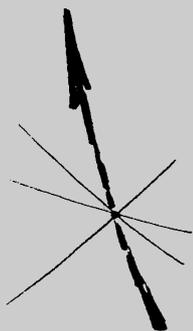


CABRI R.R.S.A.E.

quaderni di



Aldo Brigaglia e Grazia Indovina

**Il modello Beltrami-Klein
della geometria iperbolica
realizzato con CABRI**

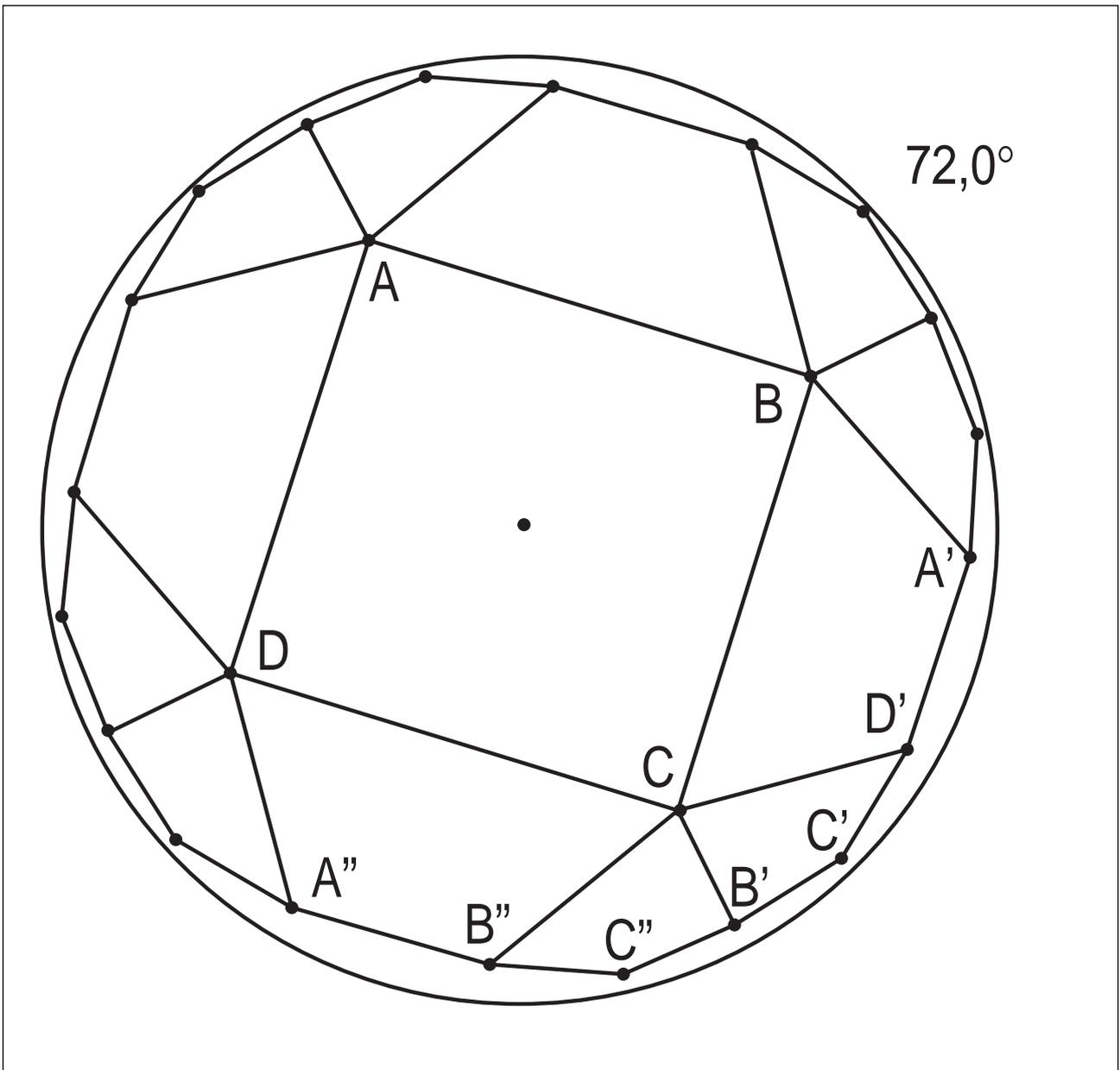
n°

15

Aldo Brigaglia, Università di Palermo

Gazia Indovina, Università di Palermo e Università della Calabria

Il materiale pubblicato da **CABRIRRSAE** può essere riprodotto, citando la fonte



**Il modello Beltrami-Klein
della geometria iperbolica
realizzato con CABRI**

Indice

▼	Introduzione	Pag.	5
▼	Costruzioni proiettive	Pag.	6
▼	Costruzioni fondamentali	Pag.	8
▼	Alcune applicazioni	Pag.	16
▼	Bibliografia	Pag.	23

Introduzione

In questa nota presentiamo una realizzazione al computer (usando Cabri per Windows) del modello di Beltrami-Klein della geometria iperbolica.

Una presentazione che motiva matematicamente e dimostra il funzionamento dei programmi è stata inviata per la pubblicazione alla rivista “L’insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate” del Centro Ricerche Didattiche ‘Ugo Morin’.

L’idea di fondo è di realizzare una sorta di “CABRI iperbolico” in cui le costruzioni fondamentali sono le stesse di quelle del “CABRI euclideo”. Un’idea omologa è stata realizzata in Francia relativamente al modello di Poincaré e si può trovare nel sito Internet:

<ftp://ftp.imag.fr/pub/CABRI/Menu-folder/>.

Le costruzioni riportate sono divise in tre parti. Nella prima parte si presentano le macro relative alle costruzioni proiettive utilizzate. Nella seconda parte si presentano le costruzioni fondamentali corrispondenti al nostro menù ‘virtuale’. Nella terza parte si presentano alcune applicazioni che fanno uso delle costruzioni precedenti.

Costruzioni proiettive

Quarto armonico

Oggetti iniziali: i punti allineati A, B e C

Oggetti finali: il punto D

Descrizione della costruzione:

Retta: la retta t per C e le due rette r ed s per A

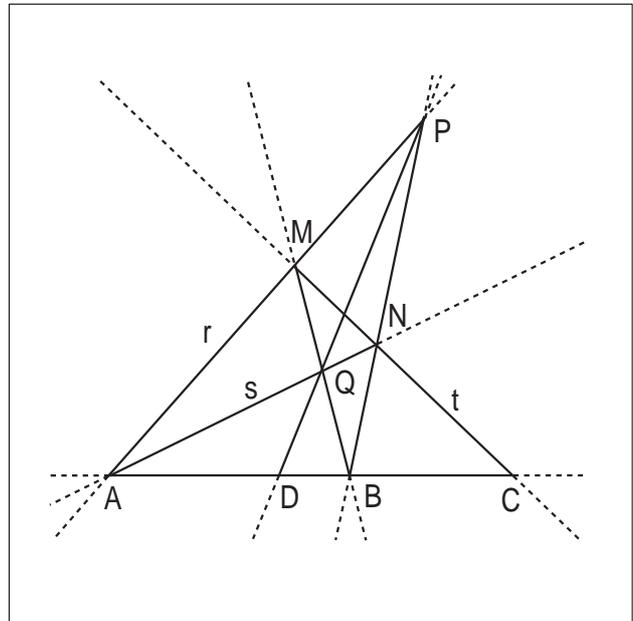
Intersezione di due oggetti: il punto M; il punto N

Retta: la retta BM; la retta BN

Intersezione di due oggetti: il punto P; il punto Q

Retta: la retta PQ

Intersezione di due oggetti: il punto D



D è il quarto armonico dopo A, B e C. Il birapporto (ABCD) è uguale a -1.

Osservazione: spostando le rette r, s e t con la manina possiamo vedere che D è indipendente dalla loro scelta.

N.B. Qualora i punti non fossero allineati i risultati della MACRO non vanno presi in considerazione.

Polare

Oggetti iniziali: il punto P e la circonferenza K

Oggetti finali: la retta r

Descrizione della costruzione:

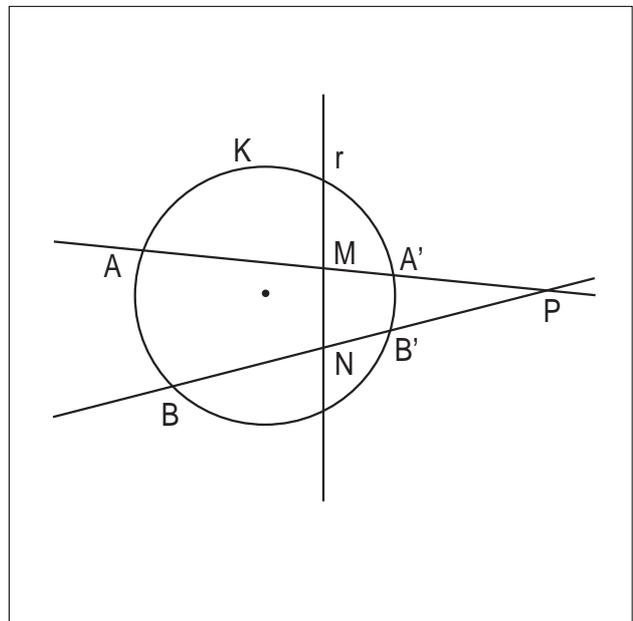
Punto su un oggetto: i punti A e B

Retta: le rette AP e BP

Intersezione di due oggetti: i punti A' e B'

Quarto armonico: i punti M ed N

Retta: la retta r (per M ed N)



Osserviamo come varia la retta r se facciamo muovere il punto P.

Possiamo verificare, muovendo A o B con la manina, che la costruzione è indipendente dalla scelta di A e di B.

Polo

Oggetti iniziali: la circonferenza K e la retta p

Oggetti finali: il punto P

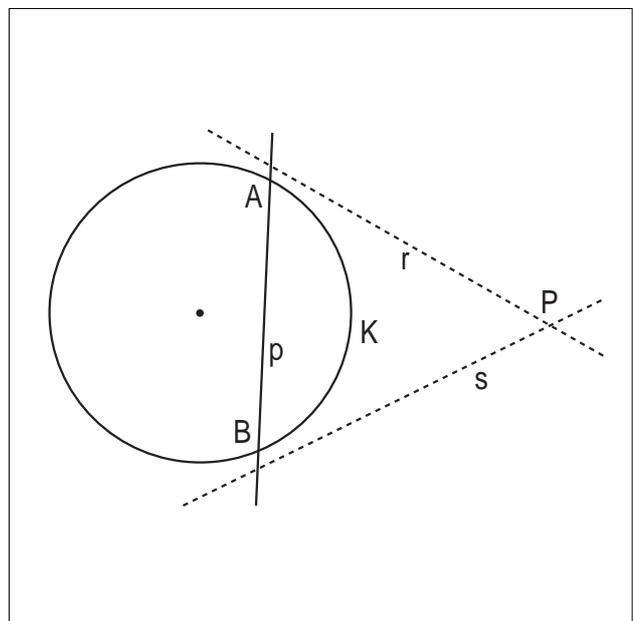
Descrizione della costruzione

Punto su un oggetto: i punti A e B

polare (di A): la retta r

polare (di B): la retta s

Intersezione di due oggetti: il punto P



spostando la retta p si può verificare che P sarà esterno, interno o sulla circonferenza a secondo che p sia secante, esterna o tangente.

Omologia armonica

Oggetti iniziali: la retta p e i punti A e P

Oggetti finali: il punto A'

Descrizione della costruzione:

Retta: la retta PA

Intersezione tra due oggetti: il punto M
quarto armonico (di P, M e A): il punto A'

Questa macro costruisce, dati il polo P e l'asse p di un'omologia armonica, l'omologo A' di ogni punto A diverso da P e non appartenente all'asse.

Omologia (AB)

Oggetti iniziali: la circonferenza K e i punti A e B
(entrambi interni o entrambi esterni alla circonferenza K)

Oggetti finali: la retta t

Descrizione della costruzione:

Retta: la retta AB

polo (di AB): il punto P

Retta: le rette AP e BP

Intersezione di due oggetti: i punti M ed N

Retta: la retta MN

Intersezione di due oggetti: il punto T

polare (di T): la retta t

Questa macro costruisce (nella polarità individuata dalla circonferenza K) l'asse dell'omologia armonica che porta A in B .

Se A (o B) coincide con il centro O della circonferenza questa macro non agisce (il punto P va all'infinito). In tal caso servirsi della macro "omologia OA ".

Se A e B sono simmetrici (in senso euclideo) rispetto ad O , l'asse dell'omologia sarà il diametro perpendicolare al segmento di estremi A e B .

Omologia OA

Oggetti iniziali: la circonferenza K e il punto A

Oggetti finali: la retta r

Descrizione della costruzione:

Retta: la retta OA

Perpendicolare: le rette s e t

Intersezione di due oggetti: i punti M ed N

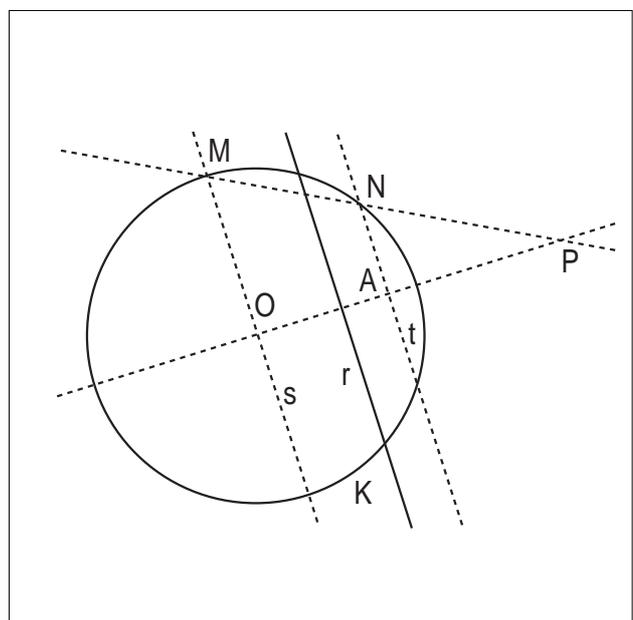
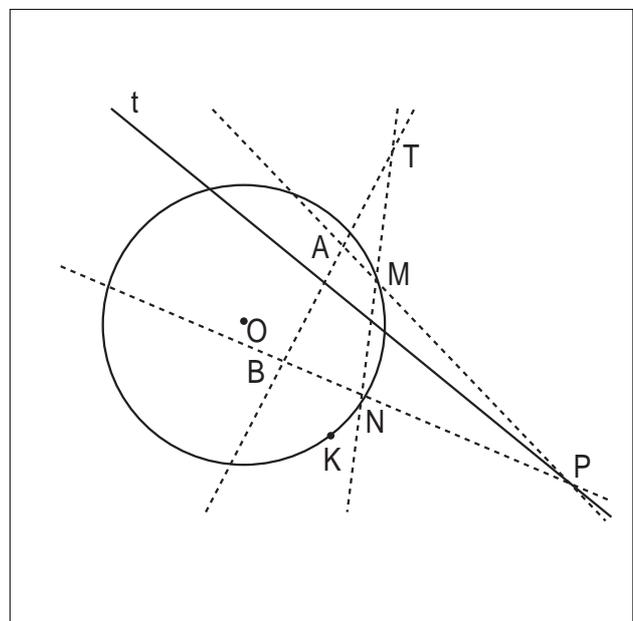
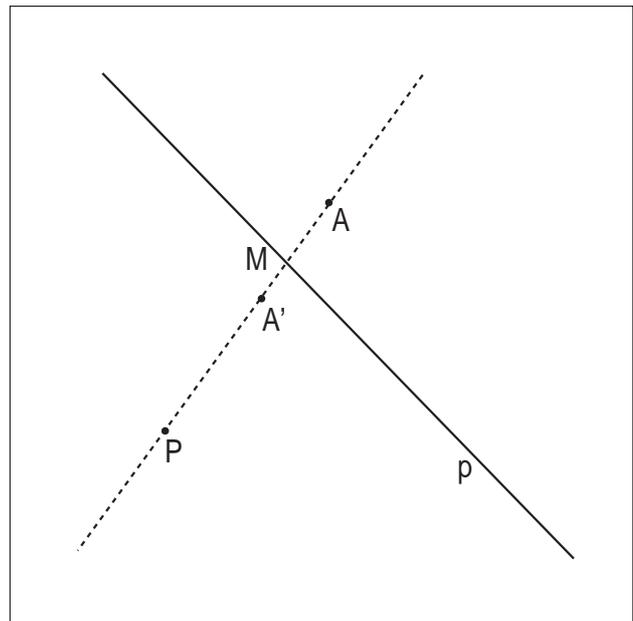
Retta: la retta MN

Intersezione di due oggetti: il punto P

polare: la retta r

Osservazione: i punti M ed N vanno scelti nello stesso semipiano rispetto alla retta OA

N.B. Se M ed N non si scelgono nel medesimo semipiano la retta r sarà la perpendicolare ad OA passante per il punto di intersezione di OA con MN .



Costruzioni fondamentali

Hretta

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il punto A e il punto B

Oggetti finali: il segmento MN

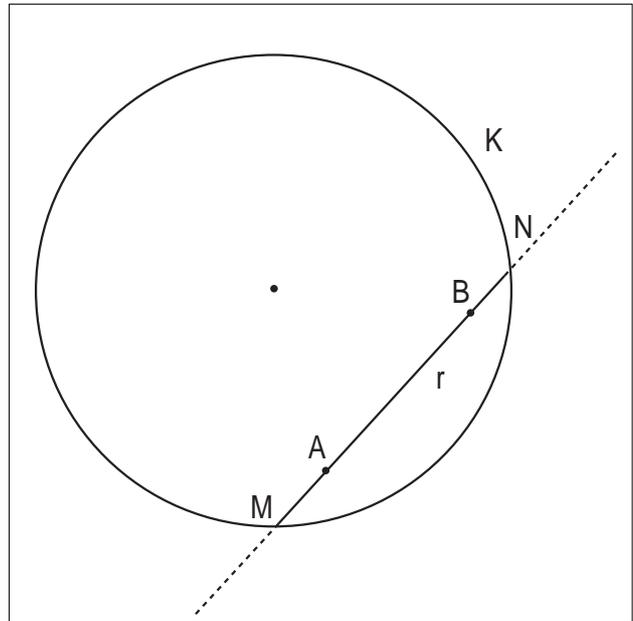
Descrizione della costruzione

Retta: la retta r

Intersezione di due oggetti: i punti M ed N

Segmento: il segmento MN

Osservazione: questa macro costruisce la retta iperbolica per due punti



Hsemiretta

Oggetti iniziali: la circonferenza K, i punti A e B

Oggetti finali: il segmento AC

Descrizione della costruzione:

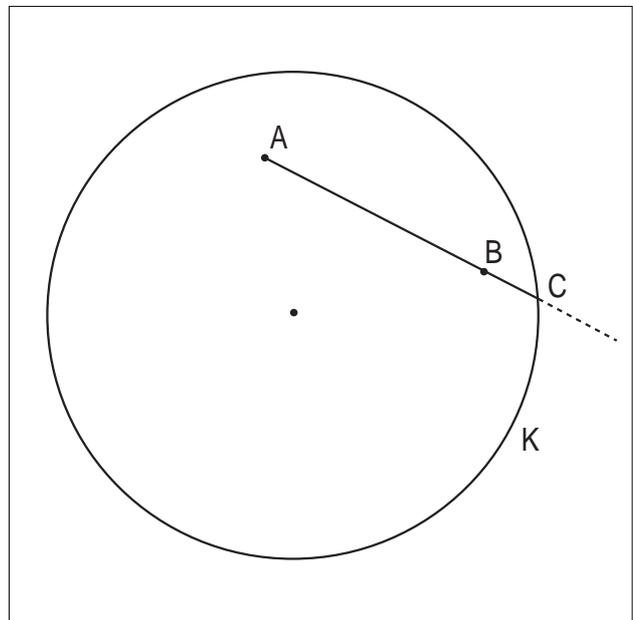
Punto: il punto A e il punto B

Semiretta: la semiretta AB

Intersezione di due oggetti: il punto C

Segmento: il segmento AC

Osservazione: questa macro costruisce la semiretta iperbolica con punto iniziale, direzione e verso prefissati.



Hasse AB

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il punto A e il punto B

Oggetti finali: la hretta MN

Descrizione della costruzione:

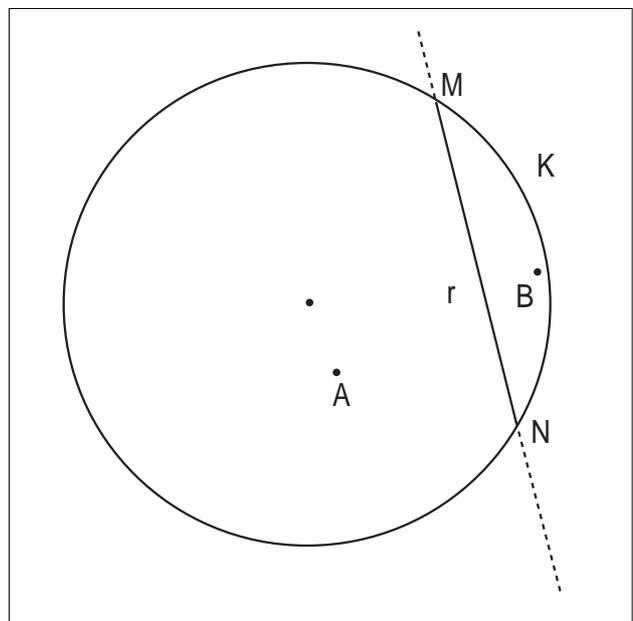
Omologia(AB): la retta r

Intersezione di due oggetti: il punto M e il punto N

hretta: il segmento MN

Osservazione: cfr. la costruzione precedente.

N.B.: questa macro non agisce se uno dei due estremi del segmento coincide con O. In questo caso cfr. la costruzione successiva



Hasse AO

Oggetti iniziali: la circonferenza K e il punto A

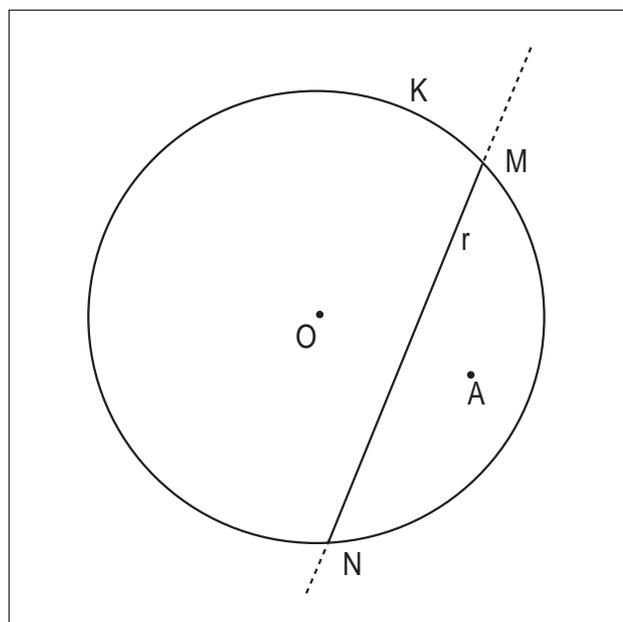
Oggetti finali: la hretta MN

Descrizione della costruzione:

Omologia (OA): la retta r

Intersezione di due oggetti: il punto M e il punto N

hretta: il segmento MN



Hriflessione

Oggetti iniziali: la circonferenza K, la hretta MN e il punto A

Oggetti finali: il punto f(A)

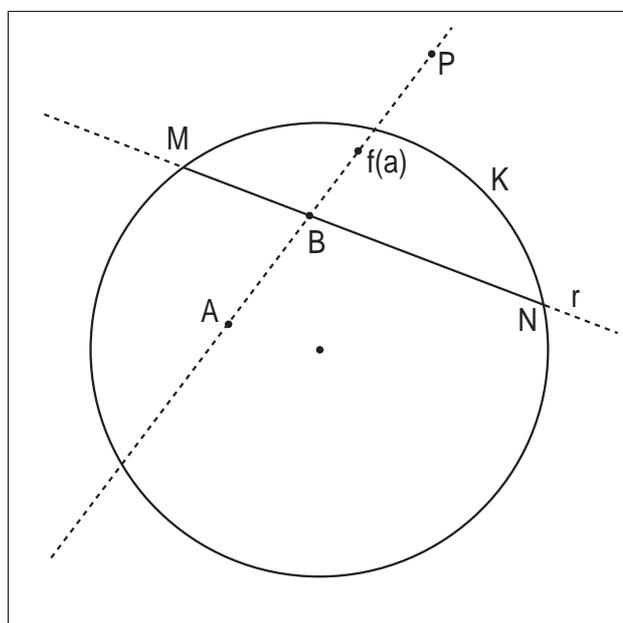
Descrizione della costruzione:

Retta (per M ed N): la retta r

Polo (di r): il punto P

omologia armonica (di asse r e polo P): il punto f(A)

Osservazione: infatti il segmento A f(A) è perpendicolare, nel senso iperbolico del termine, (vedi più avanti), alla hretta MN e inoltre il segmento AB è iperbolicamente uguale al segmento Bf(A).



Hcirconferenza

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il punto C e il punto A

Oggetti finali: l'ellisse K1

Descrizione della costruzione:

hasse CO: il segmento r

hriflessione :il punto f(A)

Circonferenza: la circonferenza K'

Punto su un oggetto: i punti D, E, F e G

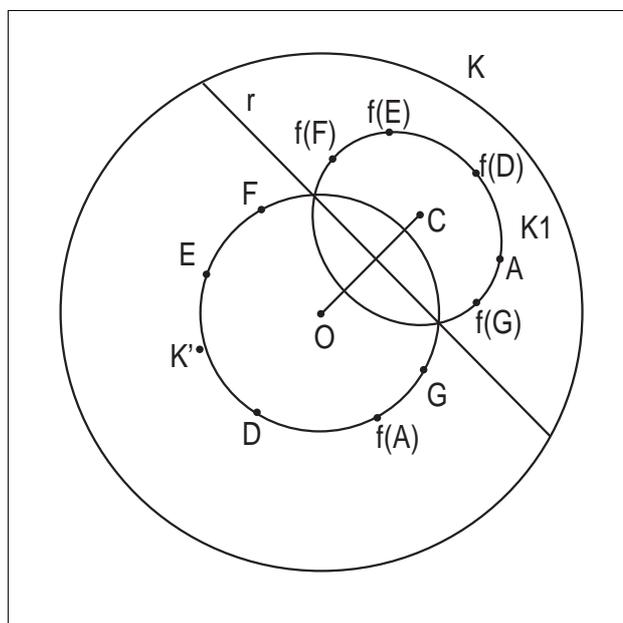
hriflessione: i punti f(D), f(E), f(F) e f(G)

Conica: l'ellisse K1

Osservazione:

abbiamo preferito costruire l'ellisse utilizzando il comando "conica" piuttosto che il comando "luogo" perché il luogo non viene riconosciuto dal Cabri per eventuali manipolazioni successive. Per motivi didattici, qualora non sia ancora noto il fatto che la circonferenza iperbolica è rappresentata nel modello da un'ellisse, può essere utile lavorare sperimentalmente usando il comando "luogo" (scegliendo un punto D su K' e il luogo descritto da f(D) al variare di D).

N.B. Questa macro non agisce nel caso in cui C coincida con O. In tal caso la circonferenza iperbolica coincide con quella euclidea.



Hperpendicolare

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il punto A e la hretta BC

Oggetti finali: la hretta p

Descrizione della costruzione:

Retta: la retta r

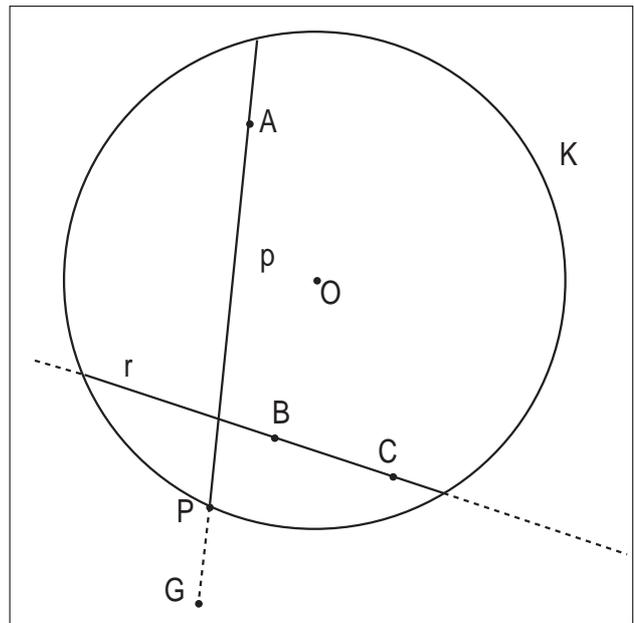
polo (di r): il punto G

Retta: la retta AG

Punto su due oggetti: il punto P

hretta (per A e P): la hretta p

Osservazione: ricordiamo che nel modello di Beltrami-Klein due rette sono perpendicolari se e solo se una passa per il polo dell'altra. Spostando la hretta BC si può osservare che quando diviene un diametro la perpendicolarità iperbolica coincide con quella euclidea



Hpunto medio AB

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il punto A e il punto B

Oggetti finali: il punto M

Descrizione della costruzione:

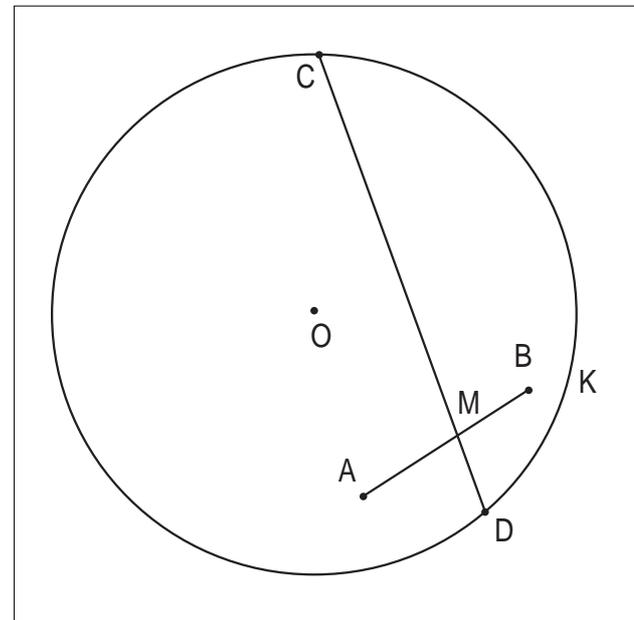
hasse AB: il segmento CD

Segmento: il segmento AB

Intersezione di due oggetti: il punto M

Osservazione: questa macro non funziona se uno degli estremi del segmento AB coincide con O. In questo caso confronta la costruzione successiva.

La macro non funziona anche nel caso in cui il punto medio è proprio O. In tal caso $AO=BO$ anche in senso euclideo.



Hpunto medio OA

Oggetti iniziali: la circonferenza K e il punto A

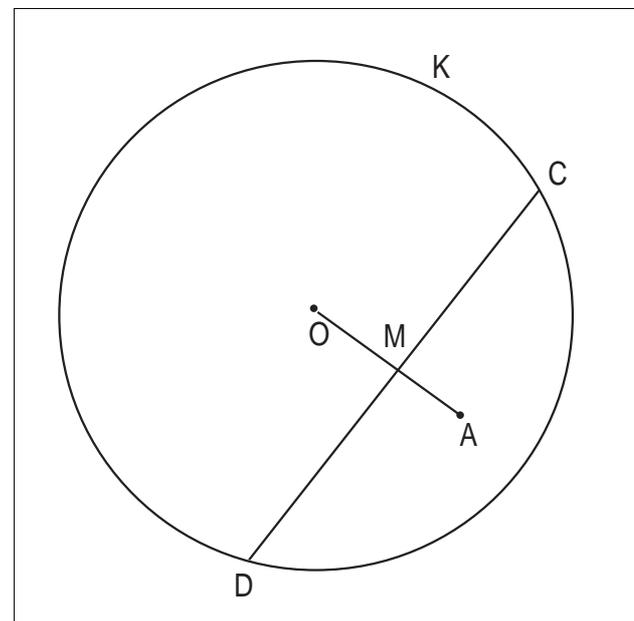
Oggetti finali: il punto M

Descrizione della costruzione:

hasse OA: il segmento CD

Segmento: il segmento AO

Intersezione di due oggetti: il punto M



Hbisettrice

Oggetti iniziali: la circonferenza K e i punti A , B e C

Oggetti finali: la hsemiretta BM

Descrizione della costruzione:

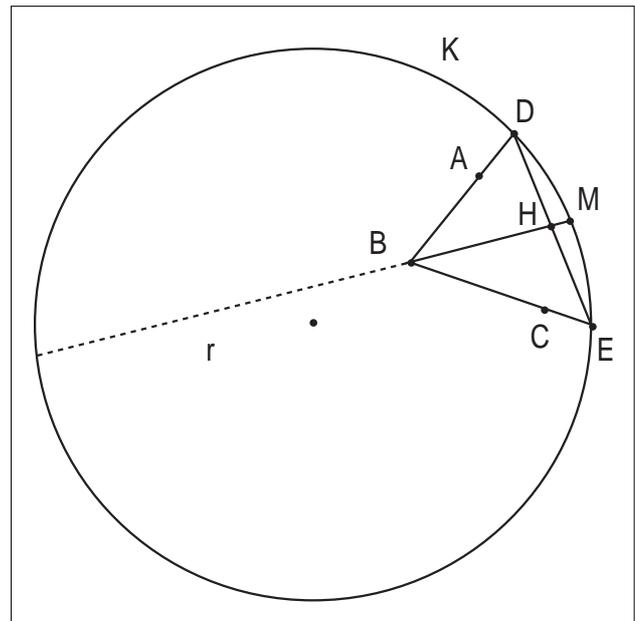
hsemiretta: i segmenti BD e BE

hretta: il segmento DE

hperpendicolare: la hretta r

punto su due oggetti: il punto M

hsemiretta: il segmento BM



Ciclo

Oggetti iniziali: la circonferenza K , il punto P e il punto A

Oggetti finali: l'ellisse K'

Descrizione della costruzione

Punto su un oggetto: il punto M

hretta (per M e P): la hretta r

hriflessione (di A rispetto alla hretta r): il punto A'

Punto su un oggetto: il punto R

hretta (per R e P): la hretta s

hriflessione (di A' rispetto alla hretta s): il punto A''

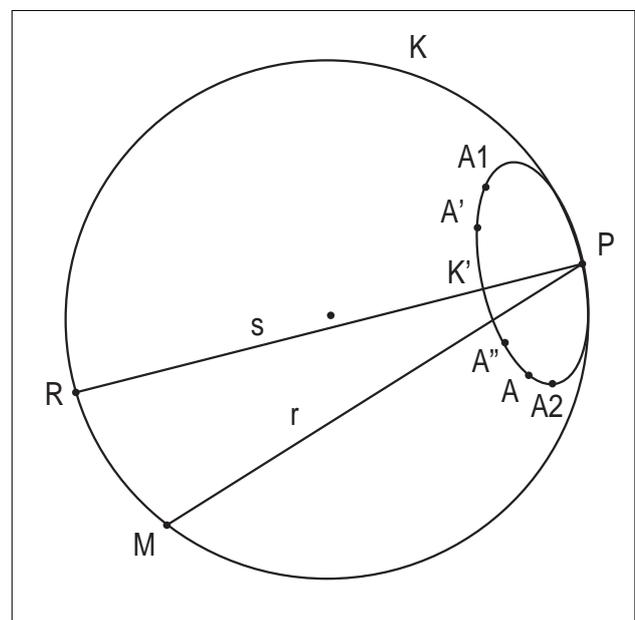
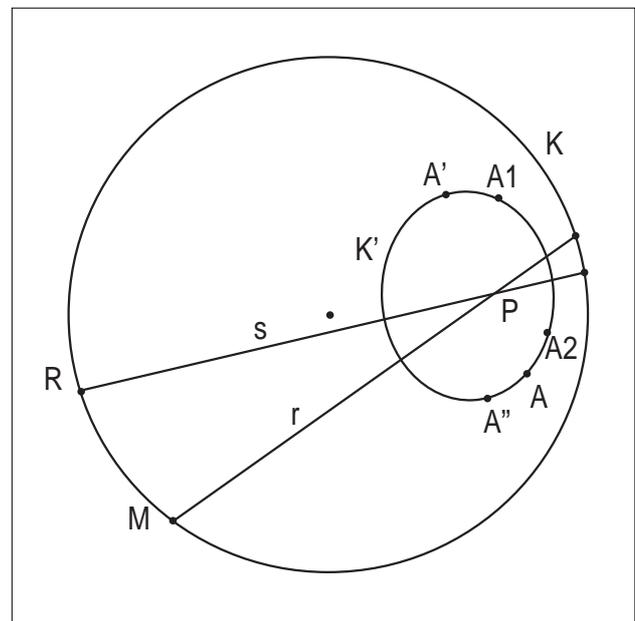
hriflessione (di A rispetto alla hretta s): il punto A_1

hriflessione (di A_1 rispetto alla hretta r): il punto A_2

Conica: l'ellisse K'

Osservazione: questa macro genera un ciclo definito come l'orbita descritta da un punto (nel nostro caso A) rispetto al gruppo delle trasformazioni iperboliche che tengono fisso un punto P , ottenute come prodotto di riflessioni per rette passanti per P .

Nei tre casi rispettivi in cui P sia interno a K , su K o esterno si hanno le rotazioni, le traslazioni e gli spostamenti paralleli e le curve risultanti sono le circonferenze, gli orocicli e le curve equidistanti.



Htrasporto di un segmento

Oggetti iniziali: la circonferenza K il segmento AB e la hsemiretta CD

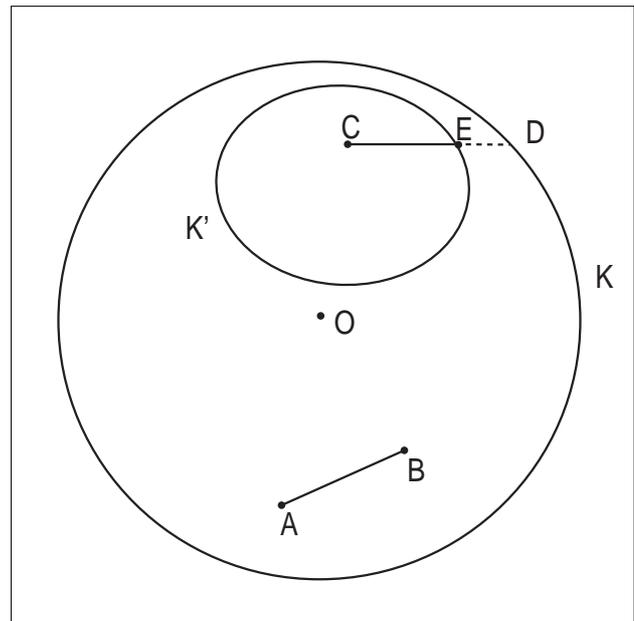
Oggetti finali: il segmento CE

Descrizione della costruzione:

hcompasso: l'ellisse K'

Intersezione di due oggetti: il punto E

Segmento: il segmento CE

**Htrasporto di un segmento 1**

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il segmento AO e la hsemiretta BC

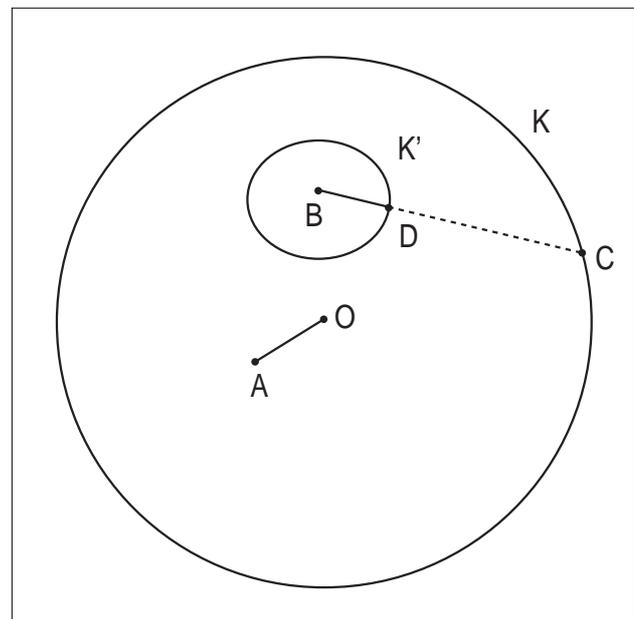
Oggetti finali: il segmento BD

Descrizione della costruzione

hcompasso1: l'ellisse K'

intersezione tra due oggetti: il punto D

Segmento: il segmento BD

**Htrasporto di un angolo**

Oggetti iniziali: la circonferenza K, l'angolo ABC e la hsemiretta DE

Oggetti finali: l'angolo $A''DB'$

Descrizione della costruzione:

Segmento: il segmento AB

hperpendicolare: la hretta CF

Intersezione di due oggetti: il punto A'

Segmento: il segmento $A'B'$

htrasporto di un segmento: il segmento DA''

hperpendicolare: la hretta MN

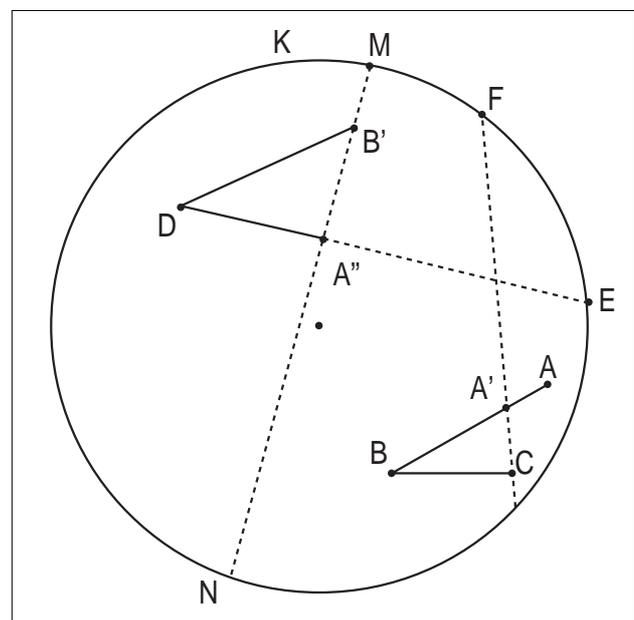
Segmento: il segmento $A'C$

hsemiretta: la hsemiretta $A''M$

htrasporto di un segmento: il segmento $A''B'$

Segmento: il segmento DB'

Osservazione: i due triangoli ABC e $A''DB'$ sono uguali (in senso iperbolico) per il primo criterio di uguaglianza. Infatti si tratta di due triangoli rettangoli con i cateti uguali. N.B. Questa costruzione va bene per gli angoli acuti. Per gli angoli ottusi sono necessarie alcune modifiche che lasciamo al lettore



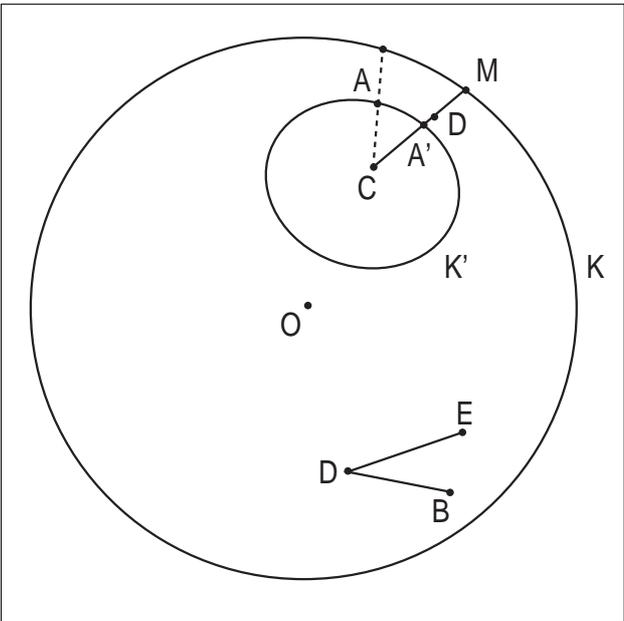
Hrotazione

Oggetti iniziali: la circonferenza K, l'angolo BDE, il punto C (centro della rotazione) e il punto A
 Oggetti finali: il punto A'

Descrizione della costruzione:

- hsemiretta: la hsemiretta CA
- htrasporto di un angolo: il punto D
- hsemiretta: la hsemiretta CM
- hcirconferenza: l'ellisse K'
- Intersezione di due oggetti: il punto A'

Osservazione: il punto A' giacerà nel semipiano opposto a quello in cui giace O rispetto alla hretta prolungamento della hsemiretta CA. Se tale hretta passa per O la macro non funziona.

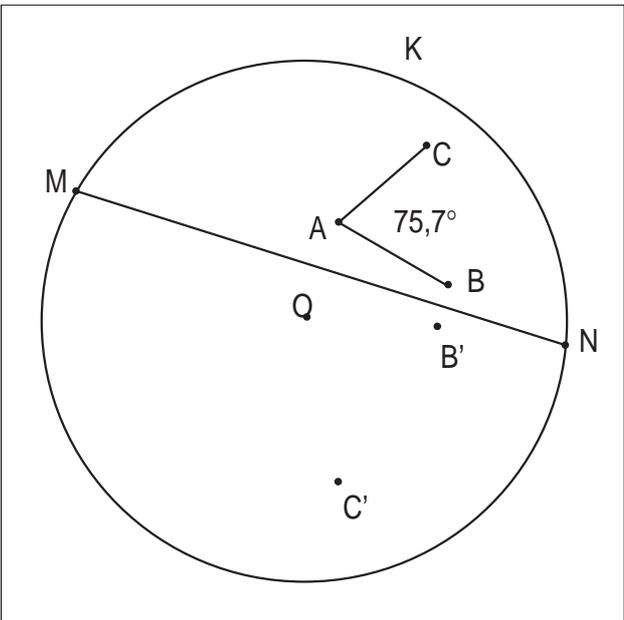


Hmisura di un angolo

Oggetti iniziali: la circonferenza K e l'angolo BAC
 Oggetti finali: il numero

Descrizione della costruzione:

- hasse OA: la hretta MN
- hriflessione: i punti B' e C'
- Misura di un angolo: misura euclidea dell'angolo B'OC'



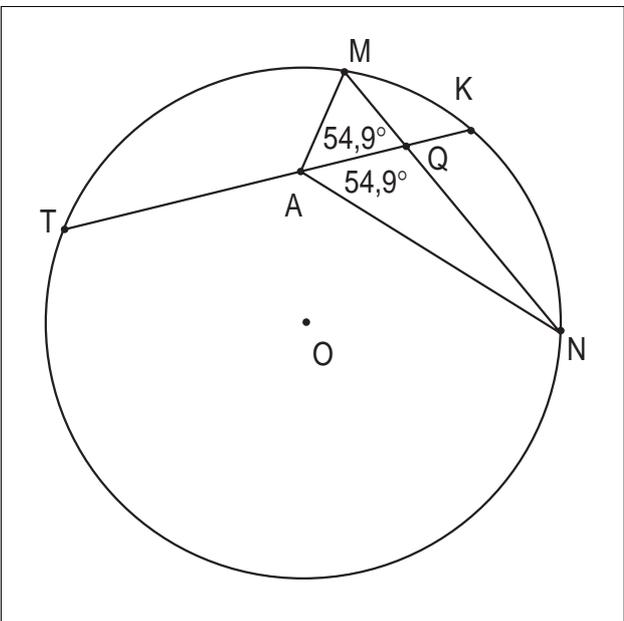
Hparallele limite

Oggetti iniziali: la circonferenza K, la hretta MN, il punto A
 Oggetti finali: il segmento AM e il segmento AN

Descrizione della costruzione:

- Segmento: il segmento AM e il segmento AN

Osservazione: usando la macro precedente si possono sperimentare alcune interessanti (e note) proprietà. Ad esempio l'angolo NAQ è uguale all'angolo QAM. Inoltre spostando A lungo la normale da Q a T, l'angolo di parallelismo assume tutti i valori possibili compresi nell'intervallo (90°,0°)



Htraslazione

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il vettore AB e il punto C

Oggetti finali: il punto C'

Costruzione:

hretta: hretta MN

hperpendicolare: hretta RS

Intersezione di due oggetti: il punto A'

hsemiretta: hsemiretta A'N

htrasporto di un segmento: il segmento A'B'

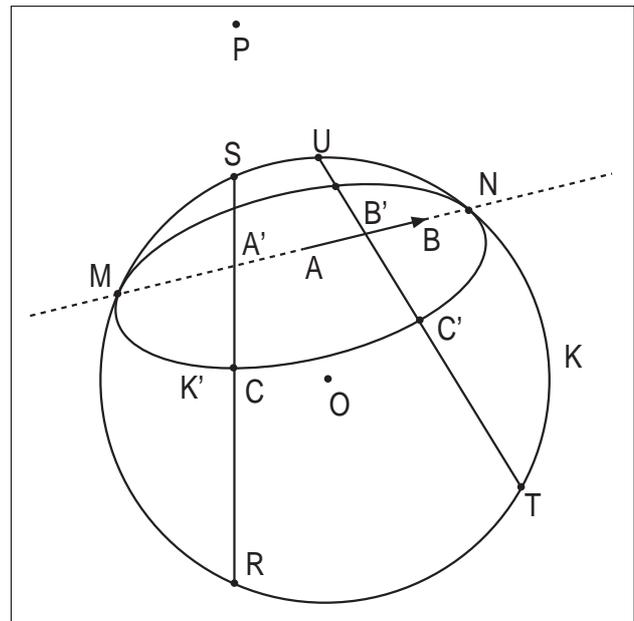
hperpendicolare: hretta TU

Retta: la retta r

polo: il punto P

ciclo (di centro P e passante per C): l'ellisse K'

Intersezione di due oggetti: il punto C'



Osservazione: questa Macro non funziona se uno degli estremi del vettore coincide con O. Essa descrive lo spostamento del punto C lungo la curva equidistante alla hretta MN in modo tale che la proiezione dell'arco percorso sulla hretta sia uguale al modulo del vettore.

Hspostamento parallelo

Oggetti iniziali: la circonferenza K, il punto A e il vettore BC

Oggetti finali: il punto A'

Descrizione della costruzione:

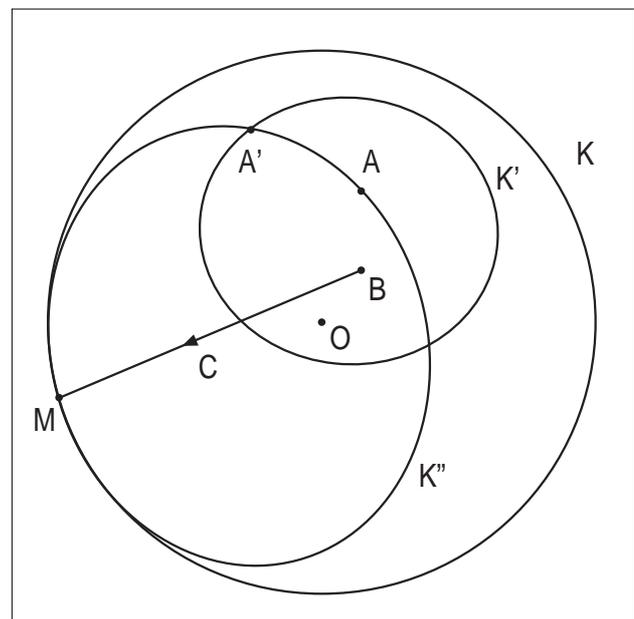
hsemiretta: la hsemiretta BM

ciclo (di centro M e passante per A): l'ellisse K''

hcompasso (di centro A e raggio BC): l'ellisse K'

Intersezione di due oggetti: il punto A'

Osservazione: nella definizione di questa macro, come in molte altre, c'è un problema relativo al fatto che la scelta del punto di intersezione tra le due ellissi fatta dal CABRI risulta casuale e non si possono quindi indicare al programma le modalità attraverso le quali scegliere un punto rispetto a un altro.



Alcune applicazioni

Costruzione della hperpendicolare comune a due hrette date.

Gli oggetti dati sono: la circonferenza K e le hrette AB e MN.

Descrizione della costuzione:

Retta (passante per N ed M): la retta p

polo (di p): il punto P

Retta (passante per A e B): la retta r

polo (di r): il punto R

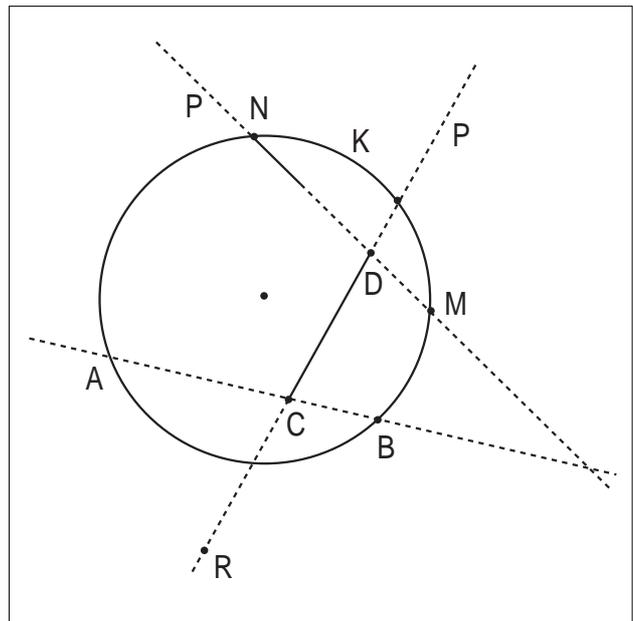
Retta (passante per P e R): la retta s

Intersezione di due oggetti: i punti C e D

hretta: la hretta CD (che è la hperpendicolare comune).

Osservazione: la costruzione ci conferma il noto risultato che esiste una sola perpendicolare comune a due hrette iperparallele. Infatti per due punti passa una e una sola retta, e questa retta interseca la circonferenza solo se le hrette date si incontrano in un punto ultraideale.

Possiamo verificare sperimentalmente questo fatto con Cabri facendo variare con la manina la posizione reciproca delle hrette AB e CD.



Costruzione di un triangolo equilatero di lato dato.

Gli elementi iniziali sono: la circonferenza K e il segmento AB

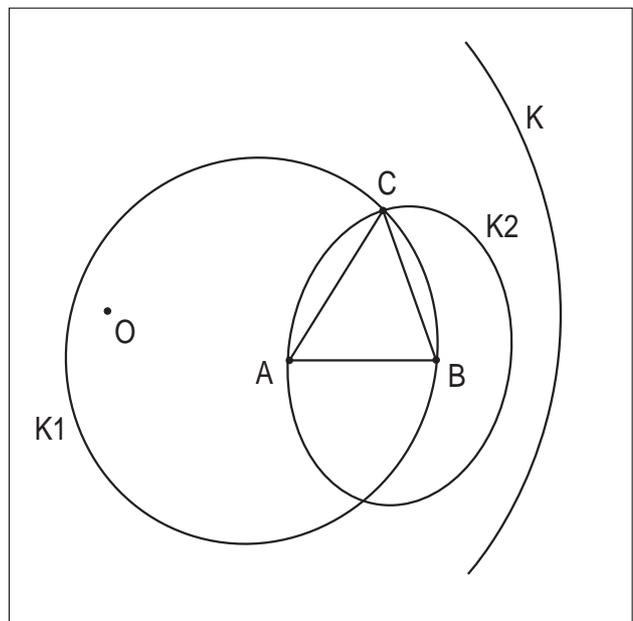
Descrizione della costruzione:

hcirconferenza (di centro A e passante per B): l'ellisse K1

hcirconferenza (di centro B e passante per A): l'ellisse K2

Intersezione di due oggetti: il punto C

Poligono: il triangolo iperbolico equilatero ABC



Costruzione di un hquadrato inscritto in una hcirconferenza.

Gli elementi iniziali sono la circonferenza K e la hcirconferenza K' (di centro O' e passante per A).

Descrizione della costruzione:

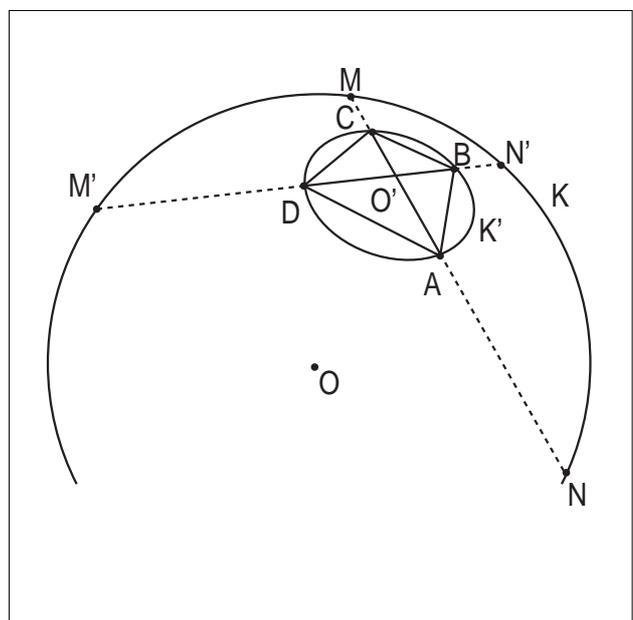
hretta (passante per O' e A): la hretta MN

Intersezione di due oggetti: il punto C

hperpendicolare (da O' a MN): la hretta M'N'

Intersezione di due oggetti: i punti D e B

Poligono: il quadrato iperbolico ABCD



Costruzione di un quadrato iperbolico circoscritto ad una circonferenza.

Gli oggetti iniziali sono la circonferenza K e la hcirconferenza K' (di centro A e passante per B).

Descrizione della costruzione:

hretta (per A e B): la hretta MN

Intersezione di due oggetti: il punto C

hperpendicolare (da B a MN): la hretta RS

hperpendicolare (da C a MN): la hretta $R'S'$

hperpendicolare (da A a MN): la hretta $M'N'$

Intersezione di due oggetti: i punti D e E

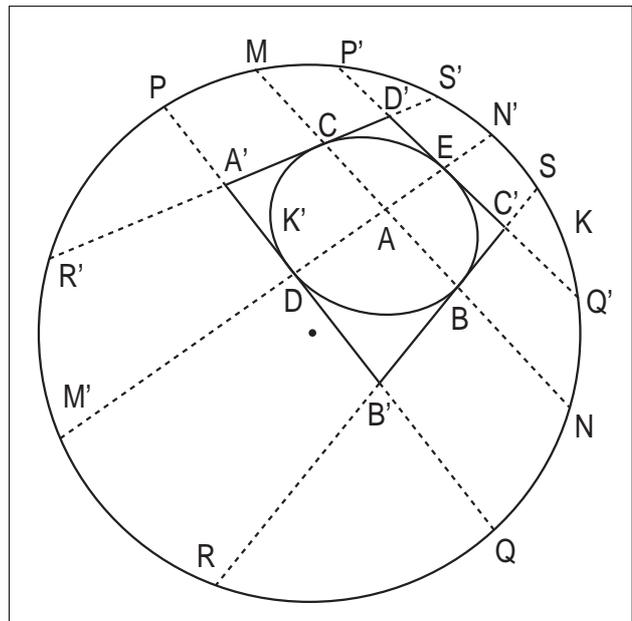
hperpendicolare (da D a $M'N'$): la hretta PQ

hperpendicolare (da E a $M'N'$): la hretta $P'Q'$

Intersezione di due oggetti: i punti A' , B' , C' e D'

Poligono: il quadrato iperbolico $A'B'C'D'$

Osservazione: può essere utile definire la macro "hlato del quadrato circoscritto" da utilizzare nella costruzione dell'hpentagono iscritto.



Costruzione del lato di un esagono iscritto in una hcirconferenza

Gli oggetti iniziali sono la circonferenza K e la hcirconferenza K' (di centro O' e passante per B).

Descrizione della costruzione

Segmento: il segmento $O'B$

hperpendicolare (da O' ad $O'B$): la hretta MN

Intersezione di due oggetti: il punto A

Segmento: il segmento AB

hperpendicolare (da O' ad AB): la hretta $M'N'$

Intersezione di due oggetti: il punto C

hcirconferenza (di centro C e passante per A): hcirconferenza K''

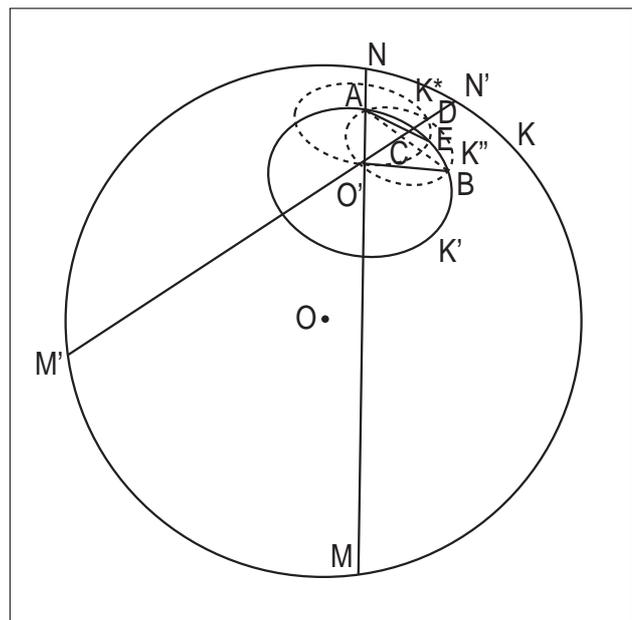
Intersezione di due oggetti: il punto D

hcirconferenza (di centro A e passante per D): la hcirconferenza K^*

Intersezione di due oggetti: il punto E

Segmento: il segmento AE (che è il lato dell'esagono regolare iperbolico iscritto nella hcirconferenza K').

Osservazione: può essere utile definire una macro "hlato dell'esagono iscritto" da utilizzare nella costruzione successiva.



Costruzione di un hlato del pentagono iperbolico regolare iscritto in una hcirconferenza.

Gli oggetti iniziali sono la circonferenza K e la hcirconferenza K' di centro O' e passante per A .

Descrizione della costruzione:

hlato del quadrato circoscritto: il segmento BF (tangente in A a K')

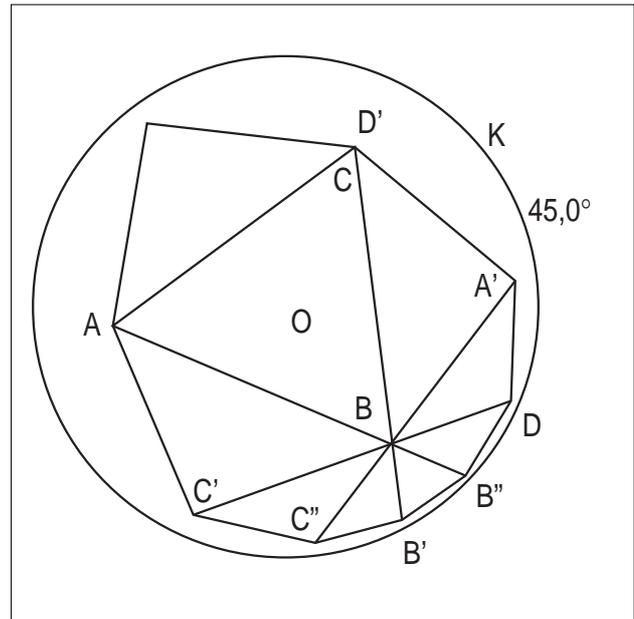
Intersezione di due oggetti: il punto B
 hcirconfenza (di centro B e passante per M): l'ellisse
 K2
 Intersezione di due oggetti: il punto C
 hcirconfenza (di centro C e passante per B): l'ellisse K3
 Intersezione di due oggetti: il punto D
 Poligono: il pentagono MNBCD (che è un hpentagono
 regolare)
 Osservazione: la hcirconfenza K4 (di centro D e pas-
 sante per C) interseca K' nel punto M:

**Tassellazione del piano iperbolico con trian-
 goli equilateri**

Gli elementi iniziali sono la circonferenza K e il suo cen-
 tro O

Descrizione della costruzione:

Poligono regolare (triangolo di centro O): il triangolo
 ABC
 hmisura di un angolo: hmisura dell'angolo ABC (si sposta
 B con la manina facendo in modo che tale misura risulti
 uguale a 45°)
 hriflessione (di C rispetto a AB): il punto C'
 Poligono: il triangolo ABC'
 hriflessione (di A rispetto a C'B): il punto C''
 Poligono: il triangolo BC'C''
 hriflessione (di C' rispetto a C''B): il punto B'
 Si prosegue in maniera analoga per i punti e i triangoli
 successivi. Il punto D' (hriflesso di D rispetto ad A'D)
 coinciderà con A.

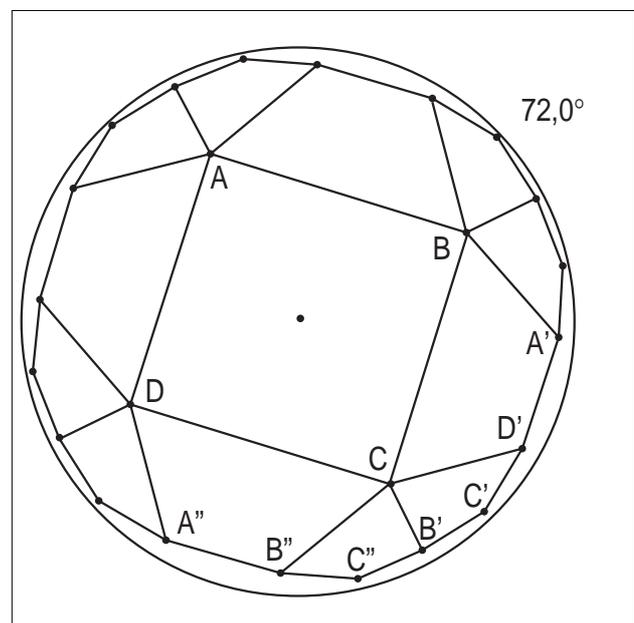


**Tassellazione con quadrati il cui angolo ha
 misura iperbolica uguale a $72,0^\circ$.**

Gli elementi iniziali sono la circonferenza K e il suo centro.

Descrizione della costruzione:

Poligono regolare (quadrato di centro O): il quadrato
 ABCD
 hmisura di un angolo (hmisura dell'angolo ABC): il
 numero $72,0^\circ$ (si sposta con la manina un vertice fino ad
 ottenere il numero 72°)
 hriflessione (di A rispetto a BC): il punto A'
 hriflessione (di D rispetto a BC): il punto D'
 Poligono: il quadrato iperbolico BA'D'C
 hriflessione (di A' rispetto a CD'): il punto C'
 hriflessione (di B rispetto a CD'): il punto B'
 Poligono: il quadrato CD'C'B'
 Si prosegue nella stessa maniera per la realizzazione dei
 quadrati iperbolici CB'C''B'' e CB''A''D'' (dove D'' che è
 l'hriflesso di B' rispetto a CB'', coincide con D)
 Osservazione: Se si sposta con la manina uno dei verici
 del quadrato l'angolo iperbolico cambia (aumenta o dimi-
 nuisce) e il riflesso di B' rispetto a CB'' non coincide più
 con D.



Tassellazione con pentagoni regolari i cui angoli hanno misura iperbolica 90° .

Si procede in modo analogo alla tassellazione con quadrati. In questo caso E'' (che è il riflesso di E' rispetto a DC') coincide con E .

Nelle pagine precedenti abbiamo dato alcune costruzioni iperboliche. Val la pena comunque notare che in generale esse fanno uso dei punti all'infinito e all'ultra-infinito e quindi, pur essendo perfettamente valide per dimostrare l'esistenza degli oggetti costruiti nel piano iperbolico, non sono direttamente traducibili come costruzioni in esso.

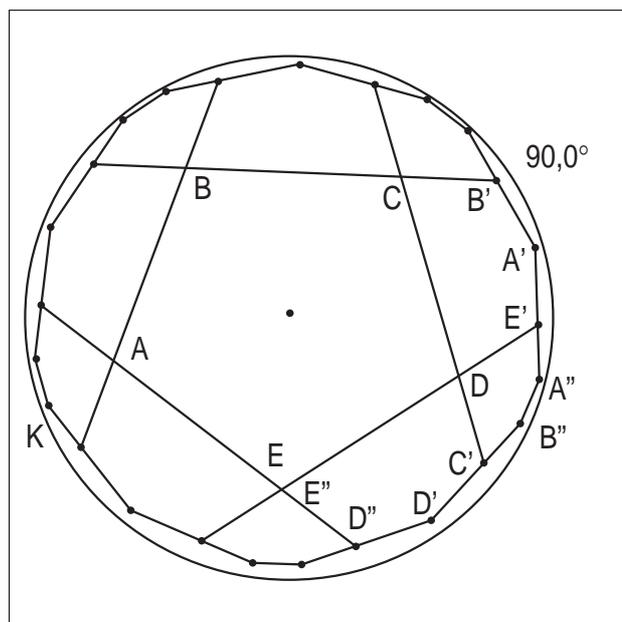
Ad esempio la nostra costruzione delle hparallele limite dal punto P alla retta r consisteva nel *congiungere* P con i punti all'infinito di r . Ma questi punti all'infinito sono proprio definiti come i punti comuni a due hparallele limite. Ciò da luogo ad un circolo vizioso. Quindi con le costruzioni precedenti si è solo dimostrata l'esistenza delle hparallele, ma non si è data una costruzione effettiva nel piano.

Se si esaminano le costruzioni effettuate, quelle che necessitano di essere tradotte in costruzioni nel piano iperbolico sono in genere quelle che richiedono di connettere punti tra i quali almeno uno è improprio. I casi possibili sono quindi:

- Un punto proprio con un punto all'infinito (equivalente alla costruzione dell'hparallela da un punto a una hsemiretta)
- Un punto proprio P con un punto all'ultra-infinito (determinato da due hrette ultraparallele). La costruzione si riduce a determinare la hperpendicolare da P alla hperpendicolare comune alle due hrette.
- Due punti all'infinito (cioè la hparallela comune a due hsemirette).
- Un punto all'infinito con un punto all'ultra-infinito (equivale a costruire una hretta hparallela a una hsemiretta e hperpendicolare a una hretta).
- Due punti all'ultra-infinito (non è generalmente possibile, ma se le due hperpendicolari comuni sono ultraparallele basta prendere la loro perpendicolare comune).

Si comprende così come queste costruzioni siano in qualche modo basilari per tradurre le costruzioni nel modello nel piano iperbolico e abbiano uno "status" particolare tra le costruzioni possibili. Alcune sono di Hilbert e tutte possono vedersi in un apposito paragrafo di Coxeter

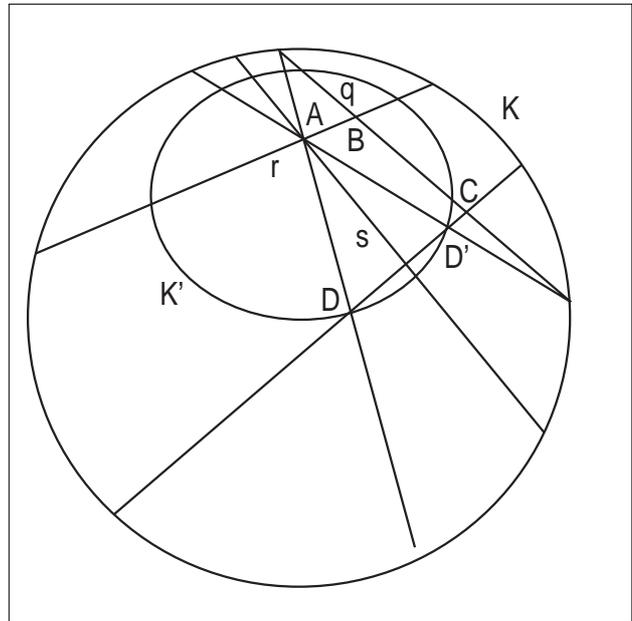
Seguendo Coxeter diamo di seguito delle costruzioni effettive di oggetti geometrici nel piano iperbolico senza far uso dei punti all'infinito (Naturalmente è lecito per *dimostrare* la validità delle costruzioni ritornare al modello completo, cioè al piano proiettivo).



Dato un punto A e una hretta q costruire le hparallele per A a q.

Descrizione della costruzione:

- hperpendicolare (per A alla hretta q): hretta r
- hperpendicolare (per A a r): hretta s
- Punto su un oggetto: punto C
- hperpendicolare (per C a s): hretta t
- Intersezione di due oggetti: il punto B
- Segmento: il segmento BC
- hcompasso (centro A e raggio BC): hcirconferenza K'
- Intersezione di due oggetti: i punti D e D'
- hretta: le hrette AD e AD'.
- Conclusione: Le hrette AD e AD' sono le hparallele limite dal punto A alla hretta q.

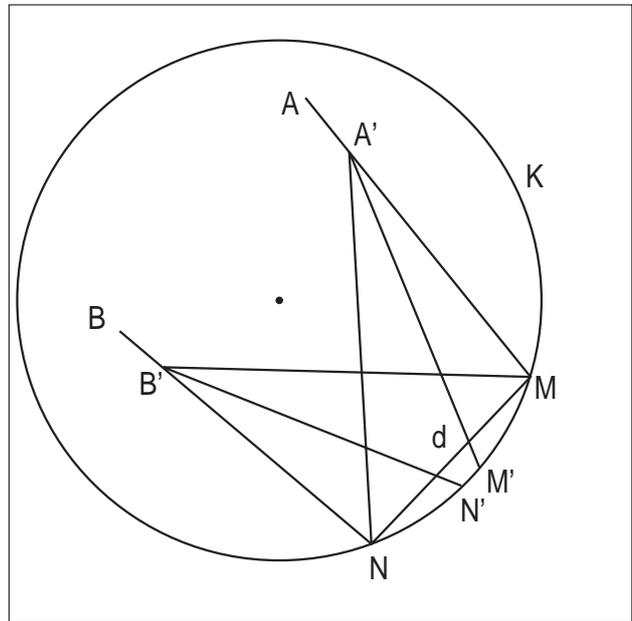


Costruire la hparallela limite comune a due hsemirette non hparallele.

Siano date le hsemirette AM e BN.

Descrizione della costruzione:

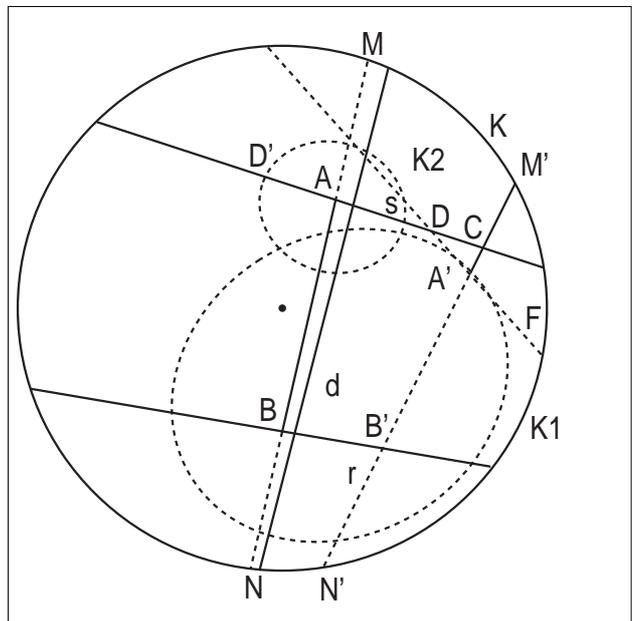
- Punto su un oggetto: il punto A' e il punto B'
- Segmento: il segmento A'N e il segmento B'M
- hbisettrice (dell'angolo MA'N): la hsemiretta A'M'
- hbisettrice (dell'angolo MB'N): la hsemiretta BN'
- hperpendicolare comune: la hretta d (che è la hparallela limite comune cercata)



Date le due hrette ultraparallele r ed s costruire la hperpendicolare comune.

Descrizione della costruzione:

- Punto su un oggetto: i punti A e C (su s)
- hperpendicolare: la hretta MN (hperpendicolare a r per A)
- hperpendicolare: la hretta M'N' (hperpendicolare a r per C)
- Intersezione di due oggetti: i punti B e B'.
- Se $AB=CB'$ la hperpendicolare cercata sarà la congiungente i punti medi di AC e BB'.
- Altrimenti supponiamo $AB < CB'$.
- Segmento: il segmento AB
- hcompasso (di centro B' e raggio AB): l'ellisse K1
- Intersezione di due oggetti: il punto A'
- hsemiretta: la hsemiretta A'N'
- htrasporto di un angolo (dell'angolo CAB sulla hsemiretta A'N'): il segmento A'F
- hretta: hretta A'F
- intersezione di due oggetti: il punto D
- Segmento: il segmento A'D
- hcompasso (di centro A e raggio AD): l'ellisse K2
- Intersezione di due oggetti: il punto D' (scelto rispetto ad A dalla parte opposta di C)
- hasse (di DD'): la hretta d (che è la hperpendicolare comune cercata)



Date una hretta r e una hsemiretta p che non sia nè hperpendicolare nè hparallela a r , costruire una hretta che sia hparallela a p e hperpendicolare a r .

Indichiamo con A l'origine della hsemiretta e con M il suo punto all'infinito.

Descrizione della costruzione:

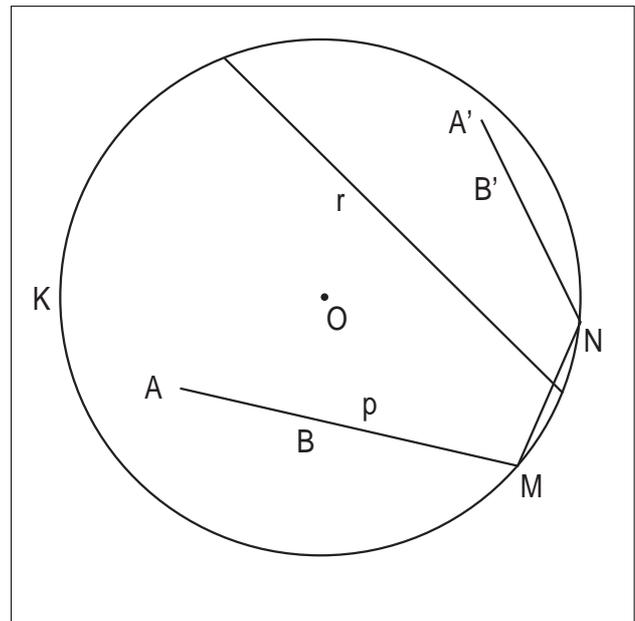
hriflessione (di A rispetto a r): il punto A'

Punto su un oggetto: il punto B

hriflessione (di B rispetto a r): il punto B'

hsemiretta (di origine A' , passante per B'): la hsemiretta $A'N$

hretta: la hretta MN



Congiungere un punto all'infinito con un punto all'ultra infinito.

Siano date le hrette ultraparallele MN e $M'N'$ e la hsemiretta AL .

Descrizione della costruzione:

hperpendicolare comune (alle due hrette ultraparallele date): la hretta ST

hriflessione (di A rispetto a ST): il punto A'

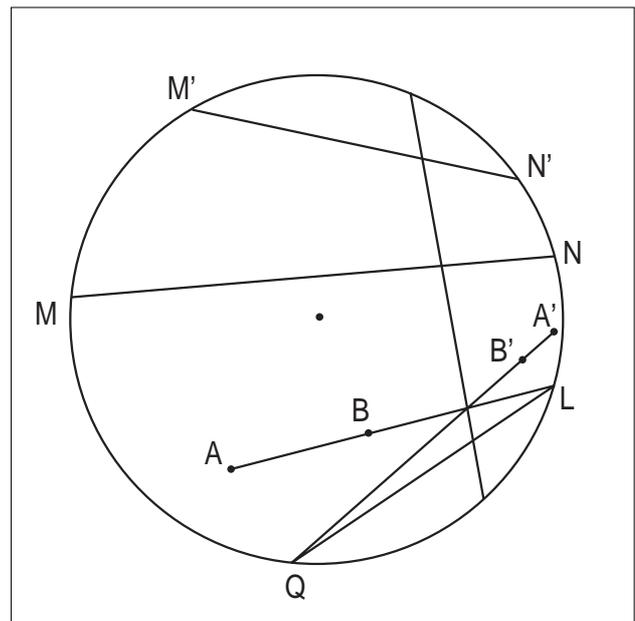
Punto su un oggetto: il punto B

hriflessione (di B rispetto a ST): il punto B'

hsemiretta (di origine A' e passante per B'): hsemiretta $A'Q$

hretta: hretta QL

Osservazione: QL è hperpendicolare alla hperpendicolare comune e hparallela alla hsemiretta data.



Bibliografia

- Barbarin P.**, *La géométrie non euclidienne*, (1920), Rééd Gabay 1990.
- Coxeter H.S.M.** *The trigonometry of Escher's woodcut "circle limit III"*, Math. Intelligencer vol 18 n.4 (1996) 42-46
- Coxeter H.S.M.**, *Non-Euclidean Geometry*, University of Toronto Press 1968
- Dedò M.**, *Trasformazioni geometriche*, Zanichelli Decibel 1997
- Hege H. –C. –Polthier K.**, *Visualitaton and Mathematics – Experiments, Simulations and Environments*, Springer 1997
(pagg.21-36)
- Hilbert D.**, *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli 1968
- Margiotta G.**, *Cabri come strumento di esplorazione della geometria non euclidea*, Quaderni di CABRIRRSAE (n° 10) 1995
- Poincaré J. H.**, *La scienza e l'ipotesi*, edizioni Dedalo 1989
- Sernesi E.**, *Geometria I*, Bollati Borngieri 1989
- Trudeau R.** *La rivoluzione non euclidea* –Bollati Boringhieri 1991

Nel quaderno n.10 di Cabriirrsae
è stato presentato
il modello di Poincaré
del piano iperbolico.

Si presenta qui un altro modello,
quello di Beltrami-Klein, secondo un'impostazione
interamente basata
sul concetto di trasformazione
e sulle idee del programma di Erlangen di Klein.

Trasformando le macro in tasti
è possibile costruire una sorta di Cabri iperbolico
di cui vengono indicate alcune applicazioni
alla costruzione dei poligoni regolari
e a problemi di pavimentazione.



I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 2 marzo - aprile 1999, di INNOVAZIONE EDUCATI-
VA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca,
Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna.
Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp.
Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE - Emilia-Romagna.