDC* abbiano area *1*. Quindi si traccia, per *E*, la parallela a *BD* e per *Bl* parallela a *EC*. L'intersezione di queste due rette è il punto *A*.
A questo punto è facile verificare che il pentagono *ABCDE* gode della proprietà data.

Aprile 2002

Nel quadrato *ABCD*



gli angoli *ECB* e *EBC* sono di *15*°. Dimostrare che il triangolo *ADE* è equilatero.

Sono arrivate cinque risposte, da parte di
Jacopo D'Aurizio, 4A pni, LS Mattioli, Vasto (CH);
Enrico Tombetti, 4C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA);
Luca Sacchetto, 3A, LS Galilei, Adria (RO);
Marco Sandano, 3B, LS Galilei, Adria (RO);
Giovanni Viglietta, appassionato, Fossano (CN).

Tombetti, sulla base di un'osservazione trigonometrica, fornisce una soluzione semplice e ben spiegata

1 ■ Enrico Tombetti

Indico con l la lunghezza del lato del quadrato.
Il triangolo *EBC* è isoscele sulla base *BC*, pertanto il punto *E* si trova sull'asse di *BC* che è anche asse di *AD*. Chiamo *H* e *K* i punti di intersezione dell'asse rispettivamente con *AD* e *BC*.
Abbiamo:

$$AH = HD = BK = KC = l/2$$

$$EK = BK = tg(15) = \frac{l}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$EH = HK - EK = l - \frac{l}{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l$$

Essendo *E* sull'asse di *AD*, il triangolo *ADE* è isoscele sulla base *AD*. L'altezza *EH* è $\sqrt{3}$ /2 volte la base *AD* e questo vuol dire che *ADE* è anche equilatero.

La stessa via è stata seguita da D'Aurizio.

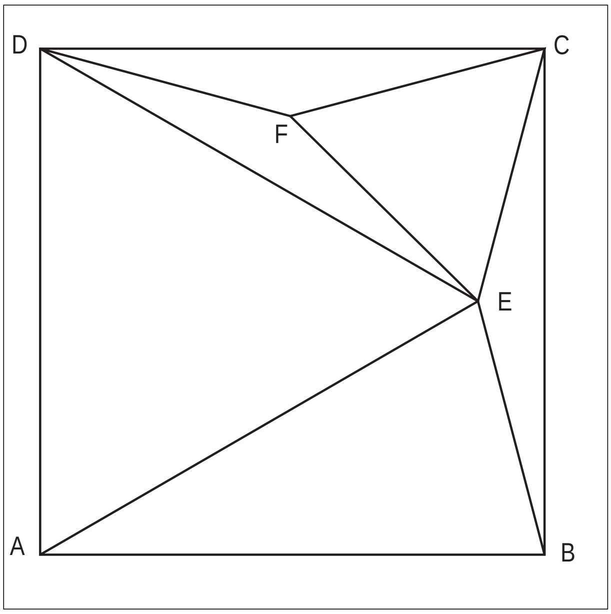
Per quanto riguarda l'approccio puramente geometrico, Viglietta e Sacchetto partono dalla costruzione del triangolo equilatero e trovano come terzo vertice proprio il punto *E*.

2 ■ Giovanni Viglietta

La posizione di *E* è evidentemente univocamente determinata: infatti un lato ed i 2 angoli adiacenti del triangolo *BCE* sono fissati, quindi l'intero triangolo è fissato. E' perciò sufficiente supporre che *ADE* sia equilatero, e mostrare che ciò è in accordo con le ipotesi, e non crea contraddizioni. Si ha per ipotesi che *ABE = DCE = 75°*, e che *BEC = 150°*. Ora, supponendo *ADE* equilatero, abbiamo che *ABE* e *DCE* sono triangoli isosceli, quindi *AEB = DEC = 75°*. Inoltre, *AED = 60°*. Sommando i *4* angoli in *E*, otteniamo l'angolo giro: questo significa che i triangoli effettivamente combaciano, e ciò è la prova che *ADE* è equilatero, proprio per l'unicità della posizione di *E*, data dalle ipotesi.

Esiste un'altra soluzione che prevede di calcolare l'altezza del trangolo *ADE*, come differenza tra il lato del quadrato e l'altezza del triangolo *BCE*, la quale è la metà del lato per la tangente di *15°*. Si ottiene un valore pari alla lunghezza del lato del quadrato moltiplicata per : questo è sufficiente per affermare che *ADE* è equilatero, visto che l'intera figura è simmetrica rispetto all'asse di *BC*.

Proponiamo infine una seconda soluzione geometrica, questa volta diretta.



Costruiamo il triangolo *DCF* con angoli alla base di *15°*. Ne segue che l'angolo *FCE* vale *60°* e che *FC = CE.*

Pertanto il triangolo *FCE* è equilatero, per cui

$$DF = FC = FE.$$

Inoltre, *DFE = 360°-150°-60° = 150°*, e quindi *FDE = FED = 15°*, che implica *EDC = 30°*.
Di conseguenza ADE vale *60°* e il triangolo *ADE* è isoscele con angoli alla base di *60°*, vale a dire è equilatero.

Maggio 2002

Sia S un sottoinsieme dei numeri razionali, con le seguenti proprietà
è chiuso[1] rispetto all'addizione
è chiuso rispetto alla moltiplicazione
per ogni numero razionale *x* è vera solo una delle tre possibilità
x = 0;
x* sta in *S;
-*x* sta in *S*.
dimostrare che *S* è l'insieme dei numeri razionali positivi escluso lo zero.

È arrivata un'unica risposta da Marco Zaro, 3A, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA), purtroppo non corretta.
Una possibile soluzione del problema è la seguente:
Se *0* appartenesse a *S*, si avrebbe che anche *0 = -0* sarebbe un elemento di *S*, cosa che non è possibile per la regola 3.
Se *-1* appartenesse a *S*, allora *(-1)(-1) = 1* sarebbe in *S*, ma anche questo non è possibile, sempre per la 3. Quindi, deve essere che *1* sta in *S*.
Prendiamo ora un elemento *s* di *S*. Due sono i casi possibili, o *1/s* sta in *S* o *-1/s* sta in *S*. Il secondo caso non può accadere, altrimenti avremmo che *-1 = s(-1/s)* sarebbe un elemento di *S*, cosa che abbiamo appena esclusa. Quindi, *1/s* è un elemento di *S* e, di conseguenza, tutti i razionali positivi sono compresi in *S*.
Per il viceversa, *s* un numero negativo *r* appartenesse a *S*, *-r* sarebbe un razionale positivo e apparterrebbe anch'esso a *S*, il che è assurdo.

[1] Un insieme è chiuso rispetto all'addizione se, presi comunque due elementi dell'insieme la loro somma appartiene ancora all'insieme. Lo stesso vale per la moltiplicazione.

L'IRRE Emilia-Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'istituto, ha proposto
questo servizio in rete rivolto a docenti,
alunni e appassionati che si
interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico
1999/2000 e giunto al suo quarto anno,
ha visto l'adesione di studenti di tutto il triennio
superiore. Tutto il progetto è in linea con le
direttive della C.M. 270 (Prot. N. 2475)
del 12 novembre 1999, denominata
progetto SeT (Progetto speciale per
l'Educazione Scientifica e Tecnologica).

Nel presente volumetto il resoconto
del terzo anno di attività.

IRRE Emilia-Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 6 novembre-dicembre 2002, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Educativa dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Luciano Lelli, proprietà IRRE Emilia-Romagna.