

Presentazione a cura di:  
Giuliana Bettini e Franca Noè

# FLAT*landia*

anno IV

**geometria on-line  
nella scuola secondaria**

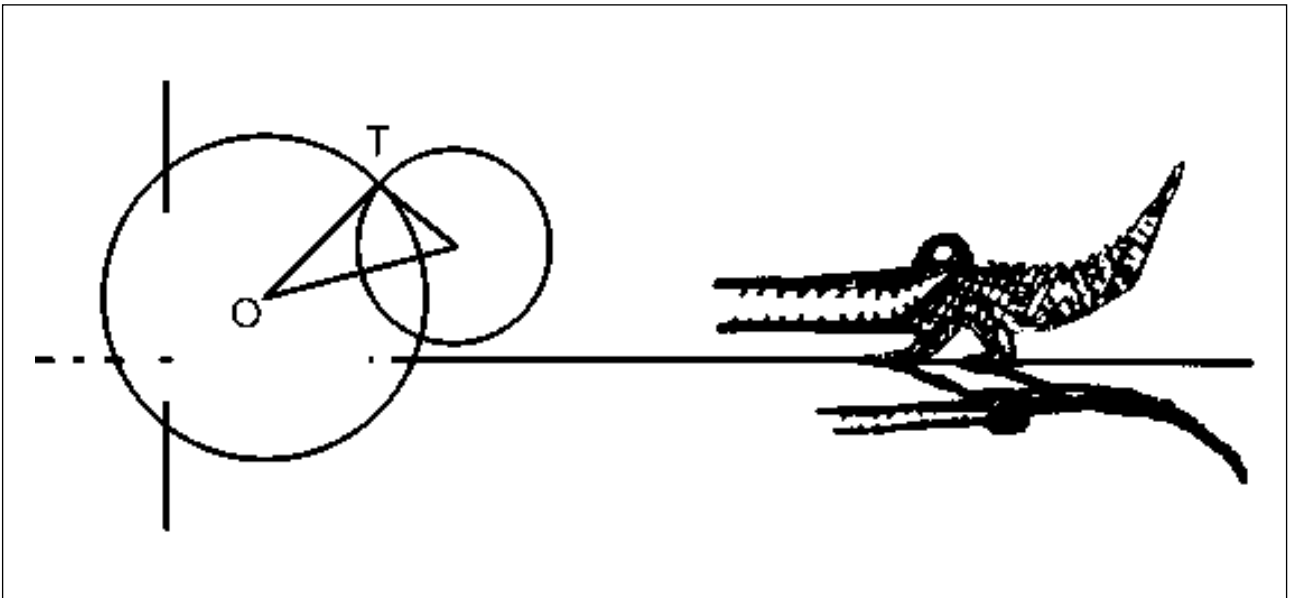
$n^{\circ}$

**21**

**Giuliana Bettini**, insegnante di matematica, ha partecipato all'esperienza, fa parte della redazione del bollettino *CABRI*RRSAE e collabora con l'I.R.R.E. - E.R. in attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

**Franca Noè**, insegnante di matematica, distaccata presso l'I.R.R.E. - E.R., fa parte della redazione del bollettino *CABRI*RRSAE e partecipa da alcuni anni con l'I.R.R.E. - E.R. ad attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Il materiale pubblicato da **CABRI**RRSAE può essere riprodotto, citando la fonte



# FLAT*landia*

anno IV

**geometria on-line  
nella scuola secondaria**

# Indice

▼	Presentazione .....	Pag. 5
▼	Attività 2000/2001 .....	Pag. 7
▼	Problemi e soluzioni .....	Pag. 11
	2 - 10 ottobre 2000 .....	Pag. 12
	6 - 20 novembre 2000 .....	Pag. 15
	4 - 18 dicembre 2000 .....	Pag. 19
	8 - 22 gennaio 2001 .....	Pag. 22
	5 - 19 febbraio 2001 .....	Pag. 24
	5 - 19 marzo 2001 .....	Pag. 29
	2 - 23 aprile 2001 .....	Pag. 35
	7 - 21 maggio 2001 .....	Pag. 36
▼	Conclusioni .....	Pag. 42

## FLATlandia

E' un'attività dell'IRRE Emilia-Romagna rivolta in modo particolare agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.

Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.

Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

## Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il quarto anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.

Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, a trentanove.

Nel quarto anno la partecipazione all'attività è sta allargata anche agli studenti del terzo anno di scuola superiore, limitatamente ai primi tre mesi dell'anno scolastico. Questo per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio.

## Il progetto

E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.

La costruzione può essere eseguita con strumenti tradizionali o con l'aiuto di software dedicati all'insegnamento della geometria (oggi sempre più presenti sul mercato); la dimostrazione può talvolta mancare, ad esempio nel caso di classi elementari o medie.

L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.

In questo momento di forti cambiamenti nell'assetto dei curricoli, e di auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.

I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche. Ed anche in una attività di questo genere, che sembra così fortemente orientata al solo mondo matematico, appare fondamentale padroneggiare bene la lingua italiana. Può infatti avere interesse notare, giunti ormai al quarto anno di attività (anno scolastico 2000 - 2001), questo fatto: è stato segnalato da parte di ragazzi di un Istituto tecnico che spesso, nella scelta delle risposte migliori e più complete, da rispedire a tutti i partecipanti, la redazione di FLATlandia opta per i testi scritti da alunni dei licei. Il gruppo redazionale si è interrogato su questo fatto, ha revisionato vari materiali, ed ha raggiunto questa conclusione: statisticamente parlando, appare evidente che i ragazzi dei licei spesso sanno porgere le loro soluzioni in modo più corretto, più semplice e più chiaro. E questo probabilmente perché questi ragazzi sembrano padroneggiare meglio la lingua italiana.

La partecipazione a FLATlandia può quindi essere anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

## Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews ([cabrinews@kidslink.scuole.bo.it](mailto:cabrinews@kidslink.scuole.bo.it)) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo:

<http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/>

Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe.

Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica:

[flat@kidslink.scuole.bo.it](mailto:flat@kidslink.scuole.bo.it)

inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

Se la scuola non è ancora iscritta a Cabrinews, è sufficiente che mandi il seguente messaggio:

subscribe cabrinews, al seguente indirizzo:

listserv@kidslink.scuole.bo.it

### **Ulteriori informazioni**

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.

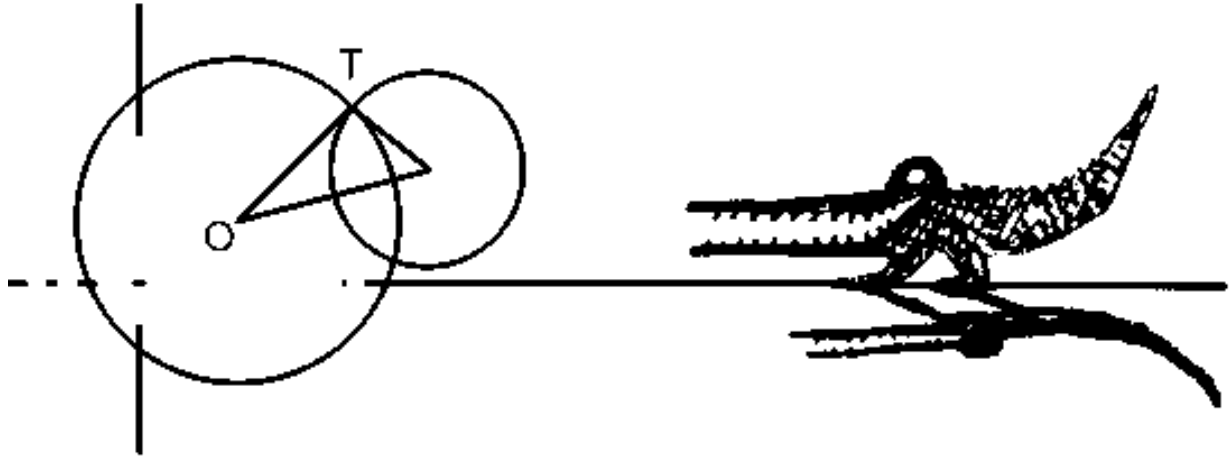
Per coloro che fossero eventualmente interessati, segnaliamo che è stata attivata, da ormai due anni, una iniziativa analoga a FLATlandia, che tratta più in generale di matematica (e non solo di geometria) e che è rivolta in modo particolare a ragazzi del triennio delle superiori.

L'attività si chiama **probleMATEMATICamente**.

Per maggiori informazioni consultare il sito:

<http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto>

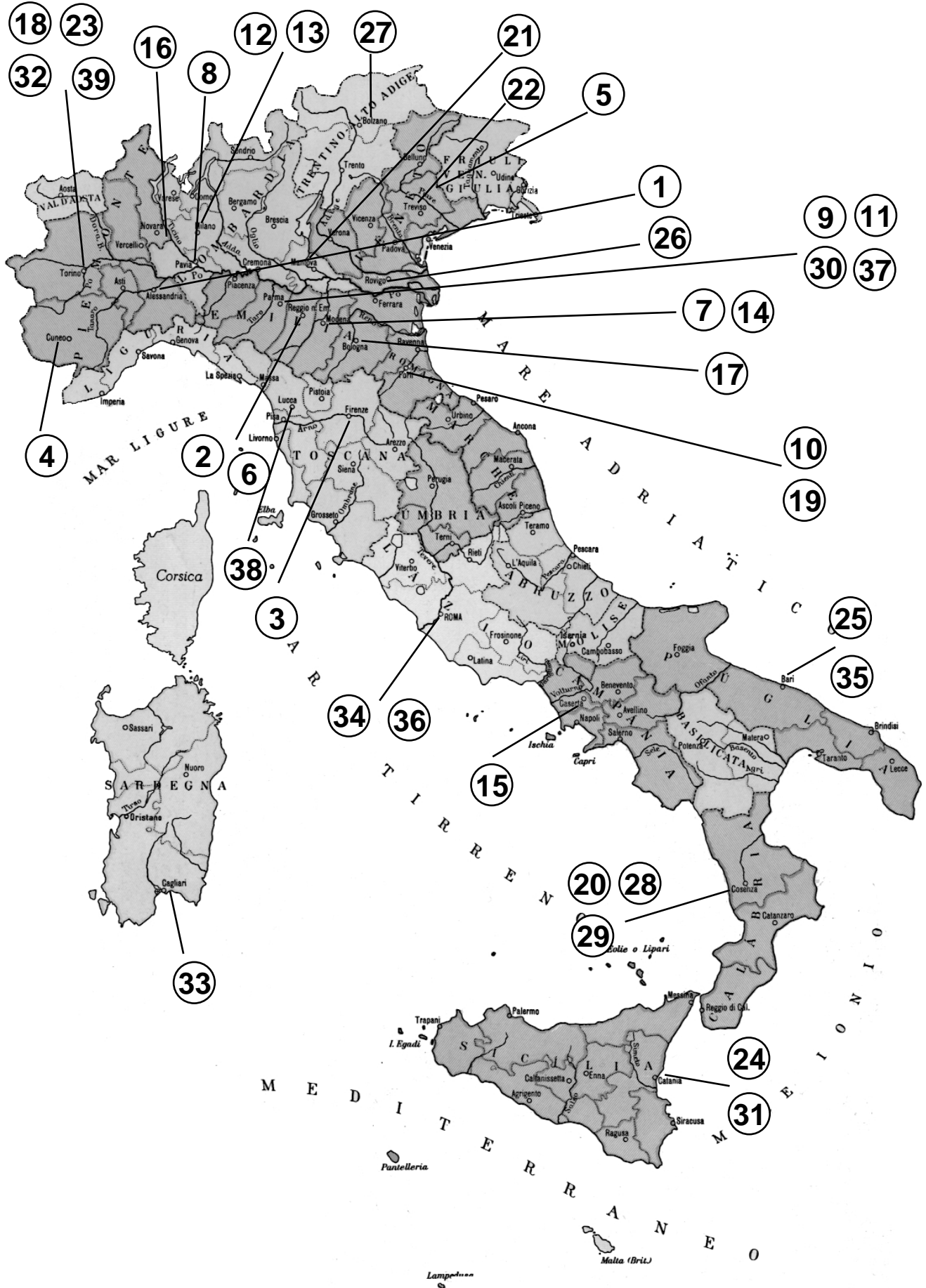
*Anna Maria Arpinati*



# FLAT*landia*

**Attività 2000-2001**

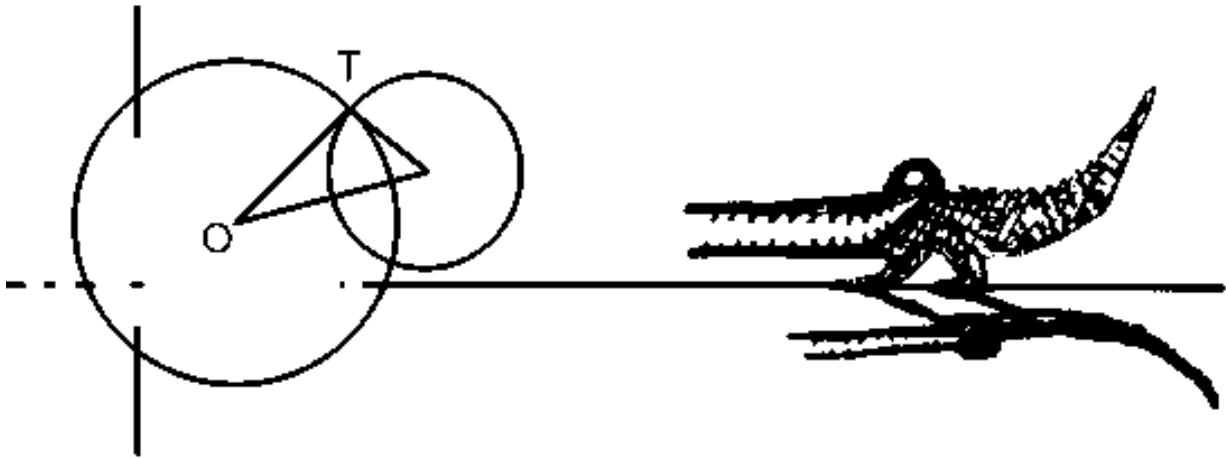
### Mappa delle scuole che hanno partecipato





Scuola		Frequenza							
		O	N	D	G	F	M	A	M
<b>MEDIE INFERIORI</b>	<b>ELEM 1</b> “G. Galilei”, II Circolo Alessandria (AL)	◆					◆		
	<b>2</b> “Orsi”, Novellara (RE)	◆	◆						
	<b>3</b> “Leonardo da Vinci”, Rufina (FI)	◆	◆	◆	◆	◆	◆		
	<b>4</b> Venasca (CN)	◆							
	<b>5</b> “G.Zanella”, Porcia, Roveredo in Piano (PN)	◆	◆	◆	◆	◆	◆		◆
	<b>6</b> Rolo (RE)					◆			
	<b>7</b> “Graziosi”, Savignano s.P. (MO)					◆			
	<b>8</b> “Dalla Chiesa”, San Genesio (PV)				◆	◆	◆	◆	
	<b>9</b> ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR)	◆	◆			◆	◆		
	<b>10</b> ITI “B. Pascal”, Cesena (FC)	◆	◆						
	<b>11</b> ITG “Rondani”, Parma (PR)	◆	◆		◆	◆	◆		
<b>ISTITUTI TECNICI e PROFESSIONALI</b>	<b>12</b> ITI LST “Cesaris”, Casal Pusterlengo (LO)	◆							
	<b>13</b> ITI LST “A. Volta”, Lodi (LO)	◆	◆						
	<b>14</b> ITA “I. Calvi”, Finale Emilia (MO)		◆						
	<b>15</b> ITG “Buonarroti”, Caserta (CE)		◆						
	<b>16</b> ITI “Quintino Sella”, Biella (VC)		◆						
	<b>17</b> ITI LST “F. Alberghetti”, Imola (BO)		◆						
	<b>18</b> ITI “Enzo Ferrari”, Torino (TO)		◆						
	<b>19</b> IPSSAR “P. Artusi”, Forlimpopoli (FC)				◆				
	<b>20</b> ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)					◆		◆	
	<b>21</b> ITI “Fermi”, Mantova (MN)					◆			
	<b>22</b> LG di Oderzo, ISS Motta di Livenza (TV)	◆				◆			
<b>23</b> Liceo Linguistico “C. Botta”, Ivrea (TO)	◆								
<b>24</b> LS “G. Galilei”, Catania (CT)	◆	◆							
<b>25</b> LS “G. Galilei”, Bitonto (BA)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	
<b>26</b> LS “G. Galilei”, Adria (RO)	◆				◆				
<b>27</b> LS “B. Pascal”, Merano (BZ)	◆								
<b>28</b> LS “Patrizi”, Cariati (CS)	◆								
<b>29</b> LS “Scorza”, Cosenza (CS)	◆								
<b>30</b> LS “Ulivi”, Parma (PR)	◆	◆	◆						
<b>31</b> LS “E. Boggio Lera”, Catania (CT)		◆							
<b>32</b> LS “E. Majorana”, Torino (TO)		◆							
<b>33</b> LS “G. Galilei”, Cagliari (CA)			◆						
<b>34</b> LS “B. Russell”, Roma (RM)					◆				
<b>35</b> LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)					◆	◆	◆	◆	
<b>36</b> LS “F. D’Assisi”, Roma (RM)					◆	◆	◆		
<b>37</b> LS “Michelangelo”, Forte dei Marmi (LU)					◆	◆			
<b>38</b> LS “G. Ferraris”, Torino (TO)						◆			





# FLAT*landia*

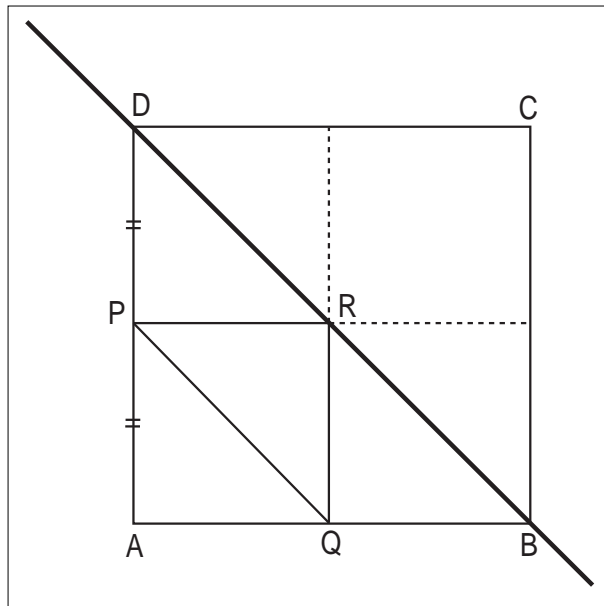
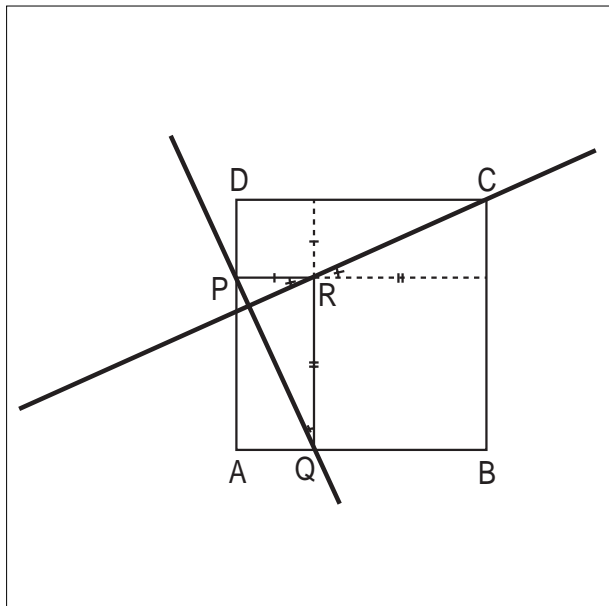
## Problemi e soluzioni

**2 - 16 Ottobre 2000**

E' dato un quadrato ABCD. Considerare sul lato AD un punto P e sul lato AB un punto Q tale che sia AQ congruente a DP. Disegnare il rettangolo AQRP.

a) Dimostrare che la retta CR è perpendicolare alla retta PQ.

b) Determinare la posizione del punto P affinché la retta BR sia parallela alla retta PQ. Motivare la risposta.

**Commento**

Abbiamo ricevuto ventitre risposte provenienti da diciannove scuole, fra le quali quattro scuole medie e una scuola elementare. E' giunta una ulteriore risposta da una associazione culturale di Rosario, Argentina, purtroppo illeggibile. Abbiamo replicato al messaggio, ma non siamo riusciti a stabilire alcun contatto con quell'Istituto.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- SE "G. Galilei", II Circolo Alessandria (AL)
- SM "Orsi", Novellara (RE)
- SM "Leonardo da Vinci", Rufina (FI)
- SM di Venasca (CN)
- SM "G.Zanella", Porcia, Roveredo in Piano (PN)
- ITI "Berenini", Fidenza (PR) - due risposte
- ITI "B. Pascal", Cesena (FC)
- ITG "Rondani", Parma (PR)
- ITI LST "Cesaris", Casal Pusterlengo (LO)
- ITI LST "A.Volta", Lodi (LO)
- LG di Oderzo, ISSS Motta di Livenza (TV) - tre risposte
- Liceo Linguistico "C.Botta", Ivrea (TO)
- LS "G. Galilei", Catania (CT)
- LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
- LS "G. Galilei", Adria (RO)
- LS "B.Pascal", Merano (BZ) - due risposte
- LS "Patrizi", Cariati (CS)
- LS "Scorza", Cosenza (CS)
- LS "G.Ulivi", Parma (PR)

Nel problema di questo mese si trattava di indagare la posizione reciproca di due rette all'interno di un quadrato in una situazione generica, nella prima parte, e quella di due rette in un caso particolare, nella seconda parte. Alcune delle risposte pervenute non sono accettabili: in una è errata la figura e quindi modificato il percorso della dimostrazione; in altre si è tentata una dimostrazione senza tener conto di tutte le ipotesi del problema nella prima parte; una

ha invece modificato un dato del problema nella seconda parte. In molte altre risposte il problema è stato risolto in modo impreciso o nella descrizione della figura o nella esposizione; qualcuno si è dilungato eccessivamente nelle giustificazioni, qualcuno è invece stato troppo conciso a scapito della completezza.

Nella maggior parte delle risposte il punto a) è stato dimostrato ricorrendo alla congruenza dei triangoli rettangoli sfruttando quindi gli angoli complementari. Qualcuno ha tentato approcci diversi e interessanti (rotazione, similitudine) senza riuscire a dare però una giustificazione esauriente.

Il punto b), apparentemente molto semplice, è stato affrontato in generale in due modi: chi ha fatto una dimostrazione diretta, a partire dalle ipotesi, ha individuato l'esistenza ma non la unicità del punto trovato; chi invece ha preso in esame la tesi per scoprire le condizioni che la determinano ha dimostrato solo la unicità del punto richiesto.

Riportiamo via e-mail la risposta del Liceo Scientifico "Galilei" di Catania per la prima parte; la soluzione del Liceo Scientifico "Scorza" e quella della Scuola Media "L. da Vinci" di Rufina (FI) per la seconda parte.

Sul sito web (<http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/>) riporteremo inoltre la figura animata dell'ITI "Berenini", la soluzione completa della Scuola Media "L. Orsi" di Novellara.

**NOTA 1:** Le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

**NOTA 2:** Vi invitiamo a descrivere le vostre costruzioni e ad indicare le lettere aggiunte alla vostra figura in modo che il testo della risposta sia leggibile anche in assenza della figura.

**NOTA 3:** NON SCRIVETE il testo della vostra risposta nel file della figura Cabri, non tutti i componenti del gruppo sono in grado di leggerlo. Attenetevi quindi alle istruzioni date.

## Soluzioni

*Jacopo Guarnieri, Paolo Guasti e Massimiliano Montuschi*  
classe 2B

*ITI "Bernini" - Fidenza - PR*

Nel sito di FLATlandia (<http://kidslinc.scuole.bo.it/cabri/flatlandia>) è visibile l'immagine animata Cabrijava inviata dai tre ragazzi dell'ITI "Bernini"

*Daniele Urzì*

*classe 3B*

*Liceo Scientifico "G. Galilei" - Catania*

a) Sia  $V$  l'intersezione tra le rette  $CR$  e  $PQ$ . Si prolunghi  $QR$  fino ad incontrare  $DC$  nel punto  $T$ . Considerando le rette parallele  $DC$  e  $PR$ , tagliate dalla trasversale  $CV$ , gli angoli  $TCR$  e  $PRV$  sono congruenti perché corrispondenti. Poiché il quadrilatero  $PRTD$  ha gli angoli interni retti è un rettangolo ed è semplice dimostrare che è anche un quadrato. Altrettanto facilmente si dimostra che è  $TC$  congruente a  $RQ$ . Quindi i triangoli rettangoli  $TRC$  e  $PRQ$  sono congruenti poiché hanno i cateti ordinatamente congruenti. In particolare si ha [l'angolo]  $QPR$  congruente a  $TRC$ . In riferimento al triangolo  $PVR$ , siccome gli angoli  $RPV$  e  $VRP$  sono complementari, l'angolo  $PVR$  è retto. Così è dimostrato che le rette  $PQ$  e  $CR$  sono perpendicolari.

**Nota:**

Nel caso in cui  $P$  coincida con  $A$  o con  $D$  la proprietà del quesito a) è verificata, poiché  $PQ$  e  $CR$  coincideranno alternativamente con due lati consecutivi del quadrato.

Se  $P$  appartiene al prolungamento di  $AD$  dalla parte di  $D$ , la proprietà suddetta si verifica considerando  $Q$  sul prolungamento di  $AB$  dalla parte di  $A$ . Se  $P$  giace invece sul prolungamento di  $AD$  dalla parte di  $A$ ,  $Q$  deve essere preso sul prolungamento di  $AB$  dalla parte di  $B$ .

b) [...]

*Stefania Bisogno*

*Classe 2C*

*Liceo Scientifico "Scorza" - Cosenza*

a) [...]

b) Per dimostrare il secondo punto, sono partita già dal fatto che le rette  $BR$  e  $PQ$  sono parallele. Così, si viene a formare il parallelogramma  $PQBR$ ; pertanto i lati  $PR$  e  $QB$  sono uguali, perché lati opposti di un parallelogramma. Allora,

dato che  $AQ=PR=PD$ , come precedentemente dimostrato,  $QB$  è uguale ad  $AQ$  e  $DP$  è uguale ad  $AP$ : il punto  $P$  (così come il punto  $Q$ ) è il punto medio del lato  $AD$ . In tal modo, si è dimostrato che le due rette  $PQ$  e  $BR$  sono parallele solo se il punto  $P$  coincide con il punto medio del lato  $AD$ .

*Massimiliano Capecchi e Maddalena Pazzi*

*Classe 3C*

*Scuola Media "L. da Vinci" - Rufina (FI)*

a) [...]

b) Considero la retta  $BR$ : essa è, nella mia figura, diagonale del quadrato  $RQBK$  [ $K$  è il punto di intersezione fra la retta  $PR$  e il lato  $CB$ ] e quindi bisettrice dell'angolo  $QBK$ . Nel rettangolo  $AQRP$ , viceversa, la retta  $QP$  è diagonale del rettangolo medesimo e non è, quindi, bisettrice dell'angolo. Solo quando il punto  $P$  è punto medio del lato  $AD$ , il quadrato  $ABCD$  sarà diviso in 4 quadrati di cui le due rette  $PQ$  e  $BR$  saranno bisettrici e quindi tra loro parallele (condotte ambedue dal vertice più in alto a destra a quello più in basso a sinistra). In questa posizione il punto  $R$  coincide con il centro della figura.

*Un gruppo di alunni della classe 3C*

*Scuola Media "L.Orsi" - Novellara (RE)*

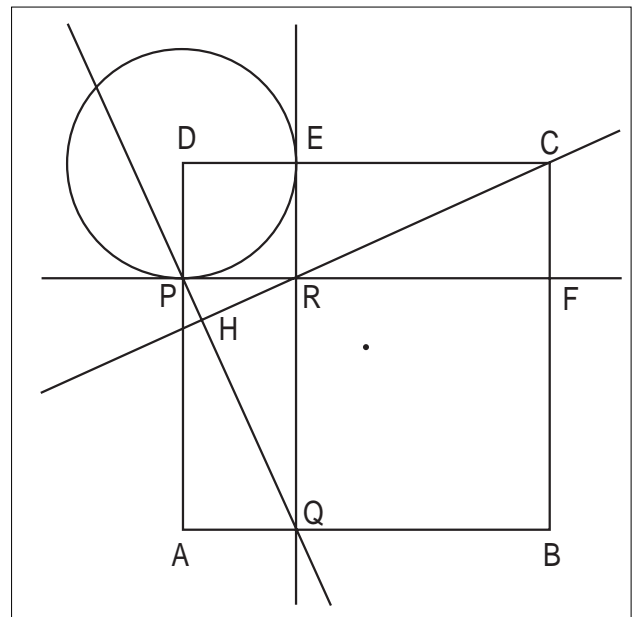
**COSTRUZIONE DELLA FIGURA:**

Costruiamo il quadrato  $ABCD$ , fissiamo un punto  $P$  sul segmento  $AD$  e costruiamo la circonferenza con il centro in  $D$  e che ha per raggio il segmento  $DP$ ; troviamo il punto  $E$  d'intersezione della circonferenza col segmento  $CD$ , in questo modo  $DE \cong DP$ .

Costruiamo la retta parallela al lato  $CD$  passante per  $P$ , chiamiamo  $F$  la sua intersezione con il lato  $BC$ , così  $CF \cong DP$ ; costruiamo la retta parallela al segmento  $DA$  passante per  $E$  chiamiamo  $Q$  la sua intersezione con il lato  $AB$  in questo modo  $AQ \cong DE \cong PD$ .

Il punto  $R$  è l'intersezione delle rette  $EQ$  e  $DA$  che sono perpendicolari, quindi  $APRQ$  è un rettangolo e  $PDER$  è un quadrato.

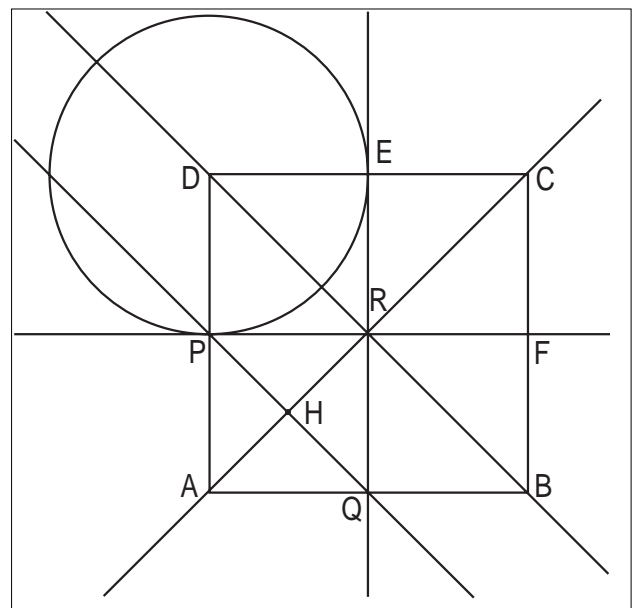
Infine costruiamo la retta passante per i punti  $C$  e  $R$  e la retta passante per i punti  $P$  e  $Q$ .



**DIMOSTRAZIONE**

a) Dalla costruzione deriva il fatto che  $ERFC$  e  $PAQR$  sono due rettangoli congruenti, dato che  $CR$  e  $PQ$  sono rispettivamente le loro diagonali, anche i triangoli rettangoli  $ERC$  e  $PQR$  sono congruenti, quindi l'angolo  $\hat{E}CR$  è congruente all'angolo  $\hat{P}QR$ . Chiamiamo  $H$  il punto d'intersezione della retta  $CR$  con la retta  $PQ$ ; il triangolo  $QRH$  ha l'angolo  $\hat{P}QR$  in comune con il triangolo  $QPR$ , l'angolo  $\hat{H}RQ$  congruente all'angolo  $\hat{E}RC$ , perché opposti al vertice; dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre  $180^\circ$ , anche l'angolo  $\hat{R}HQ$  deve essere congruente all'angolo  $\hat{R}EC$  cioè retto, perciò le rette  $RC$  e  $PQ$  sono perpendicolari. Trascinando il punto  $P$  lungo il lato  $AD$  si può verificare che questo ragionamento è valido per qualunque posizione assuma il punto  $P$ .

b) Abbiamo tracciato la diagonale  $BD$  del quadrato  $ABCD$ , il punto  $R$  appartiene a questa diagonale. Trasciniamo il punto  $P$  lungo il lato  $AD$  fino a quando  $R$  coincide con il centro del quadrato, a quel punto  $P$  diventa il punto medio del lato  $AD$ , quindi  $AP \cong PD$  e  $AQRP$  è un quadrato di cui  $PQ$  è la diagonale, allora la retta  $s$  forma con il lato  $AB$  un angolo di  $45^\circ$  come la retta  $BR$ . Possiamo concludere che  $BR$  è Parallela a  $PQ$  quando  $P$  coincide con il punto medio del lato  $AD$ .



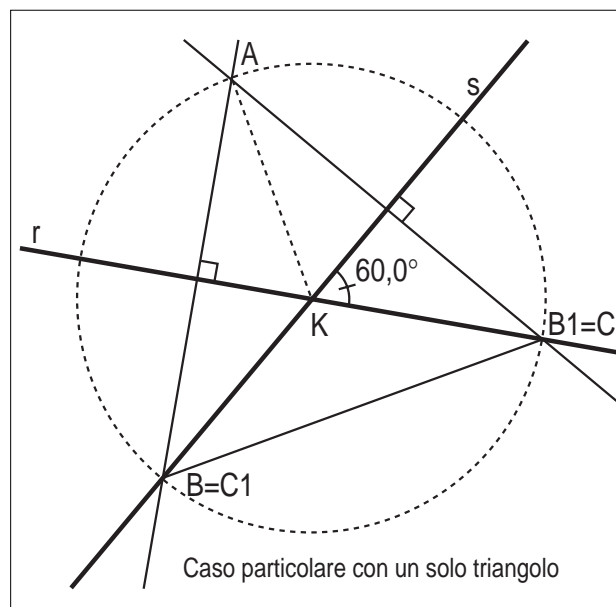
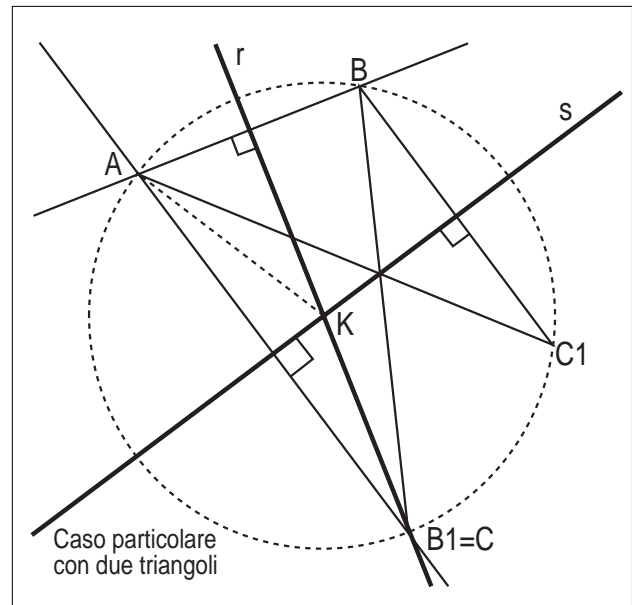
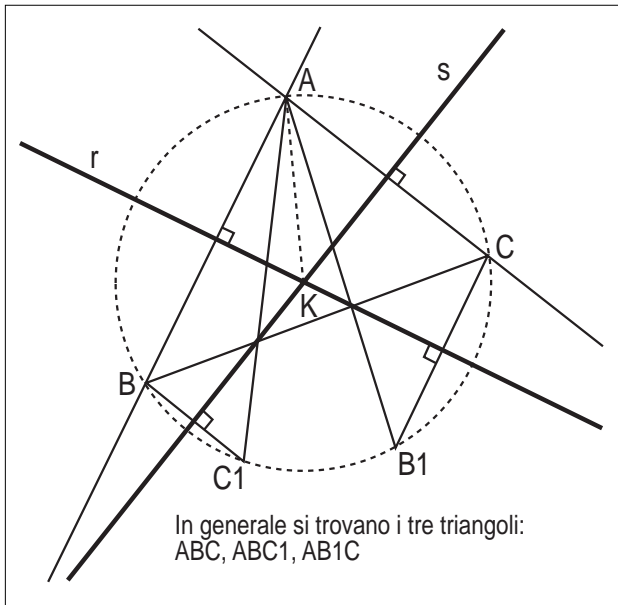
**6 -20 Novembre 2000**

Siano  $r$  ed  $s$  due rette incidenti in  $K$  e sia  $A$  un punto non appartenente ad esse.

a) Costruire un triangolo  $ABC$  in modo che le rette  $r$  ed  $s$  siano gli assi di due suoi lati. Quante sono le soluzioni possibili?

b) Se il punto  $A$  appartiene ad una delle due rette e' ancora possibile effettuare la costruzione? Se sì, quante soluzioni esistono?

*Motivare le risposte.*

**Commento**

Abbiamo ricevuto venti risposte provenienti da diciassette scuole di cui tre scuole medie inferiori.

Ecco l'elenco delle scuole che hanno partecipato in questo mese:

- SM "Leonardo da Vinci", Rufina (FI)
- SM "G.Zanella", Porcia, Roveredo in Piano (PN)
- SM "L. Orsi", Novellara (RE)

LS "G.Galilei", Bitonto (BA)  
 LS "G.Galilei", Catania (CT)  
 LS "E.Boggio Lera", Catania (CT)  
 LS "E. Majorana", Torino (TO)  
 LS "G.Ulivi", Parma (PR)  
 ITA "I.Calvi", Finale Emilia (MO)  
 ITG "C.Rondani", Parma (PR) - tre risposte  
 ITG "Buonarroti", Caserta (CE)  
 ITI LST "A.Volta", Lodi (LO) - due risposte  
 ITI "Quintino Sella", Biella (BL)  
 ITI "Berenini", Fidenza (PR)  
 ITI "Blaise Pascal", Cesena (FC)  
 ITI LST "F.Alberghetti", Imola (BO)  
 ITI "Enzo Ferrari", Torino (TO)

Il problema proposto in questo mese chiedeva di costruire un triangolo dati due suoi assi, prima in un caso generico, poi in una situazione particolare, e di esaminare le varie possibilità di risoluzione.

Tre delle risoluzioni pervenute non sono accettabili perché largamente carenti; sei risposte risultano invece incomplete o nella prima o nella seconda parte.

In tutte le rimanenti risposte il problema è stato risolto in modo soddisfacente ricorrendo o alla simmetria assiale, nella maggior parte di esse, o alla proprietà delle corde (considerando la circonferenza circoscritta ai triangoli da costruire). Sono state individuate le soluzioni generali, ma non sono stati indagati tutti i casi particolari, soprattutto nella prima parte.

Si rendono necessarie alcune osservazioni:

- "Siano  $r$  ed  $s$  due rette incidenti ...e sia  $A$  un punto..." NON SIGNIFICA risolvere il problema proposto per ogni coppia di rette e per ogni punto, ma, una volta fissate due rette generiche e un punto qualsiasi (non appartenente o appartenente ad esse), determinare tutte le possibili soluzioni; successivamente si possono esaminare posizioni particolari delle rette e/o del punto.
- Nessuno ha messo in evidenza che le costruzioni individuate nella prima parte sono le uniche possibili.
- Dopo aver individuato la soluzione generale è opportuno esaminare anche le posizioni particolari per verificare se rientrano nel caso generale o se producono situazioni nuove, che saranno quindi da evidenziare.

Fra le risposte accolte, abbiamo concordato di presentare quella del Liceo scientifico "G.Galilei" di Bitonto completata da una osservazione di Daniele Urzi del Liceo Scientifico "G.Galilei" di Catania. Per la scuola media inferiore, riportiamo quella della SM di Rufina, anche se non prende in esame i casi particolari.

**NOTA:** Le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

## Soluzioni

*Classe 2E*

*Liceo Scientifico "G. Galilei" - Bitonto (BA)*

a) Indichiamo con  $sr$  la simmetria assiale rispetto ad  $r$  e con  $ss$  la simmetria assiale rispetto all'asse  $s$ . Sia  $B=sr(A)$  e  $C=ss(A)$ ,  $ABC$  è un primo triangolo di vertice  $A$  avente  $r$  come asse di  $AB$  e  $s$  come asse di  $AC$ . Sia  $D=ss(B)$ ,  $ABD$  è un secondo triangolo avente  $r$  come asse di  $AB$  e  $s$  asse di  $BD$ .

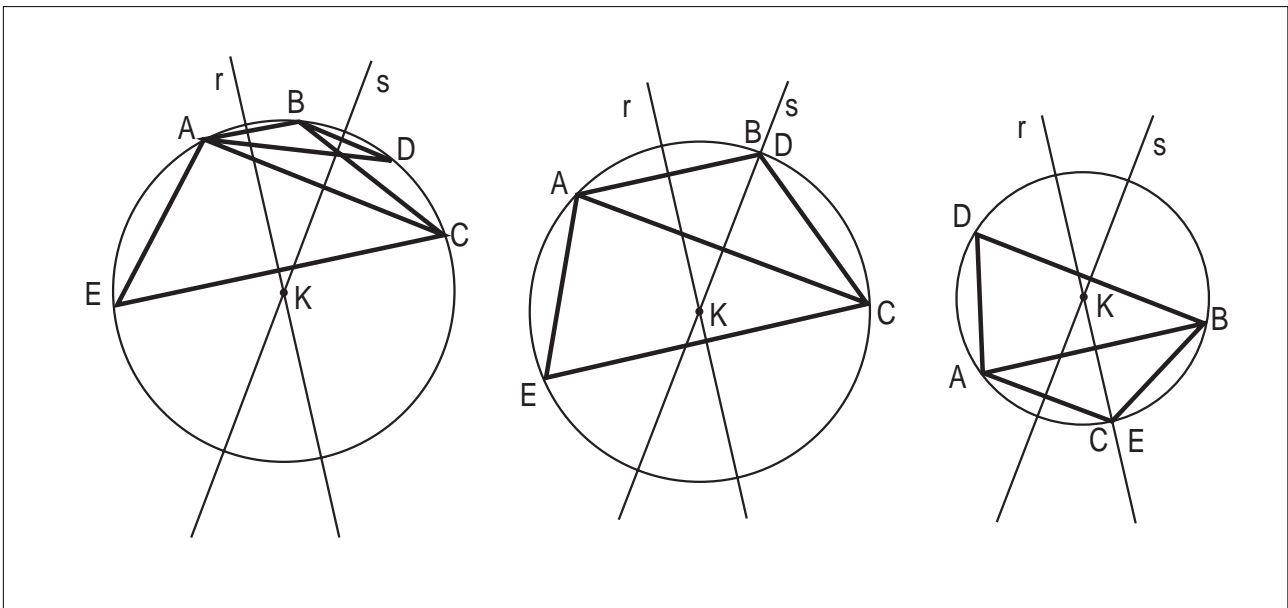
Sia  $E=sr(C)$ ,  $ACE$  è un terzo triangolo avente  $r$  come asse di  $CE$  e  $s$  come asse di  $AC$ .

Per tutti questi triangoli  $K$  è il circocentro, infatti la circonferenza di centro  $K$  e passante per  $A$ , passa anche per i punti  $B, C, D, E$ . Dunque sono possibili in generale tre soluzioni.

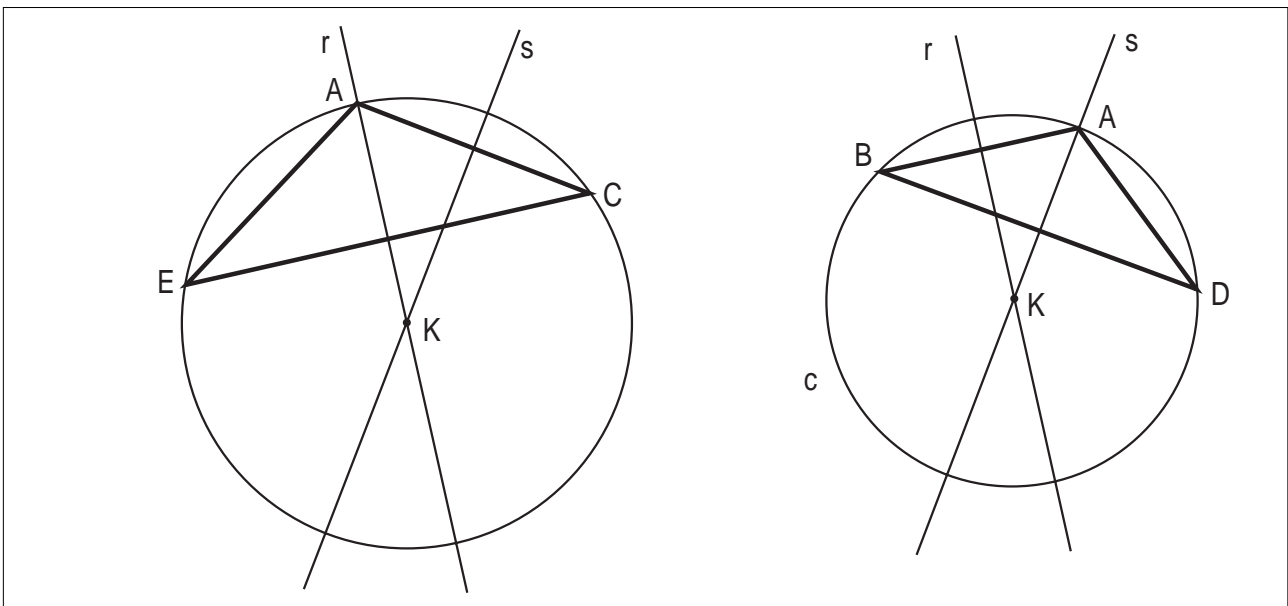
Nel caso particolare che  $B$  cada su  $s$ , si ha che  $B=D$  e le soluzioni scendono a due in quanto il triangolo  $ABD$  degenera in un segmento (vedi fig.2) [e il triangolo  $ABC$  diventa isoscele]

Analogo discorso se  $C$  cade su  $r$  [ $C=E$ ] (vedi fig. 3) [Manca il caso in cui la soluzione è una sola, cioè un triangolo equilatero: si ha quando  $A$  è sulla bisettrice dell'angolo ottuso formato da  $r$  ed  $s$  e l'angolo acuto misura  $60^\circ$ ]





b) Se  $A$  appartiene a una delle due rette, la soluzione è unica e si tratta del triangolo isoscele  $ACE$  (terza costruzione), nel caso  $A$  appartenga a  $r$  o del triangolo  $ABD$  (seconda costruzione) nel caso che  $A$  stia su  $s$ . I triangoli  $ACE$  e  $ABD$  sono isosceli perché dotati di un asse di simmetria.



Infatti in questi casi particolari delle tre costruzioni del punto a) solo una si può effettuare essendo  $A$  fisso [punto unito nella simmetria assiale] rispetto a  $r$  o ad  $s$ .

**Daniele Urzì**  
*classe III B*  
*liceo scientifico statale "G. Galilei" (CT)*

[...]

Se  $r$  e  $s$  sono perpendicolari basta [nel punto (a)] considerare il rettangolo di vertici  $A$  e i suoi simmetrici rispetto ad  $r$ ,  $s$ ,  $K$  e tracciare le diagonali: tutti i triangoli rettangoli di vertice  $A$  sono quelli richiesti.

Quando invece A appartiene ad r o ad s e queste sono perpendicolari il triangolo [il rettangolo] degenera sempre in un segmento e quindi il problema non ammette soluzione.

**Massimiliano Bavecchi**

classe 3C

Scuola Media "Leonardo da Vinci" Rufina (FI)

a) Ricordando che l'asse di un segmento è la retta perpendicolare condotta per il suo punto medio, parto da A e traccio le perpendicolari t ad r e w ad s, che intersecano rispettivamente in M ed in N i due assi. Con il "Compasso" punto in M e con apertura AM, disegno una circonferenza.

Individuo così un punto di intersezione tra la circonferenza e la retta t che chiamo B. Nello stesso modo, con il "Compasso" punto in N e con apertura NA traccio la circonferenza. Nel punto di intersezione di questa circonferenza con la retta w individuo il vertice C del triangolo. Con l'opzione triangolo traccio il triangolo ABC individuato mediante i punti così determinati.

E' possibile effettuare tre costruzioni di triangoli aventi come assi le rette r ed s, incidenti in K, partendo da un punto A esterno ad esse.

• Nella prima:

A va in B mediante r, A va in C mediante s [vedi costruzione precedente].

• Nella seconda:

A va in B mediante r, B va in D mediante s [con costruzione analoga].

• Nella terza:

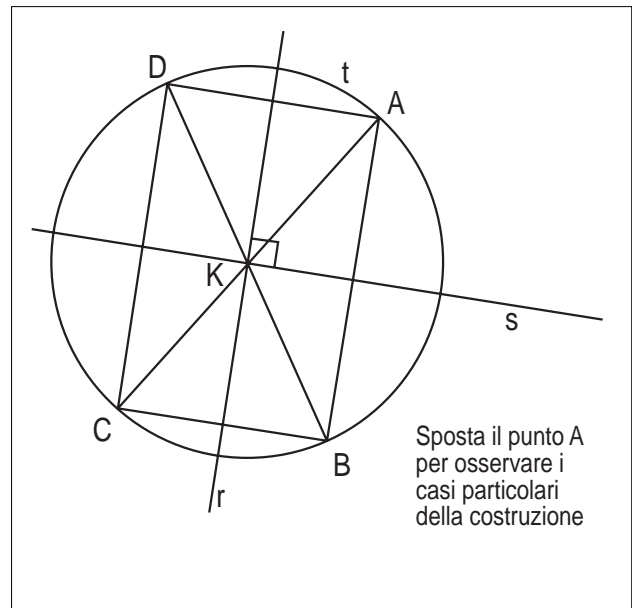
A va in C mediante s, C va in E mediante r [come sopra].

b) Se il punto A appartiene ad una delle due rette e' ancora possibile effettuare una sola costruzione, tracciando una perpendicolare da A sull'altra retta e ancora applicando il procedimento precedente.

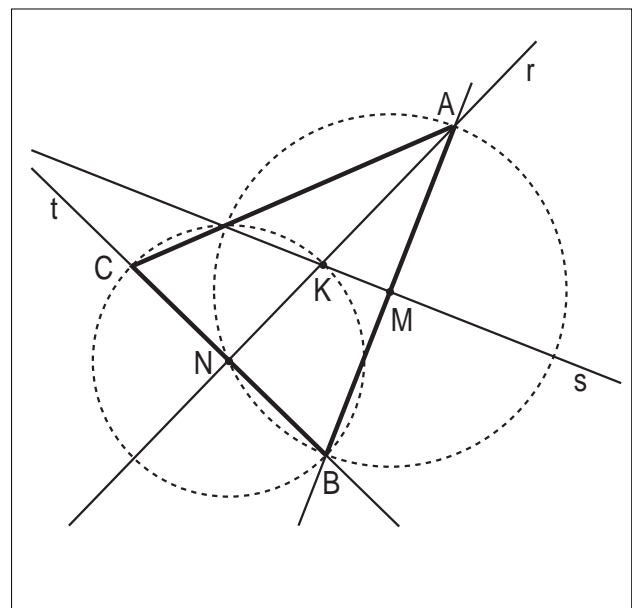
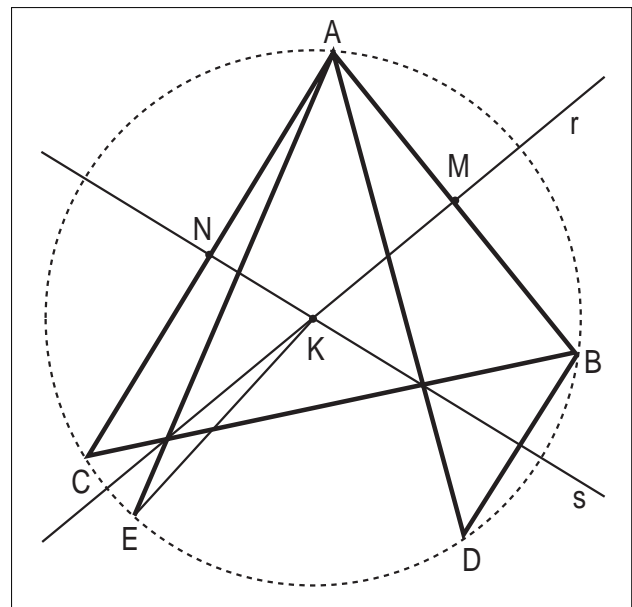
Immagino il punto A sulla retta r. Chiamo M il punto di intersezione tra la retta s e la perpendicolare ad essa w, passante per A.

Con centro in M e apertura del compasso AM trovo il punto B dato dall'intersezione di w con la circonferenza. Una volta trovato B, traccio la perpendicolare t da B alla retta r. Nell'intersezione di t ed r si troverà il punto N. Punto poi in N con apertura BN, e traccio la circonferenza di diametro BC (l'intersezione della circonferenza con la retta t individua il punto C).

Il triangolo ABC è l'unico che posso costruire; infatti il simmetrico di A rispetto alla retta r è un punto che coincide con A stesso.



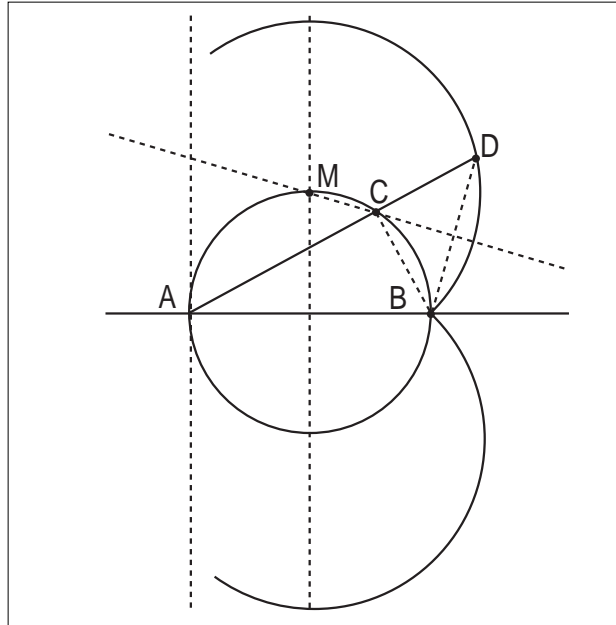
Sposta il punto A per osservare i casi particolari della costruzione



**4 - 18 Dicembre 2000**

Data una circonferenza  $k$  di diametro  $AB$  tracciare una corda  $AC$  e prolungarla di un segmento  $CD$  congruente a  $CB$ .

- a) Dimostrare che, dovunque sia  $C$ , l'asse del segmento  $BD$  passa per il punto medio della semicirconferenza di diametro  $AB$  e contenente  $C$ .  
 b) Qual è il luogo descritto dal punto  $D$  al variare di  $C$  su  $k$ ? Giustificare la risposta.

**Commento**

Abbiamo ricevuto cinque risposte provenienti da cinque scuole di cui due medie inferiori.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- SM "G. Zanella", Porcia, Roveredo in Piano (PN)
- SM "L. Da Vinci", Rufina (FI)
- LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
- LS "G. Ulivi", Parma (PR)
- LS "G. Galilei", Cagliari (CA)

Nel problema proposto si trattava di dimostrare prima una proprietà invariante della figura assegnata e di individuare poi il luogo descritto dall'estremo di un segmento, ottenuto prolungando una corda di circonferenza, al variare dell'altro estremo sulla circonferenza. In tutte le risposte pervenute sono state svolte le due parti del problema, ma non sempre in modo corretto e completo, soprattutto nella seconda parte. Una risposta non è stata accettata in quanto presentava un errore nel metodo della dimostrazione nella prima parte e una errata interpretazione del luogo. Si rendono necessarie alcune osservazioni:

- Quando si individua un luogo geometrico occorre completare la dimostrazione facendo vedere che se un punto appartiene al luogo descritto allora soddisfa le proprietà poste dal problema.
- Nella situazione limite in cui il punto  $C$  che varia sulla circonferenza va a coincidere con l'estremo  $A$  del diametro, è opportuno chiedersi se il punto  $D$  (che descrive il luogo) fa o no parte del luogo stesso. Questo caso può essere interpretato in due modi: 1. la corda  $AC$  è nulla e il punto  $D$  non esiste in quanto non ha senso prolungare una corda nulla; 2. poiché la corda  $AC$  appartiene ad una retta che si sovrappone alla retta tangente in  $A$  alla circonferenza, il suo prolungamento  $CD$  si porta sulla tangente e in questo caso il punto  $D$  fa parte del luogo.

Fra le soluzioni accolte abbiamo scelto di presentarne una della scuola superiore (LS "G. Galilei" di Bitonto) e una di scuola media inferiore (SM di Roveredo in Piano): anche se incomplete nella seconda parte, esse sono esaurienti nella prima e corrette nella esposizione.

**NOTA:** Le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

## Soluzioni

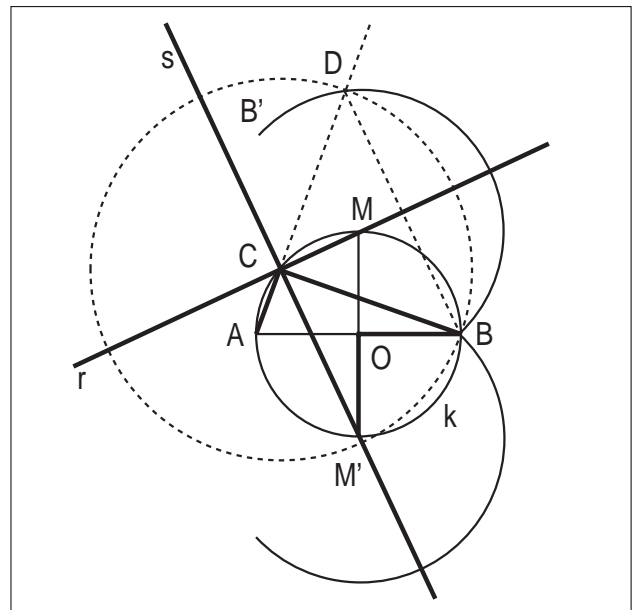
Classe 3A

Scuola Media "G. Zanella"

Roveredo in Piano (PN)

Descrizione figura:

Semiretta AC con C sulla circonferenza k di centro O, circonferenza di centro C per B e sua intersezione con la semiretta AC: D; asse r del segmento BD



a)

1. Tracciando il segmento CB si ottiene l'angolo retto ACB (C sta sulla circonferenza e i lati passano per gli estremi del diametro);

2. L'asse r del segmento BD è bisettrice dell'angolo retto DCB (retto, perché adiacente dell'angolo ACB retto);

3. Tracciamo la bisettrice s dell'angolo retto ACB; le rette r ed s risultano tra loro perpendicolari perché bisettrici di angoli adiacenti;

4. Sappiamo che se un angolo alla circonferenza è retto le intersezioni dei lati con la circonferenza individuano un diametro, quindi M ed M' (intersezioni di r ed s con k) determinano un diametro di k, che risulta perpendicolare ad AB (all'angolo alla circonferenza M'CB di 45° corrisponde un angolo al centro M'OB di 90°).

Quindi ogni punto estremo dei due diametri è punto medio della semicirconferenza, su cui sta, individuata dall'altro diametro.

b)

[Il luogo è descritto, ma non pienamente giustificato]

Luogo: la semicirconferenza (alla destra della perpendicolare al diametro AB, passante per A) di centro M e diametro BB' (B' è il simmetrico di B rispetto ad M) e la sua simmetrica rispetto al diametro AB.

Il segmento BD è una corda della circonferenza di centro M e si fa diametro quando contiene il centro. L'asse r, durante il movimento di C sull'arco BMA da B ad A, compie una rotazione di 90° di centro M, ed essendo bisettrice dell'angolo BCD, provoca una rotazione doppia [cioè di 180°] di D e lo porta da B a B'.

Se C si muove nell'arco AM'B da A verso B il punto D completa il luogo e le considerazioni sono analoghe alle precedenti.

Classe 2E

Liceo Scientifico "G. Galilei"

Bitonto (BA)

a)

Disegnata la circonferenza k di diametro AB, tracciata la corda AC, con C più vicino ad A che a B (vedi fig.1) e prolungata di un segmento CD=CB si fanno le seguenti considerazioni:

1) Il triangolo ACB è rettangolo in C essendo inscritto in una semicirconferenza.

2) Il triangolo DCB per costruzione è rettangolo in C e isoscele, per cui l'angolo CBD misura 45°.

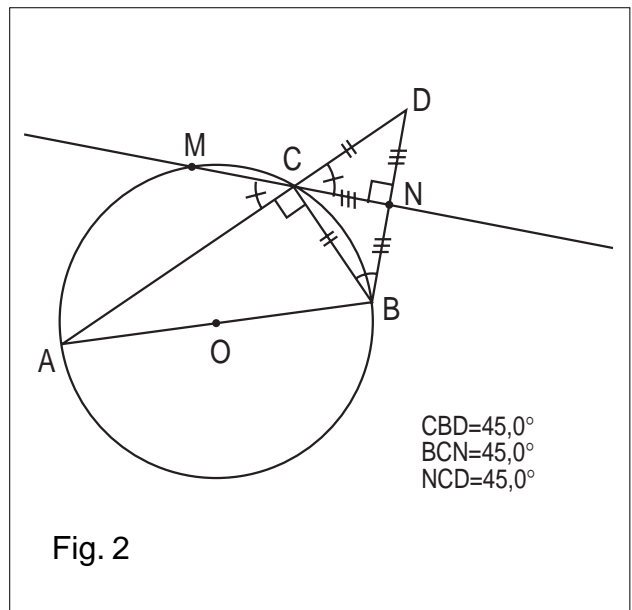
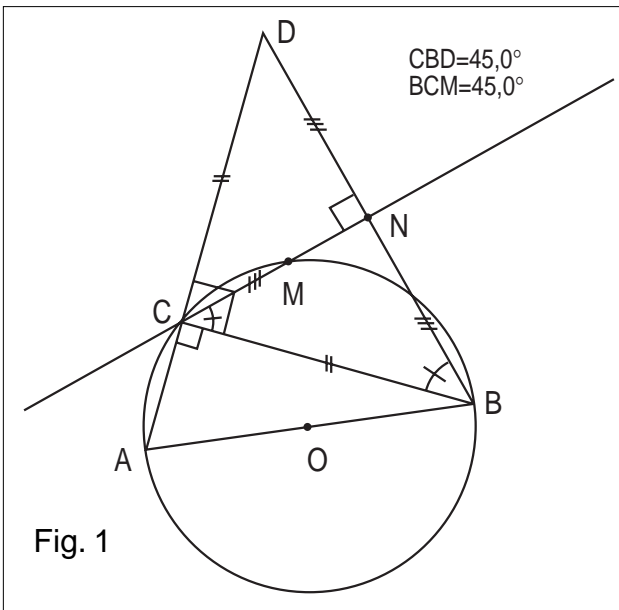
3) r, asse di DB, passa da C, divide l'angolo DCB in parti congruenti essendo anche bisettrice nel triangolo isoscele CBD.

4) se M è l'ulteriore punto di intersezione di r con la circonferenza k, si ha che BCM=BCN=45° ed in quanto angolo alla circonferenza insiste sull'arco BM=1/4 di k (un arco che è visto da un punto della circonferenza sotto un angolo di 45° è sempre un quarto della circonferenza).

5) ne consegue che M è punto medio della semicirconferenza ACM.

Nel caso in cui C è proprio il punto medio dell'arco AB, la tesi è ovvia conseguenza del punto 3). In questo caso particolare si può osservare che r risulta tangente in C a k in quanto l'angolo OCN diventa retto, conseguenza del fatto che OBNC è un quadrato. Se C è più vicino a B (vedi fig 2), l'osservazione 4) va così modificata:

4 bis) l'angolo alla circonferenza ACM=45° perché opposto al vertice di BCN=45° e quindi l'arco AM=1/4 di k. Analoghi discorsi se C appartiene all'altra semicirconferenza di diametro AB.



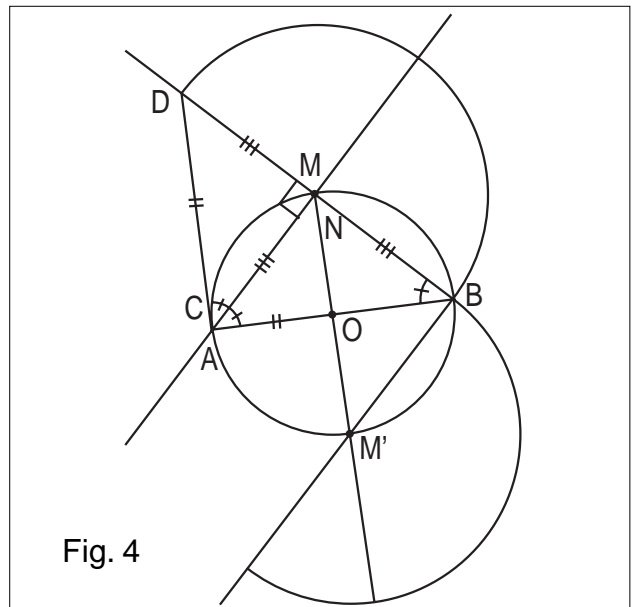
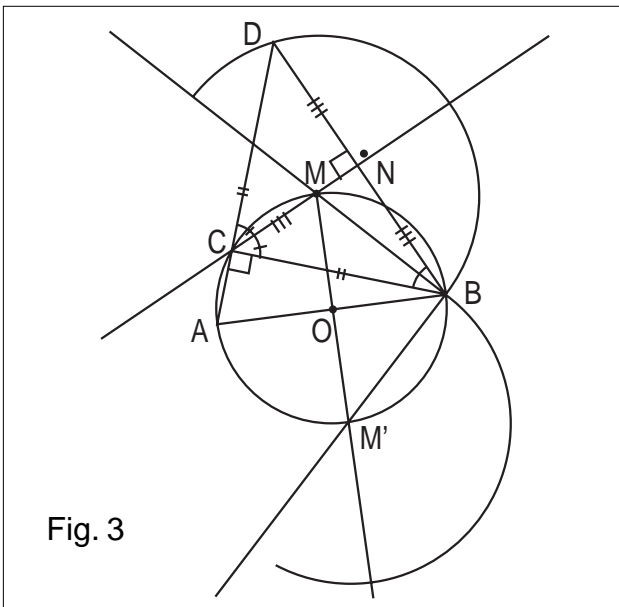
b)

Poiché M appartiene all'asse di BD per dimostrazione precedente ne consegue che  $MD=MB$  con  $MB=MA$  essendo queste ultime corde che insistono su archi congruenti, quindi  $MA=MB=MD$ .

Questo vale qualunque sia la posizione di C su k.

Il luogo descritto da D sono la semicirconferenza di centro M e raggio MB e la semicirconferenza di centro M' e raggio M'B, dove M' è il punto medio dell'altra semicirconferenza (fig. 3). [ . . . ]

[In fig. 4 il caso C=A]



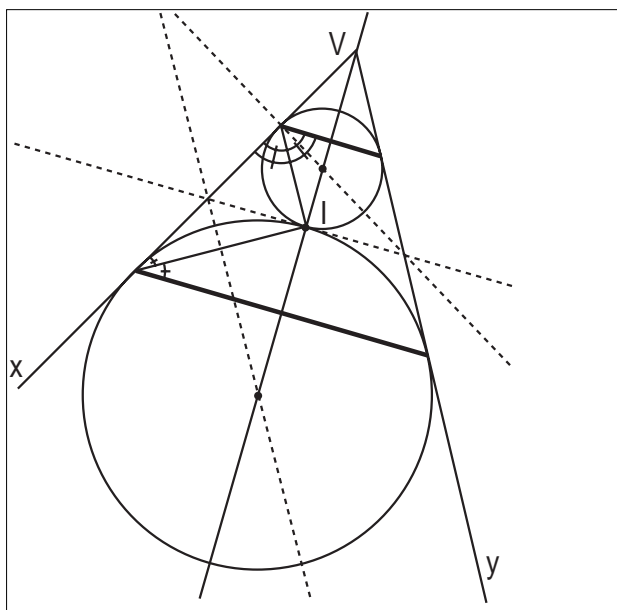
**8 - 22 Gennaio 2001**

a) E' dato un angolo  $XVY$ , di vertice  $V$ , minore di un angolo piatto.

Considerato un punto  $I$  sulla sua bisettrice,  $I$  distinto da  $V$ , costruire le circonferenze passanti per  $I$  e tangenti ai lati dell'angolo.

b) Che cosa rappresenta il punto  $I$  per i triangoli di vertice  $V$  formati dalle corde che congiungono i punti di contatto?

*Giustificare le costruzioni e motivare le risposte.*

**Commento**

Abbiamo ricevuto sei risposte, tre da ragazzi delle scuole superiori e tre dalle scuole medie.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SM "Dalla Chiesa", San Genesio (PV)

SM "L. da Vinci", Rufina (FI)

SM "G. Zanella", Porcia, Roveredo in Piano (PN)

ITG "C. Rondani", Parma (PR)

IPSSAR "P. Artusi", Forlimpopoli (FC)

LS "G. Galilei", Bitonto (BA)

Nel problema proposto si chiedeva la costruzione delle circonferenze tangenti ai lati di un angolo in un caso particolare, cioè passanti per un punto sulla bisettrice, e si chiedeva inoltre quale fosse il ruolo di quel punto rispetto a due particolari triangoli.

In una risposta non è stato interpretato correttamente il testo della prima parte. L'errore ha però avuto conseguenze interessanti, perché ha portato i ragazzi, con la guida dell'insegnante, alla scoperta, tramite il software Cabri, di due parabole luogo dei centri delle circonferenze passanti per il punto assegnato e tangenti ad un solo lato dell'angolo.

Nelle risposte accolte abbiamo individuato due modi per ottenere la costruzione richiesta.

C'è chi ha fatto ricorso alla proprietà delle bisettrici, chi ha utilizzato la proprietà dei segmenti di tangenza ad una circonferenza condotti da uno stesso punto e chi ha fatto un miscuglio fra i due procedimenti. Non sempre il metodo usato viene giustificato in modo esauriente.

Non tutti hanno interpretato secondo le aspettative la seconda parte. C'è chi ha trovato che il punto assegnato è equidistante dalle basi dei due triangoli senza però motivare la risposta.

Pubblichiamo la prima parte della risposta inviata dalla Scuola Media di S. Genesio, simile a quella dell'IPSSAR "Artusi" e la soluzione completa proposta dalla classe 2E del L.S. "G. Galilei" di Bitonto (BA).

**NOTA:** Le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

## Soluzioni

Classe 3P

Scuola Media "Dalla Chiesa"

S. Genesio (PV)

Se la circonferenza deve passare per I ed essere tangente ai lati dell'angolo, la immaginiamo inscritta in un triangolo avente per base la perpendicolare alla bisettrice e passante per I.

Costruiamo l'angolo  $XVY$ , poi la bisettrice dell'angolo, e prendiamo un punto I su quest'ultima; tracciamo la retta perpendicolare alla bisettrice passante per I.

Per trovare l'incentro del triangolo troviamo le intersezioni tra tale perpendicolare e i lati dell'angolo, chiamandole M ed N. Costruiamo la bisettrice dell'angolo VMN e troviamo l'intersezione tra le bisettrici [punto O].

Questo punto è il centro di una circonferenza tangente ai lati dell'angolo [di raggio OI].

La seconda circonferenza sarà inscritta in un quadrilatero avente come tre lati, i lati dell'angolo e il segmento MN. Perché un quadrilatero sia circoscrittibile ad una circonferenza le bisettrici degli angoli [interni] devono passare per uno stesso punto.

Tracciamo la bisettrice dell'angolo MNX.

Facciamo l'intersezione tra le due bisettrici e chiamiamo il punto ottenuto K.

Tracciamo la circonferenza che è tangente ai lati dell'angolo il cui centro è il punto K [di raggio KI].

Classe 2E

Liceo Scientifico "G. Galilei"

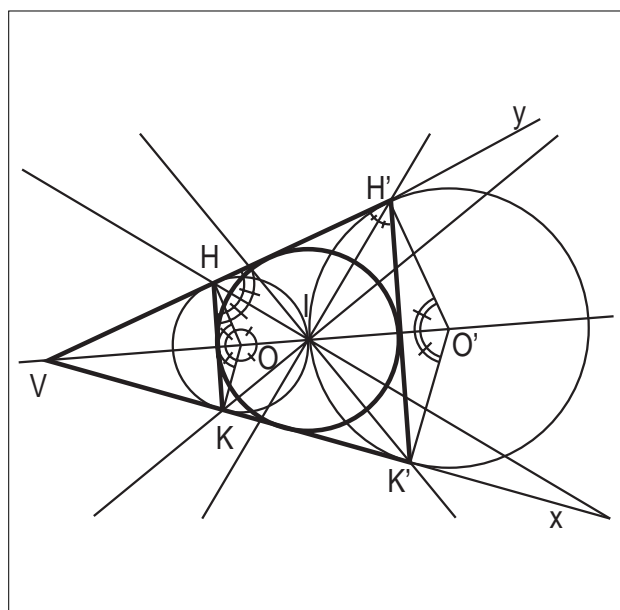
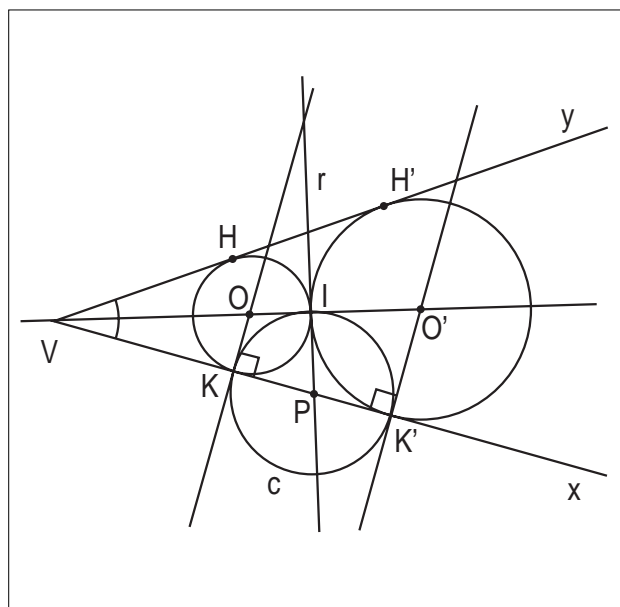
Bitonto (BA)

a) È dato un angolo  $XVY$  e un punto I appartenente alla sua bisettrice. Si conduce la retta  $r$  perpendicolare alla bisettrice e passante per I.

Si costruisce la circonferenza  $C$  di centro  $P$ , punto di intersezione tra  $r$  e il lato  $VX$  dell'angolo, e raggio il segmento  $PI$ . Siano  $K$  e  $K'$  i punti intersezione fra  $C$  e  $VX$  e conduciamo per essi le rette perpendicolari a  $VX$ . Siano  $O$  e  $O'$  i punti di intersezione tra dette perpendicolari e la bisettrice. Le circonferenze di centro  $O$  e raggio  $OK$ , di centro  $O'$  e raggio  $O'K'$ , sono le circonferenze richieste, poiché per costruzione passano per I e sono tangenti ai lati dell'angolo dato.

Infatti  $OI=OK$  e  $O'I=O'K'$  perché segmenti di tangenza condotti da punti esterni a  $C$  ed inoltre essendo la bisettrice asse di simmetria per l'angolo, lo è anche per le circonferenze costruite e questo garantisce la tangenza al lato  $VY$  nei punti  $H$  e  $H'$  simmetrici di  $K$  e  $K'$  rispetto alla bisettrice.

b) Si traccino le corde  $HK$  e  $H'K'$ . Il punto I risulta essere l'ex-incipro del triangolo  $VKH$ , rispetto al lato  $HK$ , perché punto di incontro della bisettrice dell'angolo in  $V$  e di quella dell'angolo esterno  $KHY$ : infatti gli angoli  $IHY$  e  $IHK$  risultano congruenti perché angoli alla circonferenza a cui corrispondono angoli al centro congruenti ( $HOI=IOK$  perché supplementari di angoli congruenti per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno). Per il triangolo  $VK'H'$ , I risulta essere l'incipro, perché punto di incontro delle bisettrici dei suoi angoli interni,  $H'VK'$  e  $VH'K'$ : infatti  $VH'I=IH'K'$  perché corrispondono angoli al centro congruenti ( $H'O'I=IO'K'$ ) per il teorema citato precedentemente.



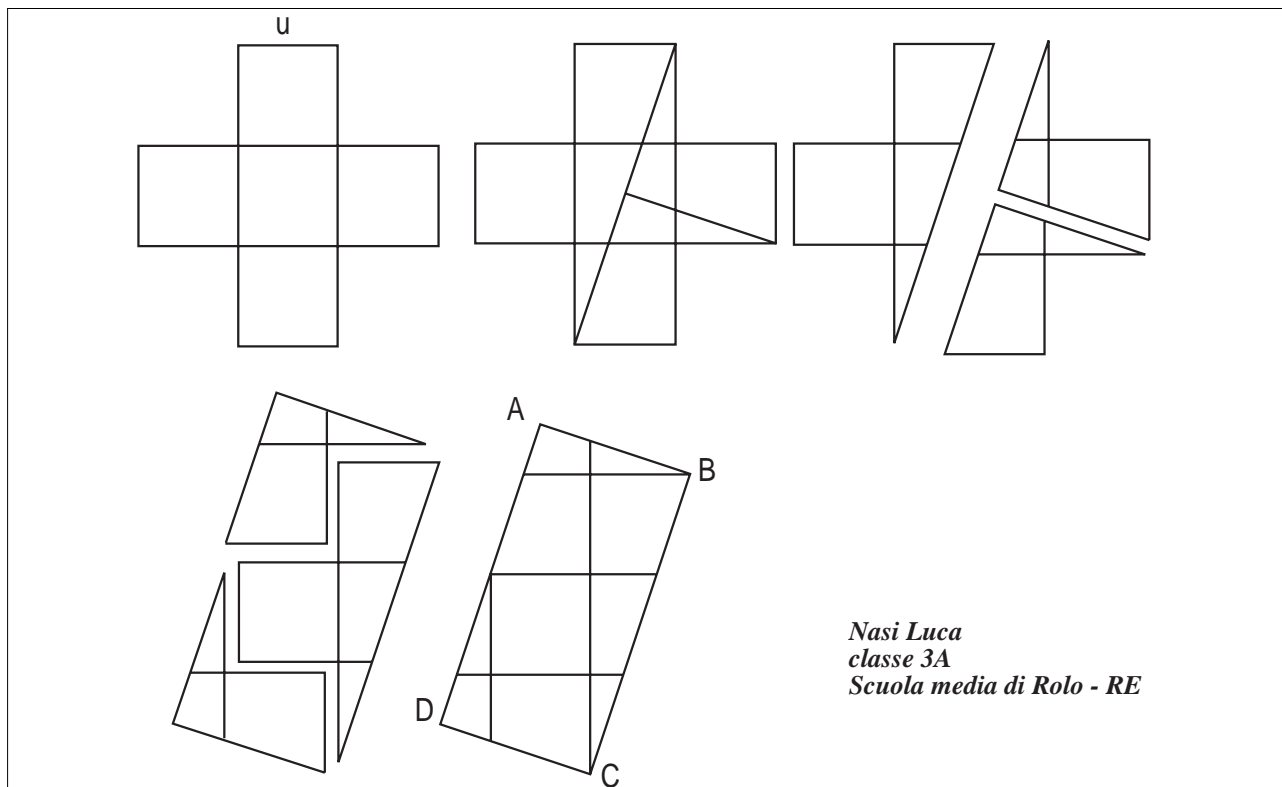
**5 - 19 Febbraio 2001**

(quasi un gioco) Disegnate un quadrato di lato 1 (uno) rispetto ad una unità di misura  $u$  e, su ciascun lato, esternamente, disegnate ancora un quadrato di lato  $1u$ . Si ottiene una croce formata da cinque quadrati che dovrete ritagliare lungo il suo perimetro.

Avete ora a disposizione due tagli da effettuare sulla croce (passando per il centro della figura iniziale): col primo si divide la figura in due parti, col secondo una sola di queste viene divisa ancora in due parti.

I tre pezzi così ottenuti dovranno essere tali che, ricomposti come in un puzzle, formino un rettangolo, equivalente alla croce, con una dimensione doppia dell'altra.

Giustificare la costruzione del rettangolo e calcolare la lunghezza dei suoi lati rispetto alla unità  $u$ .

**Commento**

Il problema di Febbraio era stimolante ma insidioso, come dice giustamente Daniele Urzi, un ragazzo appassionato di questioni geometriche, che ci invia le sue soluzioni anche se “fuori gara” per superati limiti di età. Commenta così la sua soluzione:

*...Il problema era effettivamente “quasi un gioco”. Ma appunto, “quasi”, perché, una volta trovata la soluzione, che da un punto di vista intuitivo è semplice, viene il compito gravoso di giustificarla. Essendoci nella figura tante proprietà “evidenti” bisogna fare bene attenzione, perché il rischio, in questi casi, è di fare delle affermazioni senza però le dovute giustificazioni...*

Oltre a quella prima citata, abbiamo ricevuto diciassette risposte di cui cinque provengono da scuole medie inferiori.

Il problema proponeva di tagliare una croce formata da cinque quadrati per trasformarla in un rettangolo equivalente e formato da due quadrati. In una sola risposta non è stato individuato il taglio corretto: probabilmente il solutore non ha controllato con carta e forbici la sua congettura o non ha interpretato correttamente la richiesta. In tutte le altre risposte sono state individuate correttamente, in modo intuitivo o in seguito al calcolo algebrico, le linee secondo cui tagliare la figura, ma, nella maggior parte di esse, la costruzione del rettangolo richiesto è stata basata sulla evidenza e scarsamente o incompletamente giustificata. Questo può essere accettato, come più volte detto, per le scuole medie inferiori, ma non per i ragazzi delle superiori ai quali si chiede di avvalorare le loro intuizioni in modo consapevole. Siamo dispiaciuti per i ragazzi che si sono cimentati nel problema e che non troveranno pubblicati i loro lavori. Come alle Olimpiadi, l'importante è partecipare.

Vediamo brevemente le fasi della dimostrazione:



- Le diagonali secondo cui eseguire i tagli devono essere congruenti, perpendicolari e dividersi in due parti congruenti. La dimostrazione più interessante di questo punto è stata effettuata in una delle due risposte dell'istituto "Michelangelo".
- Le diagonali suddette dividono la croce in quattro poligoni congruenti. Questo fatto è stato parzialmente evidenziato, ma non giustificato, nelle risposte dell'ITG "Rondani" e del LS "Galilei" di Adria.
- Una volta ricomposta la figura (sovrapponendo, traslando o ruotando) si deve verificare che si ottiene un quadrilatero dimostrando che le due semidiagonali che si ricongiungono si dispongono su una stessa retta. Questo si intuisce implicitamente nella risposta del LS "Galilei" di Bitonto e viene superato, inconsapevolmente, sia nella seconda parte della risposta della Scuola Media di Rufina, sia in quella dell'ITG "Rondani".

Il problema dell'allineamento, se non è esplicitamente posto, spesso sfugge ai ragazzi quindi, come già detto nello scorso anno, ci sembra utile proporlo almeno in uno dei problemi dell'anno. Dobbiamo inoltre far notare che chi ricorre ai movimenti nel piano è tenuto a precisare il verso (oltre il centro e l'angolo) nelle rotazioni e, nelle traslazioni, secondo quale vettore.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SM "Dalla Chiesa", San Genesio (PV)  
 Scuola Media di Rolo (RE)  
 SM "Graziosi", Savignano s.P. (MO)  
 SM "L. da Vinci", Rufina (FI)  
 SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)  
 LG di Oderzo, ISS Motta di Livenza (TV)  
 LS "B. Russell", Roma (RM)  
 LS "G. Galilei", Bitonto (BA)  
 LS "G. Galilei", Adria (RO)  
 LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)  
 ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)  
 LS "F. D'Assisi", Roma (RM)  
 ITI "Fermi", Mantova (MN)  
 ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)  
 LS "Michelangelo", Forte dei Marmi (LU)  
 ITG "C. Rondani", Parma (PR)

Abbiamo stabilito di riportare Le seguenti risposte.

Per le scuole medie inferiori:

- le figure della scuola di Rolo a corredo del testo del problema.
- la figura con animazione della scuola di Roveredo, seguita dalla risposta di S. Genesio
- la conclusione, con figura, della costruzione della scuola di Rufina.

Per le scuole superiori:

- la risposta del LS "G. Galilei" di Bitonto
- la prima parte della risposta del LS "Michelangelo"
- la parte conclusiva della costruzione inviata dall'ITG "Rondani", essendo la prima parte incompleta sia nelle descrizioni sia nelle giustificazioni.

**NOTA:** Le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

## Soluzioni

*classe 3A*

*Scuola Media "Zanella", Roveredo in Piano (PN)*

Nel sito di FLATlandia (<http://kidslinc.scuole.bo.it/cabri/flatlandia>) è visibile l'immagine animata, inviata dai ragazzi della Scuola media Zanella, alla quale è stata applicata l'animazione Cabrijava.

*Classe 3P*

*Scuola media "Dalla Chiesa"*

*S. Genesio (PV)*

Siamo la classe 3°P della scuola media di S.Genesio (Pavia), e vi inviamo la nostra risoluzione al problema, pubblicato

su FLATlandia, del mese di febbraio.

Discutendo in classe abbiamo capito che la misura dei lati del rettangolo non poteva essere un numero intero perchè  $1 \cdot 2 = 2$  unità quadrate oppure  $2 \cdot 4 = 8$  u.q. e quindi abbiamo cercato altri segmenti.

Il primo tentativo è stato quello di tracciare la [una] diagonale del rettangolo formato da 3 quadrati e con Pitagora [applicando il teorema di ...] abbiamo calcolato la sua misura.

Abbiamo trovato radice quadrata di 10, allora l'altra dimensione doveva essere la metà: radice quadrata di 10 diviso 2 e il prodotto viene 5 unità quadrate. Così abbiamo capito che eravamo sulla strada giusta e il primo taglio l'abbiamo fatto lungo la diagonale e il secondo con qualche tentativo abbiamo cercato un segmento lungo come metà diagonale [e perpendicolare alla precedente].

A questo punto abbiamo unito i tre pezzi così ottenuti e abbiamo trovato il rettangolo equiesteso alla figura di partenza. [...]

**Classe 3C**

**Scuola Media "L. da Vinci"**

**Rufina (FI)**

*Il gruppo di alunne (Pazzi M. e Aimavilli I. in primo luogo) hanno messo mano alla prima parte dell'attività, nella quale c'è stato effettivamente anche il ritaglio e la manipolazione della figura. Successivamente con Cabri alcuni altri, Bavecchi, Santoni e Capecchi, hanno reso un "doppione" di quel che era stato fatto con la carta. [tratto dal commento dell'insegnante]*

[...]

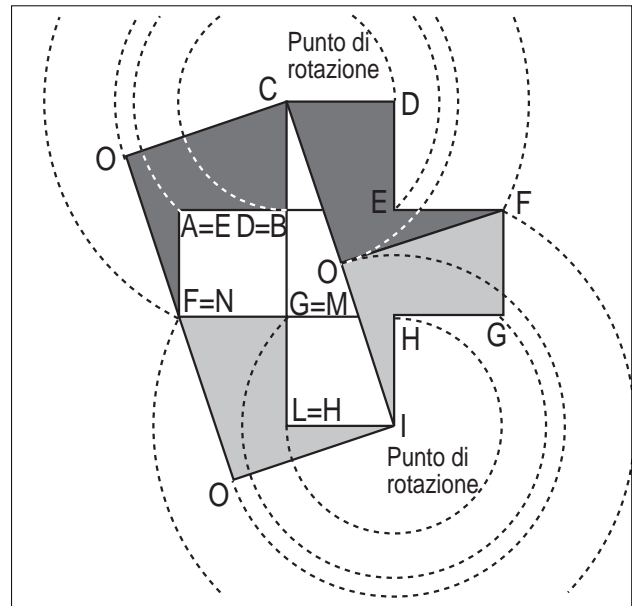
**Alunno Bavecchi Massimiliano**

**Costruzione del rettangolo:**

Facendo ruotare di  $90^\circ$  la figura COFED, intorno al punto F in senso orario, si formerà un quadrato OFCI di lato congruente a metà diagonale ( $OI = OF$ ).

Quindi facendo ruotare le 2 figure COFED e OIHGF, che compongono tale quadrato rispettivamente di  $270^\circ$  [rispettivamente] intorno al punto C, in senso antiorario e intorno al punto I, in senso orario, si andranno a formare due quadrati di lato CO e OI, ciascuno congruente al quadrato OFCI. Uniti formeranno un rettangolo di base CI, diagonale del rettangolo CDIL e di altezza ON congruente a OF ossia metà diagonale del rettangolo CDIL.

Così si è formato un rettangolo di base doppia dell'altezza.



**Classe 2E**

**LS "G. Galilei"**

**Bitonto (BA)**

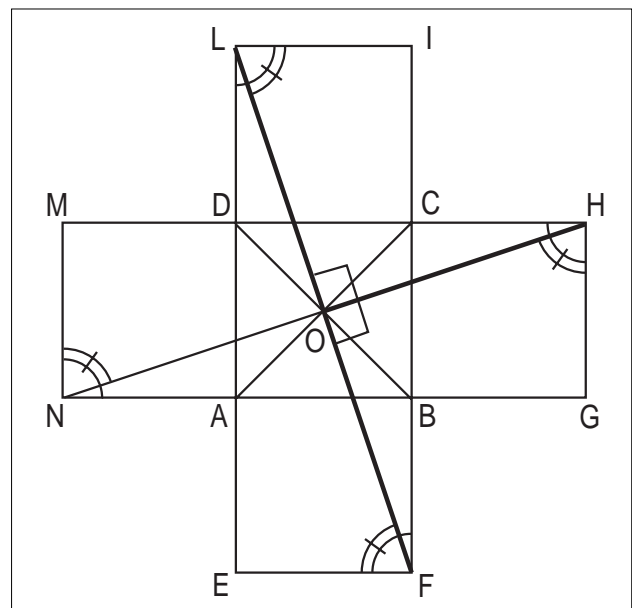
Per ottenere dalla croce di area  $5u^2$ , con due tagli che passino dal centro O del quadrato ABCD di partenza, tre parti tali che, come un puzzle, formino un rettangolo equiesteso e avente una dimensione doppia dell'altra abbiamo fatto il seguente ragionamento:

1) Imponendo che l'altezza del rettangolo misuri x, la base 2x e l'area 5, abbiamo l'equazione:  $2x^2 = 5$ , da cui  $x = (\sqrt{10})/2$ .

Pertanto i lati del rettangolo da ottenere sono  $\sqrt{10}$  e  $(\sqrt{10})/2$ .

2) Il triangolo LEF, rettangolo per ipotesi in E, ha  $LE = 3u$ ,  $EF = 1u$  e quindi  $LF = \sqrt{10}$ , applicando il teorema di Pitagora.

Dunque il primo taglio da effettuare sarà lungo il segmento LF che costituirà la base del rettangolo.

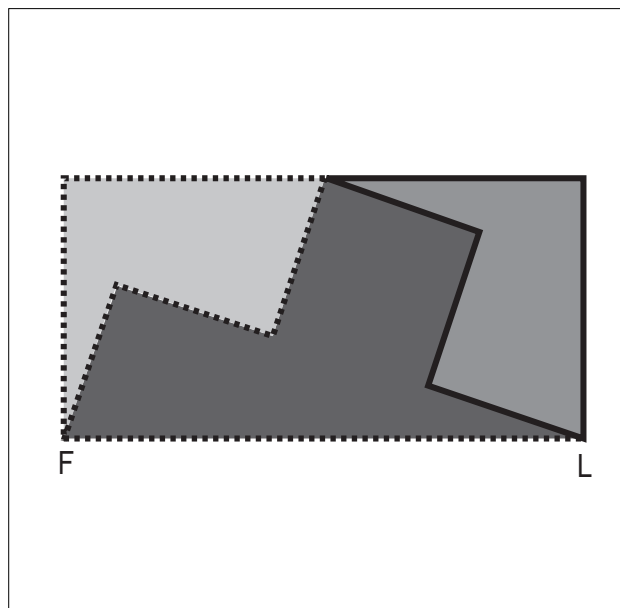


3) Gli assi mediani del quadrato di partenza ABCD (retta per O parallela ad AD e retta per O parallela ad AB) sono per costruzione anche assi di simmetria della croce e dei rettangoli EFIL e NGH M, pertanto O è anche centro di simmetria di queste figure (ogni figura dotata di due assi di simmetria perpendicolari è dotata di centro di simmetria, punto di incontro dei due assi). Pertanto le diagonali LF e NH sono congruenti (diagonali di rettangoli congruenti) e si tagliano scambievolmente a metà in O.

4) Gli angoli in cui tali diagonali dividono gli angoli retti in H,L,N,F sono a due a due congruenti, perché alterni interni di rette parallele per costruzione, e complementari.

5) Le diagonali LF e NH sono inoltre perpendicolari in O, poiché nel triangolo OTF, dove T è il punto intersezione di OH con CB, i due angoli acuti OTF e OFT sono complementari (OTF=OHG [perché] corrispondenti di [rispetto ai segmenti] HG e CB paralleli, tagliati da NH)

6) Operati i tagli e ricomposti secondo la figura 2, ci rendiamo conto che [NON BASTA! Occorre giustificare che] i due pezzi verde e fucsia completano perfettamente il poligono azzurro dando luogo al rettangolo richiesto, grazie alle ampiezze degli angoli sopra considerati [PERCHE' ...].



*Alessandro Navari*

*Classe 2C PNI - LS "Michelangelo"*

*Forte dei Marmi (LU)*

Dopo la costruzione del quadrato dato il lato, e dei quadrati su ogni dei lati del quadrato di partenza ho proceduto al taglio della croce. Con il primo taglio dovevamo dividere in due parti uguali la figura e la ho tagliata seguendo la diagonale NF. Con il secondo taglio ho diviso in due parti uguali una delle due figure risultanti dal primo taglio. Per giustificare la costruzione finale del rettangolo e dire che un lato è doppio dell'altro ho effettuato la seguente dimostrazione.

Per prima cosa ho dimostrato che tutte le diagonali dei rettangoli NMEF e ADIH sono uguali per i seguenti motivi: se consideriamo i triangoli NMF, NEF, DIH, AHI sono tutti uguali per il primo criterio poiché hanno i cateti minori uguali che sono i lati dei quadrati, i cateti maggiori uguali per somma di segmenti uguali (lati dei quadrati), e l'angolo retto compreso fra essi [questa dimostrazione è superflua]. Dopo questo ho tracciato i segmenti DF, FI, IN, ND e dimostrato che sono uguali e che sono i lati del quadrato che ha come diagonali DI, FN.

Se considero i triangoli DGF, FLI, IBN, DCN dico che sono uguali per il primo criterio perché hanno come cateti minori i lati dei quadrati, come cateti maggiori la somma di [due] segmenti uguali (lati dei quadrati) e l'angolo retto compreso tra loro, quindi i lati tracciati prima sono uguali.

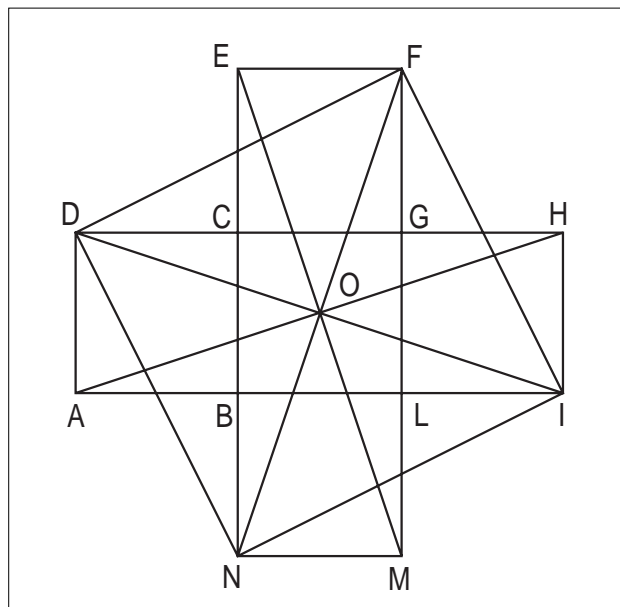
Per dimostrare che questi lati formano un quadrato sfrutto gli angoli dei triangoli precedenti.

Per un noto teorema sappiamo che a cateto minore corrisponde angolo minore e viceversa a cateto maggiore corrisponde angolo maggiore. La somma degli angoli interni dei triangoli è  $180^\circ$ .

Gli angoli dei nostri triangoli li chiamiamo X, Y, Z. Z è l'angolo opposto all'ipotenusa ( $90^\circ$ ), X l'angolo opposto al cateto maggiore e Y è l'angolo opposto al cateto minore.

Tutti i triangoli sono rettangoli ed essendo Z retto, allora  $X+Y=90^\circ$ .

Essendo l'angolo DFI formato dall'angolo X e dall'angolo Y, è di [misura]  $90^\circ$  come [e nello stesso modo si dimostra che] sono retti tutti gli angoli della figura [DFIN].



Adesso ho dimostrato che è un quadrato e so che le diagonali del quadrato sono bisettrici e che si dimezzano scambievolmente [e sono fra loro perpendicolari].

[...]

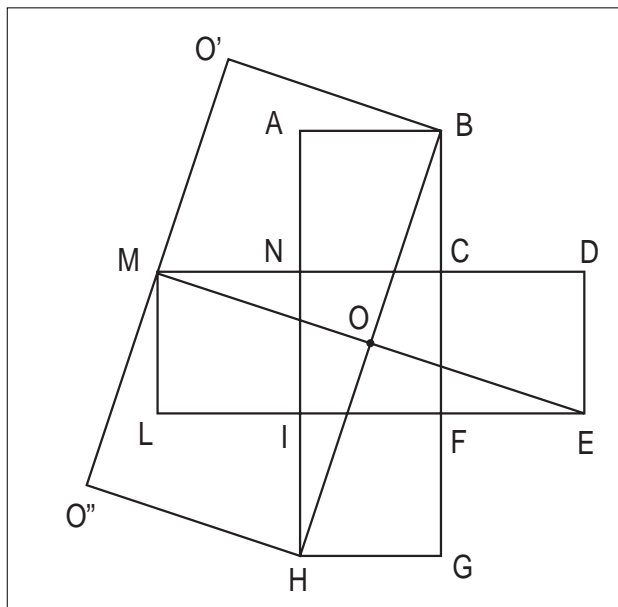
**Rizzardi Pier Alessio**

**Classe 2I**

**ITG "Rondani" (PR)**

[...]

Il lato OE è uguale al lato OH perché metà di lati uguali. Quindi la figura OHGFE incastrandosi con la figura OMLIH, congruente alla prima per dimostrazione precedente, darà origine a un quadrato MOHO". Facendo lo stesso con la figura OEDCB si nota la comparsa di un rettangolo che ha le dimensioni una doppia dell'altra, essendo BOMO" congruente a OHO"M



**5 - 19 Marzo 2001**

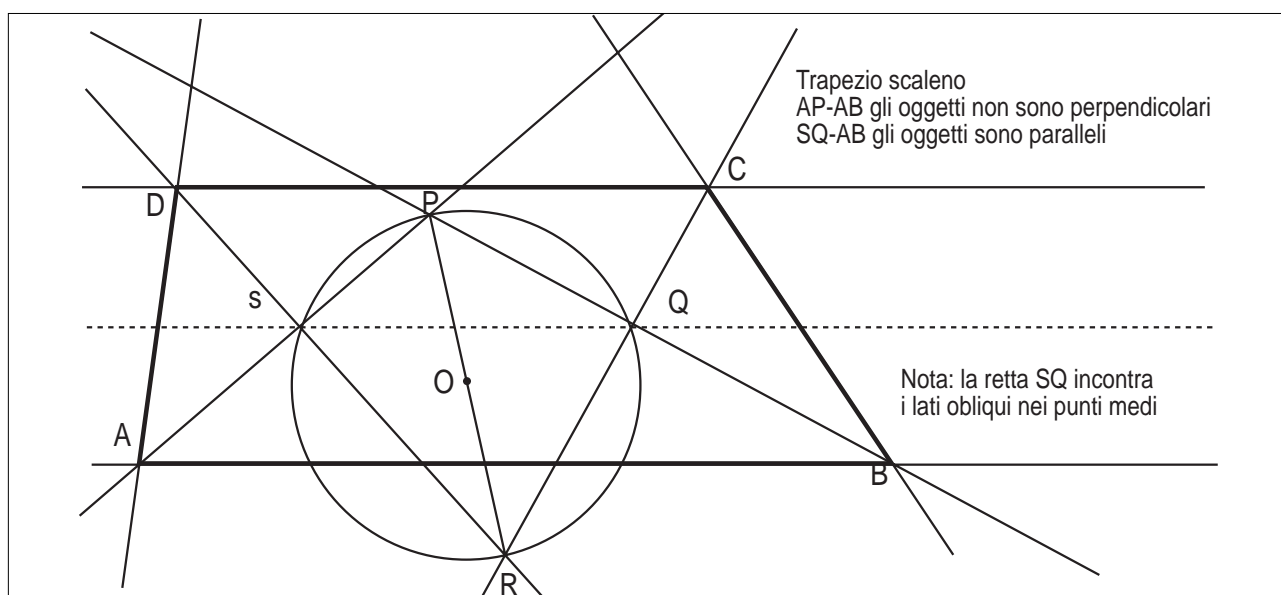
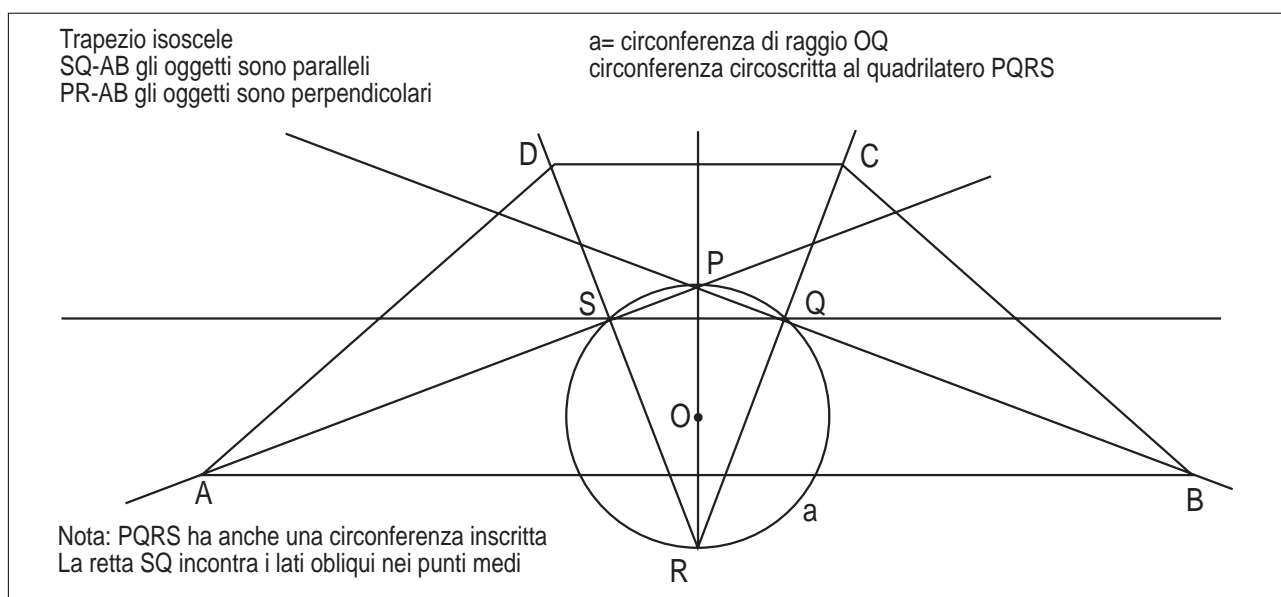
E' dato un trapezio isoscele ABCD, con base maggiore AB. Siano a, b, c, d le bisettrici degli angoli interni del trapezio, rispettivamente di vertice A, B, C, D. Indichiamo con P, Q, R, S i punti di intersezione, supposti distinti, rispettivamente di a con b, b con c, c con d, d con a.

1) Quali proprietà ha il quadrilatero PQRS? E' inscrittibile? E' circoscrittibile? Come sono le sue diagonali rispetto alle basi del trapezio?

2) Se il trapezio ABCD non è isoscele, indicate alcune caratteristiche, fra quelle del precedente punto 1), che ancora si conservano.

*Motivare le risposte.*

*Figure realizzate dalle Classi quinte, Scuola elementare "G. Galilei" di Alessandria:*

**Commento**

Abbiamo ricevuto undici risposte provenienti da dieci scuole, tre delle quali sono Scuole medie inferiori, e una risposta senza indicazioni sulla classe e sul tipo di scuola. Ci sono pervenute inoltre le figure inviate da una quinta classe della Scuola elementare "Galilei" di Alessandria, che avevamo già avuto il piacere di annoverare fra le scuole partecipanti alla attività. Utilizzeremo queste figure a corredo di questo commento.

Il problema di Marzo richiedeva di individuare e giustificare le varie proprietà di un quadrilatero formato dalle bisettrici degli angoli interni di un trapezio isoscele; di analizzare poi, passando al caso generale del trapezio scaleno, quali erano invarianti.

La proprietà più notevole da dimostrare, che nel testo del problema non abbiamo volutamente richiesto in modo esplicito, è che una delle diagonali del quadrilatero appartiene ad una retta parallela alle basi e passante per i punti medi dei lati obliqui, qualunque sia il trapezio.

Nelle risposte che abbiamo ricevuto il problema è stato affrontato in due modi.

Chi nella prima parte ha fatto ricorso alla simmetria (scuole medie e liceo di Bitonto), non ha avuto difficoltà a dimostrare il parallelismo ma non ha rilevato la proprietà dei punti medi.

Chi invece ha utilizzato nella dimostrazione delle varie proprietà la congruenza dei triangoli, non sempre è riuscito a dimostrare in modo corretto il parallelismo; qualcuno ha individuato il passaggio per i punti medi, ma solo in due risposte è stato giustificato.

Ci sembra utile soffermarci su questi ultimi fatti, con alcune considerazioni

.Nella prima parte, è semplice dimostrare il parallelismo considerando, per esempio, una opportuna coppia di triangoli isosceli con l'angolo al vertice in comune e, solo dopo, si può invocare il teorema di Talete per giustificare il passaggio della parallela alle basi per i punti medi dei lati obliqui.

Nella seconda parte la situazione è più delicata. Si può procedere nel seguente modo (valido anche per la prima parte): si costruisce prima una retta parallela alle basi passante per S (un estremo della diagonale del quadrilatero), quindi si ricorre al teorema di Talete e alla unicità del quarto proporzionale per affermare che tale parallela passa per Q (l'altro estremo).

Ricordiamo inoltre che, in generale, **NON ESISTE il TEOREMA INVERSO di Talete.**

Solo nel caso del triangolo c'è un teorema che afferma che se una retta divide due lati in parti proporzionali, allora è parallela al terzo lato (e si dimostra come abbiamo indicato sopra).

Si veda in proposito la soluzione del LS "Amaldi" di cui riporteremo la prima parte corredata da una nostra nota.

In qualche risposta è stato analizzato anche il caso del trapezio rettangolo, ma questo rientra in quello generale del trapezio scaleno. In una sola risposta, quella della SM di Rufina, è stata considerata la situazione particolare in cui il quadrilatero degenera; riportiamo le testuali parole: "Se le bisettrici a e d si incontrano sull'asse r [asse di simmetria del trapezio isoscele] il poligono PQRS si riduce ad un punto [centro della circonferenza inscritta nel trapezio]"

Fra le risposte pervenute tre non sono accettabili perché, pur provenendo da scuole superiori, in esse ci si limita ad osservare le proprietà delle figure costruite senza fornire giustificazioni.

Una sola risposta è completa, quella inviata dal LS "F. d'Assisi", che non riporteremo integralmente perché presenta inutili ripetizioni.

Le rimanenti, come già detto, o sono corrette, ma incomplete, oppure contengono errori nelle giustificazioni. Presenteremo di alcune le parti più apprezzabili.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- Scuola Elementare "G. Galilei", Alessandria (AL)
- SM "G.Zanella", Roveredo in Piano (PN)
- SM "L. da Vinci", Rufina (FI)
- SM "Dalla Chiesa", S. Genesio (PV)
- LS "Michelangelo", Forte dei Marmi (LU)
- LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
- LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
- LS "F. D'Assisi", Roma (RM)
- LS "G. Ferraris", Torino (TO)
- ITG "Rondani", Parma (PR) (due risposte)
- ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)

Presentiamo di seguito le soluzioni delle seguenti scuole:

- Classe 3P di S. Genesio, simile nel metodo a quelle della SM di Rufina e della Scuola Media di Roveredo, ma più concisa della prima nella esposizione e più completa della seconda nelle motivazioni.
- Come già detto nel commento, LS "F. D'Assisi" (una soluzione simile ha inviato anche il LS "Michelangelo", che enuncia ma non giustifica il passaggio della parallela alle basi per i punti medi) e LS "E. Amaldi"
- LS "G. Galilei" di Bitonto, la prima parte in quanto si differenzia dalle precedenti nel metodo di dimostrazione.

**NOTA:** Le correzioni al testo o i commenti sono scritti in parentesi quadra. Sono racchiuse in doppia parentesi quadra le parti ritenute superflue.

## Soluzioni

Classe 3P

Scuola Media "Dalla Chiesa"

San Genesis (PV)

1- Il trapezio isoscele ABCD è dotato di un asse di simmetria [retta "t" passante per i punti medi delle basi]. Le bisettrici "a" e "b", di due angoli corrispondenti (DAB e ABC), sono rette corrispondenti nella simmetria di asse "t", quindi il punto d'intersezione delle bisettrici (P) non può che essere un punto fisso appartenente all'asse "t". Anche le bisettrici "d" e "c" si corrispondono nella stessa simmetria di asse "t", e quindi il punto R d'intersezione sarà sull'asse "t". I punti S [intersezione di "a" con "d"], Q [intersezione di "b" con "c"] sono punti corrispondenti nella simmetria di asse "t" perché intersezioni di rette corrispondenti.

Per questo motivo il segmento SQ è perpendicolare all'asse e i punti S, Q sono equidistanti dall'asse. Perciò il quadrilatero PQRS è un deltoide.

2- Poiché nel trapezio isoscele gli angoli  $BAD + ADC = 180^\circ$  e le rette "a" e "d" sono bisettrici di questi angoli, gli angoli  $SAD + ADS = 90^\circ$ .

Per cui DSA è un angolo retto e anche PSR, essendo l'angolo opposto al vertice, è anch'esso retto.

Per lo stesso motivo è retto anche l'angolo PQR, quindi il quadrilatero PQRS è inscrittibile in una circonferenza per il teorema: un quadrilatero è inscrittibile se [la somma de]gli angoli opposti [[è]] sono supplementari. Poiché abbiamo dimostrato che il quadrilatero è un deltoide, allora è circoscrittibile ad una circonferenza per il teorema: un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza se la somma dei [di due] lati opposti è uguale [alla somma degli altri due].

3- Le diagonali del quadrilatero sono: la minore, SQ, è parallela alle basi; la maggiore, PR, è perpendicolare alle basi.

4- Se il trapezio ABCD non è isoscele abbiamo notato che si conserva l'inscrittibilità della figura ottenuta dall'intersezione delle bisettrici. Questo avviene perché gli angoli, anche in un trapezio scaleno, adiacenti ad un lato sono supplementari. Inoltre la diagonale minore rimane parallela alle basi (verifica con Cabri)

Stefano Politi e Emiliano Langella

Classe 2B

Liceo Scientifico "F. D'Assisi" - Roma

1)

Prendo in considerazione i triangoli

DAS e CBQ:  $DA = BC$  per ipotesi

$\angle DAS = \angle CBS$  (angoli) per ipotesi

$\angle ADS = \angle BCA$  (angoli) per ipotesi

[I triangoli sono congruenti per il secondo criterio]

Quindi:

$AS = BQ$

$DS = CQ$

$\angle DSA = \angle CQB = 90^\circ$  perché  $A + D = 180^\circ$  quindi  $1/2 A + 1/2 D = 90^\circ$  e la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ .

Essendo PSR e PQR gli [angoli] opposti al vertice rispettivamente di DSA e CQB, misurano  $90^\circ$ .

Il quadrilatero PQRS è inscrittibile perché ha gli angoli opposti supplementari.

Prendo in considerazione i triangoli

DAT e CBN:  $DA = BC$  per ipotesi

$\angle C = \angle D$  per ipotesi

$\angle CBN = \angle DAT$  (angoli) per ipotesi

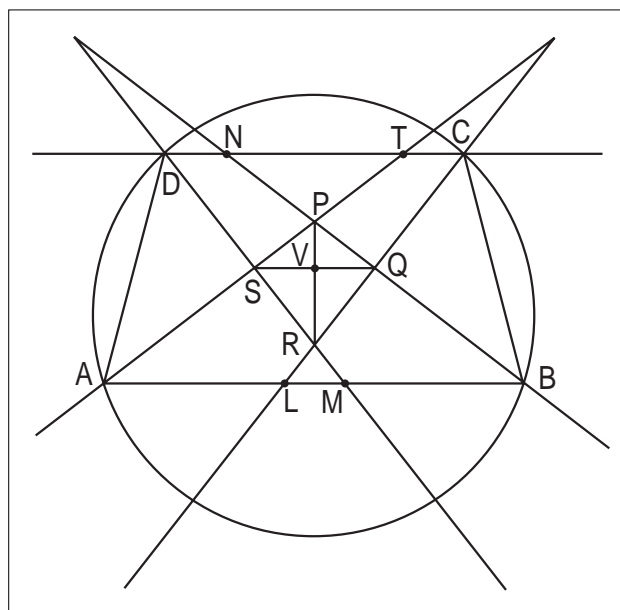
[I triangoli sono congruenti per il secondo criterio]

Quindi:

$AT = BN$

$\angle DTA = \angle BNC$  (angoli)

$NC = DT$



Il triangolo TNP come abbiamo dimostrato ha gli angoli alla base uguali, quindi è isoscele e  $TP = NP$ . Quindi risultano congruenti, per differenza di segmenti congruenti, PS e PQ.

Prendo in considerazione i triangoli

CLB e DMA

[[...]]

[In modo analogo si dimostra che] risultano congruenti, per differenza di segmenti congruenti RQ e RS.

Quindi se  $PS = PQ$  e  $RQ = RS$

$PS + RQ = PQ + RS$

Il quadrilatero PQRS è circoscrivibile perché la somma [[dei suoi]] di due lati opposti è uguale [alla somma degli altri due].

Prendo in considerazione i triangoli

PQR e PRS:  $RQ = RS$  per precedente dimostrazione

$PQ = PS$  per precedente dimostrazione PR in comune

[I triangoli sono congruenti per il terzo criterio]

Quindi  $QPR = SPR$  (angoli) e  $PRQ = PRS$  (angoli).

Quindi essendo PR bisettrice dell'angolo SPQ è anche bisettrice del suo opposto al vertice NPT (angolo). Essendo il triangolo NPT isoscele, la bisettrice relativa alla base coincide con l'altezza e con la mediana, quindi la diagonale PR è perpendicolare alle basi.

Prendo in considerazioni i triangoli

RVQ e RVS: RV in comune

$SRV = QRV$  (angoli) per precedente dimostrazione

$RQ = RS$  per precedente dimostrazione

[I due triangoli sono congruenti per il primo criterio]

Quindi  $QVR = RVS$  (angoli) e perciò sono retti, quindi le due diagonali sono perpendicolari. Quindi se una diagonale era perpendicolare alle basi l'altra sarà parallela.

$CLB = DCL$  (angoli) perché alterni interni delle rette parallele DC e AB tagliate dalla trasversale CL ma essendo  $DCL = BCL$  (angoli) per ipotesi  $BCL = CLB$  (angoli), quindi CLB (triangolo) è isoscele. Essendo BQ la bisettrice relativa alla base del triangolo isoscele CBL, coincide con la mediana e con l'altezza, quindi  $CQ = QL$ . Con l'analogo discorso fatto questa volta sul triangolo DTA si dimostra che  $TS = SA$ .

Se conduciamo da Q la parallela alla base, incontrerà il lato CB nel suo punto medio perché come abbiamo dimostrato Q era punto medio di CL. Quindi la retta condotta da Q sarà sicuramente sul prolungamento di SQ perché altrimenti ci sarebbero due rette parallele alla base passanti per il punto Q.

[[...]]

[Si procede in modo analogo per il lato AD]

Quindi i prolungamenti di QS intersecano i lati uguali del trapezio isoscele nei loro punti medi.

2)

$DCK = CKB$  (angoli) perché alterni interni delle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale CK. Ma essendo  $BCK = DCK$  (angoli) per ipotesi risulta che  $KCB = CKB$  (angoli), quindi il triangolo BCK è isoscele con  $CB = KB$ .

[[...]] [Analogamente] il triangolo TDA è isoscele con  $AT = DA$ .

Nei triangoli isosceli le bisettrici dell'angolo al vertice coincidono con l'altezza e la mediana, quindi

$CQ = QK$ .

$CQB = BQK$  (angoli) =  $90^\circ$

$DS = ST$

$DSA = AST$  (angoli) =  $90^\circ$

Se conduciamo la parallela alla base AB dal punto Q incontrerà il lato CB nel punto medio E perché Q era punto medio di CK.

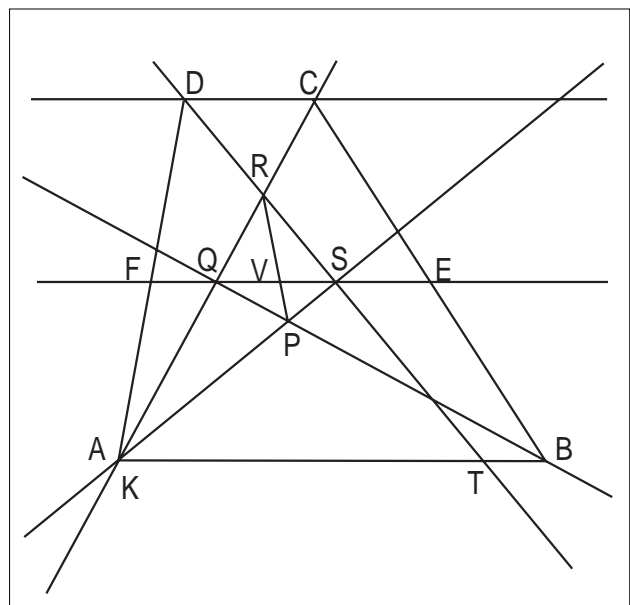
[[...]] [Incontra anche DT in S e DA nel punto medio F]

Quindi  $SQ \parallel AB \parallel CD$ .

$A + D = 180^\circ$ , quindi nel triangolo DSA,  $1/2 D + 1/2 A = 90^\circ$  e siccome la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ ,  $DSA = 90^\circ$ .

[Analogamente]  $CQB = 90^\circ$ .

Quindi se il trapezio non fosse isoscele si conserverebbe il





parallelismo di SQ rispetto alle basi, e il quadrilatero PQRS sarebbe sempre inscritto.

### Classe 2B

Liceo Scientifico "E. Amaldi"

Bitetto (Bari)

1)

Il quadrilatero PQRS è convesso, ed ha queste proprietà:

- ha 2 angoli retti in S e in Q (gli angoli in A e in D sono coniugati interni supplementari, la somma delle loro metà ADS, SAD dà  $90^\circ$  e quindi per differenza  $ASD=PSR=90^\circ$  e analogamente  $PQR=90^\circ$ );

- ha coppie di lati consecutivi congruenti tra loro ( $AP=BP$  essendo il triangolo ABP isoscele per avere gli angoli alla base AB congruenti, perché metà degli angoli congruenti alla base maggiore del trapezio isoscele;  $AS=BQ$  essendo congruenti i 2 triangoli rettangoli ADS, BCQ per la congruenza dei lati obliqui AD, BC e degli angoli metà di quelli alle basi del trapezio isoscele: per differenza si ottiene  $PS=PQ$  e analogamente  $RS=RQ$ );

- ha diagonali perpendicolari ( $PS=PQ$  e  $RS=RQ$  comportano l'equidistanza di P ed R dagli estremi S e Q e quindi PR risulta asse della diagonale SQ);

- è inscritto per avere la somma degli angoli opposti supplementari ( $S=Q=90^\circ \Rightarrow S+Q=180^\circ$  e per differenza anche  $P+R=180^\circ$  essendo  $360^\circ$  la somma dei 4 angoli interni);

- è anche circoscrittibile per avere la somma dei lati opposti congruenti ( $PS+QR=PQ+SR$  essendo  $PS=PQ$  e  $RS=RQ$ );

- la diagonale SQ è parallela alle basi del trapezio (per il teorema di Talete  $RU/UD=RT/TC$  ma ADU facilmente isoscele sulla base DU con AS altezza-mediana comporta che  $DU=2*SU$  e analogamente BCT isoscele su CT comporta  $CT=2*QT$ ; sostituendo si ottiene:

$$RU/(2*US)=RT/(2*TQ) \text{ da cui } RU/US=RT/TQ$$

che implica SQ parallela UT);

- quindi ha diagonali una perpendicolare e una parallela alle basi del trapezio.

[NOTA: la dimostrazione del parallelismo di SQ è valida solo per la particolare figura in cui R è esterno al trapezio, per cui U e T si trovano sui lati dei triangoli DRC e SRQ.

Se si modifica la figura in modo che R sia interno, per poter procedere nello stesso modo occorre mandare per R la parallela alle basi, applicare il teorema di Talete; poi condurre per S la parallela alle basi, applicare ancora il teorema di Talete, quindi, per la unicità del quarto proporzionale, concludere che Q appartiene a quest'ultima parallela. In questo modo la dimostrazione vale anche per il trapezio scaleno]

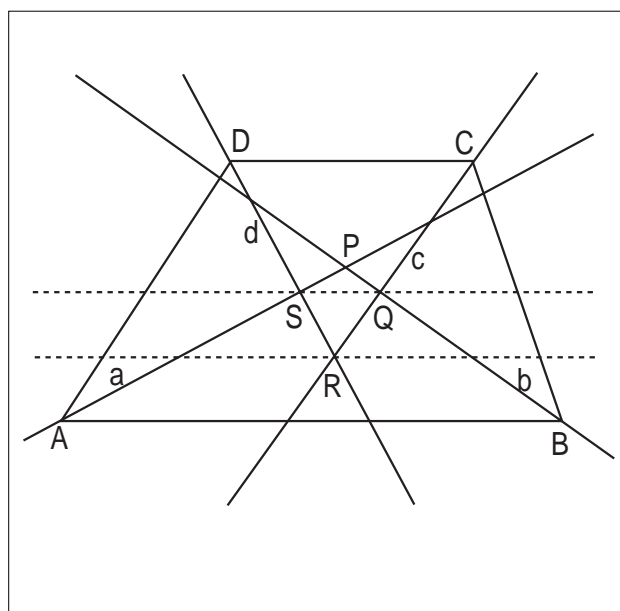
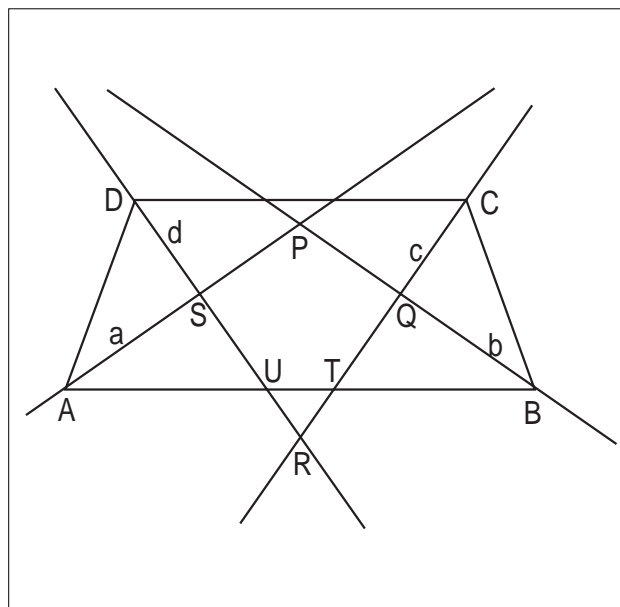
### Classe 2E

Liceo scientifico "G. Galilei"

Bitonto (BA)

1] Tracciato il trapezio isoscele e le bisettrici dei suoi angoli interni, facciamo le seguenti osservazioni:

- poiché il quadrilatero ABCD è un trapezio isoscele, gli angoli A e D sono supplementari tra loro e di conseguenza gli angoli ADS e DAS sono complementari in quanto metà di angoli supplementari quindi l'angolo  $DSA=90^\circ$  quindi



$\angle PSR = 90^\circ$  perché opposto al vertice. Analogamente per gli angoli in C e B, da cui  $\angle CQB = 90^\circ$ ,  $\angle PQR = 90^\circ$ .

Pertanto il quadrilatero SPQR è inscrittibile avendo una coppia di angoli opposti supplementari e in quanto entrambi retti, la circonferenza circoscritta ha l'ipotenusa comune PR come diametro.

• poiché il quadrilatero ABCD è un trapezio isoscele, ha la retta r, asse comune delle basi, quale asse di simmetria e quindi rispetto a tale retta si hanno le seguenti corrispondenze:

(vertici)  $A \rightarrow B \quad D \rightarrow C$

(angoli)  $A \rightarrow B \quad D \rightarrow C$

(bisettrici)  $a \rightarrow b \quad d \rightarrow c$

Da cui segue che: il punto P rimane unito, essendo  $P = |a \cap b|$  intersezione di rette corrispondenti;

il punto R rimane unito, essendo  $R = |c \cap d|$  intersezione di rette corrispondenti;

quindi  $PR = r$  poiché per due punti passa una sola retta e l'asse di simmetria è l'unica retta luogo di punti uniti e pertanto PR perpendicolare alle basi del trapezio;

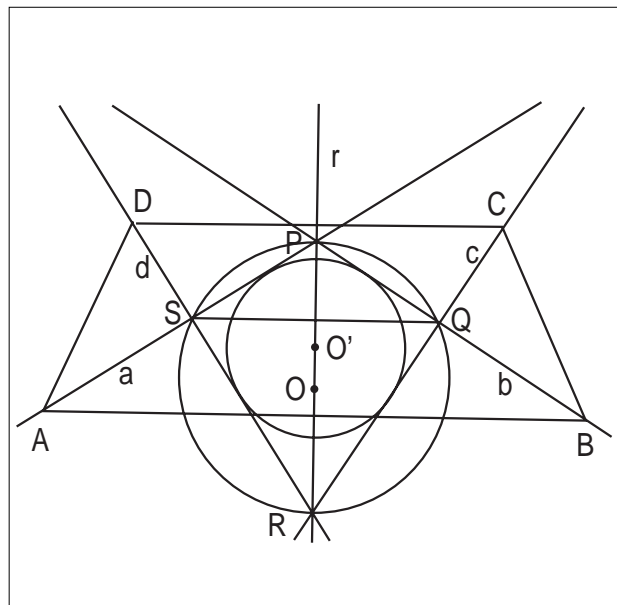
al punto  $S = |d \cap a|$  corrisponde il punto  $Q = |c \cap b|$  e quindi SQ, segmento congiungente punti corrispondenti, è perpendicolare all'asse r;

quindi  $SQ \parallel DC$  e ad AB;

• Il quadrilatero PQRS ha r come asse di simmetria;

• Al segmento SP corrisponde QP, al segmento SR corrisponde QR, quindi  $SP = QP$  e  $SR = QR$  in quanto la simmetria assiale è una isometria. Pertanto il quadrilatero PQRS è circoscrittibile alla circonferenza di diametro PR avendo la somma di due lati opposti congruente alla somma degli altri due:  $SP + RQ = PQ + SR$ .

[[...]]



**2 - 23 Aprile 2001**

E' data una piramide a base triangolare (cioè un tetraedro) di vertici A, B, C, D.

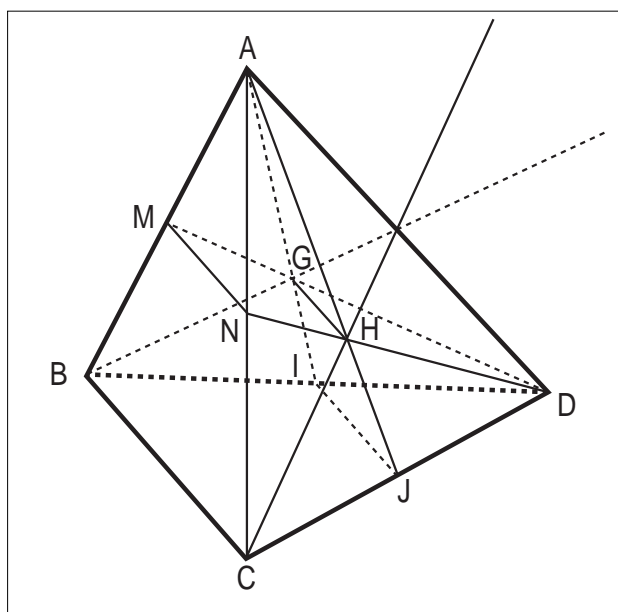
Consideriamo i punti medi M e N rispettivamente degli spigoli AB e AC e li congiungiamo con il vertice D.

Consideriamo inoltre i punti medi I e J rispettivamente degli spigoli BD e CD e li congiungiamo con il vertice A.

Indichiamo con G l'intersezione di MD con AI e con H l'intersezione di ND con AJ.

Tracciamo i segmenti MN, IJ, GH.

1. Dove si incontrano le rette BG e CH?
2. Di che natura è il quadrilatero MNIJ?
3. Qual è il rapporto fra i segmenti GH e MN?
4. Qual è il rapporto fra i volumi delle due parti in cui il tetraedro viene diviso dal piano AIJ?  
Giustificare le risposte.

**Commento**

Abbiamo ricevuto cinque risposte, una sola delle quali proviene da una scuola media.

Il problema di questo mese riproponeva le proprietà dei punti medi e delle mediane di un triangolo applicate però ad una figura tridimensionale: un tetraedro.

Ricordiamo che il tetraedro non è necessariamente un poliedro regolare né una piramide retta, nel testo si parla infatti di piramide triangolare senza altri attributi. Una delle risposte pervenute non è quindi accettabile perché in essa si considera esclusivamente un tetraedro regolare.

Anche noi però abbiamo commesso un errore: nel punto 2) del testo abbiamo chiesto qual è la natura del quadrilatero MNIJ pensandolo come parallelogramma; in realtà il parallelogramma è MNJI.

Solo i ragazzi della scuola media hanno quindi risposto correttamente dicendo che quel quadrilatero è intrecciato (anche se hanno tratto le loro deduzioni nel caso particolare del tetraedro regolare). I ragazzi delle superiori invece, anche se hanno interpretato la nostra intenzione, sono caduti nel nostro stesso errore non segnalando lo scambio di lettere. Abbiamo convenuto di presentare, con le dovute osservazioni, entrambi i tipi di risposta.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- SM "Dalla Chiesa", San Genesio (PV)
- LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
- LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
- LS "F. D'Assisi", Roma (RM)
- ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)

Nessuna delle soluzioni accolte è integralmente corretta, per cui riporteremo per qualche risposta prescelta le parti più

significative:

SM di San Genesio, i punti 1) e 2)

LS "F. d'Assisi", i punti 1), 2), 3)

LS "G. Galilei", completa anche se necessita di alcune correzione nella parte 4)

Ricordiamo che alle soluzioni inviate dalle scuole medie non richiediamo che siano sempre esaurienti nelle giustificazioni, ma che siano perlomeno complete nella esposizione.

**NOTA:** Le correzioni al testo o i commenti sono scritti in parentesi quadra.

Sono racchiuse in doppia parentesi quadra le parti ritenute superflue.

## Soluzioni

*Classe 3P*

*Scuola Media "Dalla Chiesa"*

*San Genesio (PV)*

Dopo alcuni tentativi per capire quali fossero le relazioni tra i vari enti geometrici fatti col disegno e con Cabri, per trovare la soluzione del problema la prof. ci ha portato in classe cannucce e scovolini per pipa, ago e filo per unire i vertici con i punti medi, e così la costruzione ci è apparsa subito molto chiara.

Abbiamo costruito un tetraedro regolare, ma rileggendo bene il testo abbiamo dedotto che il tetraedro poteva non essere necessariamente regolare. Le osservazioni che abbiamo fatto valgono comunque anche per un tetraedro non regolare, poiché si basano su proprietà delle mediane, vere per un triangolo qualsiasi.

1) I segmenti DM, DN, AI e AJ sono mediane, in quanto congiungenti i vertici D e A con i rispettivi punti medi dei lati opposti. Quindi i punti G e H sono rispettivamente baricentro dei triangoli ABD e ACD.

Le rette BG e CH, passando rispettivamente per i baricentri G e H tagliano il lato AD, spigolo in comune alle facce ABD e ACD, nel suo punto medio.

2) Nel tetraedro regolare il quadrilatero MNIJ è un quadrilatero intrecciato con i lati MN e IJ di uguale lunghezza perché congiungenti punti medi di due triangoli equilateri uguali, e paralleli perché i triangoli DBC e ABC si corrispondono in una rotazione attorno all'asse BC di  $60^\circ$ .

[[I segmenti MJ e IN sono uguali e perpendicolari perché diagonali del quadrato MNJI (MI=NJ perché congiungenti punti medi di triangoli equilateri uguali) [parte incompleta e superflua]].

Abbiamo controllato con Cabri che anche nel tetraedro non regolare si mantengono sia il parallelismo, sia l'uguaglianza dei lati MN e IJ [questa affermazione poteva essere facilmente giustificata].

[...]

*Politi Stefano e Langella Emiliano*

*Liceo Scientifico "F. d'Assisi"*

*Roma*

1) Se prendiamo in considerazione il triangolo ADB e le mediane DM e AI risulta che il punto G è il baricentro. Quindi la retta passante per il vertice B e per il baricentro incontrerà DA nel suo punto medio.

Se prendiamo in considerazione il triangolo ADC e le mediane AJ e DI [DN] risulta che il punto H è il baricentro. Quindi la retta passante per il vertice B[C] e per il baricentro incontrerà DA nel suo punto medio. Quindi BG e CH si incontrano nel punto medio del lato DA.

2) Se consideriamo il triangolo ACB, il segmento NM è la congiungente dei punti medi dei lati AC e AB, quindi è la parallela a CB e congruente alla sua metà.

Se consideriamo il triangolo DCB, il segmento IJ è la congiungente dei punti medi dei lati DC e DB, quindi è la parallela a CB e congruente alla sua metà.

Quindi MN è parallela e congruente a IJ, quindi il quadrilatero JINM [come evidenziato nel commento era corretto scrivere IJNM] è un parallelogramma.

3) Se consideriamo DG osserviamo che è il doppio di GM perché la parte di mediana che va dal vertice al baricentro è doppia di quella che va dal baricentro al punto medio del lato.

Quindi il segmento DG è  $\frac{2}{3}$  della mediana GM[DM].

Per lo stesso discorso fatto sulla mediana DN risulta che DH è  $\frac{2}{3}$  di DN.

I triangoli DHG e DNM sono simili perché hanno un angolo in comune e 2 lati in proporzione e il rapporto che lega i lati è  $\frac{2}{3}$ . Da questo deduciamo che HG è  $\frac{2}{3}$  di MN.

Classe 2E

L.S. "G. Galilei"

Bitonto (BA)

1) Costruita la piramide triangolare ABCD e presi in considerazione i punti medi indicati nella traccia, si ha che G, essendo il punto intersezione di MD con AI, entrambe per costruzione mediane nella faccia ABD, ne è il baricentro e quindi appartiene alla faccia; analogamente H è il baricentro e appartiene alla faccia ACD, in quanto punto di incontro di sue mediane: ND e AJ.

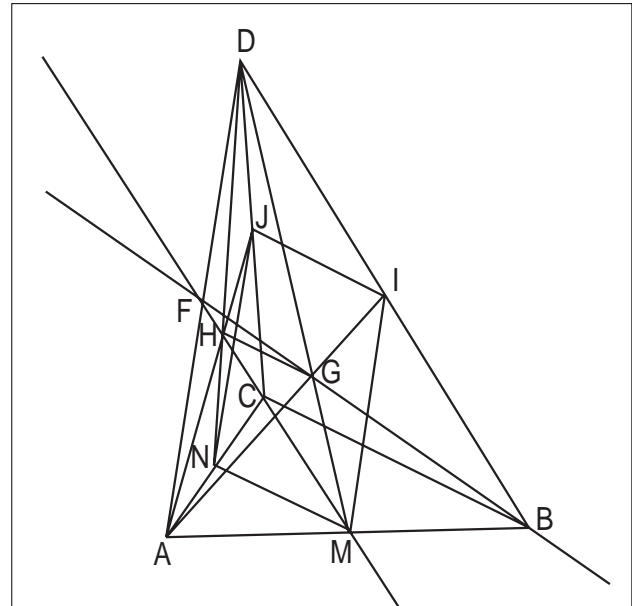
La retta BG, pertanto, conterrà la terza mediana di ABD e quindi intersecherà AD nel suo punto medio F (le tre mediane di un triangolo si intersecano nel baricentro), così come la retta CH conterrà la terza mediana di ACD e intersecherà ancora AD nel punto medio F. Quindi le rette BG e CH si incontrano nel punto medio dello spigolo AD.

2) Nel triangolo di base ACB, MN è il segmento congiungente i punti medi di due lati per cui è parallelo al terzo lato BC ed è congruente alla sua metà. Analogamente nel triangolo DCB, faccia laterale della piramide, JI è il segmento congiungente i punti medi di due lati e quindi è ancora parallelo al terzo lato BC e congruente alla sua metà. Ne consegue che  $MN=JI$  e  $MN \parallel JI$  per transitività e dunque il quadrilatero MNJI [come evidenziato nel commento era corretto scrivere MNJI] è un parallelogramma, avendo due lati opposti paralleli e congruenti.

3) Il baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, pertanto  $DG=2GM$  e  $DH=2HN$ . Nel triangolo sezione DMN, il segmento HG individua sui lati DN e DM segmenti proporzionali e pertanto è parallelo al terzo lato NM. Ne consegue che il triangolo DHG risulta simile ad DNM e il rapporto di similitudine è dato da  $DH/DN=2/3$ , da cui anche  $HG/NM=2/3$ .

4) Il piano AIJ divide il tetraedro in due piramidi: ABCIJ di base il trapezio CBIJ e la piramide AIJD di base il triangolo DIJ. Si osserva che le due piramidi ottenute hanno la stessa altezza, data dalla distanza del vertice comune A dal piano di base comune DCB, poiché le basi sono le parti in cui la faccia DCB resta divisa dal segmento IJ parallelo al lato BC. Pertanto il rapporto fra i volumi delle due piramidi è uguale a quello delle aree delle basi, tenendo conto della formula  $V = Ab \cdot h/3$ .

Considerando che IJ è il segmento congiungente i punti medi di due lati di DCB, esso stacca il triangolo DIJ che è simile a DCB [con] rapporto [di similitudine]  $1/2$  e pertanto  $Area(DIJ) = (1/4) \cdot Area(DA[C]B)$ , da cui  $Area(BCIJ) = (3/4) \cdot Area(DA[C]B)$  e infine  $Area(DIJ) = 3[(1/3)] \cdot Area(BCIJ)$ . Per quanto detto in precedenza allora anche il rapporto fra i volumi delle due piramidi [nell'ordine citato all'inizio] è 3.



## 7 - 21 Maggio 2001

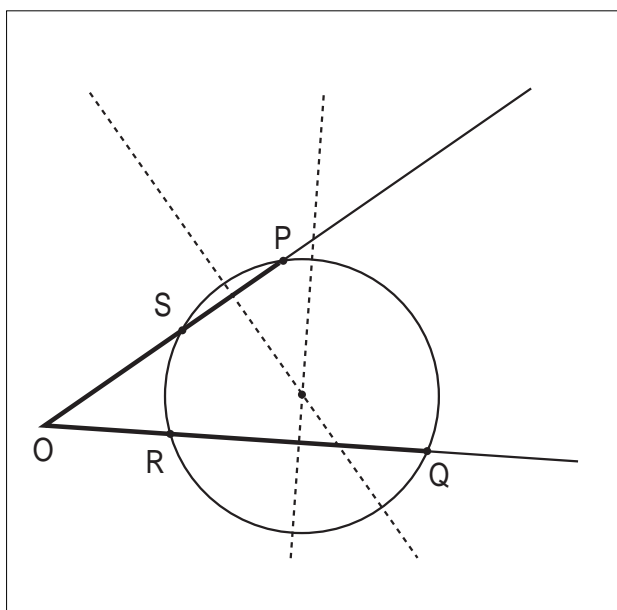
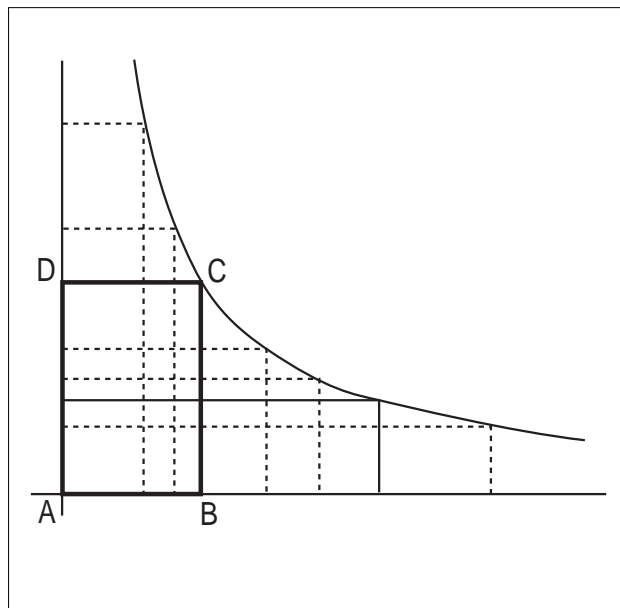
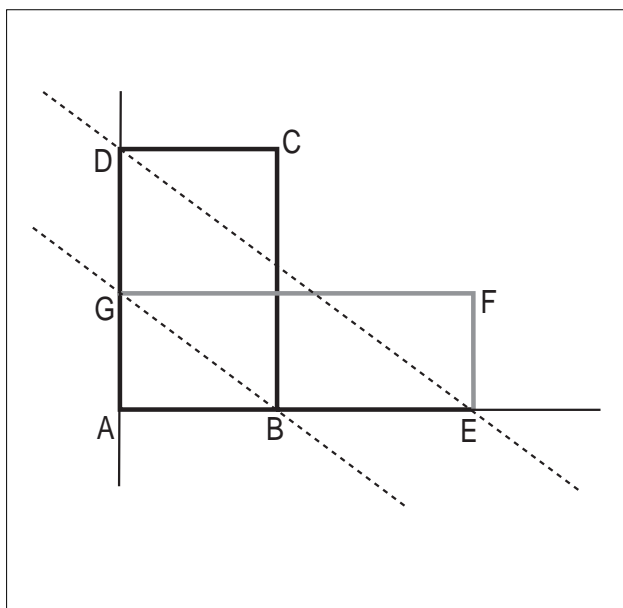
a) Sono dati un rettangolo ABCD di base AB e altezza AD ed un punto E situato sulla semiretta di origine A contenente B.

Costruire il rettangolo ACFG, con A e F vertici opposti, equivalente ad ABCD e situato dalla stessa parte di ABCD rispetto alla retta AE. Giustificare la costruzione.

b) Quale figura descrive il punto F al variare di E sulla semiretta AB?

Quale "legge" matematica è rappresentata da tale figura?

c) Siano r e t due semirette di origine O. Riportare su r i segmenti OS e OP, congruenti rispettivamente ai lati AB e AD del rettangolo assegnato, e su t i segmenti OR e OQ, congruenti rispettivamente ai lati AG e AE del rettangolo costruito in a). Dimostrare che i punti S, P, Q, R appartengono ad una stessa circonferenza



### Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte; ci hanno seguiti fino all'ultimo problema di questo anno scolastico due scuole superiori ed una scuola media inferiore:

SM "G. Zanella", Roveredo in Piano (PN)

LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)

LS "G. Galilei", Bitonto (BA)

Il problema di questo mese comprende due fasi di lavoro. Nella prima, punti a) e b), si giunge alla costruzione di un luogo geometrico, grafico della legge di proporzionalità inversa; nella seconda parte, punto c), si utilizza la proporzionalità inversa fra due coppie di segmenti per dimostrare l'appartenenza di quattro punti ad una stessa circonferenza. Riconosciamo che il problema proposto non era semplice, soprattutto per i più piccoli.

Le risposte inviate dai ragazzi dei due licei sono complete e corrette, abbastanza simili nella prima fase si differenziano nettamente nella dimostrazione del punto c).

Nella risposta della scuola media inferiore, una seconda classe, si fornisce una costruzione interessante, anche se un po' laboriosa, del luogo richiesto. In essa si fa ricorso al secondo teorema di Euclide anziché utilizzare le proprietà dell'equivalenza. Questi ragazzi hanno tentato poi di dimostrare il quesito del punto c), documentandosi anche su questioni che esulano dal loro iter scolastico, ma hanno gettato la spugna ad un passo dalla conclusione.

Abbiamo stabilito di presentare le tre soluzioni che ci sono pervenute, corredate dalle loro figure, inserendo nella risposta della scuola di Roveredo, con una nota, una possibile conclusione per il punto c).

**NOTA:** Le correzioni al testo o i commenti sono scritti in parentesi quadra. Sono racchiuse in doppia parentesi quadra le parti ritenute superflue.

## Soluzioni

### Classe 2B

Liceo Scientifico "E. Amaldi"

Bitetto (BA)

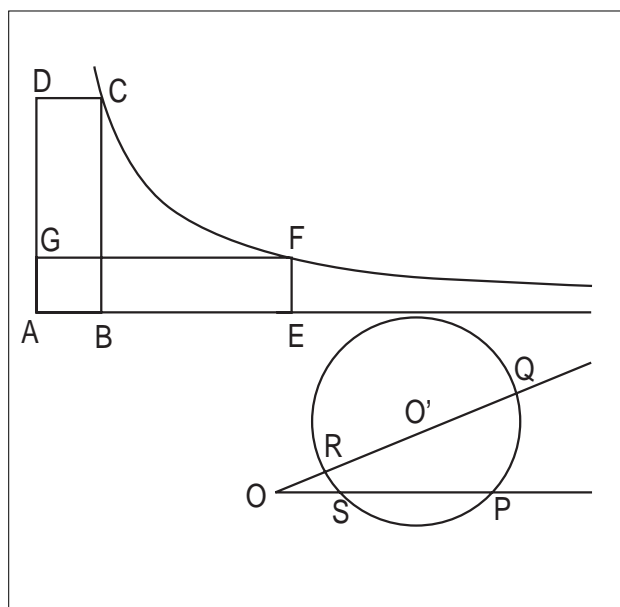
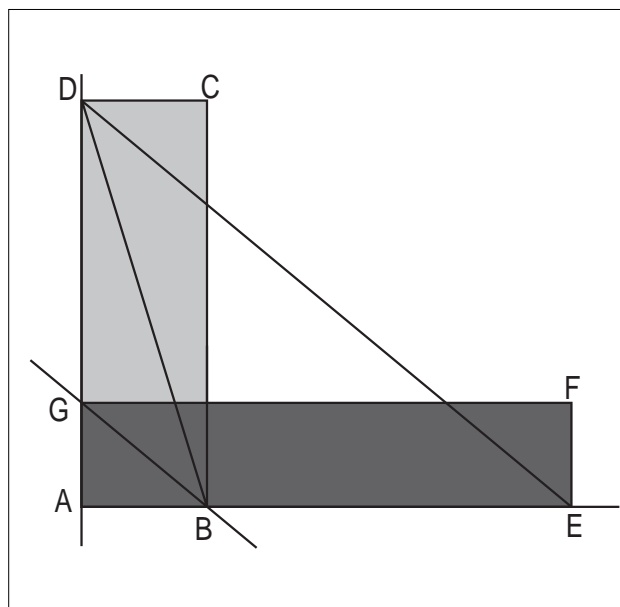
In riferimento alle figure allegate,

a) Dato il rettangolo ABCD, sulla semiretta AB prendiamo un punto E (a destra di B, o a sinistra) e lo congiungiamo con D.

Dal vertice B mandiamo la parallela alla retta DE e chiamiamo G l'intersezione di tale retta con la retta AD. Il triangolo ABD, metà del rettangolo ABCD, è somma dei 2 triangoli ABG e BDG, ma tale triangolo BDG è equivalente a BEG (hanno la stessa base BG e altezze DH, EK congruenti perchè comprese tra 2 parallele); quindi ABD equivale ad  $ABG + BGE = AEG$  e pertanto ABCD equivale ad AEGF.

b) Il vertice F, al variare di E sulla semiretta AB, descrive un ramo di iperbole tangente alle semirette AB e AD (vedi file F12bAmaldi1.htm che abbiamo editato in CabriWeb con l'aiuto del nostro docente). Se indichiamo con b, h, x e y le misure di AB, AD, AE e AG, dall'equivalenza dei due rettangoli si ottiene  $y = bh/x$  legge della proporzionalità inversa.

c) Riportiamo le misure b, h in OS e OP, le misure x, y in OQ e OR e consideriamo la circonferenza passante per i tre punti S, P, Q (circoscritta al triangolo SPQ, con O' intersezione dell'asse di SP con quello di PQ). Se indichiamo con R' l'intersezione della circonferenza con OQ, per il teorema delle secanti sarà  $OR'/OP = OS/OQ$ . Ma dall'equivalenza precedente  $y = bh/x$  diventa  $OR'/OP = OS/OQ$  e per l'unicità della 4ª proporzionale otteniamo infine



$OR'=OR$ . Pertanto i quattro vertici S,P,Q,R appartengono alla stessa circonferenza.

**Classe 2E**

*Liceo Scientifico "G. Galilei"*

*Bitonto (BA)*

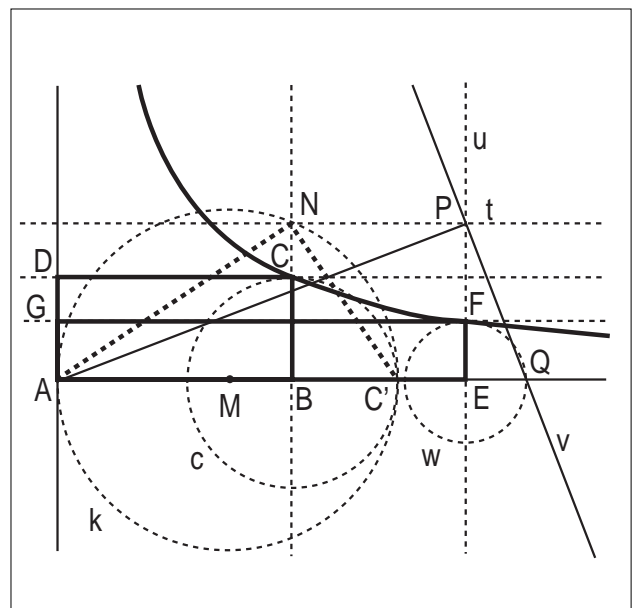
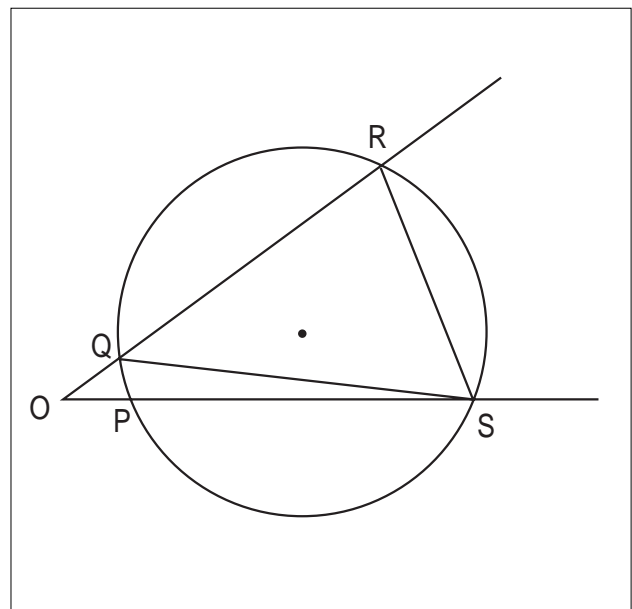
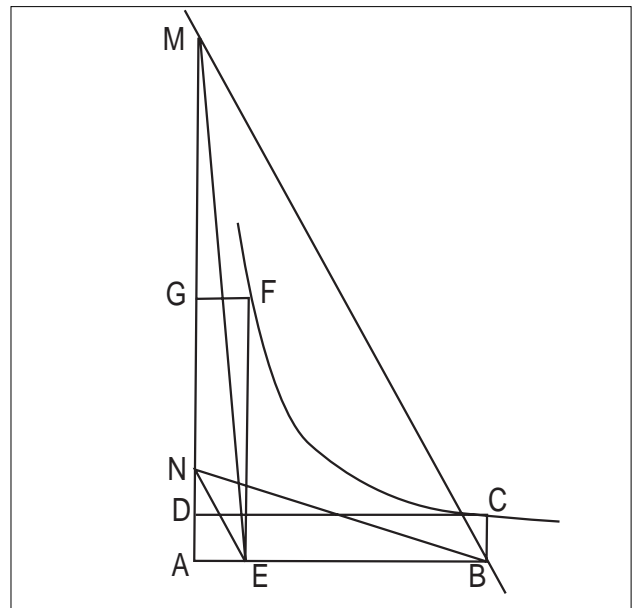
a) Disegnato il rettangolo ABCD di base AB e altezza AD e preso il punto E sulla semiretta AB, per ottenere il rettangolo AEFG equivalente ad ABCD eseguiamo le seguenti costruzioni:

1. Si costruisce il triangolo ABN equiesteso ad ABCD avendo la stessa base e altezza  $AN=2AD$ ;
2. Si congiunge E con N e si traccia per B la retta parallela a NE che incontra la semiretta AD in M. Si è ottenuto il triangolo AEM equiesteso ad ABN perché somma di triangoli equiestesi, infatti  $AEM=ANE+NEM$ ,  $ABN=ANE+EBN$  con ANE parte comune e NEM equiv. EBN in quanto triangoli con la stessa base NE e stessa altezza perché compresi nella stessa striscia di piano delimitata dalle rette parallele NE e MB.
3. Si costruisce il rettangolo AEFG di base AE e altezza  $AG=1/2AM$ , equivalente ad AEM. Per la proprietà transitiva dell'equiestensione si ha che ABCD equiv. ABN equiv. AEM equiv. AEFG.

b) Al variare di E sulla semiretta AB, F descrive il ramo di iperbole equilatera avente per asintoti le semirette AB e AD, giacché indicata con  $k=area(ABCD)$  e detto  $AE=x$ ,  $AG=y$  si ha  $xy=k$ , legge della proporzionalità inversa.

c) Riportati i segmenti  $OS=AB$ ,  $OP=AD$  sulla semiretta Or e  $OR=AG$  e  $OQ=AE$  sulla semiretta Ot, osserviamo che i triangoli OPQ e ORS sono simili avendo l'angolo O in comune e i lati che lo comprendono in proporzione, giacché da  $AB*AD=AE*AG$  segue che  $OS*OP=OQ*OR$  e quindi  $OS:OQ=OR:OP$ . Ne consegue che gli angoli OQP e OSR sono congruenti, perché corrispondenti.

L'angolo PQR, essendo adiacente e quindi supplementare di OQP, lo sarà anche di PSR. Ne consegue che il quadrilatero PSRQ, avendo una coppia di angoli opposti supplementari, è inscrittibile in una circonferenza e pertanto i punti P, S, R, Q appartengono alla stessa circonferenza. Per costruire la circonferenza, basta tracciare gli assi di una coppia di lati del quadrilatero PSRQ.



**Classe 2A**

*Scuola Media "G. Zanella"*

*Roveredo in Piano (PN)*

a)

Dato il rettangolo ABCD.

1. Circonferenza c di centro B, passante per C;
2. Intersezione di c con la semiretta AB alla destra di B: C';
3. Punto medio M tra A e C';
4. Circonferenza k di centro M, passante per A;
5. Intersezione di k con la retta BC: consideriamo N dalla parte di C rispetto alla retta AB.





## Alcune considerazioni

Scorrendo la tabella che affianca la mappa, sfogliando le risposte pubblicate e ripensando a quante invece non lo sono state è interessante osservare, nel microcosmo dei partecipanti a FLATlandia, le differenze che si evidenziano nel comportamento e nell'interesse relativi alla attività.

Vi sono classi che partecipano coralmente, gruppi costituiti da ragazzi di classi parallele, ragazzi che partecipano singolarmente o in collaborazione con uno o più compagni.

Dietro di loro ci sono sicuramente insegnanti che riconoscono il ruolo formativo della geometria, stimolando nei loro allievi la curiosità per le questioni geometriche.

Segnaliamo ancora la partecipazione di una quinta elementare, che ha inviato più volte le costruzioni realizzate con il software Cabri II.

Vi sono classi e ragazzi che seguono l'attività con una continuità veramente lodevole, altri invece che partecipano in modo saltuario, trovando probabilmente difficoltà a conciliare il loro percorso scolastico con i quesiti proposti. Alcuni, dopo una prima apparizione hanno abbandonato l'attività. Non vorremmo che questi ultimi fossero demotivati dall'insuccesso della loro risposta.

La partecipazione a FLATlandia non deve essere necessariamente una dimostrazione di abilità, anche se le risposte da pubblicare vengono scelte fra le migliori. Deve essere soprattutto la espressione di un interesse a misurarsi e a confrontarsi in un impegno logico-matematico, che si svolge tramite le nuove tecnologie, che accomuna scuole e ragazzi sparsi in tutta la nazione e non solo. Abbiamo avuto occasione di appurare che i problemi di FLATlandia vengono letti, attraverso Internet, anche da scuole di lingua italiana che si trovano all'estero.

## Ringraziamenti

Ancora una volta le curatrici di questo quarto resoconto sull'attività di FLATlandia desiderano ringraziare:

Anna Maria Arpinati e Valerio Mezzogori, per aver progettato e promosso questa attività;

Giuliano Mazzanti e Valter Roselli per il prezioso apporto delle loro competenze disciplinari nella scelta dei problemi e nella correzione degli elaborati;

Alberto Mingardi per la sua collaborazione nella gestione delle pagine web;

il Consiglio Direttivo dell'IRRSAE Emilia Romagna per avere approvato l'attività e messo a disposizione i mezzi dell'Istituto per la sua riuscita;

la casa editrice Loescher di Torino, distributrice del software Cabri-géomètre, per avere finora supportato l'iniziativa sostenendo le spese delle precedenti e della presente pubblicazione.

*In che cosa consiste veramente la matematica? Assiomi (come il postulato della parallela)? Teoremi (come il teorema fondamentale dell'algebra)? Dimostrazioni (come la dimostrazione di indecidibilità di Gödel)? Definizioni (come quella di dimensione di Menger)?... La matematica di sicuro non esisterebbe senza questi ingredienti; essi sono essenziali. Non di meno è ragionevole sostenere che nessuno di loro ne costituisce il cuore, che lo scopo principale di ogni matematico è risolvere problemi: per questo, problemi e soluzioni sono la reale essenza della matematica.*

## **FLATlandia**, geometria on-line

L'IRRSAE dell'Emilia Romagna,  
valendosi dell'apporto di operatori interni  
e di collaboratori esterni all'Istituto,  
ha proposto questo servizio in rete  
rivolto a docenti e alunni  
che si interessano di matematica.  
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97/'98,  
e giunto al suo quinto anno di attività,  
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche  
di vario tipo.

Nel presente volumetto il resoconto  
del quarto anno di attività



I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 5 settembre - ottobre 2001, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRR E - Emilia-Romagna.