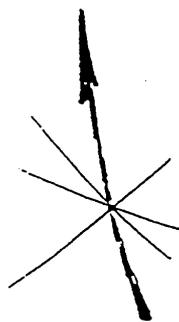


Quaderni di **CABRI RRS AE**



Giuliana Bettini

Cristina Tano

La sezione aurea
di un segmento e applicazioni

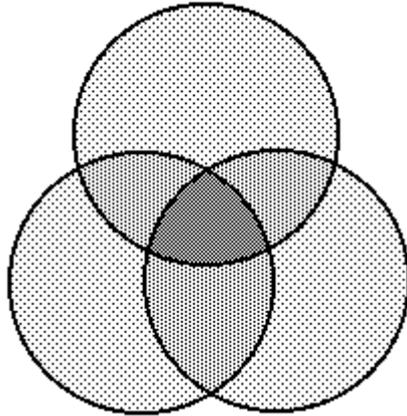
N° 6

Questo lavoro è stato svolto nell'ambito del Corso
di Perfezionamento in Didattica della Matematica,
presso l'Università di Bologna,
nell'anno accademico 1993/94

Relatore della tesina è stato il Prof. Giulio Cesare Barozzi.

Giuliana Bettini abita a Bologna, via Cervellati 1.
Cristina Tano abita a Lanciano (CH), P.zza Cuonzo 21.

Stampato a cura dell'IRRSAE-ER, novembre 1994



CORSO DI PERFEZIONAMENTO
IN DIDATTICA
DELLA MATEMATICA

UNIVERSITA' DI BOLOGNA
ANNO 1993-94

LA SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO
E APPLICAZIONI

di GIULIANA BETTINI e CRISTINA TANO

LA SEZIONE AUREA NEL TEMPO

Dividere in sezione aurea, o in media ed estrema ragione un segmento, significa dividerlo in due parti tali che una di esse sia media proporzionale fra l'intero segmento e l'altra parte. Questo semplice problema ha da sempre affascinato i piu' grandi personaggi, matematici e non, per i suoi inaspettati risvolti.

La prima soluzione geometrica si trova negli "Elementi" di Euclide (libro II, proposizione 11), ma gia' la sezione aurea era nota agli Egizi e ai Greci, che la usarono nella costruzione delle loro piu' importanti opere architettoniche.

Gli storici dubitano pero' che gli antichi avessero appieno compreso il problema geometrico che questo tipo di proporzione nascondeva, apprezzandone esclusivamente il valore estetico.

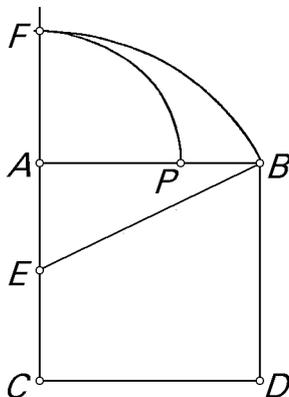
Luca Pacioli, nel 1509, pubblico' un'opera in cui esaminava gli utilizzi della sezione aurea, ritrovandola tra le forme piu' antiche della natura e per questo intitolò il suo trattato "De divina proportione".

Keplero, nel 1600, la battezzò "gioiello della geometria" e solo dall'800 la sezione aurea ebbe questo nome.

LE COSTRUZIONI

Presentiamo tre diverse costruzioni della sezione aurea di un segmento: la prima e' quella classica di Euclide, che si dimostra utilizzando il secondo teorema di Euclide per i triangoli rettangoli, Fig. 1; la seconda, di Nils Pipping (1952), e' realizzata utilizzando solo il compasso e la si puo' verificare applicando piu' volte il teorema di Pitagora, Fig. 2; la terza e' dovuta ad Erone e sfrutta il teorema della tangente e della secante, Fig. 3.

Fig. 1



Dato il segmento di estremi A e B, si costruisca il quadrato ABCD di lato AB. Sia E il punto medio del segmento AC e si costruisca la circonferenza di centro E e raggio EB, si prenda poi su questa circonferenza il punto F intersezione con la perpendicolare al segmento AB in A. Il punto P appartenente ad AB e tale che $AP=AF$ individua il segmento sezione aurea di AB.

La costruzione di Nils Pipping richiede solo sette circonferenze di tre raggi differenti; indicheremo con $C(O, r)$ la circonferenza di centro O e raggio r , Dato il segmento AB , le circonferenze $C(A, AB)$ e $C(B, AB)$ si incontrano in due punti J e K . Siano L il punto di intersezione della circonferenza $C(A, AB)$ con $C(J, JK)$, M e N di $C(A, AB)$ con $C(B, JK)$ e O di $C(B, JK)$ con $C(L, JK)$. Infine le due circonferenze $C(M, AO)$ e $C(N, AO)$ si intersecano in un punto P che e' proprio la sezione aurea di AB .

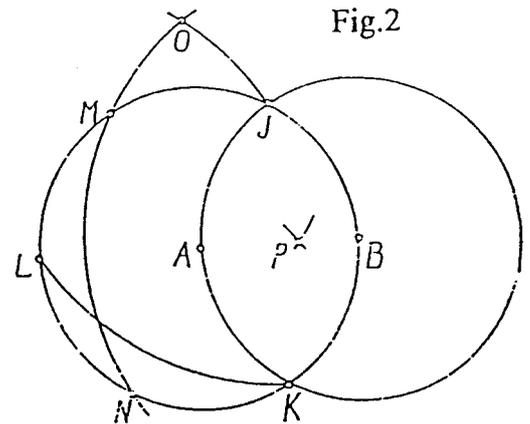
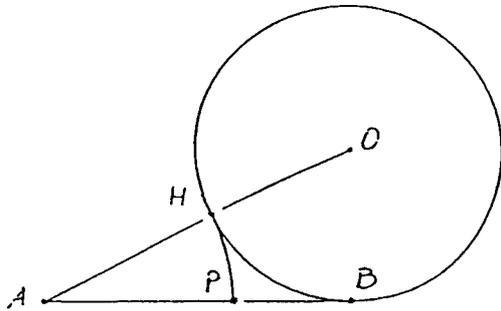


Fig.3



Sia dato un segmento di estremi A e B , e si indichi con O un punto sulla perpendicolare in B ad AB tale che OB sia la meta' di AB . Quindi si tracci la circonferenza $C(O, OB)$, sia poi H il punto di intersezione di tale circonferenza con il segmento AO . Il punto P su AB tale che $AP=AH$ individua la sezione aurea di AB .

Per realizzare la costruzione di Euclide della sezione aurea con Cabri e' necessaria una macrocostruzione che disegni un quadrato conoscendo un lato, ad esempio si puo' vedere la macro "Quadrato su un lato" proposta da F. Semprini nel n. 1 di CABRIRRSAE.

Descrizione della costruzione con Cabri:

1. Creazione - segmento di estremi A e B
2. Diversi - macrocostruzione quadrato su un lato
3. Costruzione - quadrato su un lato (cliccare su A e su B): quadrato $ABDC$
4. Costruzione - punto medio del segmento AC : punto E
5. Creazione - circonferenza e di centro E e raggio EB
6. Creazione - retta r per i punti A e C
7. Costruzione - intersezione tra c e r : punto F (quello piu' vicino ad A)
8. Creazione - circonferenza di centro A e raggio AF
9. Costruzione - intersezione tra f e AB : punto P
10. Edizione - aspetto oggetti: cancellare tutto tranne AB e P

La realizzazione tramite Cabri della seconda costruzione richiede la macrocostruzione, già presente nel menu' Diversi, che trasporta un segmento, in quanto è necessario costruire circonferenze di cui si conosce solo il centro e la lunghezza del raggio.

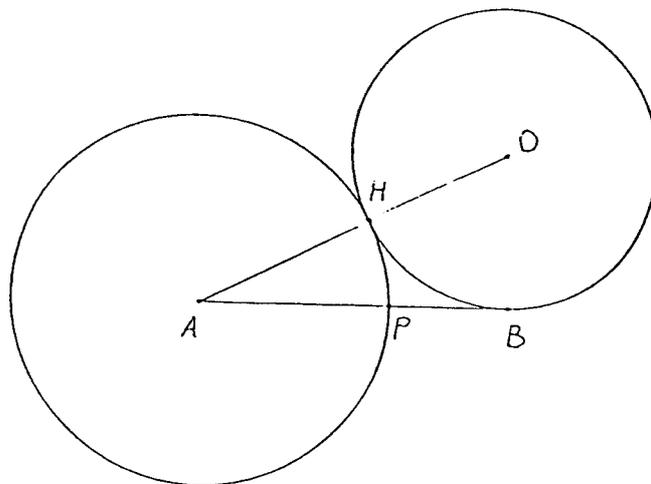
Descrizione della costruzione con Cabri:

1. Creazione - segmento di estremi A e B
2. Creazione - circonferenza a di centro A e raggio AB
3. Creazione - circonferenza b di centro B e raggio AB
4. Costruzione - intersezione tra le circonferenze a e b: punti J e K
5. Creazione - circonferenza j di centro J e raggio JK
6. Costruzione - intersezione tra le circonferenze a e j: punto L
7. Diversi - macrocostruzione trasporto di un segmento
8. Creazione - segmento di estremi J e K
9. Creazione - retta per i punti B e K
10. Costruzione - trasporto di un segmento (cliccare prima sul segmento JK, poi su B e poi su K): segmento BC
11. Creazione - circonferenza c di centro B e raggio BC
12. Costruzione - intersezione tra le circonferenze a e c: punti M e N
13. Creazione - retta per i punti L e K
14. Costruzione - trasporto di un segmento (cliccare prima sul segmento JK, poi su L e poi su K): segmento LD
15. Creazione - circonferenza d di centro L e raggio LD
16. Costruzione - intersezione tra le circonferenze c e d: punto O
17. Creazione - segmento di estremi A e O
18. Creazione - retta per i punti M e O
19. Costruzione - trasporto di un segmento (cliccare prima sul segmento AO, poi su M e poi su O): segmento ME
20. Creazione - circonferenza e di centro M e raggio ME
21. Creazione - retta per i punti N e O
22. Costruzione - trasporto di un segmento (cliccare prima sul segmento AO, poi su N e poi su O): segmento NF
23. Creazione - circonferenza f di centro N e raggio NF
24. Costruzione - intersezione tra le circonferenze e ed f. scegliere il punto P sul segmento AB
25. Edizione - aspetto oggetti: cancellare tutto tranne il segmento AB e il punto P

La terza costruzione e' quella che piu' si presta ad essere realizzata con Cabri géomètre, non richiedendo nessuna macro.

Descrizione della costruzione con Cabri:

1. Creazione - segmento di estremi A e B
2. Costruzione - punto medio del segmento AB: punto M
3. Creazione - circonferenza c di centro B e raggio BM
4. Costruzione - retta r per B perpendicolare ad AB
5. Costruzione - intersezione tra la circonferenza c e la retta r: punto O
6. Edizione - aspetto oggetti: cancellare la retta r, la circonferenza c e il punto su e diverso da O e da M
7. Creazione - circonferenza f di centro O e raggio OB
8. Creazione - segmento di estremi A e O
9. Costruzione - intersezione tra il segmento AO e la circonferenza f. punto H
10. Creazione - circonferenza g di centro A e raggio AH
11. Costruzione - intersezione tra il segmento AB e la circonferenza g: punto P
12. Edizione - aspetto oggetti: cancellare tutto tranne il segmento AB e il punto P



LE APPLICAZIONI

Per realizzare le seguenti costruzioni con Cabri e' necessaria la macrocostruzione della sezione aurea di un segmento, la chiameremo sezaurea.

1) Rettangolo aureo

Si chiama rettangolo aureo ogni rettangolo avente un lato che e' sezione aurea dell'altro.

Descrizione della costruzione con Cabri:

1. Creazione - segmento di estremi A e B
2. Diversi - macrocostruzione sezaurea: punto P
3. Creazione - circonferenza c di centro A e raggio AP
4. Costruzione - retta t per A perpendicolare al segmento AB
5. Costruzione - intersezione della retta r e della circonferenza: scegli un punto D
6. Costruzione - retta r per D parallela ad AB
7. Costruzione - retta s per B perpendicolare al segmento AB
8. Costruzione - intersezione tra le rette r e s: punto C
9. Edizione - aspetto oggetti: cancellare le rette r, s, t, la circonferenza c e il punto su c diverso da D e P
10. Creazione - segmento di estremi A e D
11. Creazione - segmento di estremi D e C
12. Creazione - segmento di estremi C e B

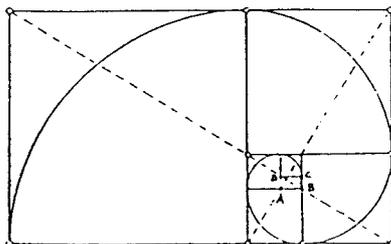
ATTENZIONE: Il segmento AP deve essere la sezione aurea del segmento AB!

Se su un lato maggiore del rettangolo aureo si costruisce, esternamente al rettangolo, un quadrato si ottiene un altro rettangolo aureo (per fare cio' con Cabri e' necessaria la gia' citata macro "Quadrato su un lato" di F. Semprini).

Ripetendo piu' volte tale costruzione si ottiene una successione di quadrati, ognuno dei quali ha il lato che e' sezione aurea del lato del quadrato successivo. Costruendo un arco di circonferenza inscritto in ogni quadrato, avente il centro nel vertice del quadrato, che non appartenga all'arco precedente e che stia sul lato che contiene il centro precedente, si ottiene una curva, detta spirale logaritmica.

Tale curva non e' realizzabile con Cabri in quanto non è possibile disegnare archi di circonferenza.

Fig. 4



2) Pentagono e decagono regolari inscritti in una circonferenza

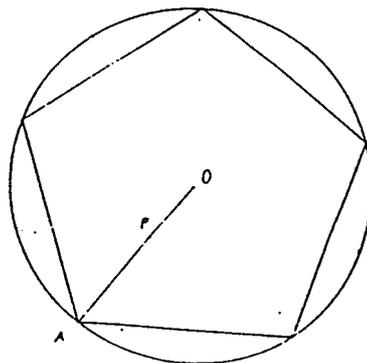
La costruzione di un pentagono e di un decagono regolari si basa sulla semplice osservazione che il lato di un decagono regolare inscritto in una circonferenza e' uguale alla sezione aurea del raggio.

Descrizione della costruzione con Cabri:

1. Creazione - segmento di estremi A e O
2. Diversi - macrocostruzione sez aurea: punto P
3. Creazione - circonferenza a di centro O e raggio OA
4. Creazione - circonferenza b di centro A e raggio AP
5. Costruzione - intersezione tra le circonferenze b e a: punti B e L
6. Creazione - circonferenza c di centro B e raggio AB
7. Costruzione - intersezione tra le circonferenze c e a: punto C
8. Creazione - circonferenza d di centro C e raggio CB
9. Costruzione - intersezione tra le circonferenze d e a: punto D
10. Creazione - circonferenza e di centro D e raggio DC
11. Costruzione - intersezione tra le circonferenze e e a: punto E
12. Creazione - circonferenza f di centro E e raggio ED
13. Costruzione - intersezione tra le circonferenze f e a: punto F
14. Creazione - circonferenza g di centro F e raggio FE
15. Costruzione - intersezione tra le circonferenze g e a: punto G
16. Creazione - circonferenza h di centro G e raggio GF
17. Costruzione - intersezione tra le circonferenze h e a: punto H
18. Creazione - circonferenza i di centro H e raggio HG
19. Costruzione - intersezione tra le circonferenze i e a: punto I
20. Edizione - aspetto oggetti: cancellare tutte le circonferenze tranne a.

Ora, se si vuole disegnare il decagono regolare e' necessario unire i punti A, B, L con dei segmenti, se invece si salta un vertice ogni volta, si ottiene un pentagono regolare. Tale costruzione, facendo uso di riga e compasso, risale alla scuola pitagorica (500 a.C.).

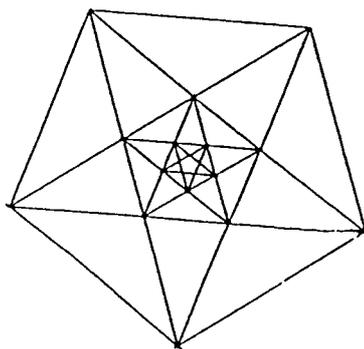
ATTENZIONE: la costruzione e' assai facilitata scegliendo opportunamente il centro della circonferenza, esso deve essere l'estremo del segmento esterno alla sezione aurea.



3) Simbolo dei pitagorici

Se si tracciano le cinque diagonali di un pentagono regolare, tali diagonali formano un pentagono regolare piu' piccolo e le diagonali del secondo pentagono formano a loro volta un terzo pentagono regolare, ancora piu' piccolo. Questo processo puo' essere continuato indefinitamente, dando luogo a pentagoni tanto piccoli quanto si vuole: cio' porta a concludere che il rapporto tra la diagonale e il lato di un pentagono regolare non e' razionale.

Il fatto che questo rapporto sia irrazionale e' una conseguenza della proprieta' che ha la sezione aurea di riprodursi indefinitamente.



Per realizzare questa figura con Cabri e' utile avere una macro per la costruzione di un pentagono regolare, la chiameremo penreg.

Descrizione della costruzione con Cabri:

1. Creazione - segmento di estremi A e O
2. Diversi - macrocostruzione penreg di vertici A, B, C, D, E
3. Creazione - segmento di estremi A e C
4. Creazione - segmento di estremi A e D
5. Creazione - segmento di estremi B e D
6. Creazione - segmento di estremi B e E
7. Creazione - segmento di estremi C e E
8. Costruzione - intersezione tra i segmenti AC e BE
9. Costruzione - intersezione tra i segmenti AC e BD
10. Costruzione - intersezione tra i segmenti AD e BE
11. Costruzione - intersezione tra i segmenti AD e CE
12. Costruzione - intersezione tra i segmenti BD e CE

Questo procedimento puo' essere poi iterato.

Rispetto ad una attivita' tradizionale l'uso di Cabri consente di ingrandire la figura e quindi di ripetere effettivamente "all'infinito" la prova.

Figure n° 1

P#1 : point quelconque
P#2 : point quelconque
segment [P#1 P#2]
P#3 : milieu des 2 points P#1 et P#2
C#1 : cercle de centre P#2 passant par P#3
D#1 : droite passant par P#2 et perpendiculaire au segment [P#1 P#2]
P#4 : intersection de la droite D#1 et du cercle C#1
P#5 : intersection de la droite D#1 et du cercle C#1 (P#4 est l'autre point)
C#2 : cercle de centre P#4 passant par P#2
segment [P#1 P#4]
P#6 : intersection du segment [P#1 P#4] et du cercle C#2
P#7 : intersection du segment [P#1 P#4] et du cercle C#2
C#3 : cercle de centre P#1 passant par P#7
P#8 : intersection du segment [P#1 P#2] et du cercle C#3
P#9 : intersection du segment [P#1 P#2] et du cercle C#3

Figure n° 1

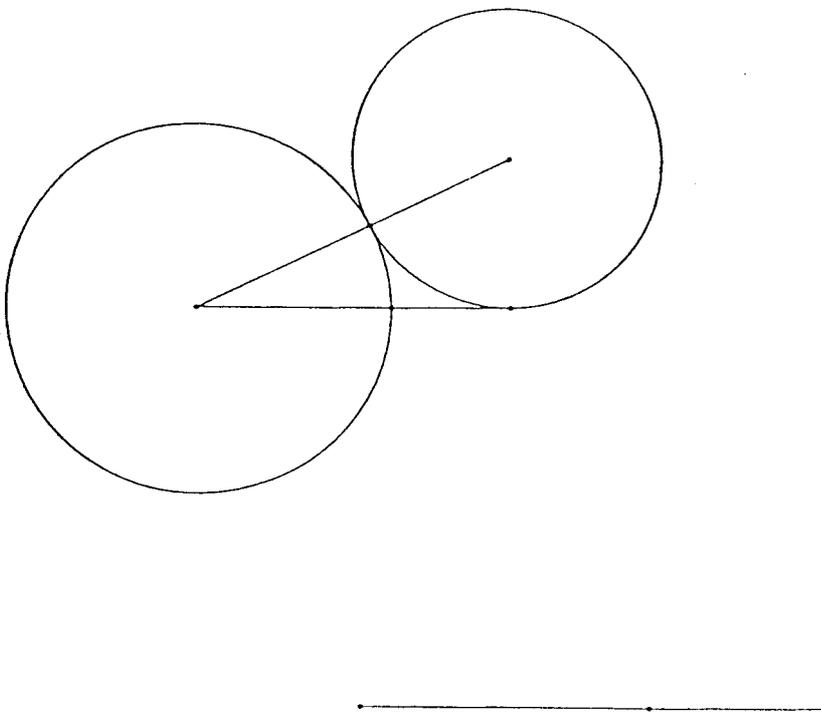


Figure n° 1

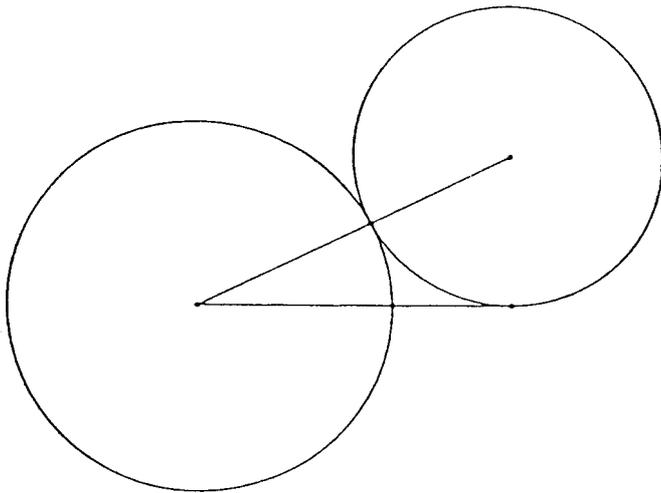


Figure n° 4

P#1 : point quelconque
P#2 : point quelconque
segment [P#1 P#2]
P#6 : point de la macro "sezaurea"(P#2 P#1)
C#4 : cercle de centre P#1 passant par P#2
C#5 : cercle de centre P#2 passant par P#6
P#7 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#5
P#8 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#5 (P#7 est l'autre point)
C#6 : cercle de centre P#7 passant par P#2
P#9 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#6 (P#2 est l'autre point)
segment [P#2 P#9]
C#7 : cercle de centre P#9 passant par P#7
P#10 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#7 (P#7 est l'autre point)
C#8 : cercle de centre P#10 passant par P#9
P#11 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#8 (P#9 est l'autre point)
segment [P#9 P#11]
C#9 : cercle de centre P#11 passant par P#10
P#12 : intersection du cercle C#9 et du cercle C#4 (P#10 est l'autre point)
C#10 : cercle de centre P#12 passant par P#11
P#13 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#10 (P#11 est l'autre point)
C#11 : cercle de centre P#13 passant par P#12
P#14 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#11 (P#12 est l'autre point)
segment [P#11 P#13]
C#12 : cercle de centre P#14 passant par P#13
P#15 : intersection du cercle C#12 et du cercle C#4 (P#13 est l'autre point)
segment [P#13 P#15]
C#13 : cercle de centre P#15 passant par P#14
segment [P#15 P#2]

Figure n° 4

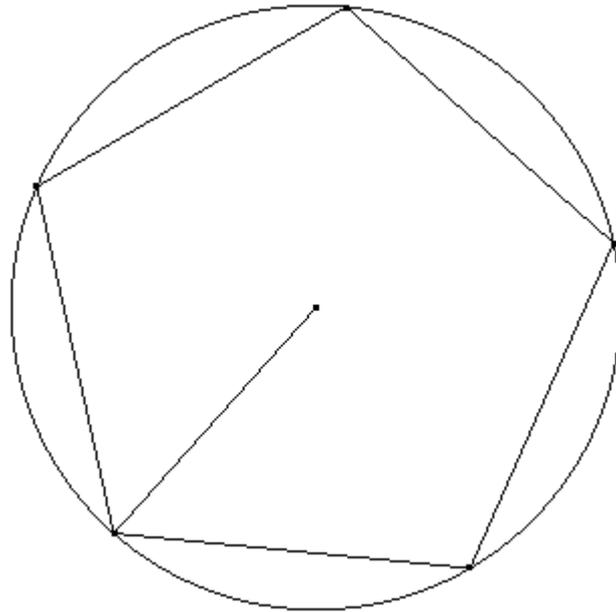


Figure n° 4

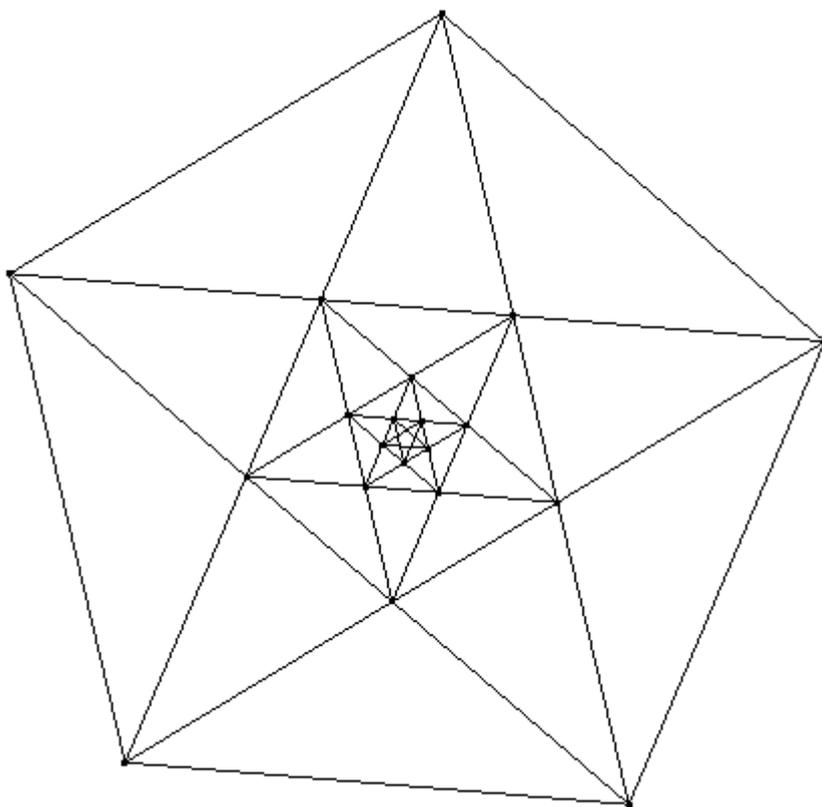
```

P#1 : point quelconque
P#2 : point quelconque
segment [P#1 P#2]
P#6 : point de la macro "sezaurea"(P#2 P#1)
C#4 : cercle de centre P#1 passant par P#2
C#5 : cercle de centre P#2 passant par P#6
P#7 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#5
P#8 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#5 (P#7 est l'autre point)
C#6 : cercle de centre P#7 passant par P#2
P#9 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#6 (P#2 est l'autre point)
segment [P#2 P#9]
C#7 : cercle de centre P#9 passant par P#7
P#10 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#7 (P#7 est l'autre point)
C#8 : cercle de centre P#10 passant par P#9
P#11 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#8 (P#9 est l'autre point)
segment [P#9 P#11]
C#9 : cercle de centre P#11 passant par P#10
P#12 : intersection du cercle C#9 et du cercle C#4 (P#10 est l'autre point)
C#10 : cercle de centre P#12 passant par P#11
P#13 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#10 (P#11 est l'autre point)
C#11 : cercle de centre P#13 passant par P#12
P#14 : intersection du cercle C#4 et du cercle C#11 (P#12 est l'autre point)
segment [P#11 P#13]
C#12 : cercle de centre P#14 passant par P#13
P#15 : intersection du cercle C#12 et du cercle C#4 (P#13 est l'autre point)
segment [P#13 P#15]
C#13 : cercle de centre P#15 passant par P#14
segment [P#15 P#2]
segment [P#9 P#15]
segment [P#9 P#13]
segment [P#2 P#11]
segment [P#11 P#15]
segment [P#13 P#2]
P#16 : intersection du segment [P#9 P#13] et du segment [P#2 P#11]
P#17 : intersection du segment [P#11 P#15] et du segment [P#9 P#13]
P#18 : intersection du segment [P#11 P#15] et du segment [P#13 P#2]
P#19 : intersection du segment [P#9 P#15] et du segment [P#13 P#2]
P#20 : intersection du segment [P#2 P#11] et du segment [P#9 P#15]
segment [P#16 P#19]
segment [P#16 P#18]
segment [P#17 P#19]
segment [P#17 P#20]
segment [P#20 P#18]
P#21 : intersection du segment [P#17 P#19] et du segment [P#20 P#18]
P#22 : intersection du segment [P#16 P#18] et du segment [P#17 P#19]
P#23 : intersection du segment [P#17 P#20] et du segment [P#16 P#18]
P#24 : intersection du segment [P#16 P#19] et du segment [P#17 P#20]
P#25 : intersection du segment [P#20 P#18] et du segment [P#16 P#19]
segment [P#24 P#21]
segment [P#21 P#23]
segment [P#22 P#24]
segment [P#25 P#23]
segment [P#25 P#22]
P#26 : intersection du segment [P#24 P#21] et du segment [P#25 P#22]
P#27 : intersection du segment [P#25 P#23] et du segment [P#24 P#21]
P#28 : intersection du segment [P#22 P#24] et du segment [P#21 P#23]
P#29 : intersection du segment [P#22 P#24] et du segment [P#25 P#23]
P#30 : intersection du segment [P#21 P#23] et du segment [P#25 P#22]
segment [P#28 P#27]
segment [P#26 P#29]
segment [P#29 P#30]
segment [P#26 P#28]

```

Figure n° 4

segment [P#27 P#30]



La sezione aurea
ha conservato
nei secoli
lo splendore e il fascino
di un prezioso gioiello.
Oggi il software didattico
Cabri-Géomètre
ci permette di riscoprirla
sotto una nuova luce
e di apprezzarne.
nelle sue applicazioni,
le caratteristiche
“divine”

