quaderni di CABRIRRSAE

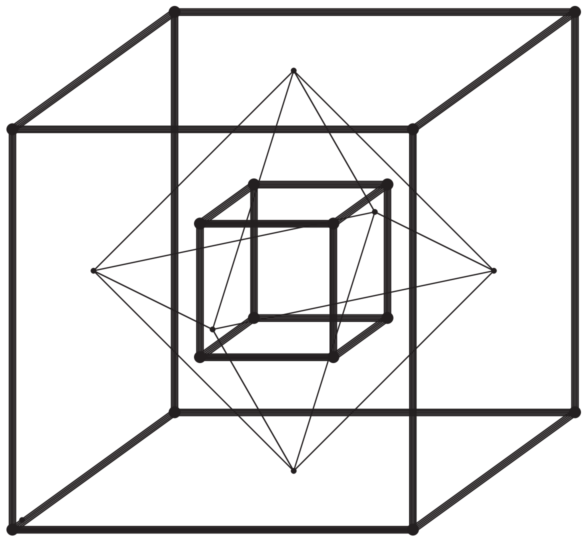
Sandra Bernecoli
Luigi Tomasi

Sezioni piane di un cubo: un problema di geometria dello spazio risolto con Cabri-géomètre

n° 9

Lo spunto per questo lavoro è nato da una conferenza del Prof. Paolo Boieri, tenuta in occasione del XXIV Seminario del Centro di Ricerche Didattiche "U. Morin", Agosto 1995

Sandra Bernecoli, Liceo Scientifico Statale "P. Paleocapa" di Rovigo
Luigi Tomasi, Liceo Scientifico Statale "G. Galilei" di Adria (Rovigo)



Sezioni piane di un cubo: un problema di geometria dello spazio risolto con Cabri-géomètre

Premessa

Vogliamo rappresentare con il programma *Cabri-géomètre* un cubo e le sue diverse sezioni con un piano individuato da tre punti non allineati in modo tale che, variando la posizione dei punti, si possa vedere la deformazione per continuità della figura di intersezione. Nascondendo le linee superflue rimane il disegno del cubo, dei punti e dei segmenti di intersezione del piano con le facce. Spostando i punti varia il poligono ottenuto. Il problema della determinazione delle sezioni è collegato al problema della rappresentazione di un solido nel piano. E' interessante inoltre affrontare il problema della determinazione delle sezioni regolari, degli assi di simmetria, piani di simmetria, centro di simmetria, dei poliedri regolari inscritti. Si potrebbe ulteriormente estendere lo studio alla determinazione dei gruppi delle isometrie di una figura nello spazio.

1. Come rappresentare un cubo

Essendo *Cabri-géomètre* un programma di geometria piana, il primo problema che si presenta è quello della rappresentazione del cubo.
Per semplicità e per non appesantire la costruzione successiva utilizziamo l'assonometria obliqua cavaliera: gli assi assonometrici sono situati in modo che due di essi sono fra loro ortogonali e il terzo diretto arbitrariamente. Le scale saranno pertanto uguali sui primi due assi e arbitraria lungo il terzo. Noi sceglieremo come segmento unitario, lungo il terzo asse, un segmento che è la metà dei segmenti scelti come unità negli altri due.
L'argomento della rappresentazione di un oggetto secondo le regole della geometria descrittiva verrà affrontato nel successivo paragrafo 3.

2. Sezioni piane di un cubo.

Problema
Dato un cubo ABCDA'B'C'D' e un piano determinare tutte le possibili sezioni del cubo.

Sia dato il cubo ABCDA'B'C'D'. Chiamiamo x la retta dello spigolo A'D', y la retta dello spigolo D'C' e z la retta dello spigolo DD' (vedi Figura 2).

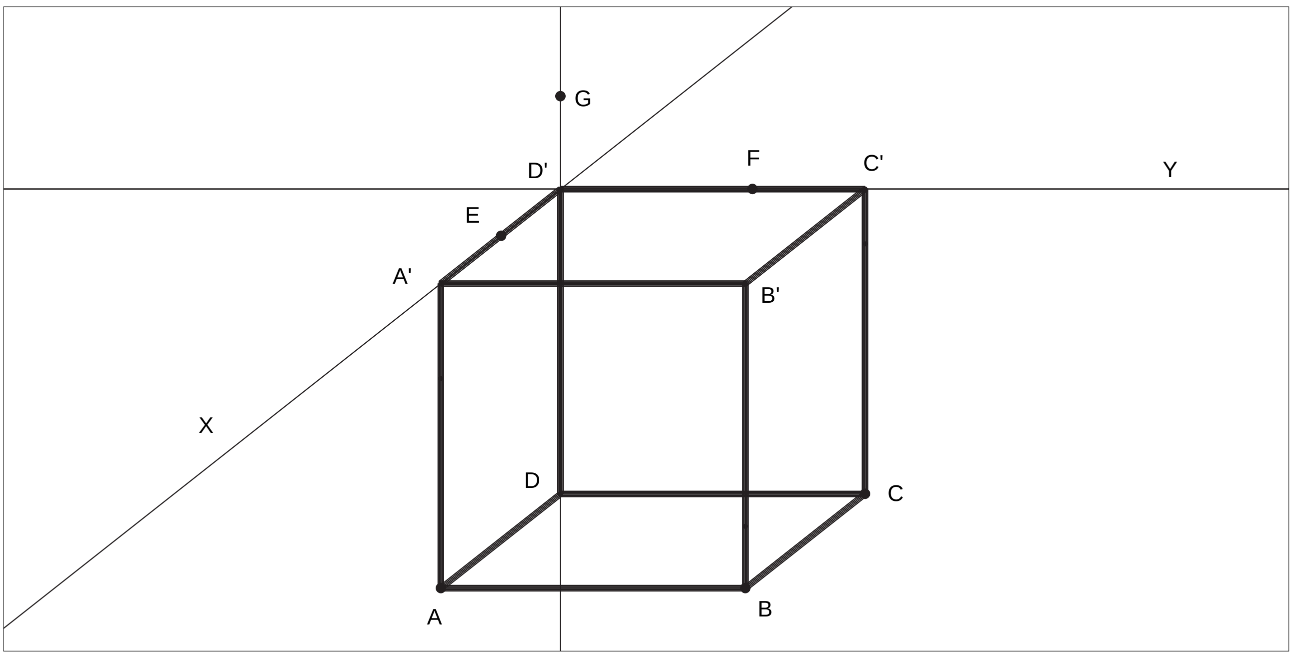


Figura 2 Sezioni del cubo individuato dal piano per i punti E, F,

Per la risoluzione grafica del problema con Cabri-géomètre, possiamo limitarci a considerare i tre casi seguenti (essendo le altre situazioni equivalenti), costruendo tre figure, e quindi tre file, diversi.

1. Consideriamo i piani che intersecano le rette ortogonali x, y, z limitandoci a quelli che intersecano i due spigoli A'D' e D'C' rispettivamente in E e F e la retta z in G. (Piani obliqui)
2. Consideriamo i piani paralleli ad una di queste rette, es. z, e intersecanti gli spigoli A'D' e D'C' rispettivamente in E e F. (Il caso 2 può essere considerato come un caso limite del precedente quando facciamo "allontanare" G sull'asse z in una delle due direzioni.)
3. Consideriamo i piani paralleli al piano di due rette, ad esempio z e y, e intersecanti lo spigolo A'D' in E

I casi 2 e 3 sono molto semplici da analizzare. La figura è un rettangolo (in casi particolari un quadrato o un segmento).

Il primo caso invece richiede un'analisi più dettagliata, con costruzioni successive e sovrapposte un po' ingegnose, a seconda che l'intersezione del piano con le rette degli spigoli appartenga agli spigoli o al loro prolungamento. In tale caso si possono ottenere esagoni (eventualmente regolari); pentagoni (mai regolari); quadrilateri (eventualmente dei quadrati), triangoli (eventualmente equilateri), segmenti. (vedi Figure 2a, 2b, 2c, 2d; 2e).

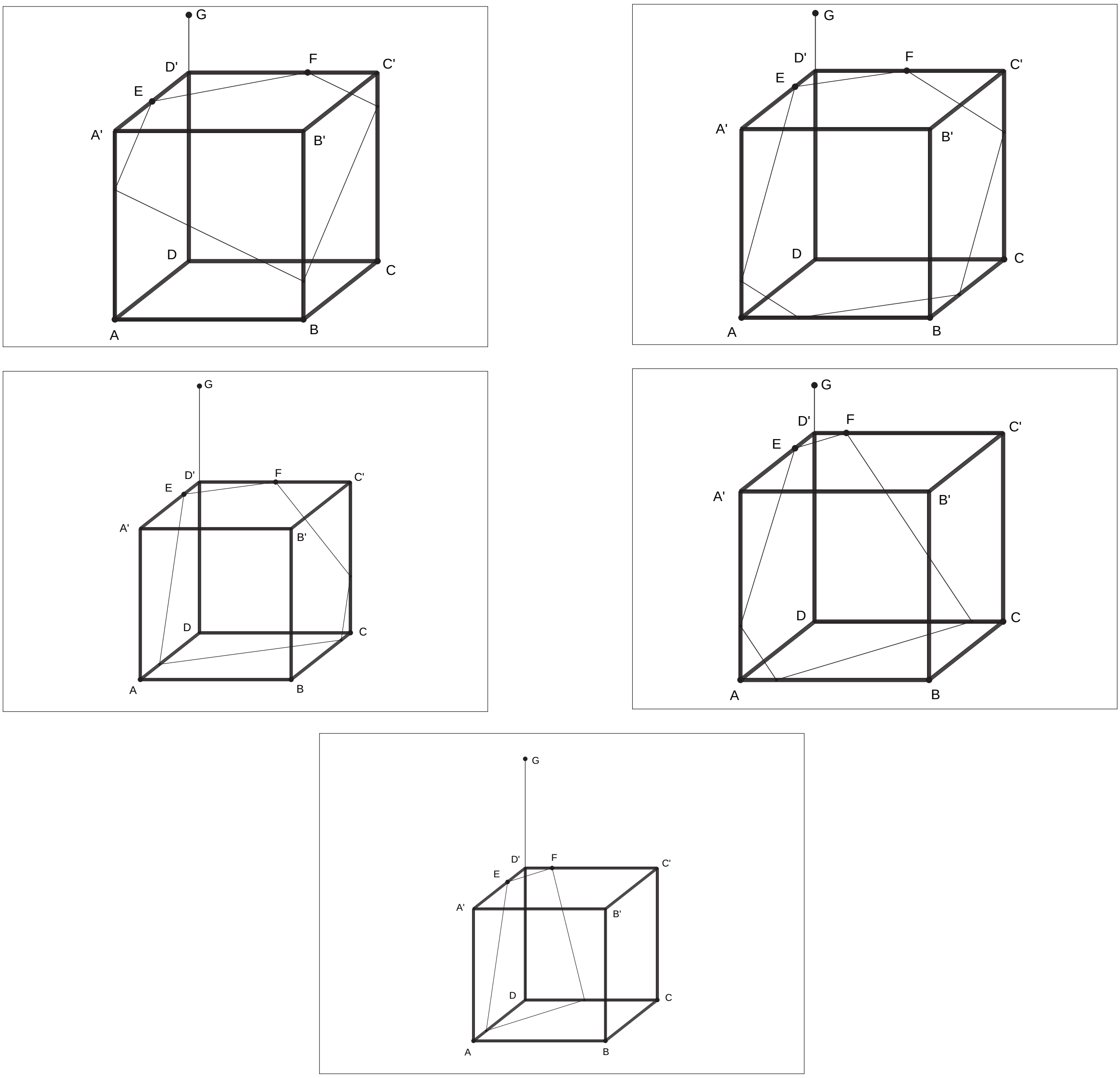


Figure 2a,2b, 2c, 2d, 2e Esempi di sezioni del cubo individuato dal piano per i punti E, F,G

2.1 Primo caso: sezione ottenuta con un piano obliquo e costruzione con Cabri-géomètre

La costruzione richiede in più occasioni l'applicazione delle seguenti operazioni con il Cabri-géomètre:

• (Creazione/Punto)
• (Creazione/Segmento)
• (Creazione/Retta per due punti)
• (Costruzione/Punto su un oggetto)
• (Costruzione/Intersezione di due oggetti)
• (Costruzione/Punto medio)
• (Costruzione/Circonferenza (centro/punto))
• (Costruzione/Retta parallela)
• (Costruzione/Retta Perpendicolare)

Le operazioni richieste per la costruzione sono elementari ma è necessaria un po' di attenzione; inoltre, via via che la costruzione procede, sarà opportuno nascondere delle linee o farle riapparire, a seconda del momento, per poi nasconderle tutte al termine del lavoro.
Senza esplicitare tutte le operazioni elementari da compiere indichiamo un possibile percorso.

Iniziamo con il rappresentare il cubo e definire il piano

a) Viene disegnato il cubo partendo da tre punti A, B, C non allineati e tali che: AA' è perpendicolare al segmento AB e AA' = AB, mentre BC è metà di AB e di direzione arbitraria (assonometria cavaliera)
In questo caso, per esempio, si creano due punti A e B, si determina C come punto generico della circonferenza di centro B e passante per il punto medio del segmento AB, poi si determina A' come intersezione della circonferenza di centro A e passante per B con la perpendicolare per A alla retta AB e, successivamente, costruendo parallele e intersezioni di coppie di rette si costruiscono i punti D, A', B', C', D' e i segmenti spigoli del cubo.

b) Si scelgono i punti E sul segmento D'A', F sul segmento D'C' e G sulla retta DD': i punti E, F, G, salvo casi particolari, individuano un piano che seziona il cubo.

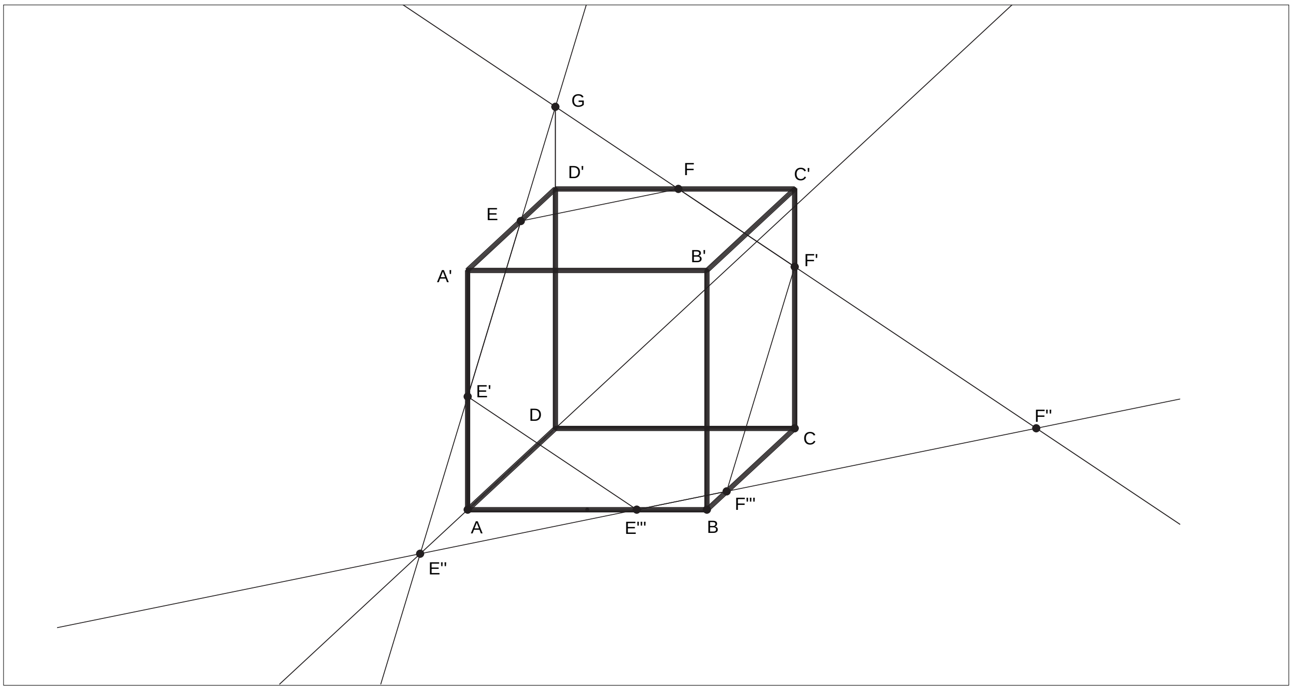


Figura 2.1 Sezione esagonale del cubo (il piano interseca AA', CC', AB e BC).

Si devono ora esaminare le seguenti situazioni diverse che portano alle varie costruzioni.
Terminato il disegno e nascoste le linee al variare dei punti si ottengono i diversi poligoni.

■ Scegliamo un punto G sulla retta DD' ed appartenente alla semiretta esterna al cubo di origine D'. Scegliamo un punto E in modo che si possa considerare l'intersezione E' della retta EG con lo spigolo AA' *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l'intersezione E'' con la retta dello spigolo AD. Se non ci si trova in questa situazione si sposta E sul segmento cui appartiene.
Scegliamo un punto F in modo che si possa considerare l'intersezione F' della retta GF con lo spigolo CC' *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l'intersezione F'' con la retta dello spigolo CD. Se non ci si trova in questa situazione si sposta F.
Consideriamo la retta E''F'' e le intersezioni E''' e F''' con i segmenti AB e BC *(Attenzione: con il segmenti e non con le rette).* Se non esistono E''' e F''' si varia la posizione di E o F o G.
I punti E, E', E''', F''', F', F sono i vertici dell'esagono sezione (vedi Figura 2.1).
Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti.

■ Come il caso precedente ma in questo caso la retta E''F'' non interseca gli spigoli AB e BC ma i loro prolungamenti rispettivamente in E''' e F'''. Sia F* il punto di intersezione della retta per i punti F''' , F' con lo spigolo BB' (F', F''' appartengono al piano della faccia BCC'B') *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)*. F* è un vertice del pentagono sezione EE'F*F'F Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.2).

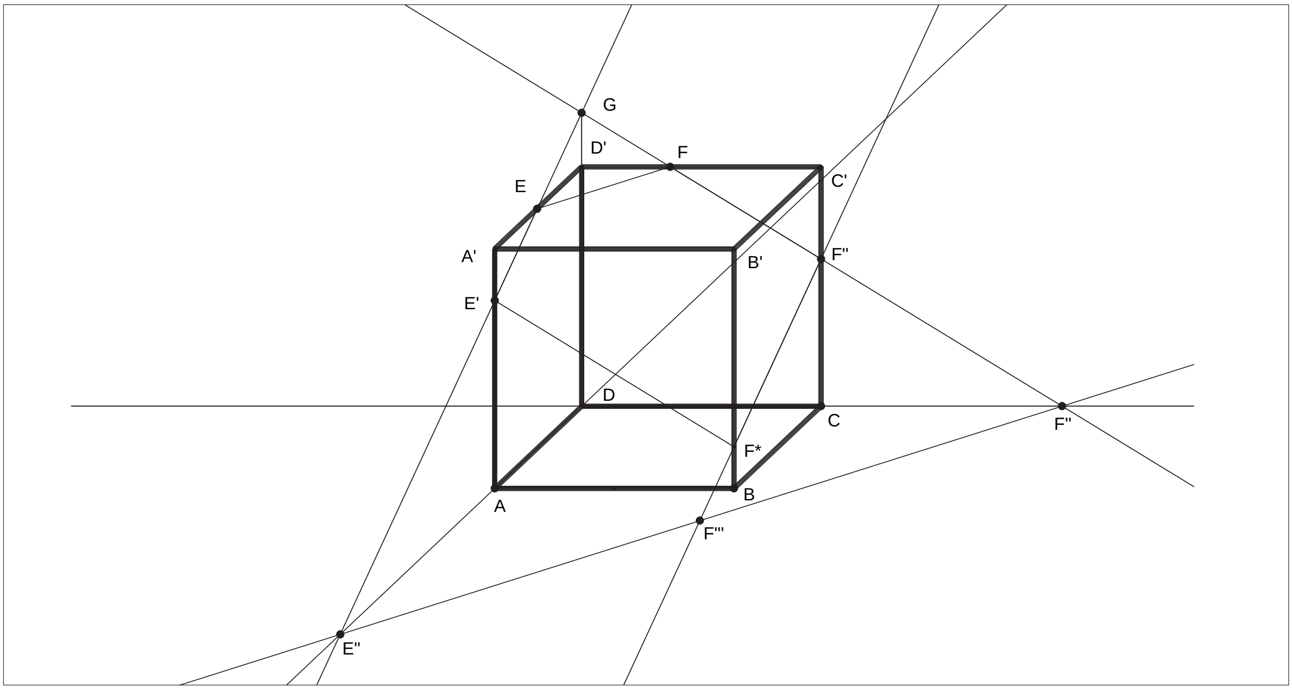


Figura 2.2 Sezione pentagonale del cubo (il piano interseca AA', BB', CC').

■ Scegliamo un punto G sulla retta DD' ed appartenente alla semiretta esterna al cubo di origine D'. Scegliamo un punto E in modo che si possa considerare l'intersezione E'' della retta EG con lo spigolo AD *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l'intersezione E' con la retta dello spigolo AA'. Se non ci si trova in questa situazione si sposta E.
Scegliamo un punto F in modo che si possa considerare l'intersezione F' della retta GF con lo spigolo CC' *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l'intersezione F'' con la retta dello spigolo CD. Se non ci si trova in questa situazione si sposta F.
Consideriamo la retta E''F'' e l'intersezione F* con il segmento BC. *(Attenzione: con il segmento e non con la retta).*

E, E’’, F*, F’, F sono i vertici del pentagono sezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.3).

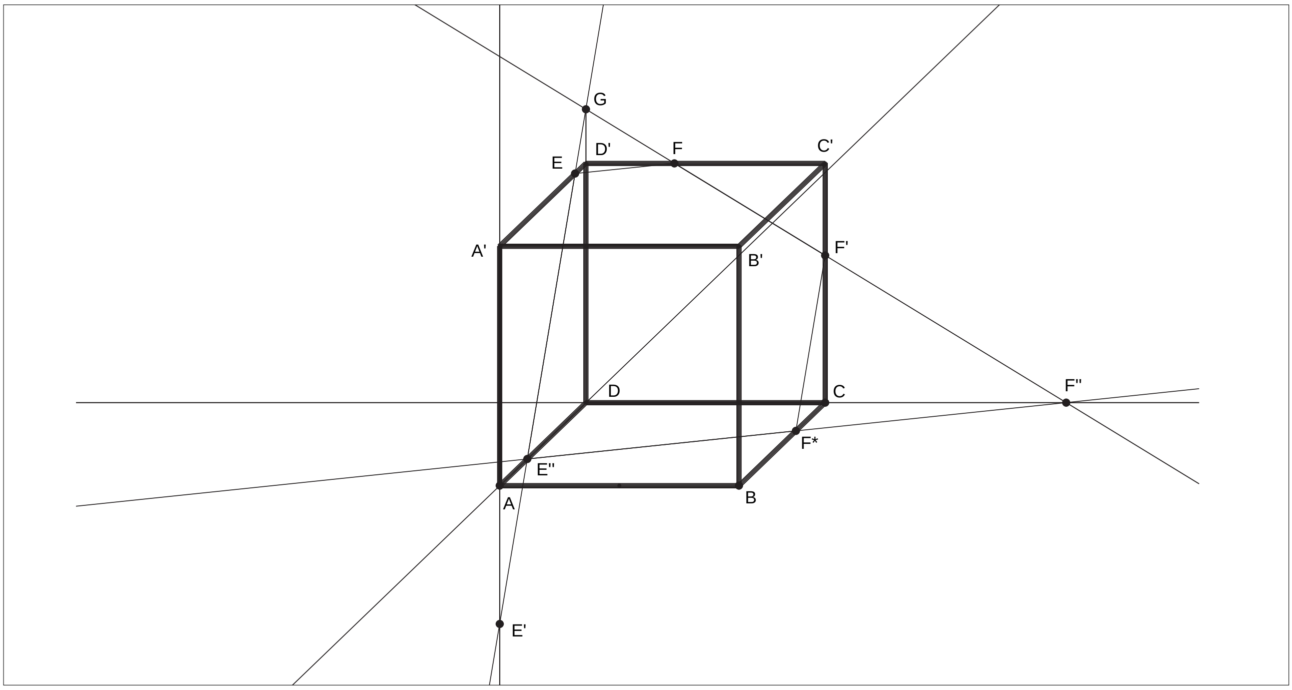


Figura 2.3 Sezione pentagonale del cubo (il piano interseca AD, BC, CC’).

■ Scegliamo un punto G sulla retta DD’ ed appartenente alla semiretta esterna al cubo di origine D’.
Scegliamo un punto E in modo che si possa considerare l’intersezione E’ della retta EG con lo spigolo AA’ *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l’intersezione E’’ con la retta dello spigolo AD. Se non ci si trova in questa situazione si sposta E.
Scegliamo un punto F in modo che si possa considerare l’intersezione F’’ della retta FG con lo spigolo CD *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l’intersezione F’ con la retta dello spigolo CC’. Se non ci si trova in questa situazione si sposta F.
Consideriamo la retta E’’F’’ e l’intersezione F* con il segmento AB *(Attenzione: con il segmento e*

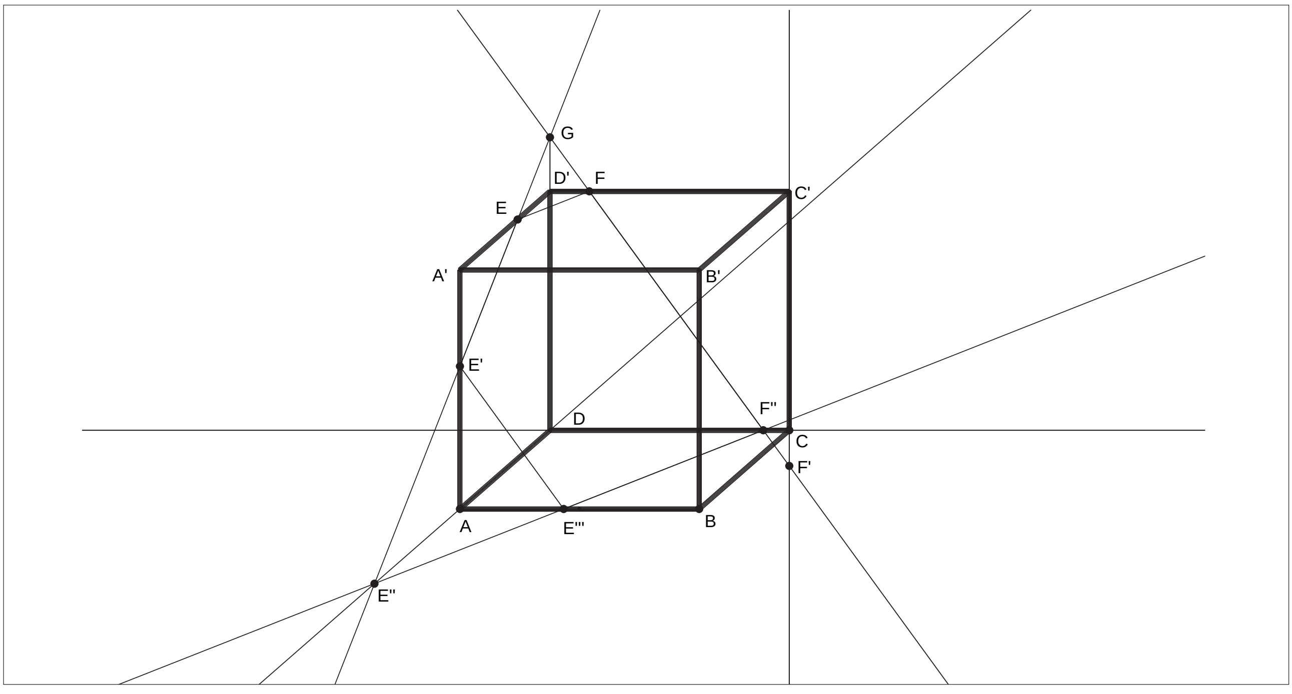


Figura 2.4 Sezione pentagonale del cubo (il piano interseca AA’, AB, CD).

non con la retta).
E, E'', F*, F', F sono i vertici del pentagono sezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.4).

■ Scegliamo un punto G sulla retta DD' ed appartenente alla semiretta esterna al cubo di origine D'.
Scegliamo un punto E in modo che si possa considerare l'intersezione E'' della retta EG con lo spigolo AD *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e l'intersezione E' con la retta dello spigolo AA'. Se non ci si trova in questa situazione si sposta E.
Scegliamo un punto F in modo che si possa considerare l'intersezione F'' della retta FG con lo spigolo CD e l'intersezione F' con la retta dello spigolo CC'. Se non ci si trova in questa situazione si sposta F.
E'' e F'' appartengono alla faccia ABCD.
EE''F''F è il quadrilatero (trapezio) sezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.5).

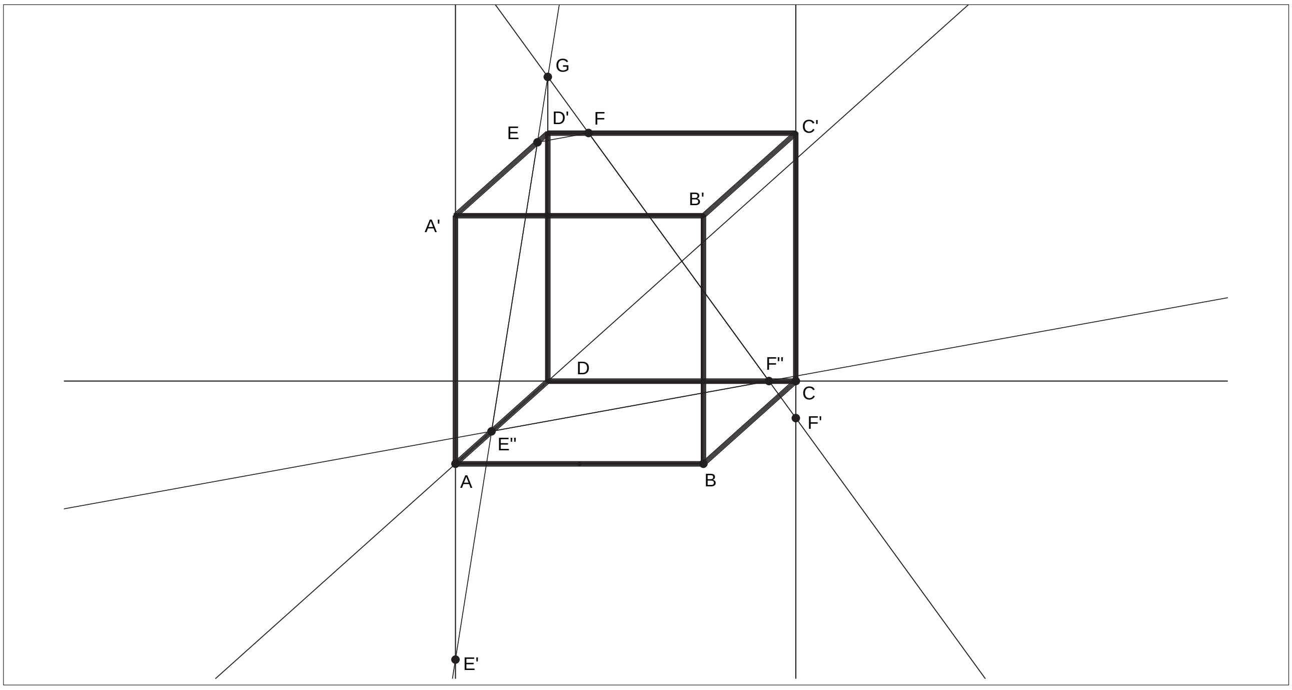


Figura 2.5 Sezione quadrangolare (trapezio) del cubo (il piano interseca AD, DC).

■ Scegliamo un punto G sul segmento DD'.
I punti E, F, G sono i vertici del triangolo sezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.6).

■ Scegliamo un punto G sulla retta DD' ed appartenente alla semiretta esterna al cubo di origine D.
Sia E'' l'intersezione della retta EG con il segmento AD *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)* e F'' l'intersezione della retta GF con il segmento E' *(Attenzione: con il segmento e non con la retta)*
I punti E, E'', F'', F sono i vertici del quadrilatero (trapezio) sezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.7).

Attenzione: procedendo nella costruzione è opportuno nascondere le linee che diventano superflue relativamente ai singoli casi 1., 2. ....7 considerati e far riapparire le rette che in quella situazione servono.

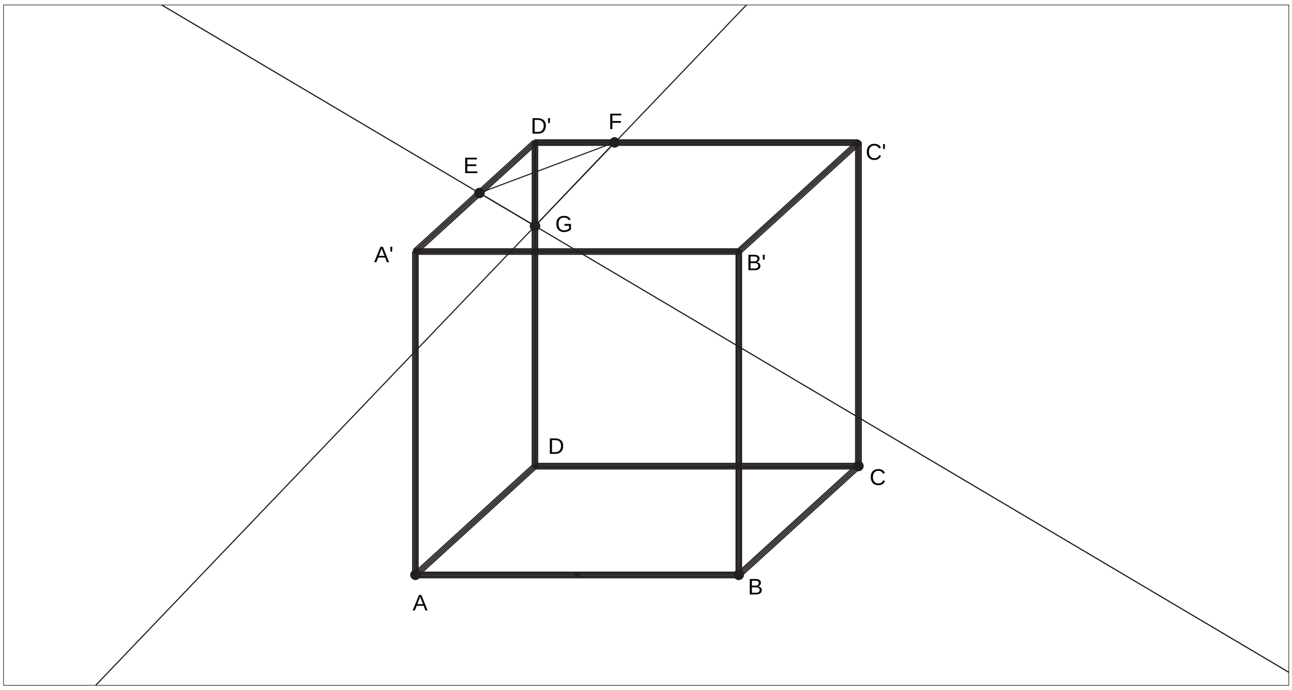


Figura 2.6 Sezione triangolare del cubo (G appartiene allo spigolo DD').

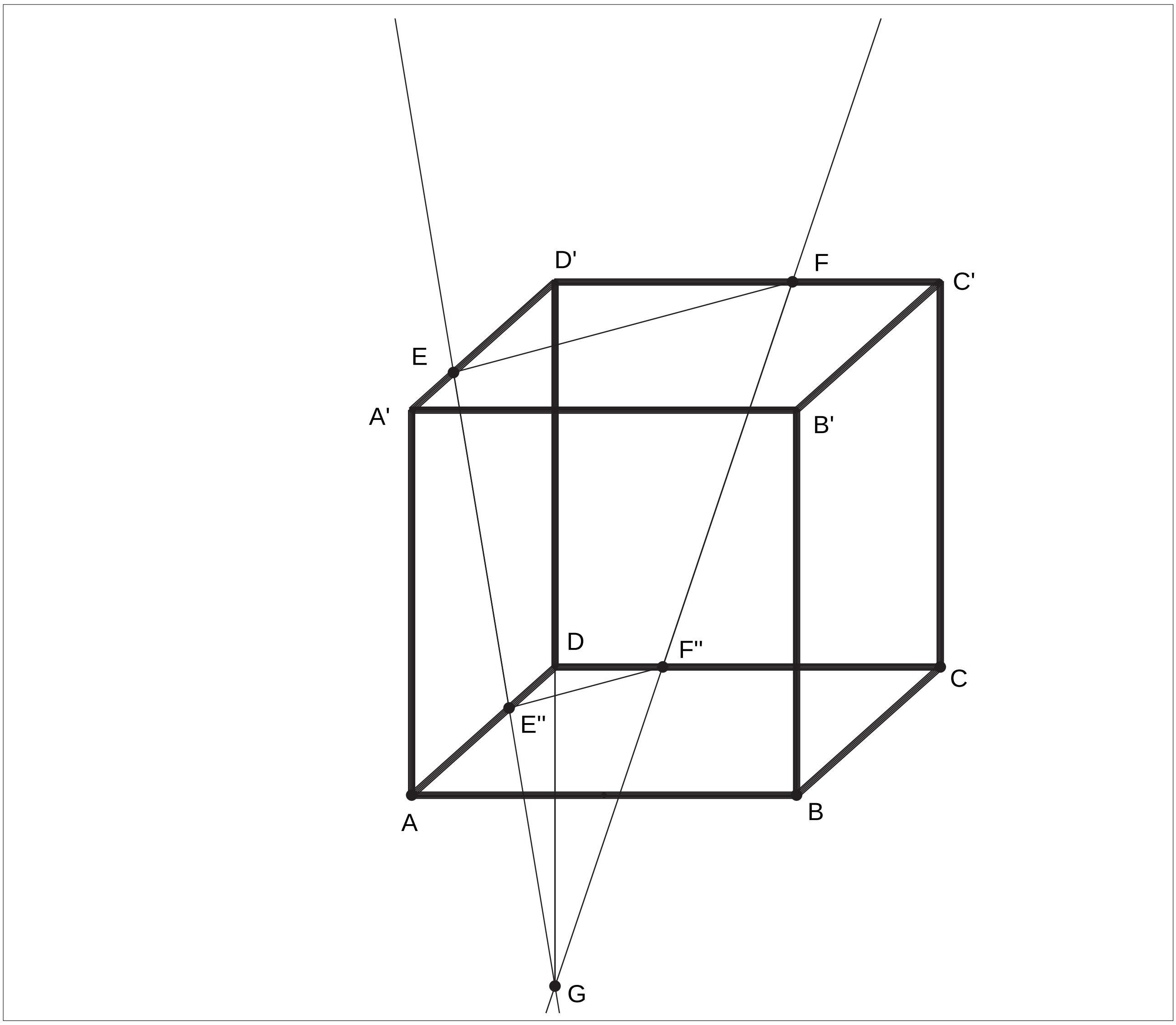


Figura 2.7 Sezione quadrangolare (trapezio) del cubo (il piano interseca AD, DC).

2.2 Secondo caso: sezione ottenuta con un piano parallelo ad un asse coordinato

Questo caso risulta semplice: la figura è sempre un rettangolo o in casi particolari un quadrato od un segmento.
Si parte dal cubo ABCDA'B'C'D' e si costruiscono i punti E sullo spigolo A'D' e F sullo spigolo D'C' *(Attenzione: sul segmento e non sulla retta).* Si costruiscono E'' e F'' come intersezioni delle rette parallele per i due punti E ed F all'asse z. E, E'', F'', F sono i vertici della figura intersezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.8).

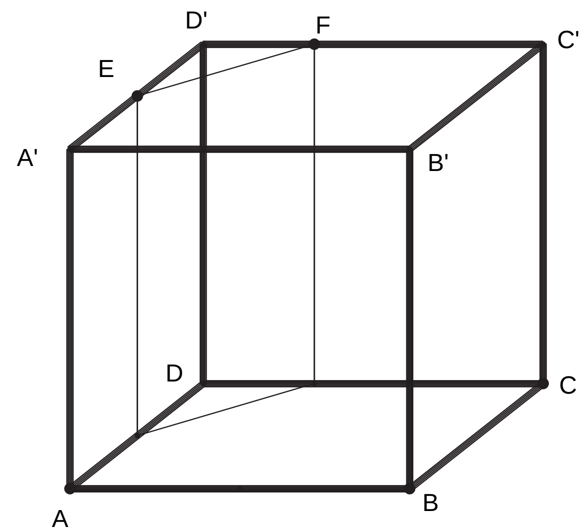


Figura 2.8 Sezione ottenuta (rettangolo) con un piano parallelo ad uno spigolo.

2.3 Terzo caso: sezione ottenuta con un piano parallelo ad un piano coordinato

La sezione è sempre un quadrato.
Si parte dal cubo ABCDA'B'C'D' e si sceglie E sullo spigolo A'D' *(Attenzione: sul segmento e non sulla retta).* Tracciando le parallele agli spigoli si ottengono i punti F su B'C', E'' su AD e F'' su BC. E, E'', F'', F sono i vertici della figura intersezione. Trovati i punti si devono costruire i segmenti che uniscono questi punti (vedi la Figura 2.9).

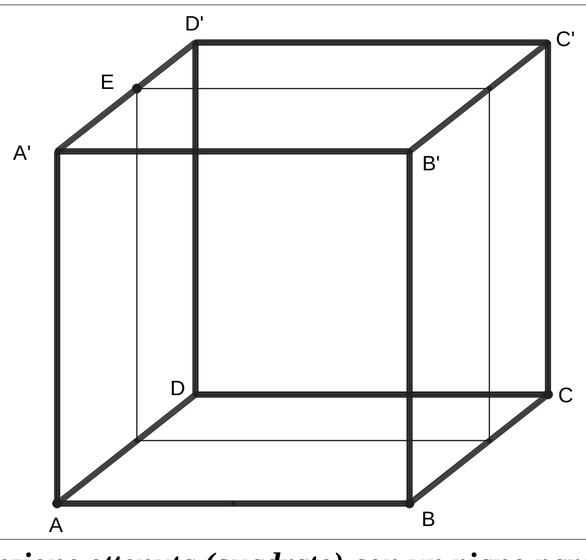


Figura 2.9 Sezione ottenuta (quadrato) con un piano parallelo ad una faccia.

2.4 I poligoni regolari ottenibili come sezioni del cubo

Si possono ottenere come sezioni i seguenti poligoni regolari: triangolo equilatero, quadrato ed esagono regolare (vedi le Figure 2.10)

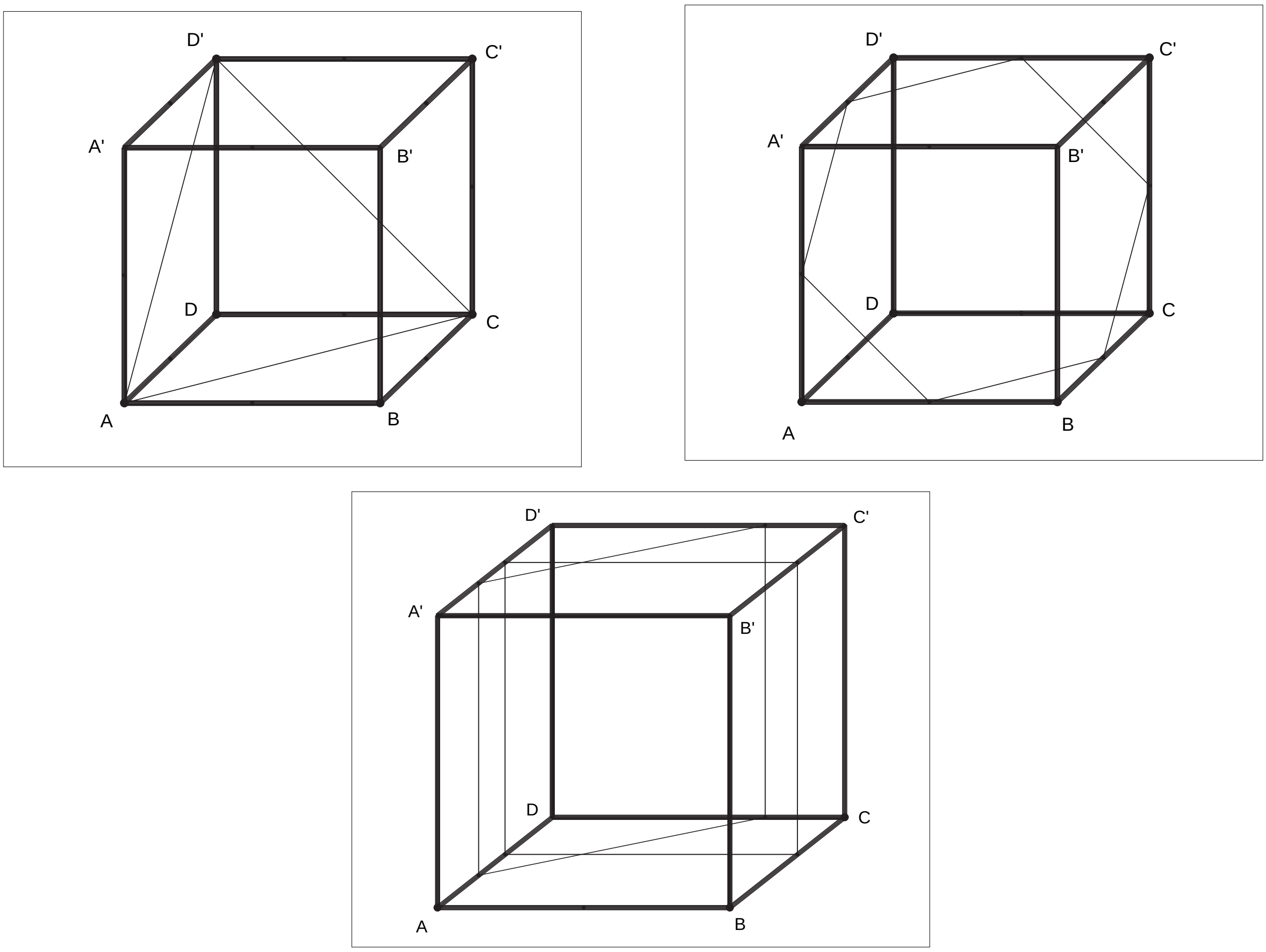


Figure 2.10 Poligoni regolari ottenibili come sezioni del cubo

3. Come rappresentare un cubo: assonometria e prospettiva con Cabri-géomètre

Il programma *Cabri-géomètre* è adatto a trattare argomenti di geometria piana; tuttavia siamo convinti che abbia notevoli potenzialità didattiche, date le sue note caratteristiche di dinamicità e variabilità delle figure, anche per trattare la geometria dello spazio. Del problema della rappresentazione nel piano delle figure dello spazio si occupa la geometria descrittiva che viene studiata nei corsi di disegno di alcune scuole (licei artistici, scuole d'arte e licei scientifici) e università (accademia di belle arti, architettura, alcuni corsi di ingegneria,...), ma da diversi anni non più nel corso di laurea in matematica. Come si fa disegnando su un foglio di carta o alla lavagna occorre pertanto rappresentare le figure dello spazio rispettando le regole della geometria descrittiva.

Problema
Come rappresentare un cubo, o più in generale un solido, secondo la geometria descrittiva ?

Indichiamo di seguito, anche se non in modo esauriente e completo nelle spiegazioni, alcune delle possibili soluzioni. Si consiglia, a questo proposito, la lettura di un buon testo di geometria descrittiva.

3.1 Assonometria parallela ortogonale

Un primo metodo è quello di usare una assonometria parallela ortogonale.
L'oggetto viene visto da molto lontano, teoricamente dall'infinito, e l'immagine viene proiettata su di un piano (detto piano assonometrico) supponendo che i raggi proiettanti siano ortogonali a tale piano. In questo caso bisogna costruire il triedro fondamentale e trovare il rapporto di riduzione esistente tra gli assi reali e la loro proiezione.
Si veda la figura allegata, realizzata con il programma "Cabri-Géomètre" (vedi Figura 3.1).

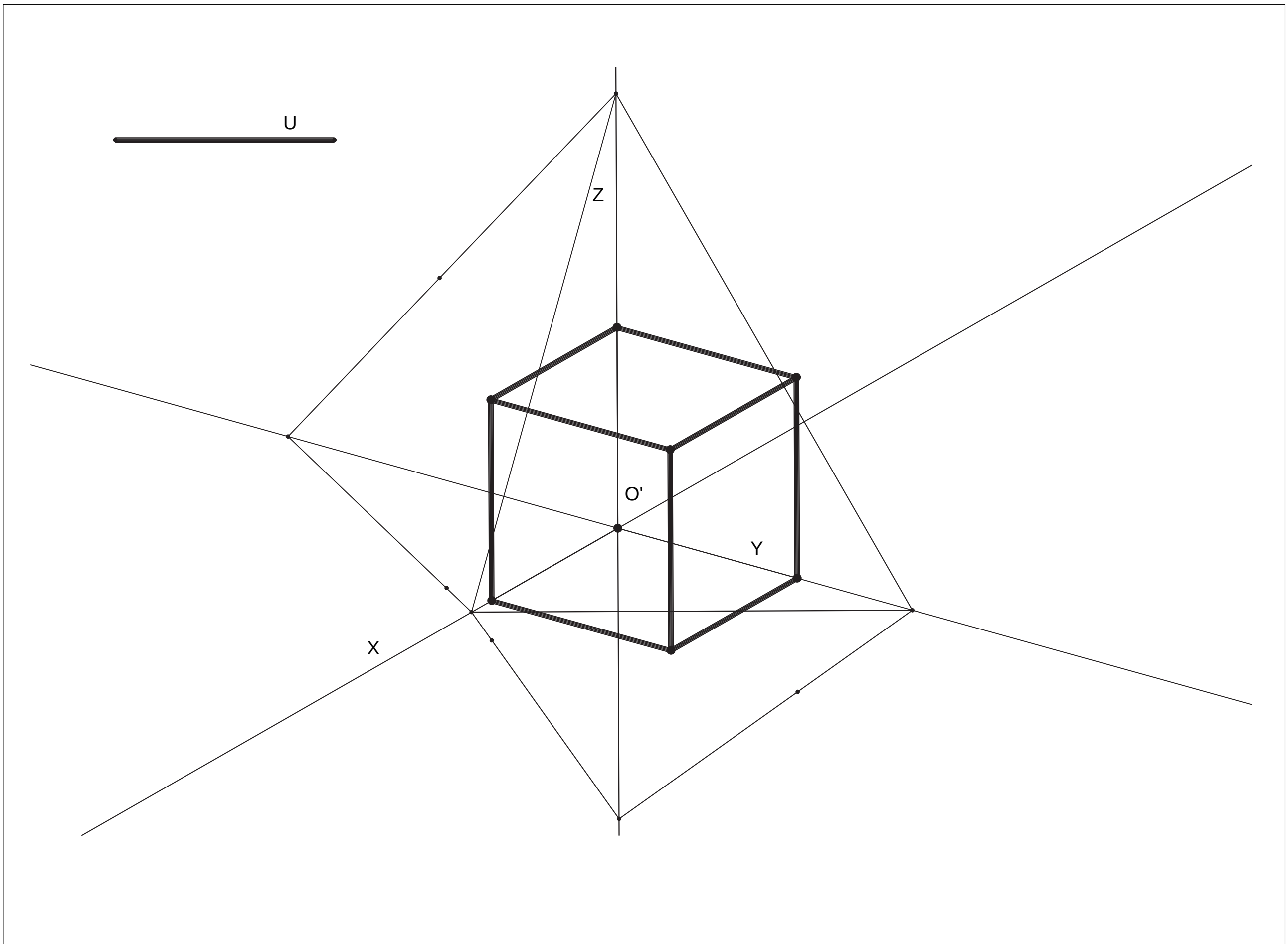


Figura 3.1 Costruzione del rapporto di riduzione con l'assonometria ortogonale

Nel disegno sono stati considerati tre assi x, y z ed un'unità di misura u. Tramite il triedro fondamentale è stato costruito il rapporto di riduzione sui singoli assi e disegnato il cubo di lato unitario. Tutta la figura può essere deformata con continuità al cambiare dei punti base del disegno e degli angoli formati dai tre assi.

Come è noto, esistono diversi sistemi di **assonometrie ortogonali:**
-assonometria ortogonale isometrica (il coefficiente di riduzione è uguale per tutti gli assi.
(Vedi la Figura 3.2).

-assonometria ortogonale dimetrica (il coefficiente di riduzione è uguale per due degli assi)
(Vedi la Figura 3.3).

-assonometria ortogonale trimetrica (il coefficiente di riduzione è diverso per tutti gli assi) (vedi la Figura 3.4).

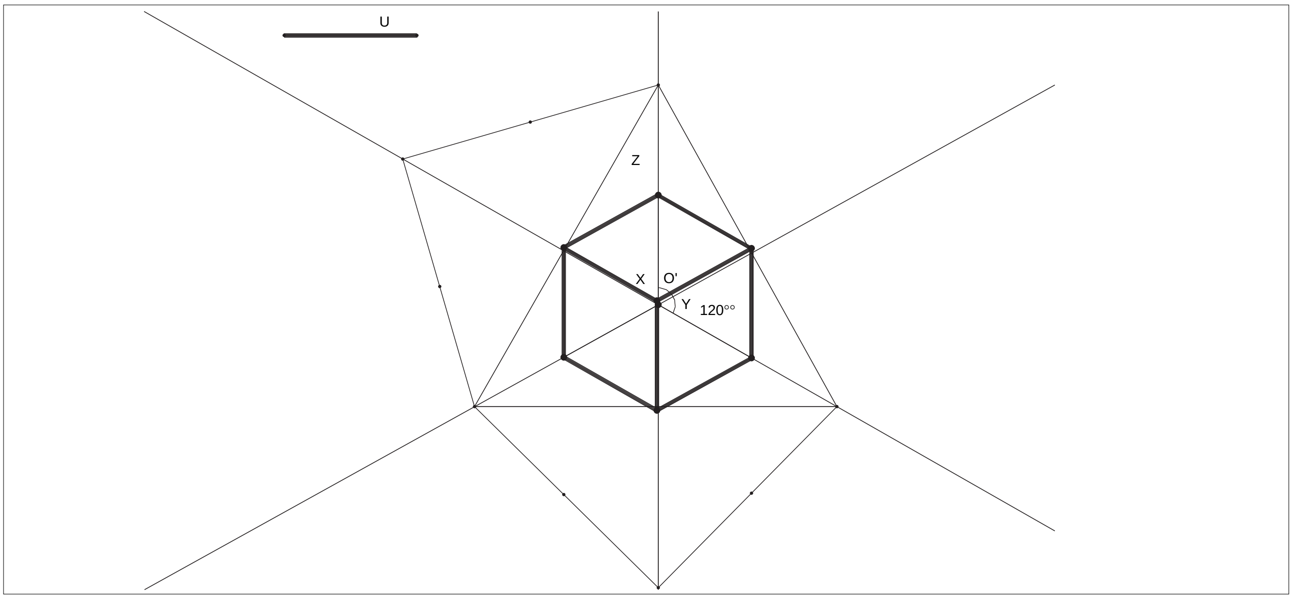


Figura 3.2 Cubo in assonometria ortogonale isometrica

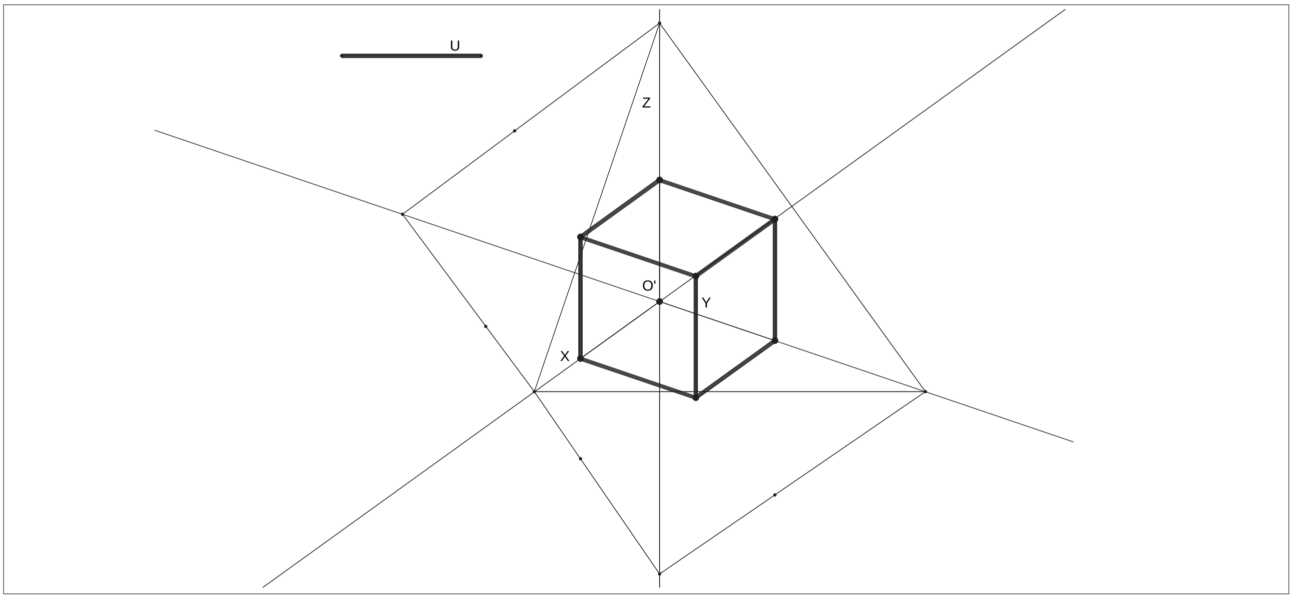


Figura 3.3 Cubo in assonometria ortogonale dimetrica

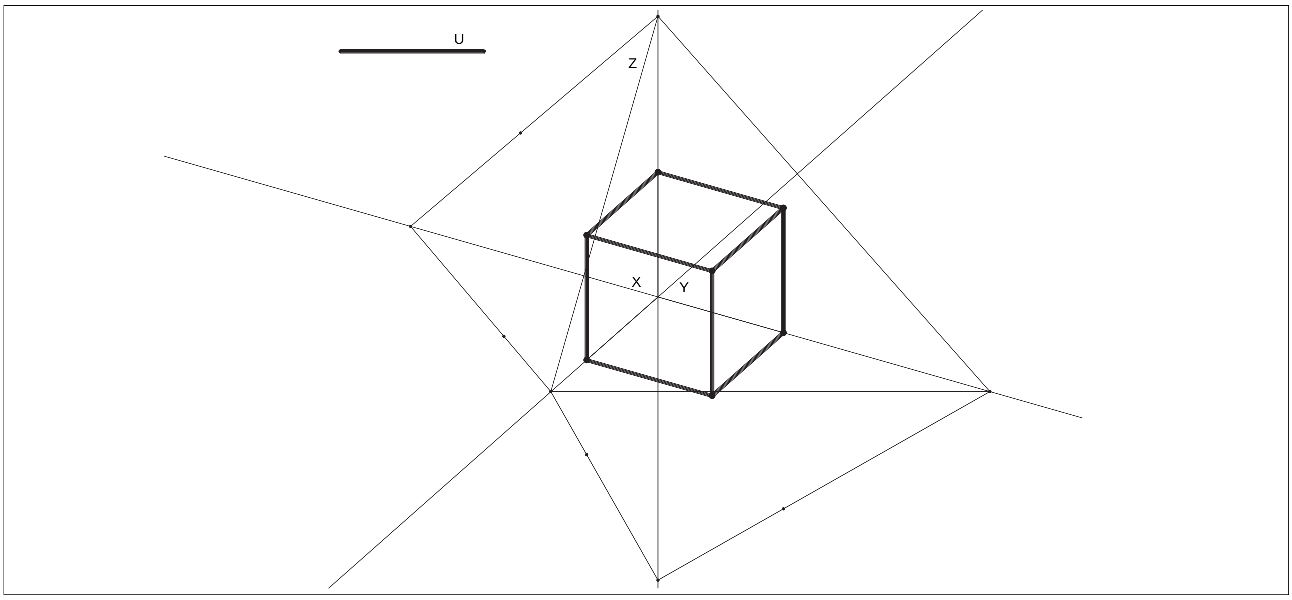


Figura 3.4 Cubo in assonometria ortogonale trimetrica

3.2 Assonometria parallela obliqua

Un secondo metodo è quello di usare una **assonometria parallela obliqua**, in cui i raggi proiettanti sono tutti paralleli tra loro, provengono da un punto all'infinito, ma sono obliqui al piano assonometrico. La assonometria obliqua più usata è quella cavaliera rapida.

Esistono diversi sistemi di **assonometrie oblique**. Quelle più usate sono:
-assonometria obliqua cavaliera generica (e quindi ha gli assi assonometrici situati in modo che due di questi siano tra di loro ortogonali e il terzo diretto arbitrariamente)
(vedi la Figura 3.5).

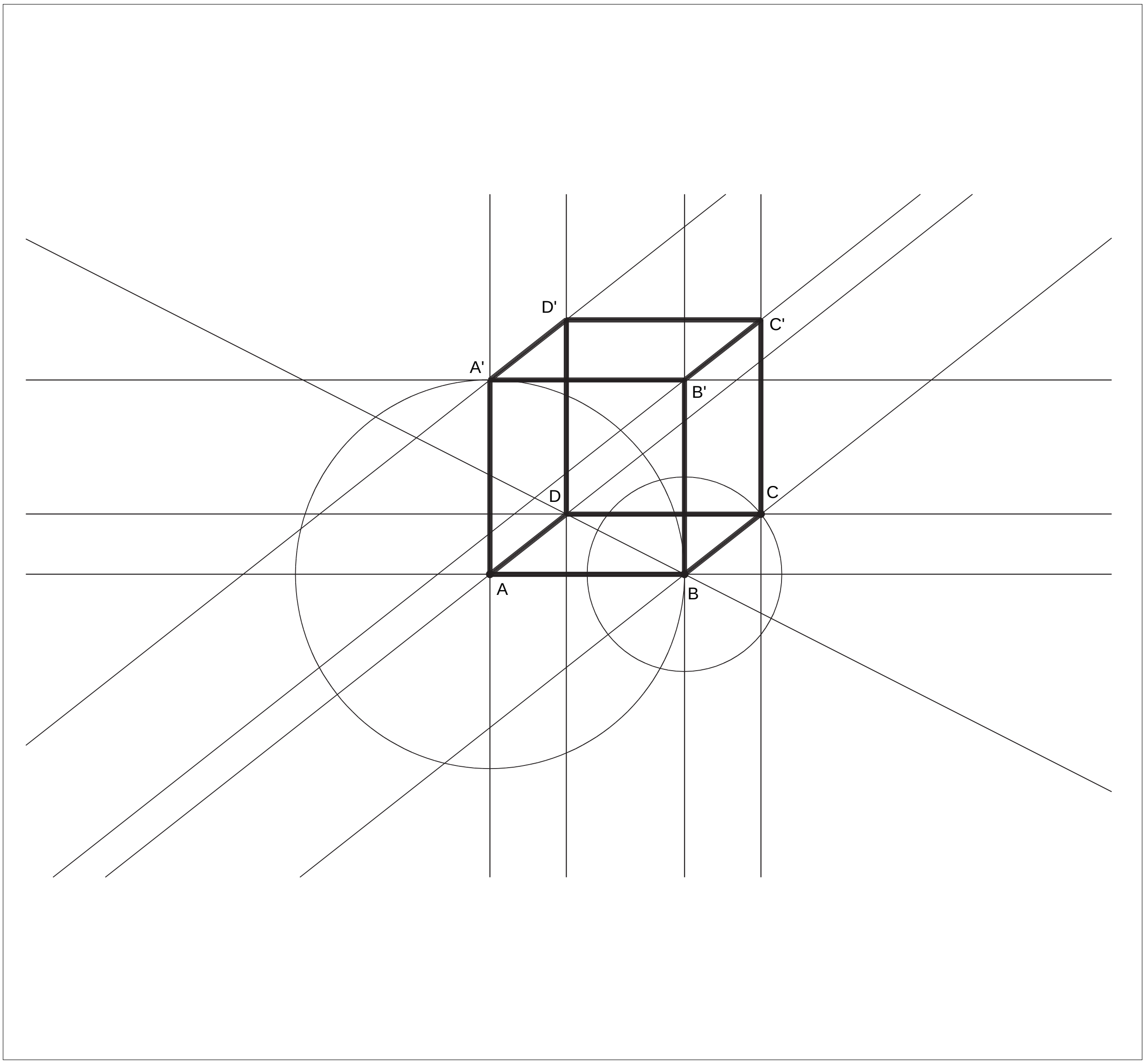


Figura 3.5 Cubo in assonometria obliqua cavaliera generica

-assonometria obliqua cavaliera rapida (un angolo è di 90° e gli altri due di 135°)
(vedi la Figura 3.6)

-assonometria obliqua cavaliera militare o aerea (un angolo è di 90° e gli altri due di 135° con il piano assonometrico parallelo o coincidente con il P.O.)
(vedi la Figura 3.7)

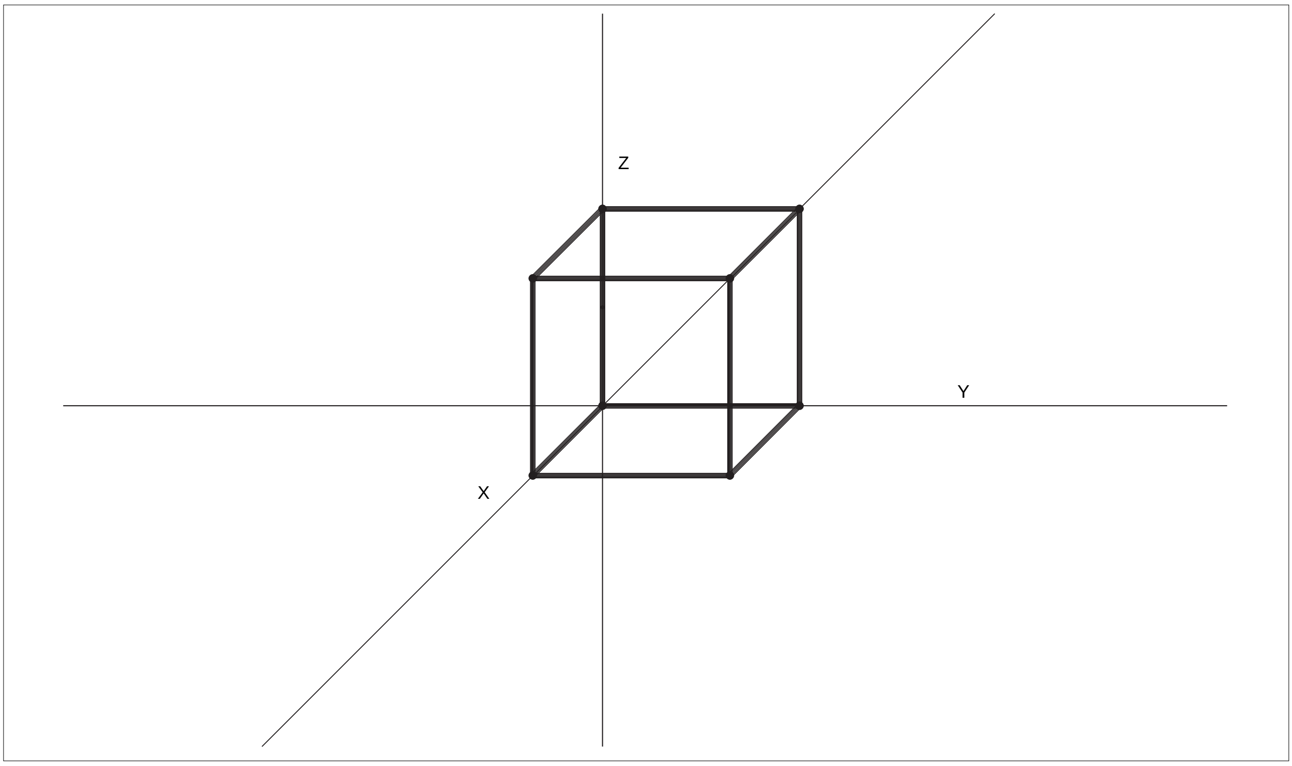


Figura 3.6 Cubo in assonometria obliqua cavaliera rapida

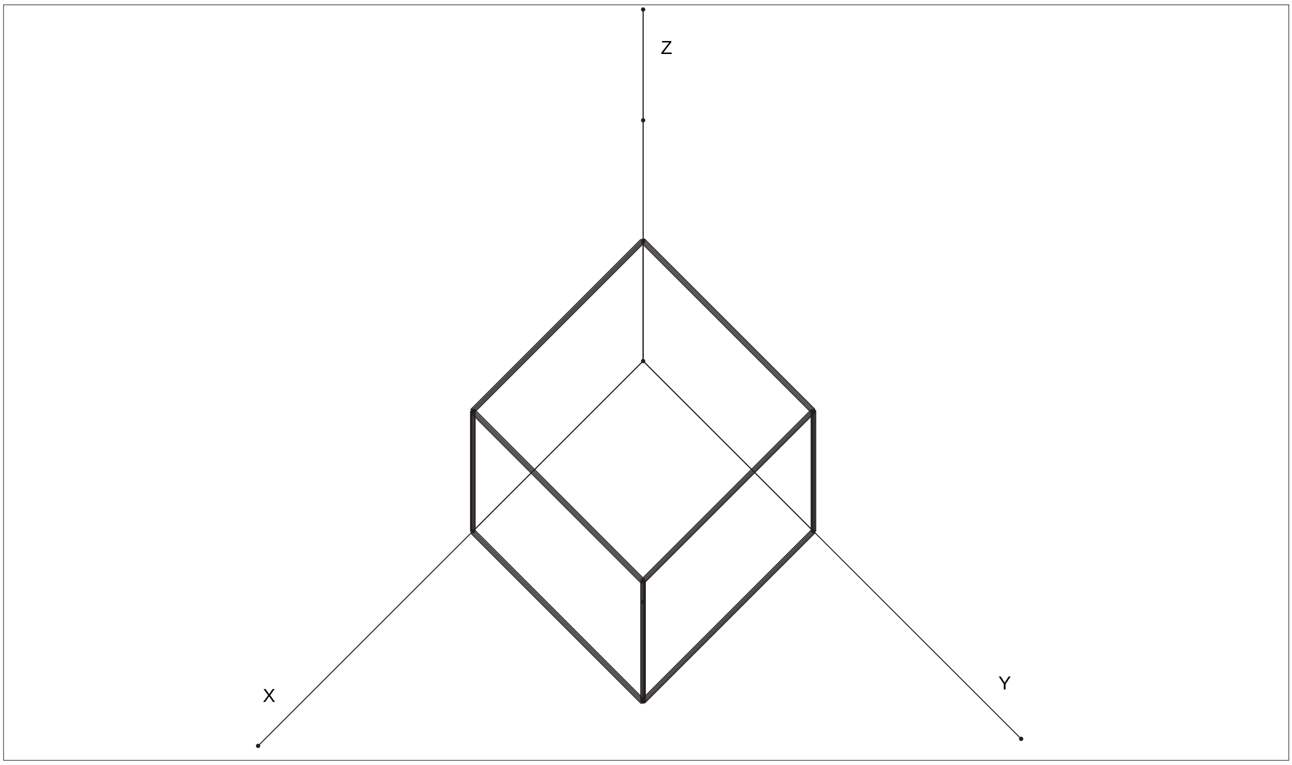


Figura 3.7 Cubo in assonometria obliqua cavaliera militare aerea

3.3 Prospettiva o proiezione centrale

Un terzo metodo è quello di usare una **proiezione centrale o prospettiva**, in cui i raggi proiettanti partono da un centro di proiezione al finito. Questo metodo è più complicato, ma più soddisfacente perché corrisponde alla visione che di un solido si ha da un punto di vista al finito. Qui ci limitiamo solo ad un cenno. Questo metodo è stato teorizzato dagli artisti del Rinascimento e in particolare da

Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Leonardo.
(vedi le Figure 3.8, 3.9).

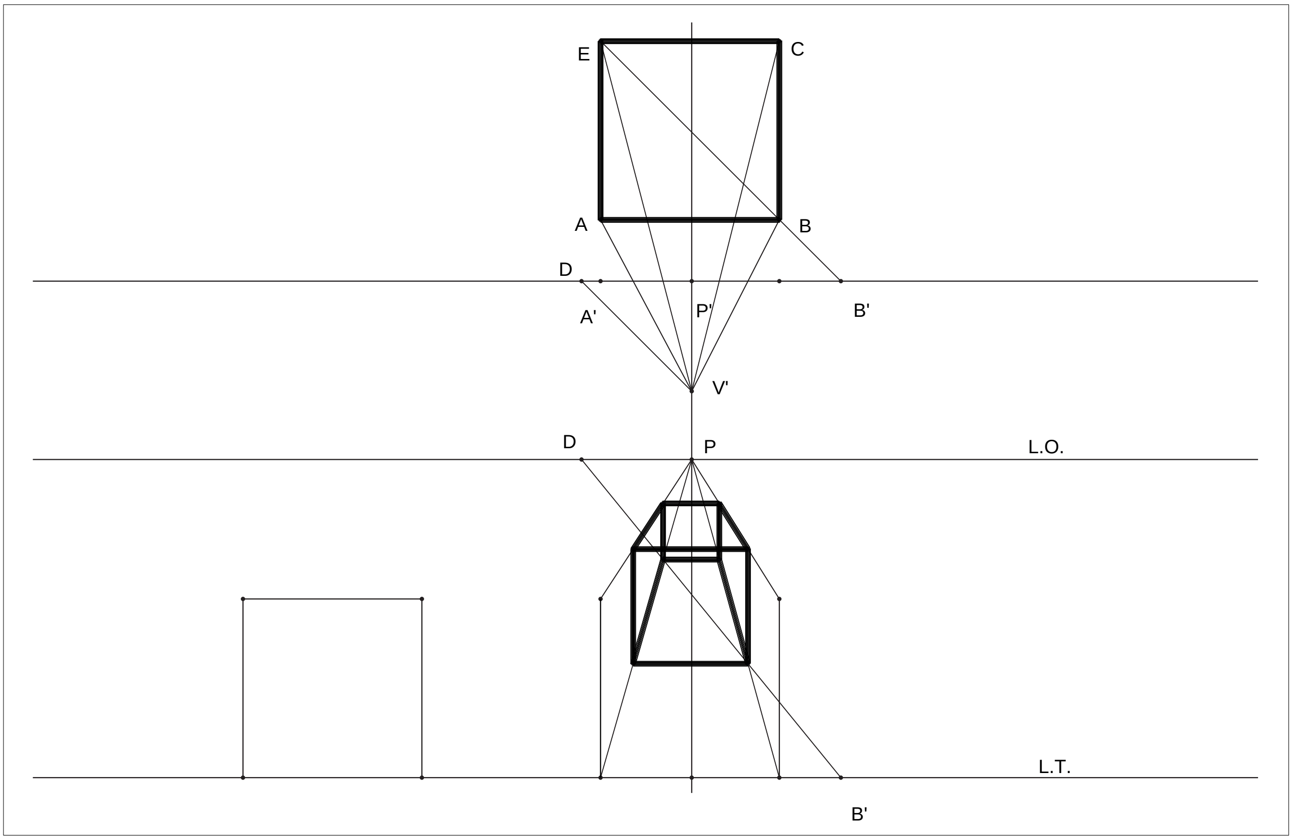


Figura 3.8 Cubo in proiezione centrale o in prospettiva.

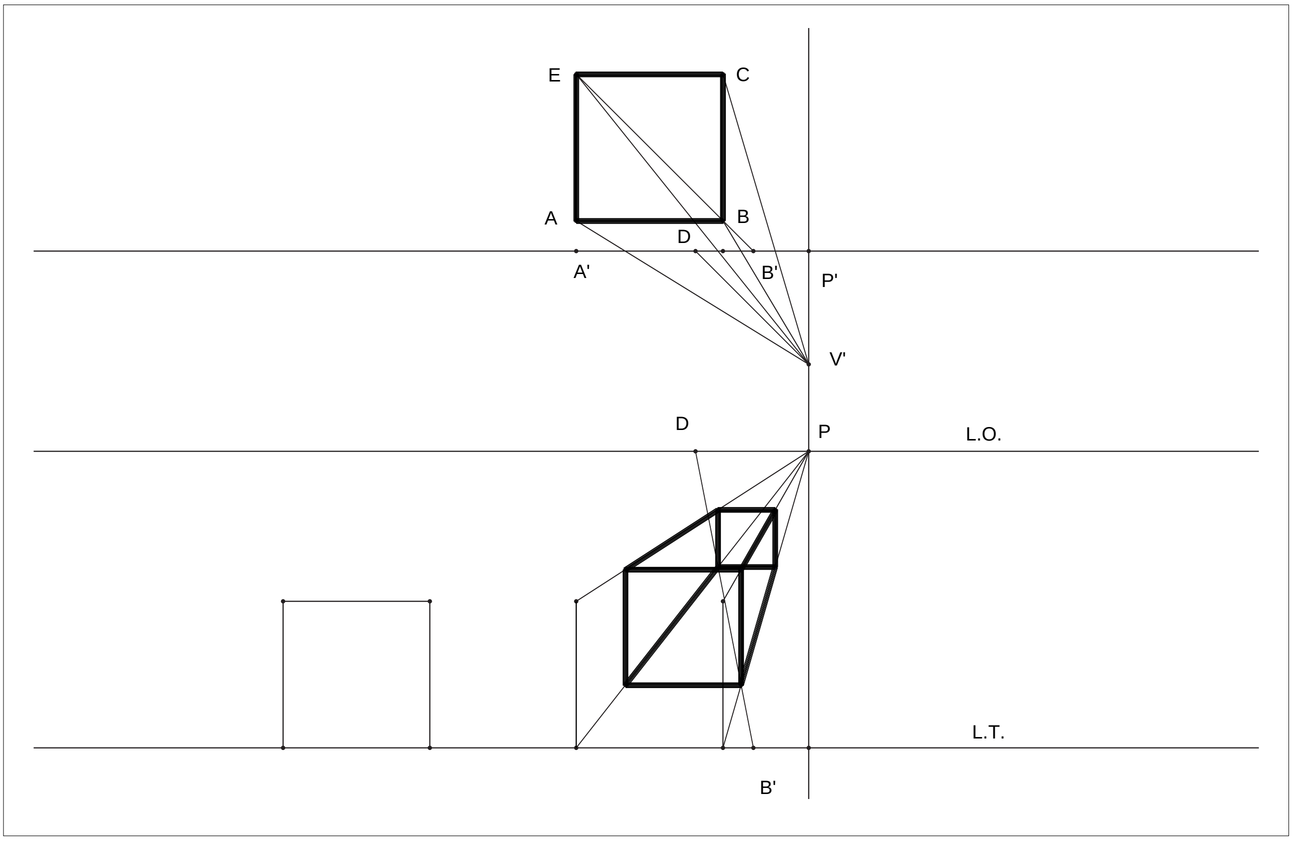


Figura 3.9 Cubo in proiezione centrale o in prospettiva.

4. Piani di simmetria e assi di simmetria di un cubo

Una applicazione degli argomenti appena svolti si trova nello studio degli assi di simmetria e dei piani di simmetria del cubo.
Un cubo possiede 9 piani di simmetria: sono i piani che tagliano a metà il cubo e che contengono due diagonali giacenti su facce opposte (sono 6) e 3 piani di simmetria che tagliano a metà quattro spigoli.
(vedi le Figure 4.1, 4.2)

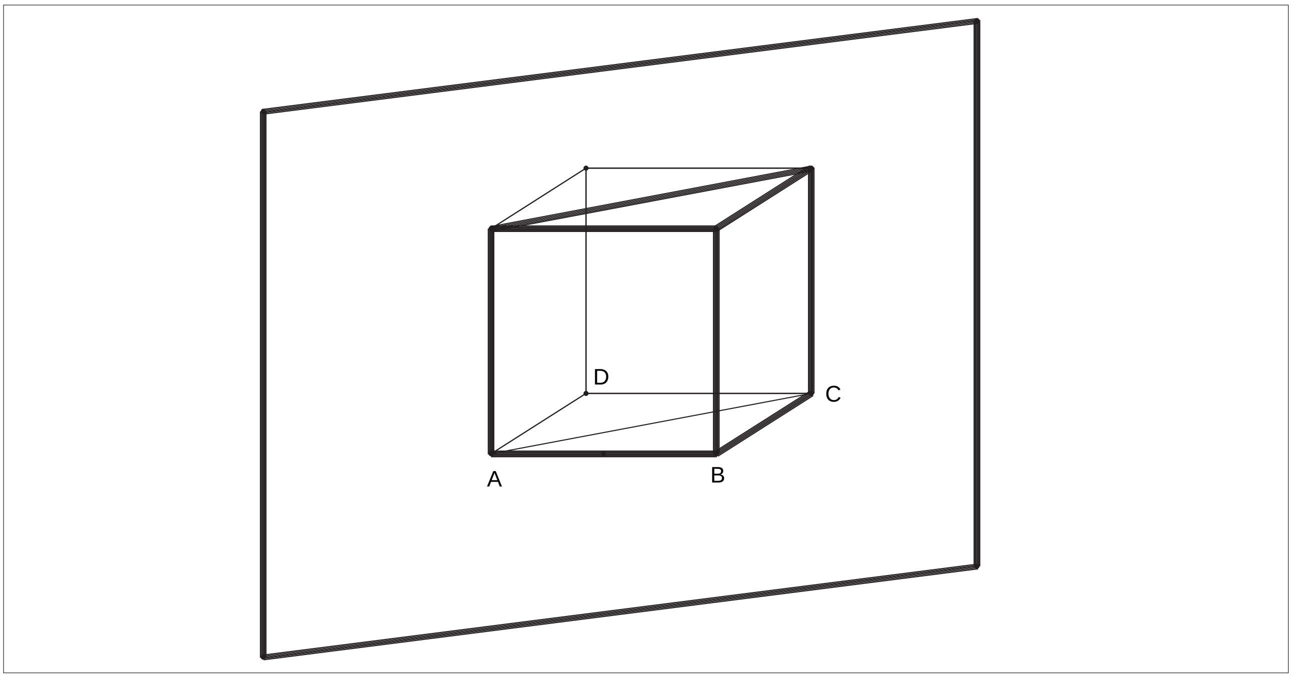


Figura 4.1 Piano di simmetria diagonale del cubo

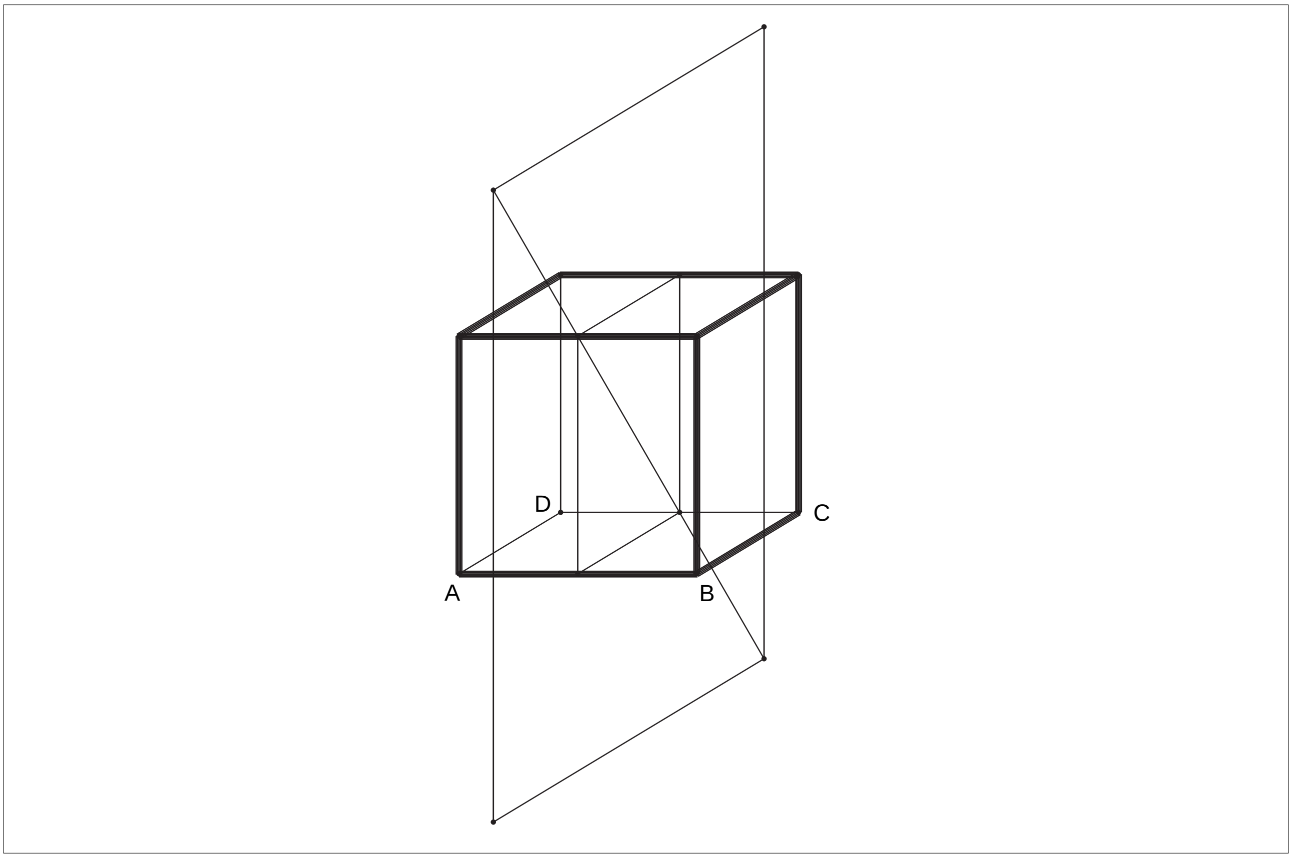


Figura 4.2 Piano di simmetria mediano del cubo

Un cubo possiede 13 assi di simmetria rotazionale di cui nove sono assi di simmetria:

- le tre rette passanti per i centri di due facce opposte (assi di simmetria rotazionale e di simmetria) rette di tipo t.
- le quattro diagonali del cubo (assi di simmetria rotazionale ma non assi di simmetria di simmetria) rette di tipo s.
- sei rette che congiungono i punti medi di due spigoli opposti (assi di simmetria rotazionale e di simmetria) rette di tipo r.

Le nove rette di simmetria del cubo sono perpendicolari ai nove piani di simmetria
(Vedi la Figura 4.3)
Un cubo possiede un centro di simmetria.

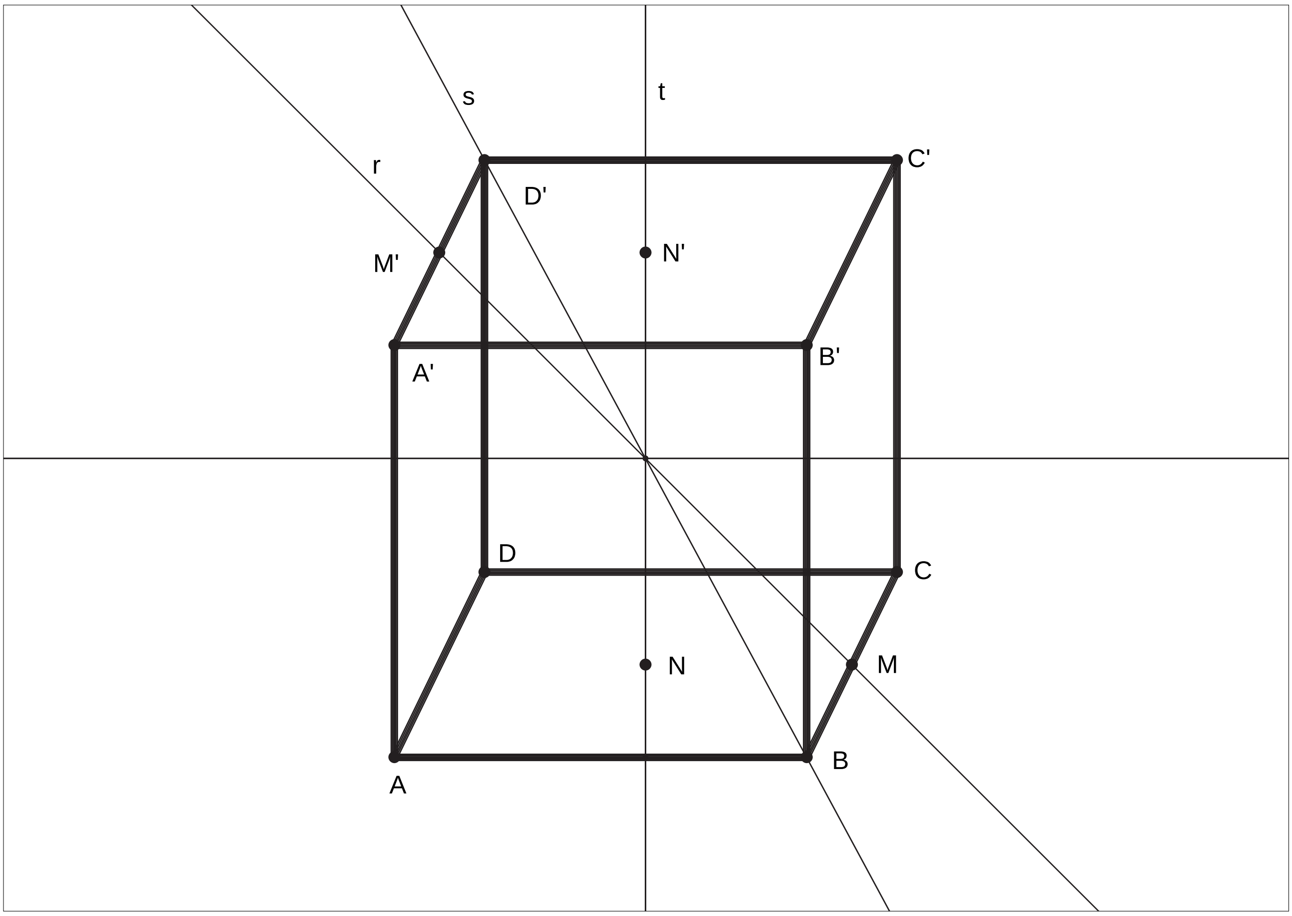


Figura 4.3 Assi di simmetria del cubo.

4. Poliedri regolari inscritti nel cubo

Dentro un cubo possiamo inscrivere un ottaedro regolare i cui vertici sono i centri delle facce e due tetraedri regolari i cui spigoli sono le diagonali delle facce.
(Vedi le Figure 4.4, 4.5)

L'ottaedro, che è il poliedro duale del cubo, ha gli stessi assi di simmetria, gli stessi piani di simmetria e lo stesso centro del cubo. Il numero di vertici dell'ottaedro e uguale al numero di facce del cubo; il numero di vertici del cubo è uguale al numero di facce dell'ottaedro; i due poliedri \\hanno lo stesso numero di spigoli.

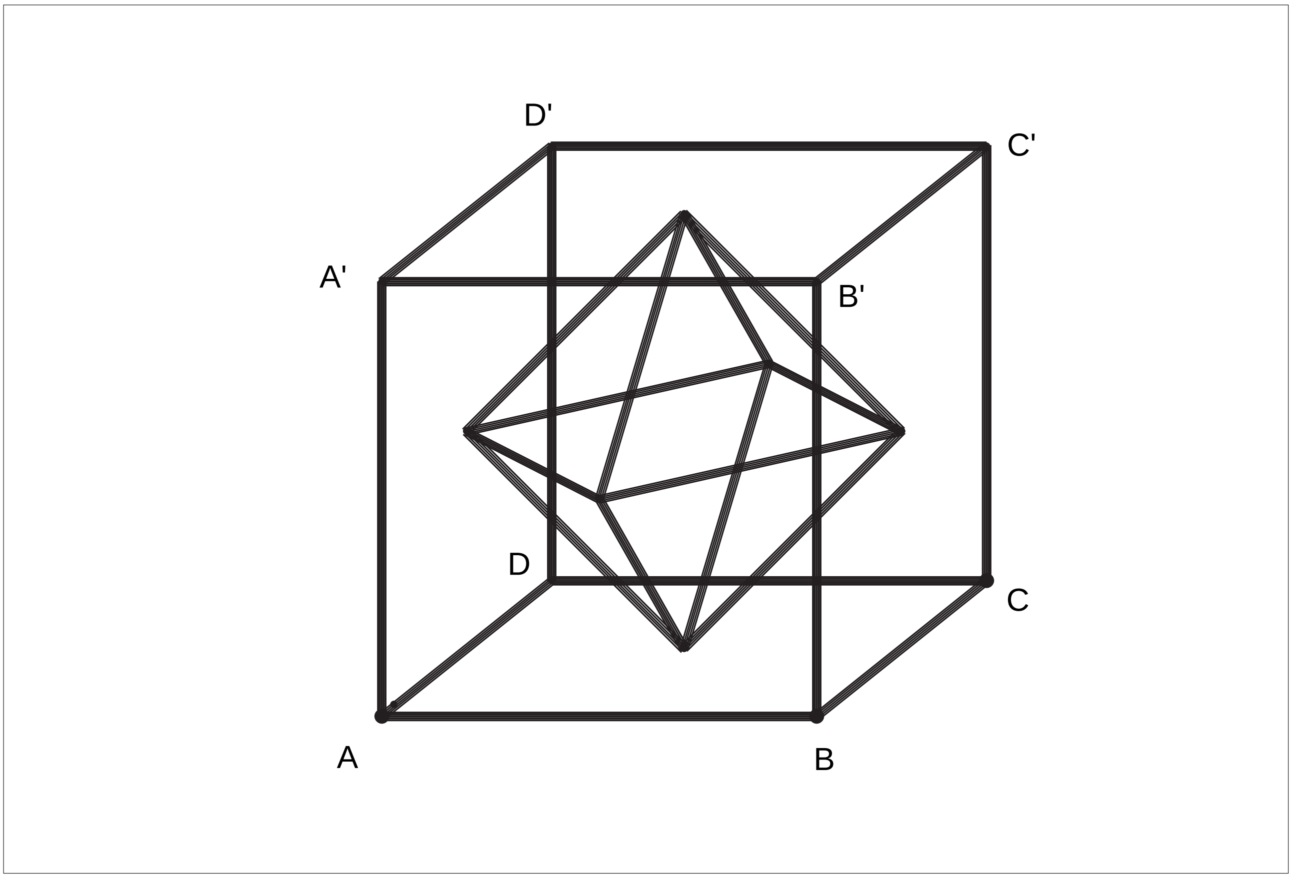


Figura 4.4 Ottaedro inscritto nel cubo.

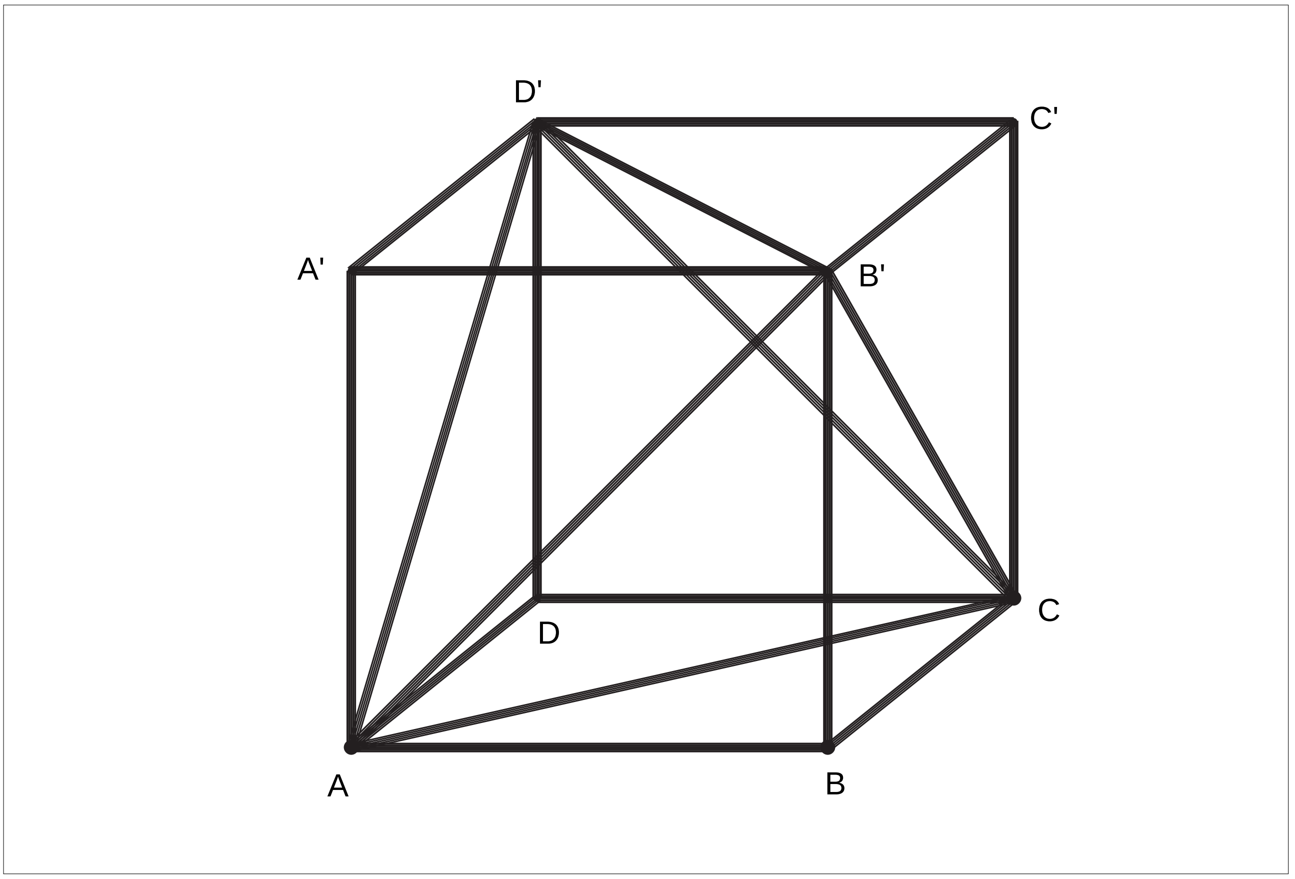


Figura 4.5 Tetraedro inscritto nel cubo.

Bibliografia

[1] Y. Baulac, F. Bellemain, J.M. Labord, Cabri-géomètre. Versione 1.7 per MS-DOS (trad. italiana e adattamento di P. Boieri). Manuale dell'utente, Loescher, Torino 1993;

[2] P. Boieri, Introduzione a Cabri-géomètre, in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", n. 6, Novembre - Dicembre 1994, pp. 701-717;

[3] C. Bonfigli, C. R. Braggio, Geometria descrittiva e prospettiva, Hoepli, Milano 1978;

[4] E. Castelnuovo, M. Barra, Matematica nella realtà, Boringhieri, Torino 1976;

[5] H. M. S. Coxeter, Introduction to Geometry, Whiley & Sons, New York 1962;

[6] R. Courant, H. Robbins, Che cos'è la matematica, Boringhieri, Torino 1971;

[7] M. Kline, La matematica nella cultura occidentale, Feltrinelli, Milano 1978;

[8] U. Morin, Lezioni di geometria. Parte IV: Geometria descrittiva, Cedam, Padova 1964;

[9] V. Villani, La geometria: dallo spazio al piano, Quaderno n.2, Dipartimento di Matematica, seminario didattico, Università di Pisa 1985.

Cabri-géomètre non è soltanto
uno strumento per la geometria piana.
Combinando le tecniche
di rappresentazione nel piano
di oggetti tridimensionali
con le possibilità dinamiche offerte
da Cabri-géomètre
viene esplorato il problema
della deformazione con continuità
delle sezioni
di un cubo con un piano
e vengono affrontati alcuni argomenti di
geometria descrittiva
(assonometria e prospettiva di un cubo).

I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 4 luglio-agosto 1995, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE - Emilia Romagna.