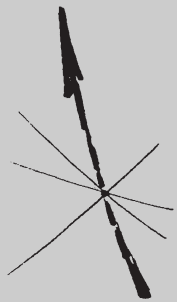


quaderni di CABRI RRS AE



Giovanni Margiotta

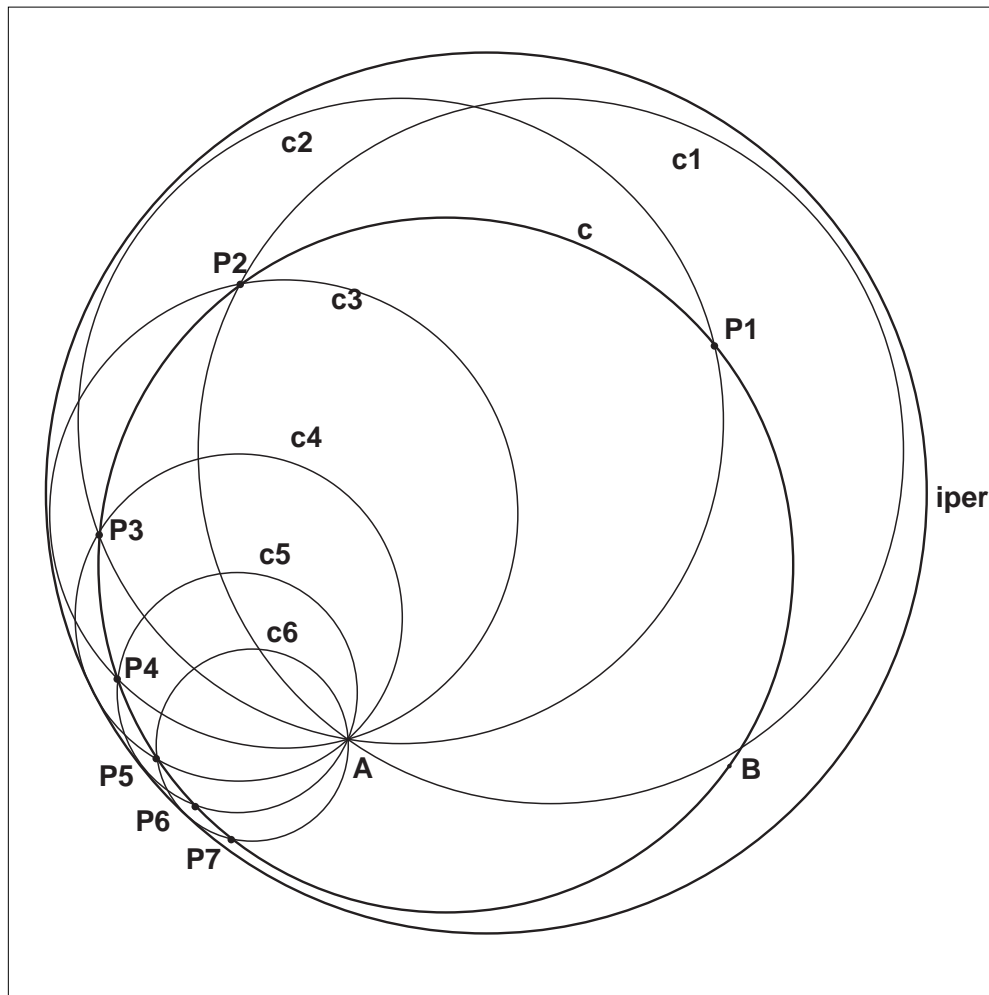
Cabri
come strumento di esplorazione
della geometria non euclidea

n°

10

Giovanni Margiotta è insegnante di matematica del Liceo Scientifico "Francesco d'Assisi" di Roma

Il materiale pubblicato da **CABRI**RRSAE può essere riprodotto, citando la fonte



Cabri

come strumento di esplorazione
della geometria non euclidea

Introduzione

Il Cabri-Géomètre è stato utilizzato quasi esclusivamente per esplorare situazioni euclidee. Con l'ausilio dell'opzione macrocostruzione è possibile estendere il suo dominio di applicazione alla geometria non-euclidea.

Il problema da affrontare, allora, è quello di interpretare i concetti primitivi della geometria non euclidea iperbolica in altrettante costruzioni euclidee da realizzare sul Cabri.

Quello che mi propongo di illustrare è

- la costruzione di un menu iperbolico per il Cabri
- l'esplorazione di situazioni significative sul modello di Poincaré sul disco.

I Modello di Poincaré

Per la costruzione del modello di Poincaré devo adoperare alcune nozioni euclidee che richiamo preliminarmente.

■ 1.1 Inversione circolare

Dato nel piano un cerchio c di centro O e raggio r , l'immagine di un punto P , per inversione circolare, è il punto P' appartenente alla semiretta OP tale che

$$OP \times OP' = r^2$$

L'inversione è una trasformazione

- 1.1 definita per ogni punto P del piano diverso dal punto O
- 1.2 involutoria
- 1.3 conforme
- 1.4 che lascia invariato il birapporto di quattro punti

che trasforma:

- 1.5 c in c
- 1.6 una retta r in $\begin{cases} \text{un cerchio se } O \notin r \\ \text{una retta per } O \text{ se } O \in r \end{cases}$
- 1.7 un cerchio a in $\begin{cases} \text{un cerchio se } O \notin a \\ \text{una retta per } O \text{ se } O \in a \end{cases}$
- 1.8 l'interno del cerchio c nell'esterno e viceversa

Per un percorso didattico per lo studio di queste proprietà vedi [1] e [4].

Sono state proposte alcune macro per l'inversione circolare (vedi [4] e [6]), richiamo quella proposta da Zagabrio (vedi [6]) ottimizza il numero di oggetti per realizzare la costruzione (vedi la figura I.1).

- 1 creazione del cerchio **inv** (creazione/cerchio di base);
- 2 costruzione del punto **O** centro del cerchio **inv** (costruzione/centro);
- 3 creazione del punto **P** (creazione/punto di base);
- 4 creazione della retta **r** per i punti **P** e **O** (creazione/retta per 2 punti);
- 5 costruzione della retta **s** per **O** perpendicolare a **r** (costruzione/retta perpendicolare);
- 6 costruzione del punto **A** intersezione tra **inv** e **s** (costruzione/intersezione di due oggetti);
- 7 creazione del segmento **PA** (creazione/segmento);
- 8 costruzione della retta **t** per **A** perpendicolare al segmento **PA** (costruzione/retta perpendicolare);
- 9 costruzione del punto **R** intersezione tra **t** ed **r** (costruzione/intersezione di due oggetti);

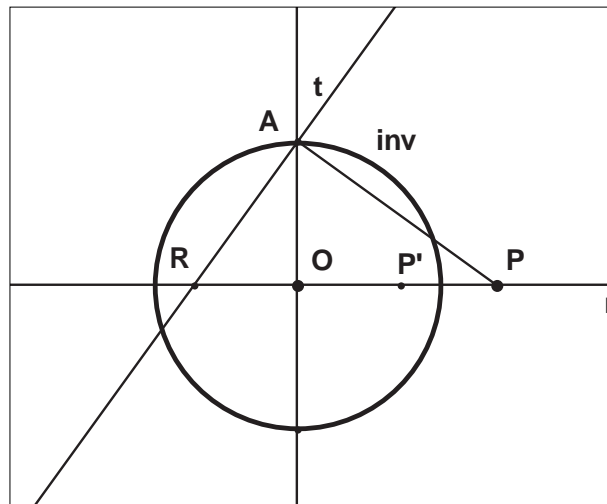


figura I.1

- 10 costruzione del punto **P'** simmetrico di **R** rispetto ad **O** (costruzione/simmetrico).

▼ macro “*inversione circolare*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **inv**, **O** e **P**
- 2 selezionare come oggetto finale **P'**

La versione Cabri - Géomètre II ha tra le opzioni del menu l’inversione circolare.

Nel seguito utilizzo la notazione $inv_c(_)$ per indicare l’inversione circolare definita dal cerchio **c**.

■ **I.2 Cerchi ortogonali**

Il cerchio **c** è ortogonale al cerchio **c*** se le tangenti per il punto di intersezione dei due cerchi sono ortogonali.

Dalla definizione si può dedurre che

- 2.1 i punti di intersezione di due cerchi ortogonali si ottengono intersecando uno di essi con il cerchio che ha per diametro il segmento che unisce i loro centri
- infatti (vedi la figura I.2) dalla definizione i triangoli OAO^* e OBO^* sono rettangoli ed hanno l’ipotenusa coincidente allora devono avere i vertici sul cerchio che ha per centro **M** punto medio di OO^* e passante per il punto **O**.

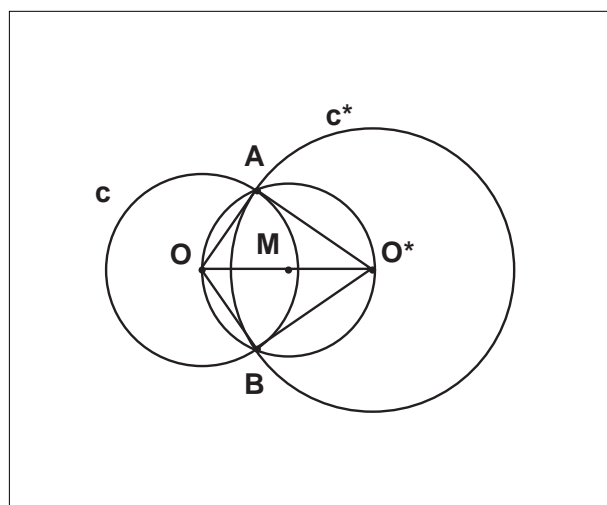


figura I.2

- 2.2 c^* è ortogonale a c sse $c^* = \text{inv}_c(c^*)$
- dal teorema della secante e della tangente ad un cerchio si ha (vedi la figura I.3)
- $$OA \times OB = OD^2$$

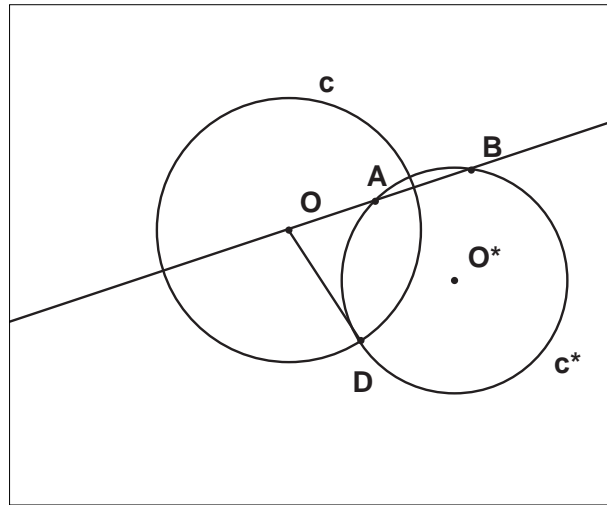


figura I.3

Sfrutto la proprietà 2.1 per costruire il cerchio c^* di centro O^* ortogonale a c (vedi la figura I.4)

- 1 creare il cerchio c di centro O (creazione/cerchio di base e costruzione/centro)
- 2 creare il punto O^* (creazione/punto di base)
- 3 costruire M punto medio del segmento OO^* (costruzione/punto medio)
- 4 creare il cerchio d di centro M per O (creazione/cerchio centro - punto)
- 5 costruire il punto A intersezione tra d e c (costruzione/intersezione di due oggetti)
- 6 creare il cerchio c^* di centro O^* per A (creazione/cerchio centro punto)

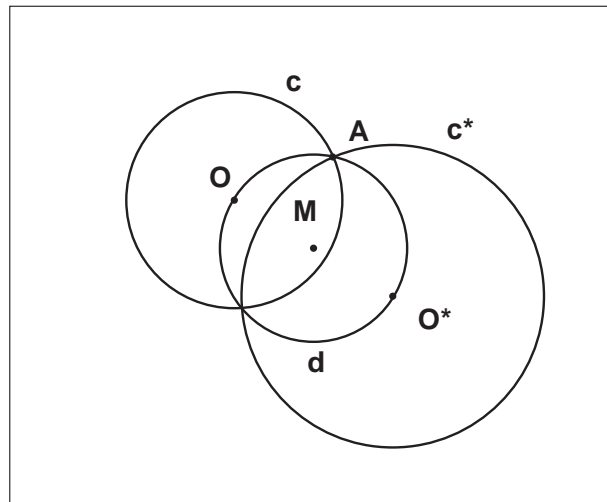


figura I.4

▼ macro “cerchio ortogonale di centro dato”

- 1 selezionare come oggetti iniziali c , O e O^*
- 2 selezionare come oggetto finale c^*

Applico la proprietà 2.2 per costruire il cerchio c^* ortogonale a c per i punti A e B del disco c

(vedi la figura I.5).

- 1 aprire la macro inversione circolare (costruzione/macro)
- 2 costruire il punto $A' = \text{inv}_c(A)$ (costruzione/inversione)
- 3 costruire la retta r asse del segmento A, B e la retta s asse del segmento AA' (costruzione/asse)
- 4 costruire il punto O^* intersezione tra r e s (costruzione/intersezione di due oggetti)
- 5 creare il cerchio c^* di centro O^* per A (creazione/cerchio centro - punto)

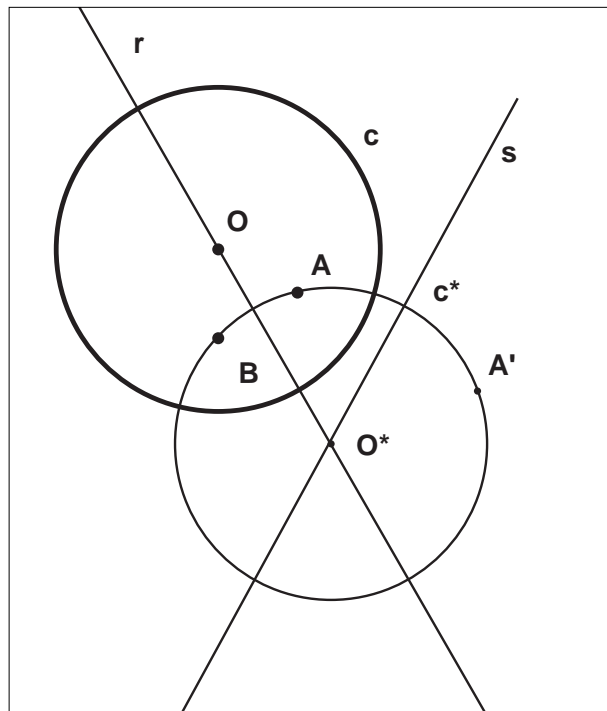


figura I.5

▼ macro “cerchio ortogonale per due punti”

- 1 selezionare come oggetti iniziali c, A e B
- 2 selezionare come oggetti finali c^* e O^*

Costruzione del modello

Nel seguito i termini *in corsivo* indicano enti del modello.

■ I.3 Lo spazio

Lo spazio è costituito dai punti del disco aperto di frontiera il cerchio **iper** di centro O , i *punti impropri* sono i punti di **iper**, le *rette* sono i diametri di **iper** (rette del I tipo) e gli archi di cerchi ortogonali ad **iper** in esso contenuti (rette del II tipo).

Data la *retta* r si definisce come *simmetria* rispetto ad r la simmetria del piano euclideo se r è del I tipo, l’inversione circolare individuata da r se è del II tipo; la *simmetria* sopra definita gode di tutte le proprietà dell’ordinaria simmetria [1], [2].

La *perpendicolare* s ad una *retta* r per un *punto* P è caratterizzata dall’essere unita rispetto alla *simmetria* individuata da r : se $P \notin r$ (vedi la figura I.6)

- 1 costruire il *simmetrico* P' di P rispetto ad r
- 2 costruire il cerchio ortogonale s ad **iper** per P e P' .

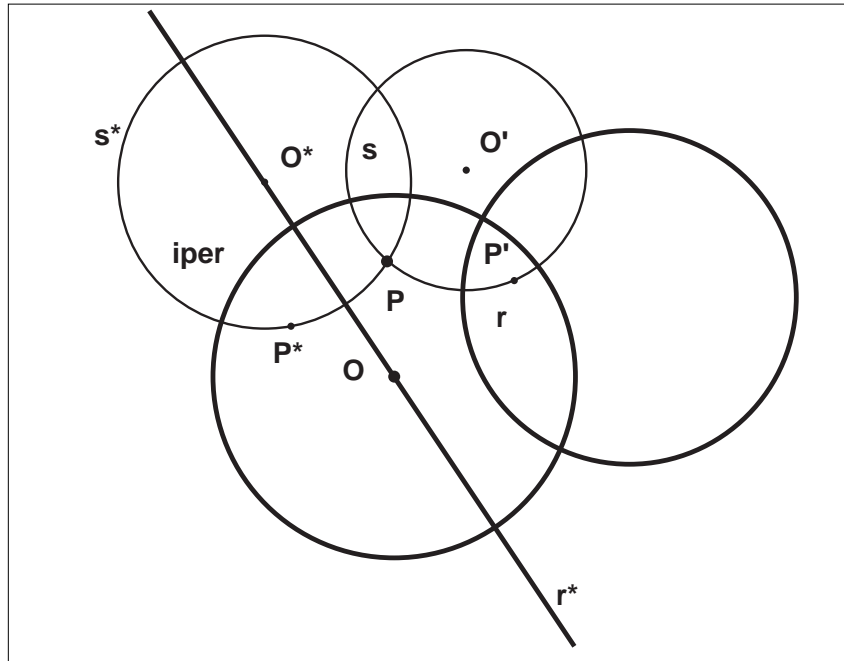


figura I.6

▼ macro “*h-perpendicolare punto esterno a retta del II o I tipo*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper, O, r, P, (iper, O, r*, P)**
- 2 selezionare come oggetti finali **s, O', (s*, O*)**

Nel caso $P \in r$ la costruzione della *perpendicolare s* dipende dal tipo di *retta*:

- **r** del primo tipo (vedi la figura I.7)
 - 1 costruire $P' = \text{inv}_{\text{iper}}(P)$
 - 2 costruire O^* punto medio del segmento PP' (costruzione/punto medio)
 - 3 creare il cerchio s di centro O^* e passante per P (creazione/cerchio centro - punto)

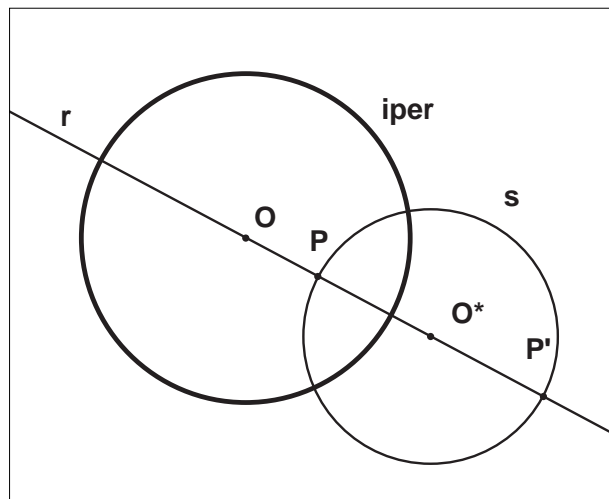


figura I.7

Il punto O^* è l'intersezione tra r e l'asse del segmento PP' , infatti s è ortogonale ad r allora $O^* \in r$, s è ortogonale a **iper** allora O^* è un punto dell'asse di PP' .

▼ macro “*h-perpendicolare I*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper**, **O**, **r**, **P**
- 2 selezionare come oggetti finali **s**, **O***

- **r** del secondo tipo (vedi la figura I.8)
 - 1 creare la retta **t** per **OP** (creazione/retta per due punti)
 - 2 costruire la retta **v** perpendicolare a **t** per **O'** (costruzione/retta perpendicolare)
 - 3 creare il segmento **O'P** (creazione/segmento)
 - 4 costruire la retta **u** perpendicolare a **O'P** per **P** (costruzione/perpendicolare)
 - 5 costruire **O*** intersezione tra **u** e **v** (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 6 costruire il cerchio **s** di centro **O*** e passante per **P** (creazione/cerchio centro punto)

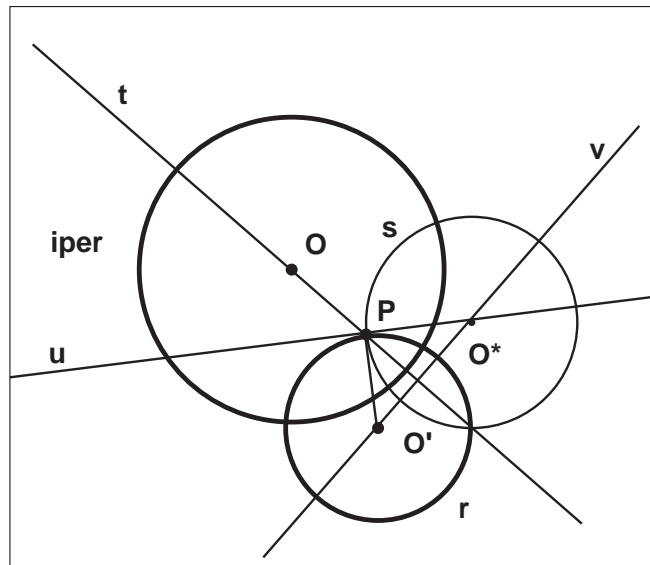


figura I.8

Il punto **O*** è l'intersezione tra la tangente **u** per **P** a **r** e la perpendicolare **v** alla retta **t**, infatti **s** è ortogonale ad **r** allora $O^* \in u$, **s** è ortogonale ad **iper** allora $O^* \in v$.
 Nel caso in cui **O**, **O'** e **P** sono allineati la *perpendicolare* è la retta **OP**.

▼ macro “*h-perpendicolare II*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper**, **O**, **r**, **O'**, **P**
- 2 selezionare come oggetti finali **s**, **O***

■ I.4 Costruzione della bisettrice

Dato l'angolo rAs la *bisettrice* è la *retta* che individua la *simmetria* che trasforma la *retta r* nella *retta s*. La procedura di costruzione dipende dalle *rette* incidenti che individuano l'angolo

- se le *rette r* ed *s* sono del I tipo la *bisettrice* coincide con la bisettrice euclidea,
- se la *retta r* è del I tipo ed *s* è del II tipo (vedi la figura I.9)
 - 1 costruire la perpendicolare **t** ad **r** per **O'** (costruzione/perpendicolare)
 - 2 costruire i punti **O*** e **O**** intersezione tra **s** e **t** (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 3 costruire i cerchi **bi*** e **bi**** passanti per **A** di centro rispettivamente **O*** e **O**** (creazione/cerchio centro - punto)

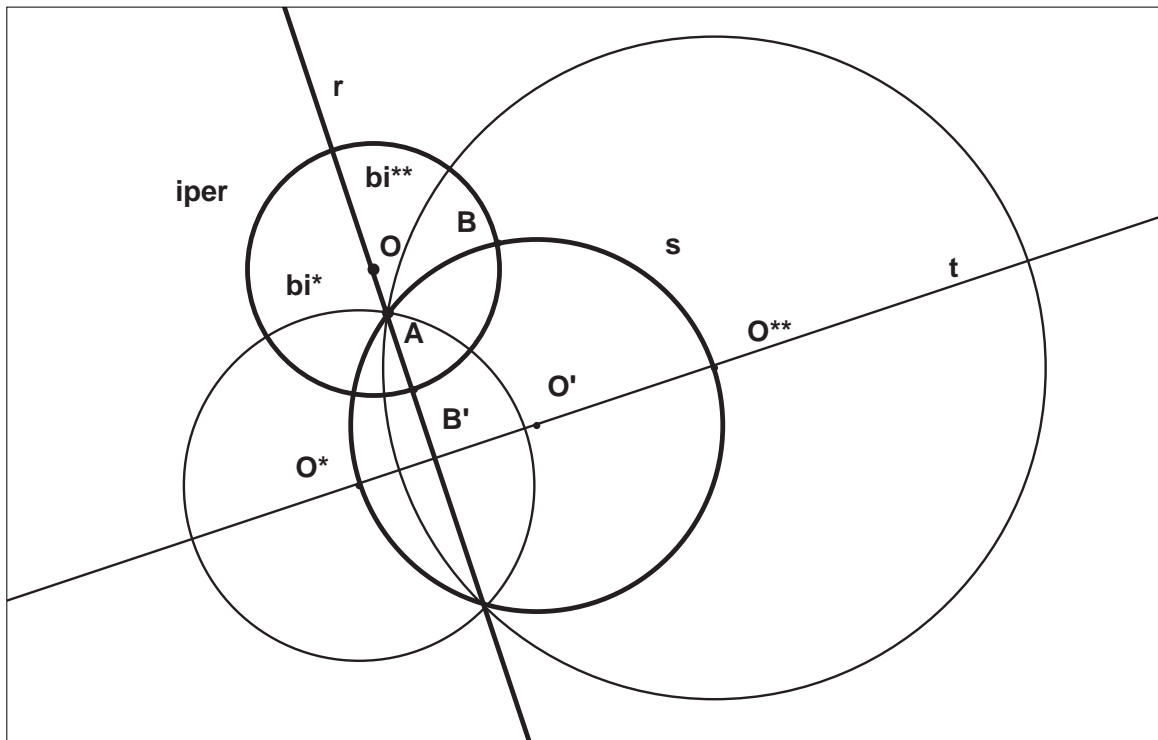


figura I.9

I punti O^* e O^{**} sono l'intersezione tra s e t , infatti per 1.6 sono sul cerchio s , per 2.2 sono sulla perpendicolare a r per O' .

Per 2.1 bi^* e bi^{**} sono ortogonali.

▼ macro “*h-bisectrice I, II*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali r , s , O' e A
- 2 selezionare come oggetti finali bi^* , O^* , bi^{**} e O^{**}
- se le rette r ed s sono del II tipo (vedi la figura I.10)
 - 1 costruire i punti B e C intersezione tra r e $iper$ (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 2 costruire il punto C' intersezione tra s e $iper$ (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 3 creare la retta p per $O'O''$ (creazione/retta per due punti)
 - 4 creare la retta q per B, C' e la retta t per C, C' (creazione/retta per due punti)
 - 5 costruire il punto O^* intersezione di t e p ed il punto O^{**} intersezione tra p e q (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 6 creare il cerchio bi^* e bi^{**} passanti per A e di centro rispettivamente O^* e O^{**} (creazione/cerchio per due punti)

Il punto O^* e il punto O^{**} sono rispettivamente l'intersezione tra le rette t e p e le rette p e q , infatti i cerchi r , s , bi^* e bi^{**} sono incidenti in A e $inv_{asse}(A)$ allora $O^* \in p$ e $O^{**} \in p$, $C' = inv_{bi^*}(C)$ allora $O^* \in t$, $B = inv_{bi^{**}}(C)$ allora $O^{**} \in q$.

$bi^{**} = inv_{bi^*}(bi^{**})$: i punti di intersezione tra $iper$ e bi^{**} si trasformano uno nell'altro rispetto all'inversione individuata da bi^* e $A = inv_{bi^*}(A)$.

▼ macro “*h-bisectrice II*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali $iper$, r , O' , s , O'' e A
- 2 selezionare come oggetti finali bi^* , O^* , bi^{**} e O^{**}

Se t è parallela a p , (q è parallela a p), la bisettrice è la retta per OA .

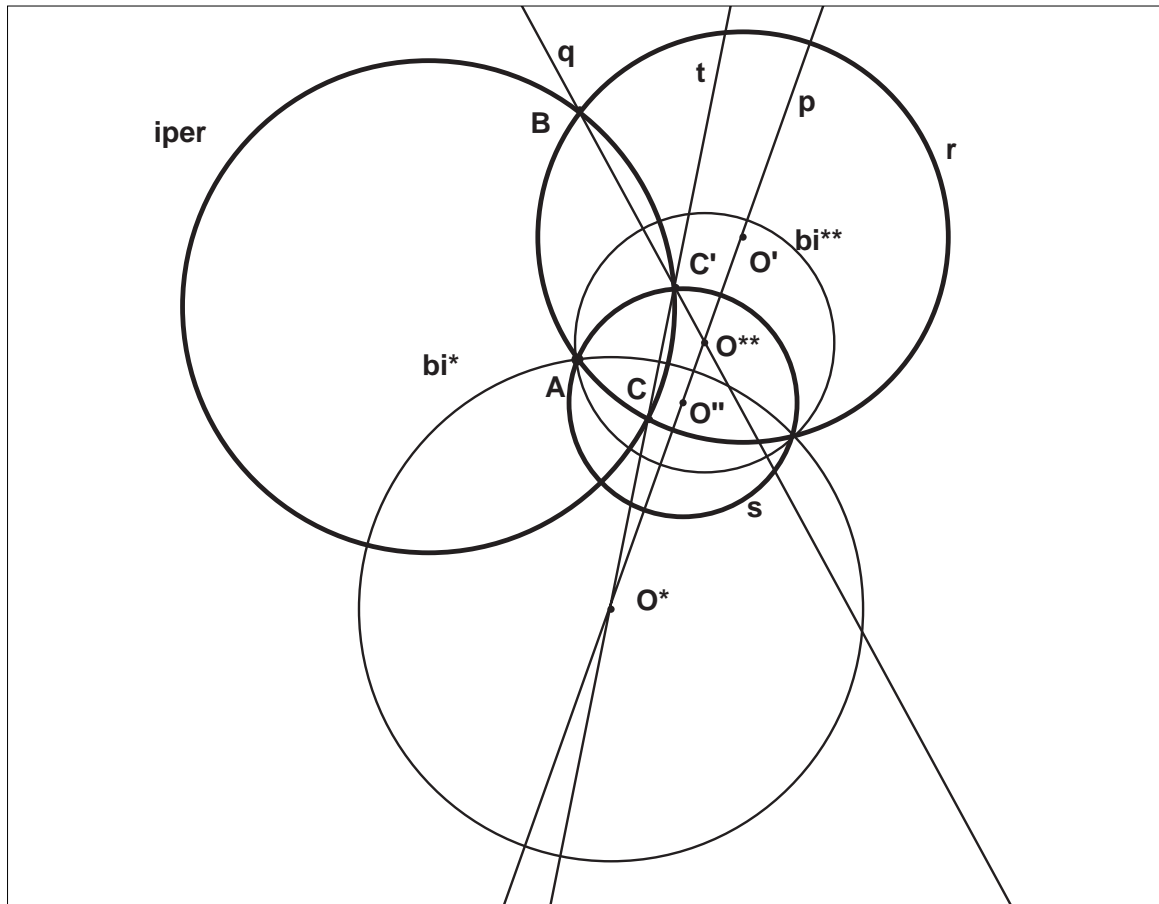


figura I.10

■ I.5 Costruzione del punto medio e dell'asse

Dato il segmento di estremi A e B

- se A, B, O non sono allineati per individuare il punto medio (vedi la figura I.11)
 - 1 costruire il cerchio ortogonale p per A e B di centro C (costruzione/cerchio ortogonale)
 - 2 costruire i punti D e D' intersezione tra $iper$ e p (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 3 costruire le rette q e r rispettivamente per DD' e AB (creazione /retta per due punti)
 - 4 costruire il punto E punto di intersezione tra q e r (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 5 costruire il segmento EC (creazione/segmento)
 - 6 costruire la perpendicolare t per O a EC (costruzione/perpendicolare)
 - 7 costruire il punto F intersezione tra t e EC (costruzione/intersezione di due oggetti)
 - 8 creare il segmento OF (creazione/segmento)
 - 9 costruire il punto M intersezione tra OF e p (costruzione/intersezione di due oggetti)

Per costruire l'asse ripetere le istruzioni fino a • 6

- 7' costruire l'intersezione M tra t e p (costruzione/intersezione di due oggetti)
- 8' creare il cerchio **asse** di centro E passante per M (creazione/cerchio centro punto)

12

Il punto E è l'intersezione tra r e q , infatti $B = inv_{asse}(A)$ allora $E \in r_{AB}$, $D' = inv_{asse}(D)$ allora $E \in r_{DD'}$.

Per 2.2 l'intersezione tra **asse** e p è sulla perpendicolare per O ad EC .

Le istruzioni da • 7 a • 9 sono utilizzate per individuare l'intersezione tra p e t compresa tra A e B .

▼ macro “*h-punto medio*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper**, **O**, **A** e **B**
- 2 selezionare come oggetti finali **M**

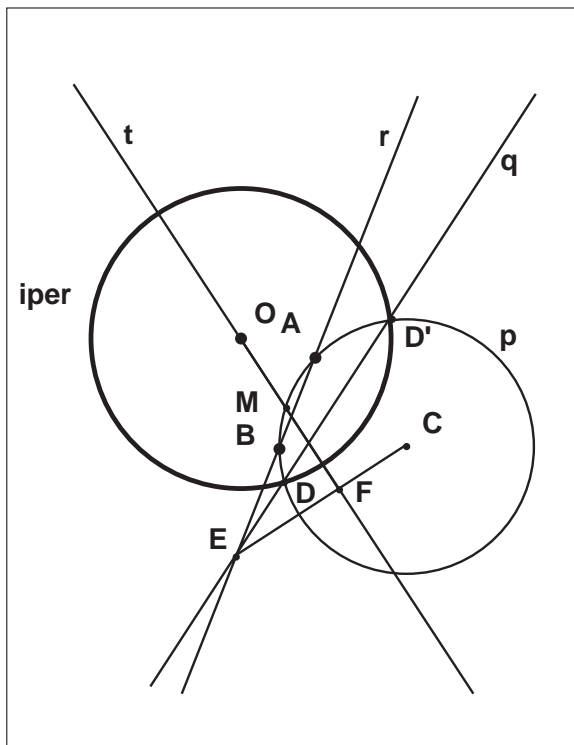
▼ macro “*h-asse*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper**, **O**, **A** e **B**
- 2 selezionare come oggetti finali **asse**

Se r è parallela a q l'asse è la retta per OC , il *punto medio* è l'intersezione tra p e OC .

• se A , B , O sono allineati la costruzione precedente non è possibile perché il punto E non è individuabile, allora,

- 1 creare un punto Q non allineato con A , B
- 2 costruire il cerchio w ortogonale ad **iper** per A e Q
- 3 costruire il punto B' corrispondente di B rispetto all'inversione w
- 4 costruire il *punto medio* e l'asse del segmento AB'
- 5 costruire i corrispondenti degli oggetti costruiti nel punto • 4 rispetto all'inversione w .



figura

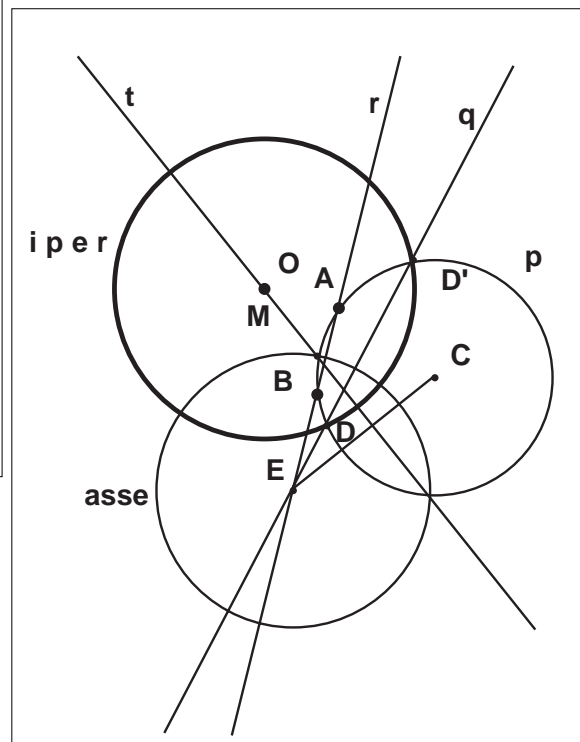


figura I.12

II Esplorazione del modello

■ II.1 Rette parallele ed iperparallele

Le *rette* del modello, rispetto alla relazione di incidenza possono essere *secanti* (l'intersezione è un punto del disco **iper**), *parallele* (l'intersezione è un punto del cerchio **iper**), *iperparallele* (l'intersezione è vuota). (vedi la figura II.1)

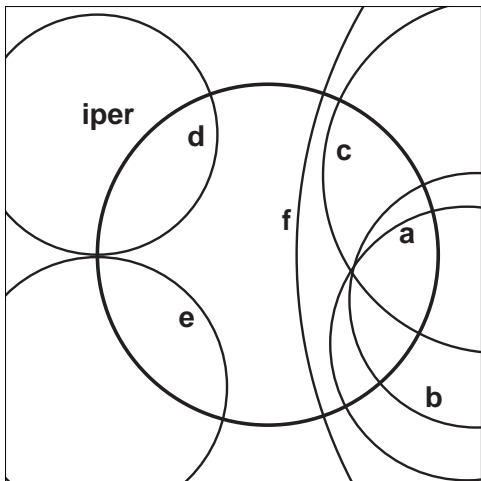


figura II.1

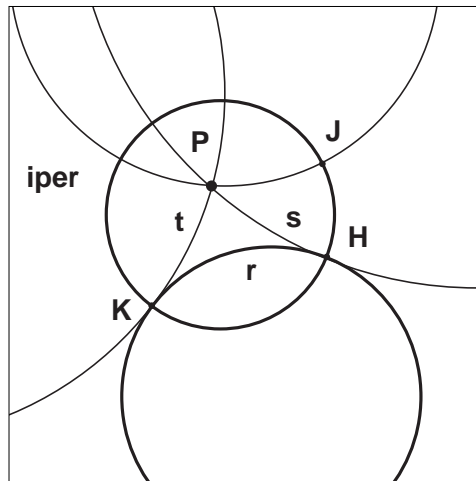


figura II.2

Per costruire le *parallele* ad una retta **r** per un punto $P \notin r$ (vedi la figura II.2)

- 1 costruire le intersezioni **H** e **K** tra **r** e **iper** (costruzione/intersezione di due oggetti)
- 2 costruire i cerchi ortogonali **s** e **t** rispettivamente per **P, H** e per **P, K** (costruzione/cerchi ortogonali);

▼ macro “rette parallele”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper, O, r, P**
- 2 selezionare come oggetti finali **s, t, O_s, O_t**

per costruire le *iperparallele* (vedi la figura II.2)

- 1 prendere un punto **J** appartenente a $(\text{cerchio } \text{iper}) \setminus (\text{disco } r)$ (costruzione/punto su un oggetto)
- 2 costruire il cerchio ortogonale per **P, J** (costruzione/cerchio ortogonale)

La relazione di “non incidenza” sull’insieme delle *rette* del modello non è una relazione di equivalenza, per esempio la proprietà transitiva non è vera per le *rette* della figura II.2; esiste qualche sottoinsieme delle *rette* per cui la relazione è di equivalenza ?

Esploro alcune configurazioni :

- costruisco tre *rette* **a, b** e **c** *iperparallele*, muovo **c**, per le *rette iperparallele* non sempre è valida la proprietà transitiva (vedi la figura II.3);

- se $b \parallel a$ muovo **c** e individuo una configurazione in cui $c \parallel b$ ma incidente **a** (vedi la figura II.4) esiste, tuttavia, un caso in cui le tre *rette* hanno in comune solo lo stesso *punto improprio*, esploro questa particolare situazione (vedi la figura II.5);

- costruisco tre *rette* **a, b** e **c** con lo stesso *punto improprio*, muovo **c**, per qualsiasi posizione di **c** le *rette* sono *parallele*.

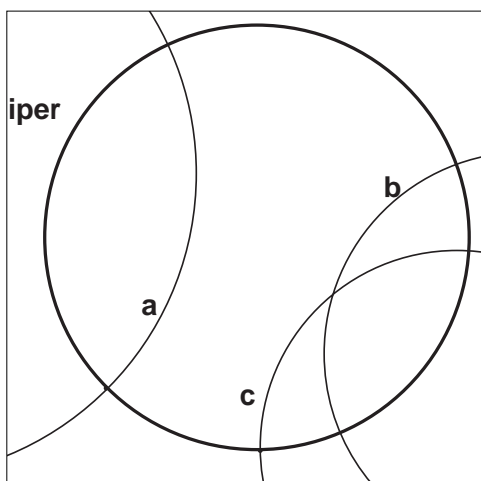


figura II.3

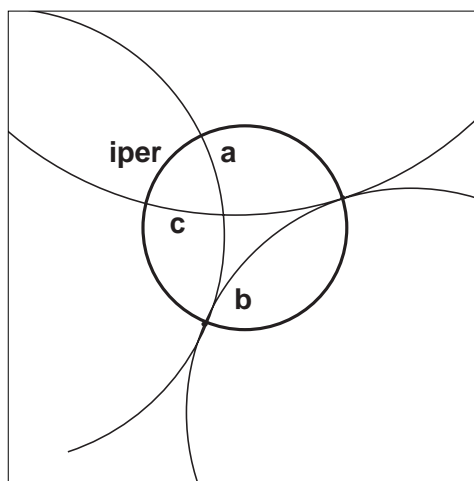


figura II.4

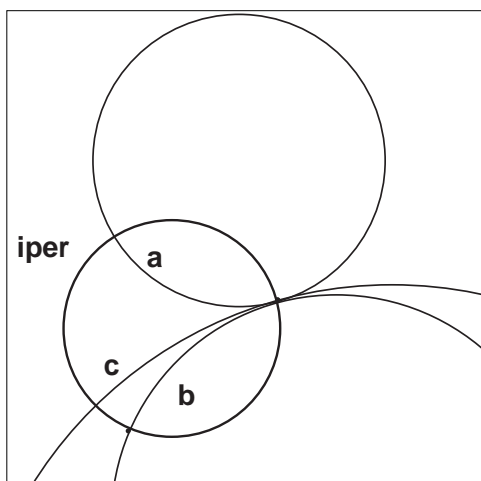


figura II.5

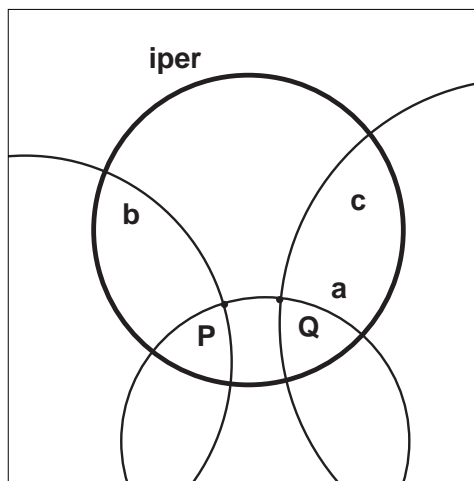


figura II.6

Posso dare una giustificazione formale di questo fatto?

Se a e b oltre in A sono incidenti in B saranno incidenti anche in $B' = \text{inv}_{\text{iper}}(B)$, infatti $a = \text{inv}_{\text{iper}}(a)$ e $b = \text{inv}_{\text{iper}}(b)$, quindi ho due cerchi con tre punti in comune allora coincidono.

Nel caso euclideo rette con la stessa perpendicolare sono parallele, cosa accade nel modello ?

Costruisco (vedi la figura II.6) una retta a , prendo due punti P e Q appartenenti ad a , costruisco le rette b e c perpendicolare ad a per P e Q , b e c sono iperparallele e continuano ad esserlo quando P varia su a .

E' sempre vero ?

Le rette b e c sono unite rispetto alla simmetria individuata da a , quindi se sono parallele hanno due punti impropri in comune, se sono incidenti hanno due punti in comune, in entrambi i casi coinciderebbero.

Conclusione :

Sull'insieme delle rette parallele con stesso punto improprio o sull'insieme delle rette iperparallele con la stessa perpendicolare la relazione di "non incidenza" è una relazione di equivalenza.

_ Date due rette a e b parallele, se $c \perp a$ allora $c \perp b$?

Costruisco le rette parallele a e b , scelgo un punto P su a , costruisco la retta c perpendicolare ad a per P , prendo i punti Q ed R su b , costruisco $R' = \text{inv}_c(R)$ e $Q' = \text{inv}_c(Q)$, costruisco la retta b' per $R'Q'$ (vedi la figura II.7)

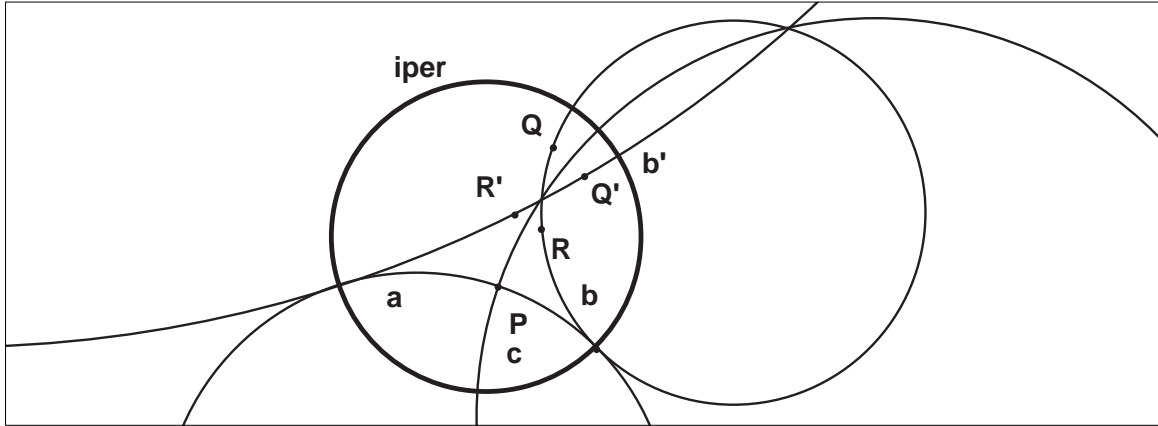


figura II.7

muovo P su a , osservo che

- $b' \neq b$, allora c non è perpendicolare a b .
- la retta b' è parallela ad a nell'altro punto improprio.

Quanto congetturato è vero in generale, infatti se $A = a \cap b$ allora $A' = \text{inv}_c(A) \in b'$.

- Date due rette a e b iperparallele, se $c \perp a$ allora $c \perp b$?

Costruisco le rette iperparallele a e b , scelgo un punto P su a , determino la retta c , perpendicolare per P ad a . Costruisco $b' = \text{inv}_c(b)$, muovo P e scopro che esiste una configurazione in cui $b = b'$, posso caratterizzarla ? (vedi la figura II.8)

Il cerchio **iper** e a sono ortogonali a c , allora i punti A e B , intersezione tra **iper** e a si corrispondono nell'inversione circolare individuata da c , analogamente per i punti C e D , intersezione tra b e **iper**, $C = \text{inv}_c(D)$, il centro O^* di c è l'intersezione delle rette r ed s , rette rispettivamente per AB e

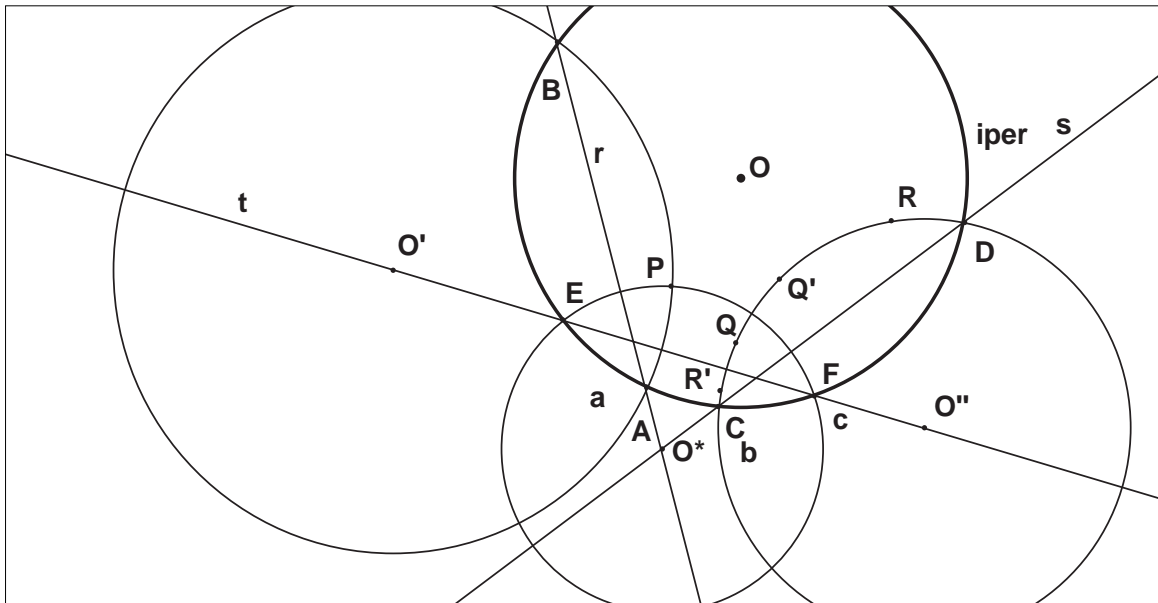


figura II.8

CD; **iper** e **c** sono ortogonali ad **a** e **b**, allora i punti di intersezione **E** ed **F** sono allineati sia con **O'** che con **O''**, allora i punti **O'**, **E**, **F** e **O''** sono allineati, quindi **c** è un cerchio di centro **O*** per **E**.

Costruzione della *perpendicolare* a due *iperparallele*

- 1 costruire i punti **A** e **B** intersezione tra **iper** e **a**, i punti **C** e **D** intersezione tra **iper** e **b** (costruzione/intersezione di due oggetti)
- 2 creare la retta **r** per **AB** e la retta **s** per **CD** (creazione/retta per due punti)
- 3 costruire il punto **O*** intersezione tra **r** ed **s** (costruzione / intersezione di due oggetti)
- 4 creare la retta **t** per **O'O''** (creazione / retta per due punti)
- 5 costruire il punto **E** intersezione tra **t** ed **iper** (costruzione / intersezione di due oggetti)
- 6 creare il cerchio **c** di centro **O*** per **E** (creazione / cerchio centro - punto)

▼ macro “*retta perpendicolare a due iperparallele*”

- 1 selezionare come oggetti iniziali **iper**, **O**, **a**, **O'**, **b** e **O''**
- 2 selezionare come oggetti finali **c** e **O***

L'unicità della *retta perpendicolare* a due *iperparallele* implica l'impossibilità di costruire un *quadrilatero* con quattro *angoli retti*

_ Data una *retta a*, un suo *punto P* e la *perpendicolare b* per **P**, fissato un *punto Q* su **b**, la *parallela c* per **Q** ad **a** forma con **b** un *angolo bQc* non retto, l'ampiezza varia al variare di **Q** su **b** ?

Costruzione dell'esperienza: (vedi la figura II.9)

- fisso una coppia di segmenti **X** e **Y** ortogonali di origine **O'**
- costruisco le tangenti **r** ed **s** in **Q** a **b** e **c**
- costruisco l'angolo **AO'X** isometrico a **bQc**

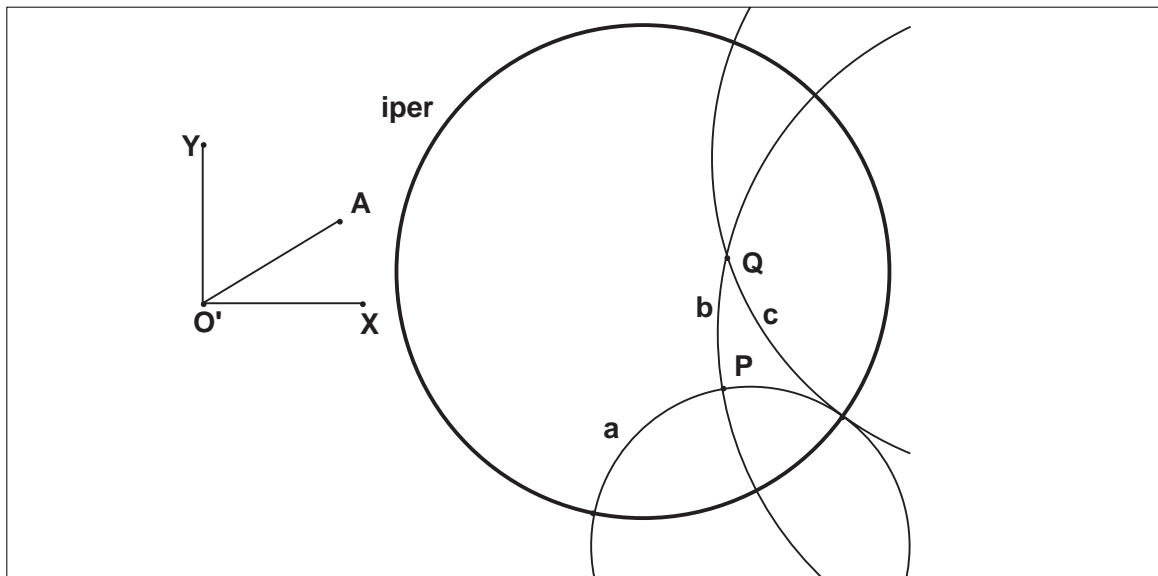


figura II.9

muovo **P** su **b**, l'ampiezza dell'angolo **bQc** non è costante, dipende dalla *distanza* di **P** da **a**: al diminuire della *distanza* aumenta l'ampiezza dell'angolo.

■ II.2 Cerchio, orociclo e iperciclo

Nel paragrafo precedente abbiamo osservato che nel modello si possono individuare tre tipi di *fasci*:

- *fasci* del I tipo, costituiti dalle *rette* passanti per un *punto proprio*, detto centro
- *fasci* del II tipo, costituiti dalle *rette* che hanno lo stesso *punto improprio*

- fasci del III tipo, costituiti da *rette perpendicolari* ad un *retta* data.

Dato un *fascio* ed un punto **P**, considero il luogo dei punti *simmetrici* di **P** rispetto alle *rette* del *fascio*:

- se il *fascio* è del I tipo e **P** non è il centro (vedi la figura II.10) il luogo descritto è un *cerchio*.

Come tradurre in termini euclidei il luogo prima descritto ?

Costruisco (vedi la figura II.11)

- due *rette* **a** e **b** appartenenti al *fascio* di centro **A**,
- $P' = \text{inv}_a(P)$ e $P'' = \text{inv}_b(P')$
- il cerchio **c** per **P**, **P'** e **P''**

- una *retta* **d** del *fascio* per **A**
- $Q = \text{inv}_d(P'')$

al variare di **d** il punto **Q** si muove sul cerchio **c**, il *cerchio* di centro **A** per **P** è un *cerchio* euclideo; dalla costruzione segue che

- le *rette* del *fascio* passano per due punti **A** e $A' = \text{inv}_{\text{iper}}(A)$

- il cerchio **c** è *ortogonale* ad ogni *retta* del *fascio*

Le proprietà precedenti mi permettono di caratterizzare in termini euclidei il *cerchio* di centro **A** passante per **P**.

Siano **A**, **P**, **O** non allineati (vedi la figura II.12)

- 1 costruire il punto **A'** corrispondente per *inversione* rispetto ad *iper* di **A** (costruzione/*inversione*)

- 2 costruire il cerchio **q** di centro **O'** per i punti **A**, **P**, **A'** (costruzione/*cerchio* per tre

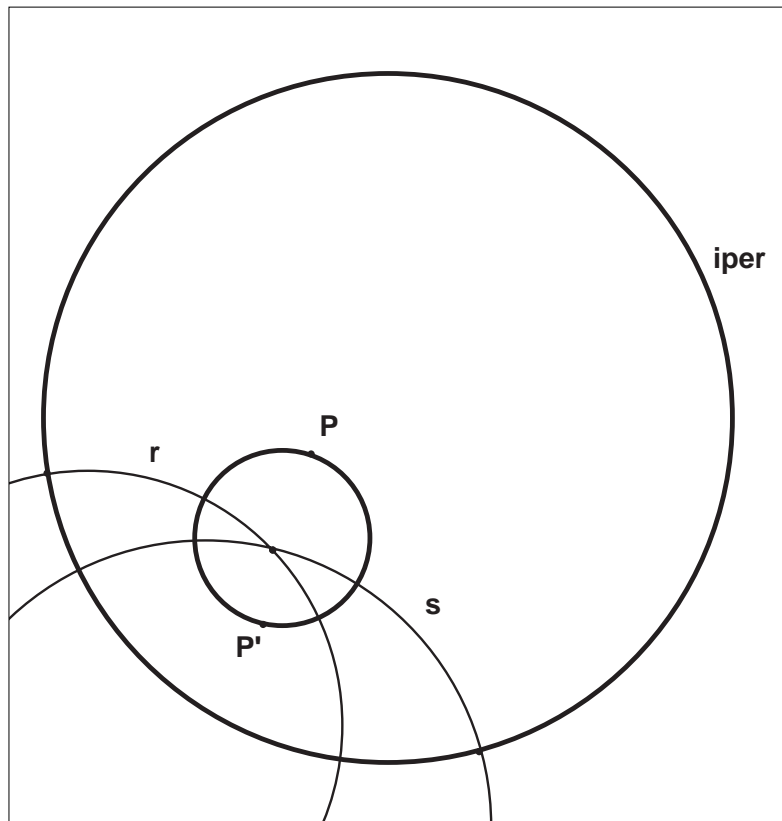
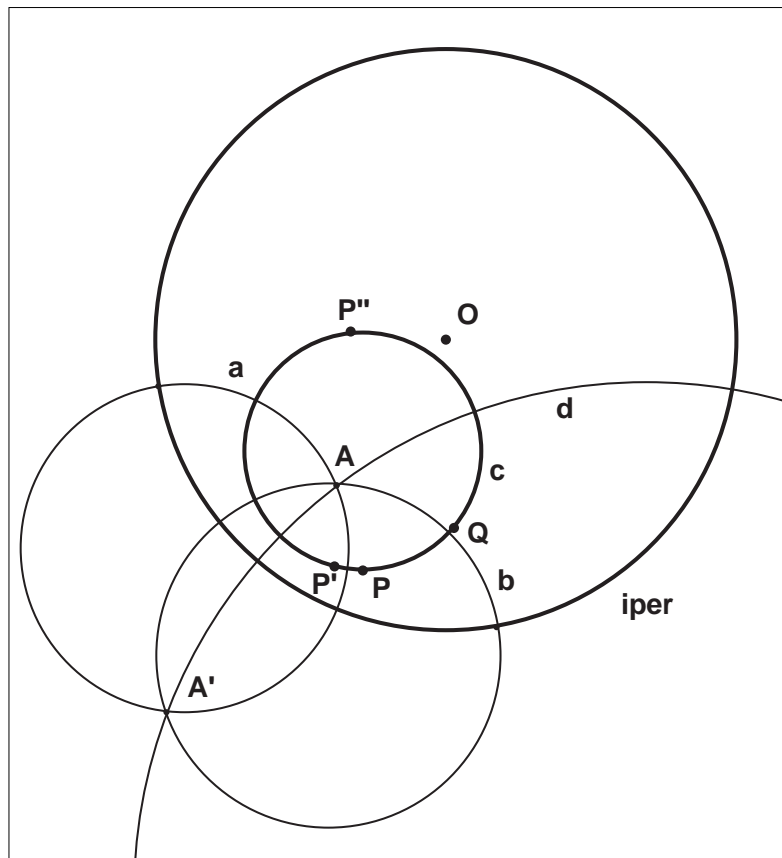


figura II.10

figura II.11



punti)

- 3 creare la retta *s* per *O'* e *P* (creazione/cerchio per due punti)
- 4 costruire la retta *t* per *P* e perpendicolare a *s* (costruzione/retta perpendicolare)
- 5 creare la retta *u* per *A* e *A'* (creazione/retta per due punti)
- 6 costruire il punto *O** intersezione tra la retta *t* e la retta *u* (costruzione/intersezione di due oggetti)
- 7 creare il cerchio *c* di centro *B* e passante per *P* (creazione/cerchio centro,punto)

▼ macro "cerchio centro - punto"

- 1 selezionare come oggetti iniziali *iper*, *O*, *A* e *P*

- 2 selezionare come oggetto finale *c*

La costruzione può essere ottimizzata costruendo solo il centro del cerchio *q*.

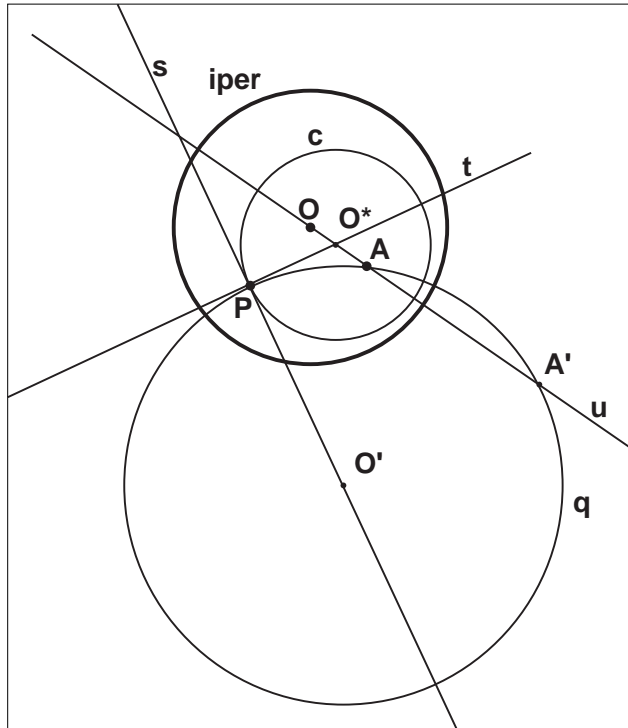


figura II.12

La procedura precedente non è più possibile quando *O*, *A*, *P* sono allineati perché il cerchio *q* non è più costruibile, posso comunque, scelto il punto *R* non appartenente alla retta *AP*,

- 1 costruire il cerchio *w* ortogonale ad *iper* per *A* ed *R*,
- 2 costruire il punto *P'* corrispondente di *P* rispetto all'inversione individuata da *w*
- 3 costruire il cerchio di centro *A* e passante per *P'*.

- se il fascio è del II tipo (vedi la figura II.13) il luogo descritto è un *orociclo*.

Ripeto il procedimento proposto nel caso precedente e scopro che l'orociclo è un cerchio tangente a *iper*.

- se il fascio è del III tipo e *P* non è sull'asse (vedi la figura II.14) del fascio il luogo descritto è un *iper ciclo*.

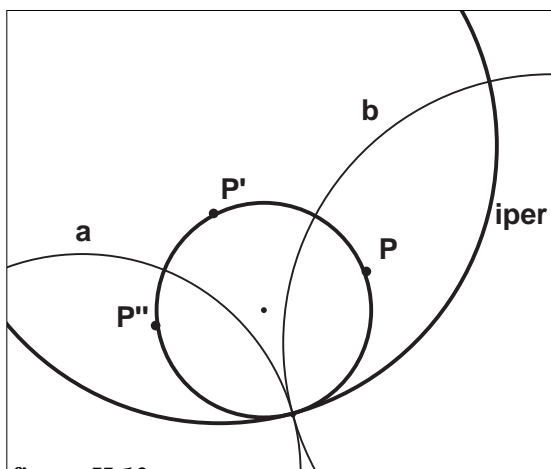


figura II.13

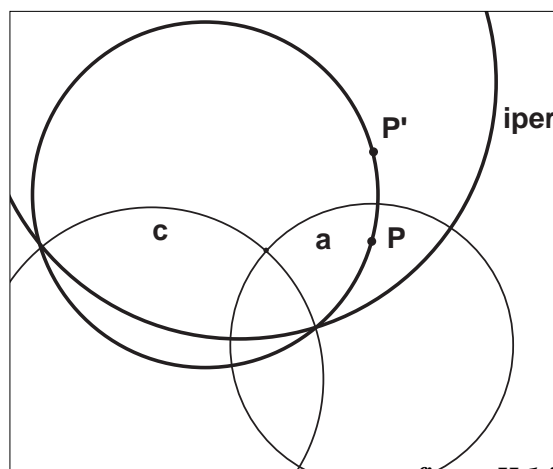


figura II.14

Il luogo è ancora una *retta* come nel caso euclideo ?

Scelto un *punto* P sull' *iperciclo* c costruisco $P' = \text{inv}_{\text{iper}}(P)$, $P' \notin c$ (vedi la figura II.15), c non è una *retta* del modello.

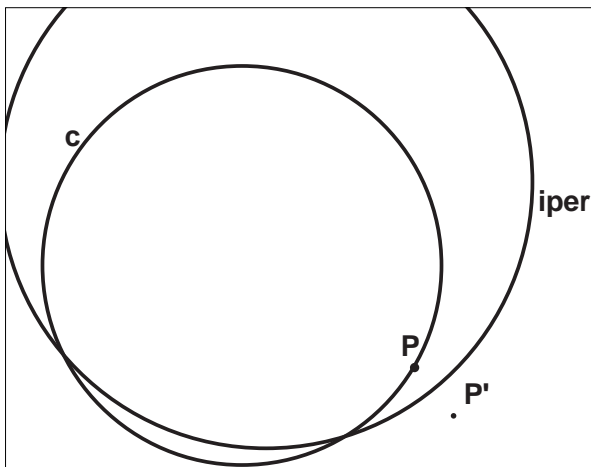


figura II.15

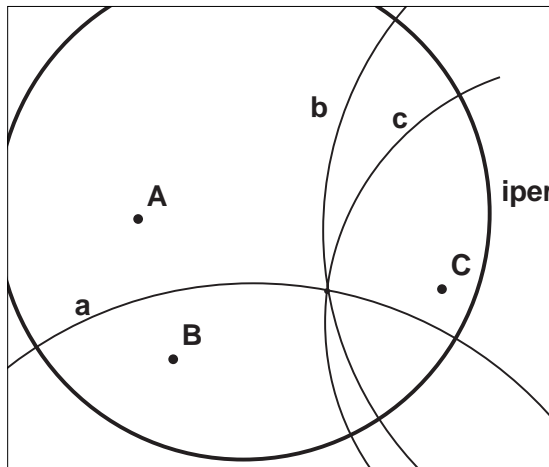


figura II.16

_ Nella geometria euclidea fissati tre punti non allineati esiste ed è unico il cerchio per i punti dati, cosa accade nel modello ?

Traduco il problema sul Cabri:

- 1 creare i punti A , B e C
- 2 costruire le *rette* a , b e c assi dei segmenti AB , BC e AC

muovo C sul disco *iper*, le tre *rette* possono essere

- *incidenti*, (vedi la figura II.16), appartengono allora ad un *fascio* del I tipo, l'intersezione delle tre *rette* è il *centro* del *cerchio* passante per i tre *punti*
- *parallele*, (vedi la figura II.17), appartengono allora ad un *fascio* del II tipo, i tre *punti* appartengono all'*orociclo* per il *punto improprio* del *fascio*

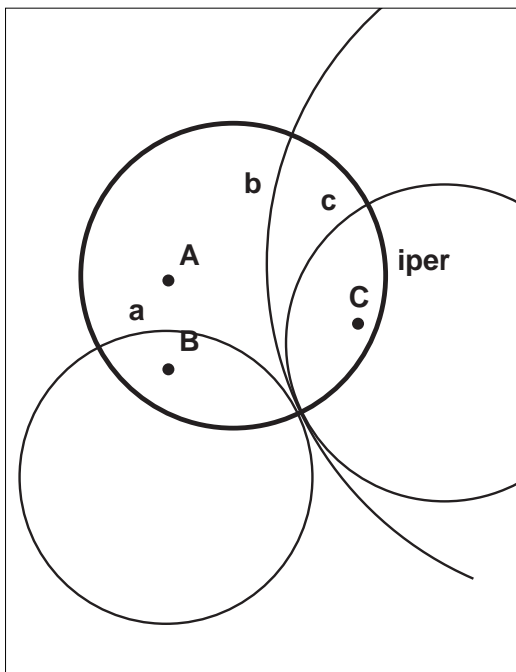


figura II.17

- *iperparallele*, (vedi la figura II.18), in questo caso è necessaria una ulteriore esperienza per stabilire se le *rette* a , b e c appartengono ad un *fascio* del III tipo:

- 1 costruisco la *perpendicolare* alle *rette* a e b ,
- 2 fisso P , Q e R su c ,
- 3 costruisco i *simmetrici* P' , Q' e R' di P , Q e R .

P' , Q' e R' appartengono a c , posso congetturare l'appartenenza delle tre *rette* ad un *fascio* del III tipo.

Dall'esperienza precedente concludo che

- tre *punti* individuano sempre o un *cerchio*, o un *orociclo* o un *iperciclo*;

un *triangolo* è, quindi, sempre *inscrittibile* o in un *cerchio*, o in un *orociclo* o in un *iperciclo*, cioè i suoi *assi* appartengono allo stesso *fascio*.

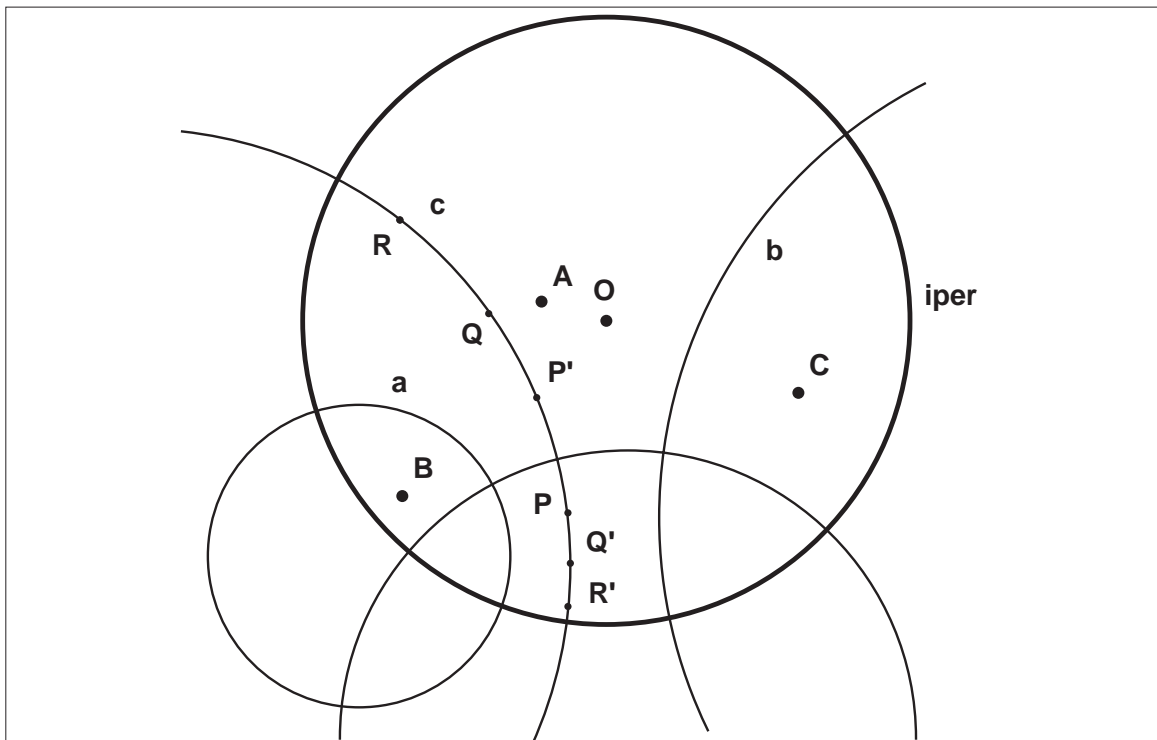


figura II.18

■ II.3 Rotazione, orotraslazione e traslazioni

Nello studio delle trasformazioni geometriche in ambito euclideo si dimostra che le rotazioni e le traslazioni si ottengono come composizioni di due simmetrie assiali con assi rispettivamente incidenti e paralleli, ed in generale che ogni isometria è la composizione di al più tre simmetrie assiali, cosa accade in ambito non euclideo ? (vedi [5])

Siano r ed s rette del modello, definisco la trasformazione

$$P \mapsto \text{inv}_r[\text{inv}_s(P)]$$

Per determinare il corrispondente del punto P

- 1 costruire due rette r e s (costruzioni/cerchio ortogonale per due punti)
- 2 creare un punto P (creare/punto di base)
- 3 costruire $P' = \text{inv}_s(P)$ (costruzione/inversione circolare)
- 4 costruire $P'' = \text{inv}_r(P')$ (costruzione/inversione circolare)

▼ macro “composizione di due h -simmetrie”

- 1 selezionare come oggetti iniziali r e s ed i rispettivi centri
- 2 selezionare come oggetti come oggetto finale P'' .

- se r ed s sono incidenti in A ,

creo il punto Q , costruisco il punto $Q' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(Q)]$ muovo Q , osservo che l'unico punto unito è A ,

creo due rette u e v

- incidenti costruisco $u' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(u)]$ e $v' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(v)]$, u' e v' sono rette incidenti (vedi la figura II.19.a)

- parallele, costruisco $u' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(u)]$ e $v' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(v)]$, u' e v' sono rette parallele (vedi la figura II.19.b)

- appartenenti ad un fascio del III tipo, costruisco $u' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(u)]$ e $v' = \text{inv}_r[\text{inv}_s(v)]$, u' e v'

appartengono ad un fascio del III tipo (vedi la figura II.19.c).

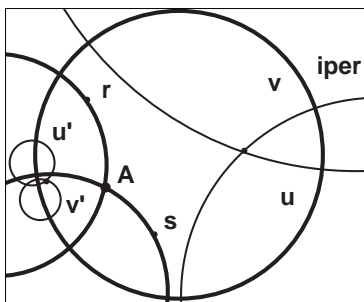


figura II.19.a

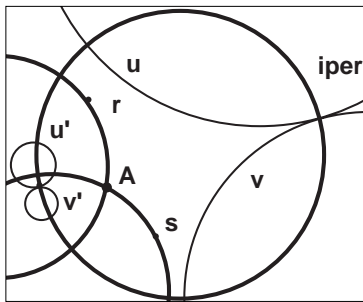


figura II.19.b

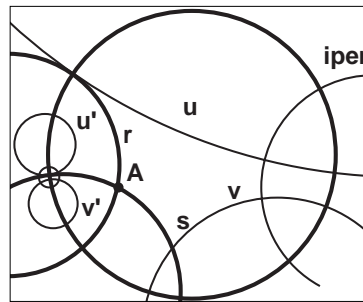


figura II.19.c

- se r ed s sono *parallele*, non riesco a determinare *punti uniti*, *rette incidenti* si trasformano in *rette incidenti*, *rette parallele* in *rette parallele*, *rette appartenenti ad un fascio del III tipo* in *rette appartenenti ad un fascio del III tipo*, il *fascio* individuato da r ed s si trasforma in sé (vedi la figura II.20)

- se r ed s appartengono ad un *fascio del III tipo* non individuo *punti uniti*, *rette incidenti* si trasformano in *rette incidenti*, *rette parallele* in *rette parallele*, *rette appartenenti ad un fascio del III tipo* in *rette appartenenti ad un fascio del III tipo*, la *perpendicolare* ad r ed s è unita (vedi la figura II.21)

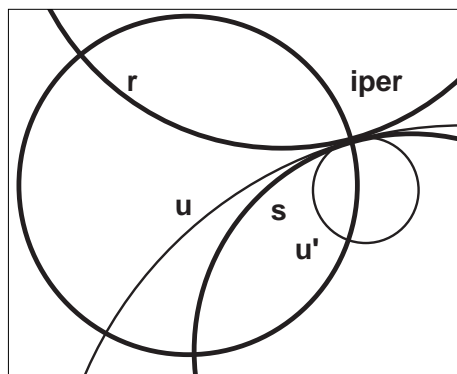


figura II.20

- Esiste una *isometria* che manda due *punti* A e B di una *retta* r in due *punti* A' e B' di una *retta* s e che manda uno dei due *semipiani* di bordo r in un fissato *semipiano* con bordo s ? (vedi la figura II.22)

Costruisco l'asse di AA' , A si trasforma in A' e B in B'' ; costruisco la *bisectrice* dell'angolo $B''A'B'$, B'' si trasforma in B' , A' è fisso: $A'B' = s \circ r (AB)$.

Il *semipiano* contenente P si trasforma nel *semipiano* contenente P' , se applico la *simmetria* di *asse* s il *semipiano* corrispondente è quello che contiene P'' .

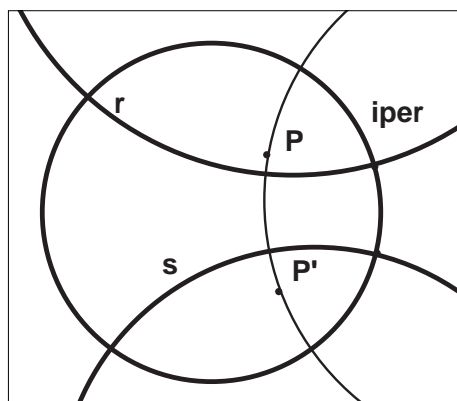


figura II.21

■ II.4 Triangoli del modello

_ Fissato un *triangolo* le *altezze*, le *mediani*, le *bisectrici* appartengono ad uno stesso *fascio*? (vedi [3])

- fissati i *punti* A , B e C

- costruisco le *altezze* h , k e j , (vedi la figura II.23); al variare di C in *iper* le tre *rette* o appartengono ad un *fascio del I tipo*, (vedi la figura II.23.a), o appartengono a un *fascio del II tipo*, (vedi la figura II.23.b), o sono *iperparallele*, ripeto l'esperienza fatta prima (vedi la figura

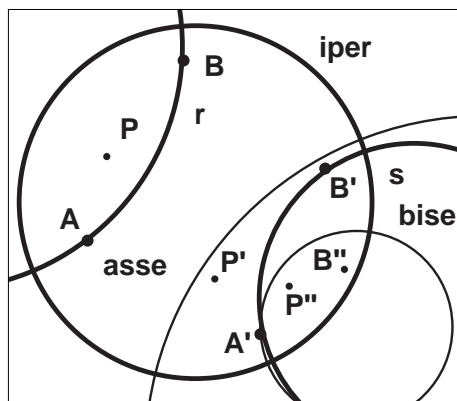


figura II.22

II.23.c), le rette appartengono ad un fascio del III tipo;

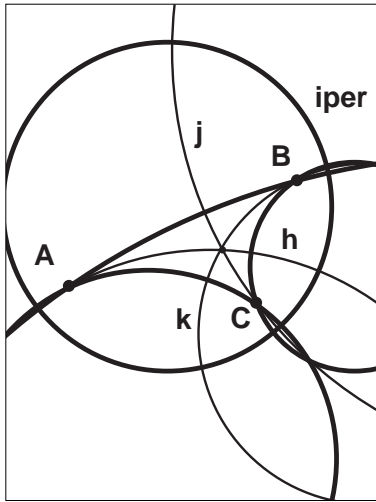


figura II.23.a

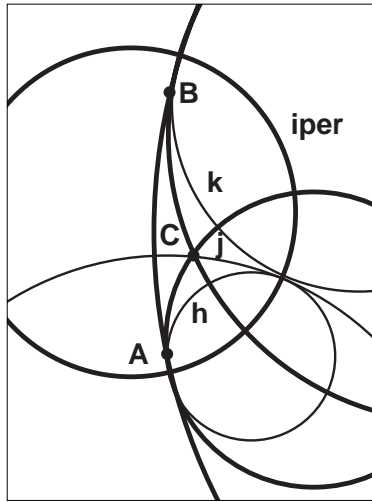


figura II.23.b

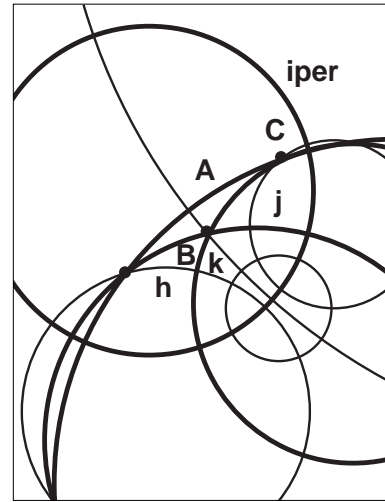


figura II.23.c

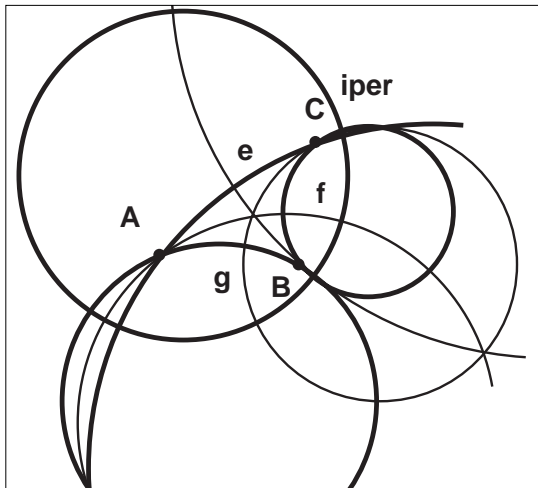


figura II.24

- costruisco le *bisettrici* *e*, *f* e *g*, (vedi la figura II.24); al variare di *C* in *iper* le tre rette appartengono sempre ad un fascio del I tipo

- costruisco le *mediane* *l*, *m* e *n*, (vedi la figura II.25); al variare di *C* in *iper* le tre rette appartengono sempre ad un fascio del I tipo.

Il punto *G* divide le *mediane* in due parti tali che una è doppia dell'altra? Costruisco *M* punto medio di *AG* (vedi la figura II.25), costruisco *M'* simmetrico di *M* rispetto al centro *G*, *M'* non coincide con il punto *L*, la proprietà è falsa nel modello.

Le *bisettrici* determinano un fascio del I tipo, posso quindi sempre inscrivere un *cerchio* in un *triangolo* (vedi la figura II.26).

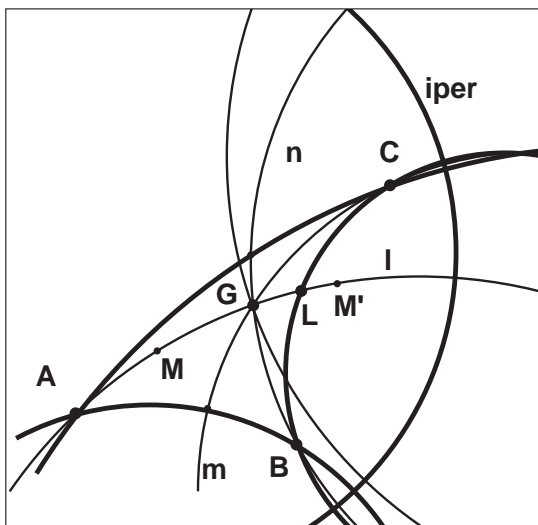


figura II.25

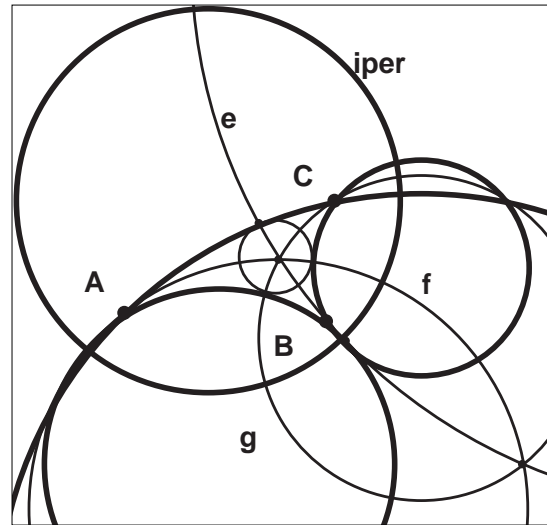


figura II.26

_ Assegnato un segmento è sempre possibile costruire un triangolo equilatero ? E' equilatero ?

Fissati i punti **A** e **B**, costruisco il cerchio **c** di centro **A** per **B** ed il cerchio **d** di centro **B** per **A**, costruisco l'intersezione **C** tra **c** e **d**, i punti **A**, **B** e **C** sono vertici di un triangolo equilatero, sono anche vertici di un triangolo equiangolo ? (vedi la figura II.27)

Costruisco le mediane **l** ed **m**, trasformo il triangolo rispetto alla rotazione individuata dalle rette **l** ed **m**, osservo che (vedi la figura II.27) **ABC** si trasforma in sé, posso quindi concludere che il triangolo è equiangolo.

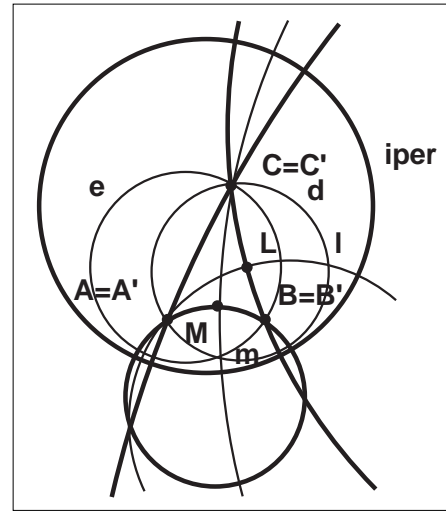


figura II.27

Quale è l'ampiezza degli angoli ?

Considero la seguente costruzione, (vedi la figura II.28) :

- 1 costruire un cerchio **c** di centro **A** per **B** (costruzioni/cerchio)
- 2 fissare un punto **P1** su **c** (costruzioni/punto su un oggetto)
- 3 costruire un cerchio **c1** di centro **P1** per **A** (costruzioni/cerchio)
- 4 costruire il punto **P2** intersezione tra **c** e **c1**

ripetere i punti • 3 e • 4 a **Pi** per $i = 2, \dots, 6$;

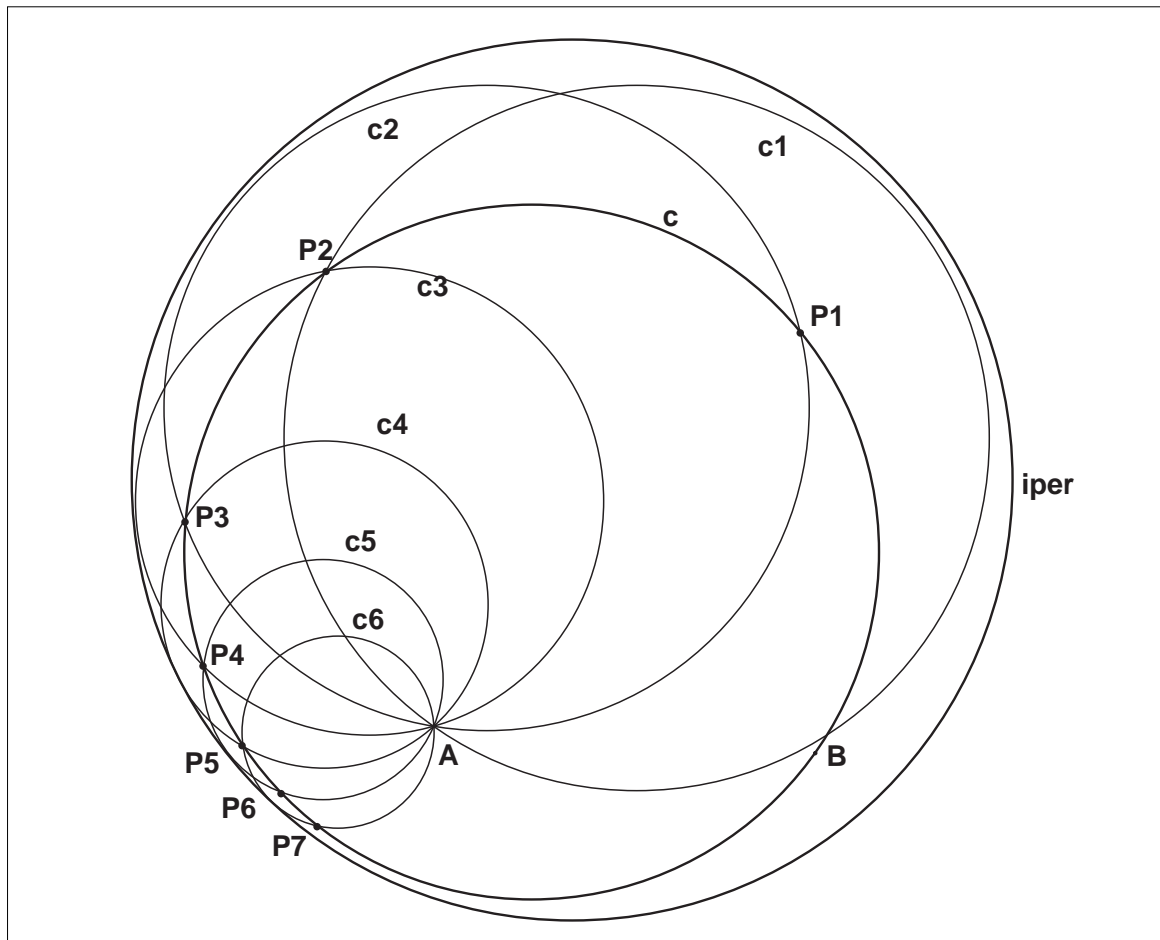


figura II.28

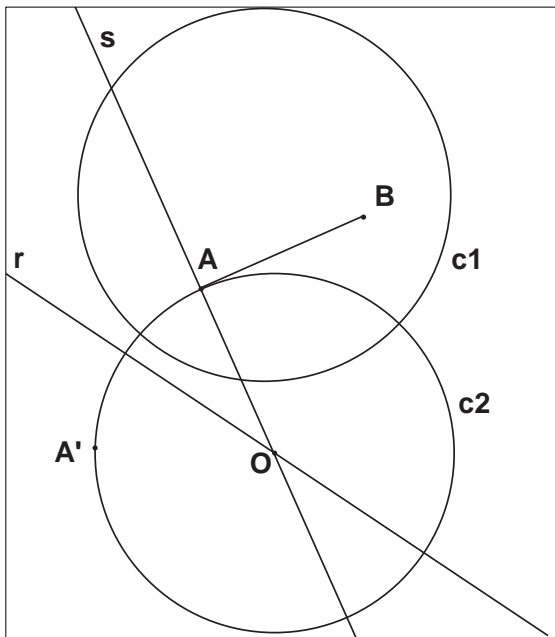


figura II.29

costruire una retta u tale che $\angle uCt = z$ e $B = u \cap s$.

Per determinare s , t e u , risolvo il seguente problema :

dato un cerchio c_1 , un segmento AB contenuto nel disco c_1 costruire un cerchio c_2 tangente al segmento AB ed ortogonale a c_1 . (vedi la figura II.29)

Il cerchio c_2 ortogonale a c_1 quindi A e $A' = \text{inv}_{c_1}(A)$ appartengono a c_2 , il punto O centro di c_2 appartiene alla retta r asse di AA' , AB è tangente a c_2 in A quindi O appartiene alla retta s perpendicolare ad AB in A .

Applico la costruzione precedente alla retta che forma con la tangente ad r in A un angolo di ampiezza x , ripeto la procedura per B e per C (vedi la figura II.30).

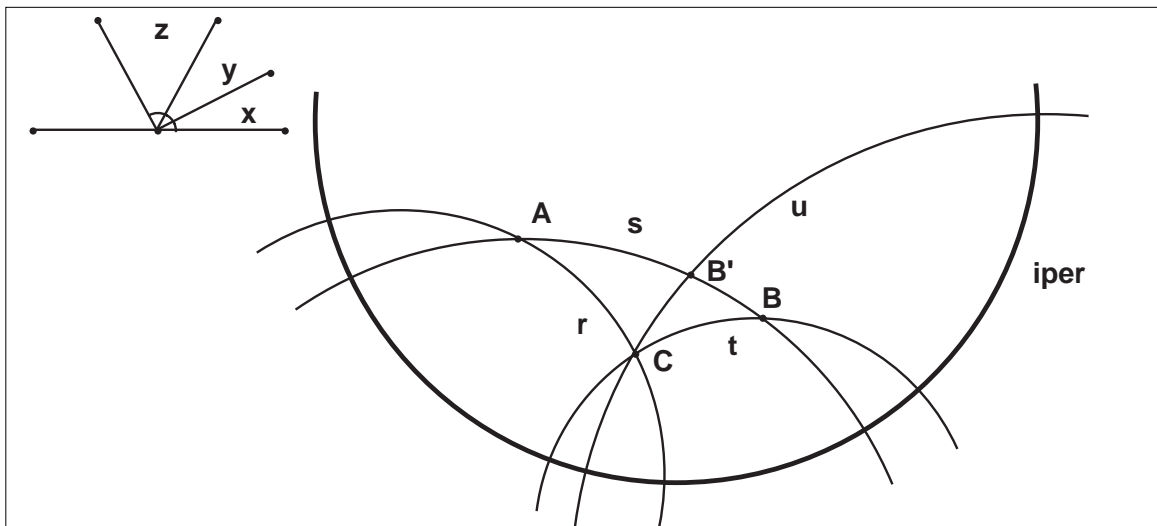


figura II.30

Sposto B , esiste una sola configurazione in cui $u = t$, è unico il triangolo con angoli assegnati.

la costruzione precedente non divide il *cerchio* in sei parti congruenti, la somma delle ampiezze degli *angoli* con vertice in A è minore di due angoli piatti, l'ampiezza dell'angolo di un *triangolo equilatero* non è, quindi, $1/3$ dell'angolo piatto, inoltre per ogni scelta del *raggio* del *cerchio* la posizione dell'ultimo *punto* costruito dalla precedente procedura varia, l'ampiezza dell'angolo dipende dalla lunghezza del lato.

– Assegnati tre angoli quanti triangoli posso costruire ?

Fissati gli angoli x , y e z , voglio costruire il *triangolo* che ha un lato sulla *retta* r , un vertice nel punto A di r , gli angoli isometrici ad x , y e z .

Per realizzare tale costruzione devo

- 1 individuare una *retta* s tale che $\angle rAs = x$
- 2 prendere un *punto* B su s e determinare una *retta* t tale che $\angle sBt = y$
- 3 costruire, se esiste, il *punto* $C = r \cap t$,

■ II.5 Quadrilateri e poligoni regolari

Nel caso euclideo la nozione di convessità di un quadrilatero è legata alla incidenza delle diagonali, posso estendere questo risultato ai *quadrilateri* del modello ?

Costruisco il *quadrilatero* convesso **ABCD**, il *punto E*, intersezione delle diagonali, è interno al *quadrilatero* (vedi la figura II.31.a), se la condizione di convessità non è verificata **E** è esterno (vedi la figura II.31.b)

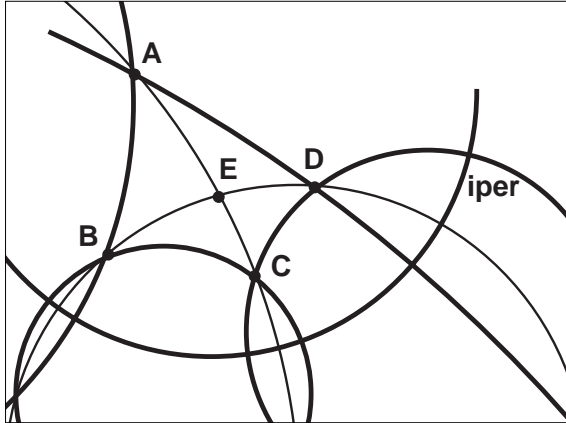


figura II.31.a

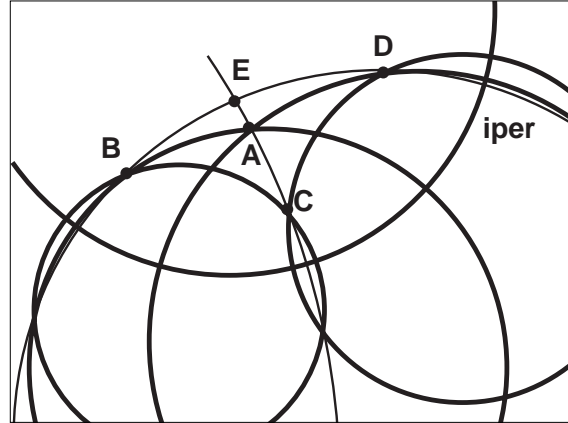


figura II.31.b

Costruisco alcuni *quadrilateri convessi* che hanno simmetrie

_ Parallelogrammi

Dati tre *punti A, B e C* esiste un quarto *punto D* in modo che la quaterna **A, B, C e D** si trasformi in sé rispetto ad una *simmetria centrale*?

Creo i *punti A, B e C*, (vedi la figura II.32)

costruisco

- il *punto medio M* del segmento **AC**,
- le *rette r ed s* per **M** tra loro *perpendicolari*,
- $D = \text{inv}_s[\text{inv}_r(B)]$;

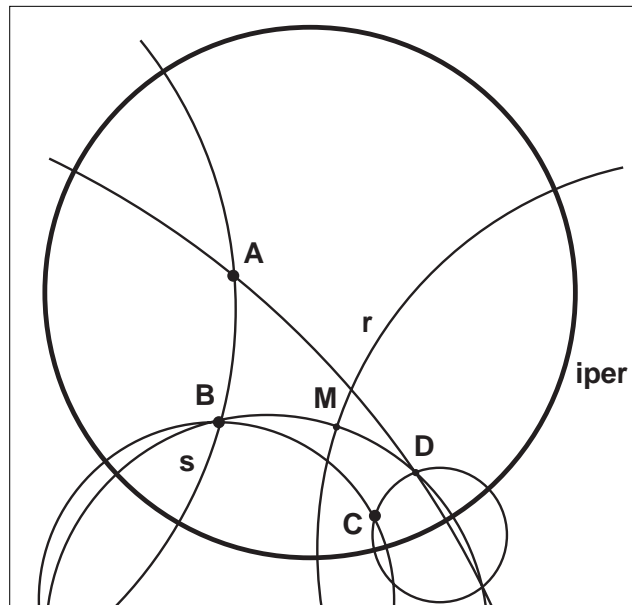


figura II.32

scopro che i lati opposti sono *iperparalleli* ed *isometrici*, gli angoli opposti *isometrici*, le diagonali si *bisecano*.

Quali proprietà verificano i *parallelogrammi* che sono trasformati in sé sia da una *simmetria* di asse r che da una *simmetria* di asse s , con r ed s *perpendicolari* passanti per M ?

- se $A \notin r$ e $A \notin s$, (vedi la figura II.33), costruisco $B = \text{inv}_r(A)$, $C = \text{inv}_s(B)$, $D = \text{inv}_r(C)$, il *quadrangolo* ha gli angoli interni *isometrici* e non retti, i lati opposti e le diagonali rispettivamente *isometriche* (*quadrangolo equiangolo*);

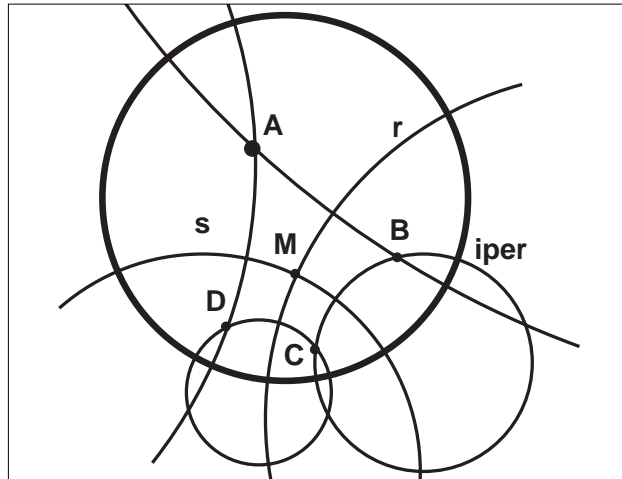


figura II.33

- se $A \in r$ e $B \in s$, (vedi la figura II.34) costruisco $C = \text{inv}_r(A)$ e $D = \text{inv}_s(B)$, il *quadrangolo* ha i lati *isometrici* e le diagonali *perpendicolari* (*rombo*);

se i vertici di un *parallelogrammo* si trasformano in sé sia rispetto agli assi dei lati opposti che rispetto alle *rette* per i vertici opposti ottengo un *parallelogrammo* con quattro lati e quattro angoli *isometrici* (*quadrato*), (vedi la figura II.35).

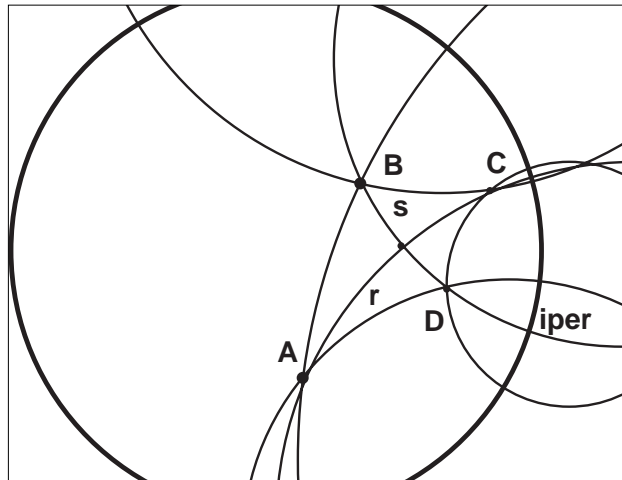


figura II.34

Il *quadrato* è quindi inscrivibile in un *cerchio* di centro l'intersezione delle diagonali. Non si può, invece, inscrivere un *triangolo rettangolo* in un *cerchio* che ha per diametro l'ipotenusa.

Le diagonali del *quadrato* sono *perpendicolari*, esiste, allora, una *rotazione* che trasforma il *quadrilatero* in sé, posso, quindi, costruire il *quadrato* di centro e vertice assegnato.

Allo stesso modo posso costruire un *poligono* che si trasforma in sé rispetto ad una *rotazione* che ha per ampiezza un sottomultiplo di un angolo giro.

Ad esempio per costruire un *pentagono* di centro E e con vertice A devo costruire (vedi la figura II.36.a)

- un angolo XO^*Y di ampiezza pari ad $1/5$ dell'angolo giro
- la bisettrice t di XOY

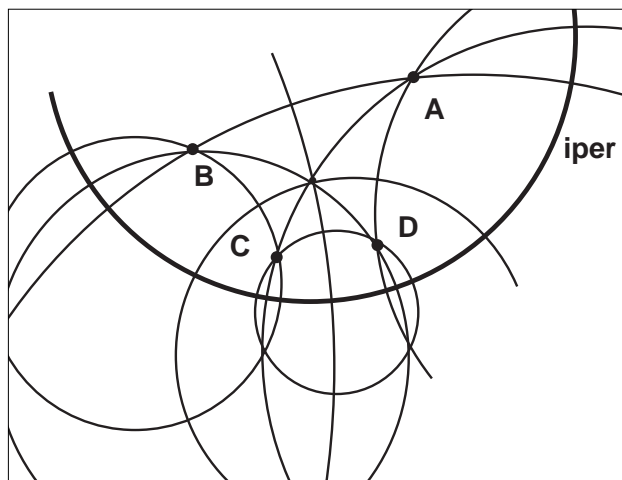


figura II.35

- i cerchi a e b tangenti rispettivamente a t ed a O^*X in O^*
- determinare A_{i+1} trasformato A_i rispetto alla rotazione di centro O^* individuata dalle rette a e b , con $i=1, \dots, 4$ (vedi la figura II.36.b).

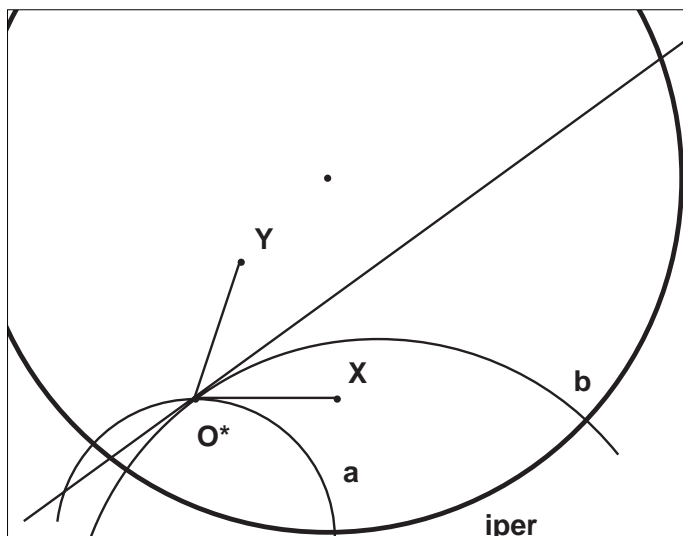


figura II.36.a

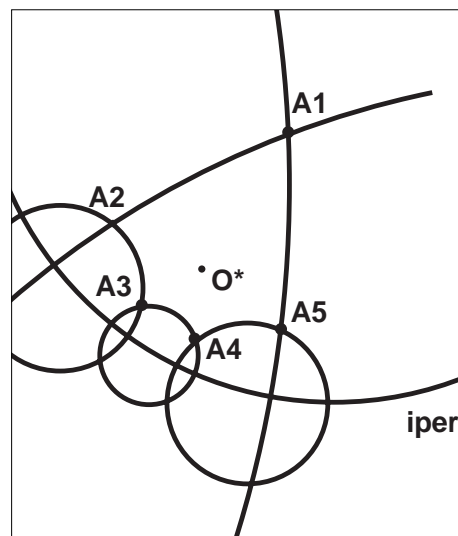


figura II.36.b

■ II.6 Tangenti al cerchio per un punto esterno

E' possibile circoscrivere un *triangolo* ad un *cerchio* ? Per risolvere il problema devo costruire le *tangenti* al *cerchio* per un *punto* esterno.

Nel caso euclideo per determinare le tangenti ad un cerchio per un punto P esterno utilizzo la proprietà dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

Nel modello questo non vale.

Le *tangenti* sono *rette* del modello, allora, (vedi la figura II.37), devo costruire un cerchio per G e $G' = \text{inv}_{\text{iper}}(G)$ tangente a b :

- 1 costruire la *retta* f per G e B
- 2 costruire le intersezioni E ed F tra f e b
- 3 creare la *retta* r per GG' e la *retta* s per EF
- 4 costruire il punto D intersezione tra r ed s
- 5 costruire il punto A centro del cerchio b
- 6 costruire il punto C punto medio di DA
- 7 creare il cerchio d di centro C per D
- 8 costruire le intersezioni H ed I tra b e d
- 9 costruire le *rette* e ed a rispettivamente per GH, GI

Per il teorema della corda e della secante il punto D intersezione tra la *retta* r e la *retta* s appartiene alla tangente al cerchio b , costruisco il cerchio d per determinare i punti di contatto delle *tangenti* a ed e di b .

Dato un *punto* Q sulla *retta* a , esiste una *retta* per Q *tangente* a b ed incidente e ?

(vedi la figura II.38)

I punti H ed I sono *simmetrici* rispetto alla *simmetria* di asse f , per determinare la *retta tangente* a b per Q costruisco la *retta* per QB , determino il *punto* K *simmetrico* di I , costruisco la *retta* v *tangente* al *cerchio*, variando la posizione di Q v ed e non hanno *punti* comuni, non è sempre possibile inscrivere un *cerchio* dato in un *triangolo*.

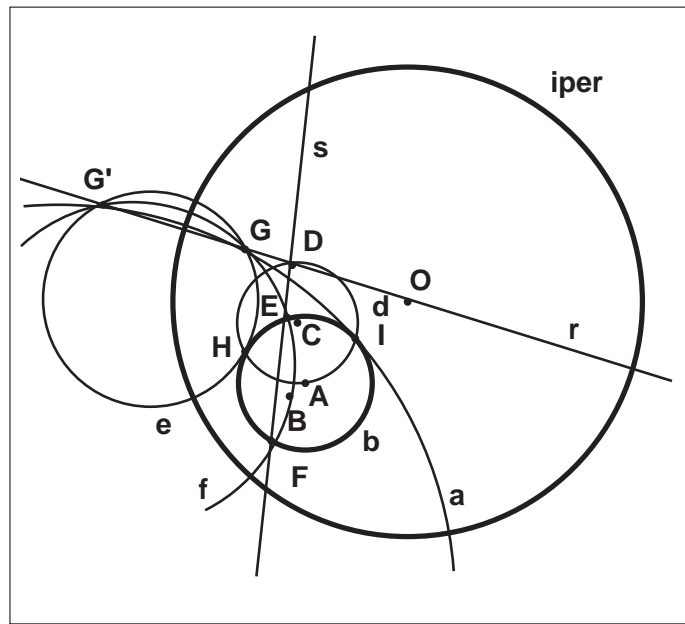


figura II.37

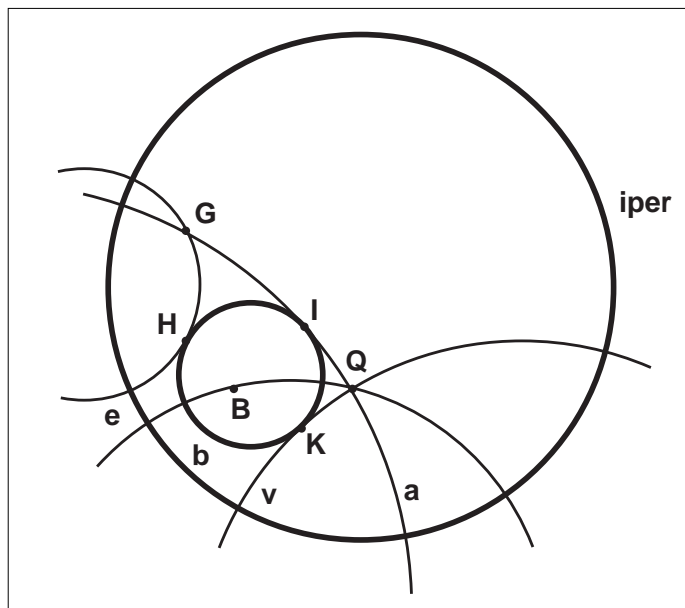


figura II.38

■ II.7 Proprietà proiettive del modello

I teoremi di Pappo e Desargues sono validi nel modello ? (vedi [5])

▼ Teorema di Pappo

Costruisco (vedi la figura II.39) una *retta r* per i *punti* A_1 e A_2 ed una *retta s* per B_1 e B_2 scelgo un *punto* A_3 su *r* ed un *punto* B_3 su *s*,

costruisco le *rette* per A_1B_2 , A_1B_3 , A_2B_1 , A_2B_3 , A_3B_1 e A_3B_2 e le tre intersezioni

$$C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1 \text{ e } C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$$

costruisco la *retta t* per i *punti* C_1 C_2 , il *punto* $C_3 \in t$, muovendo il *punto* A_3 su *r* l'allineamento dei *punti* C_1 C_2 e C_3 si conserva.

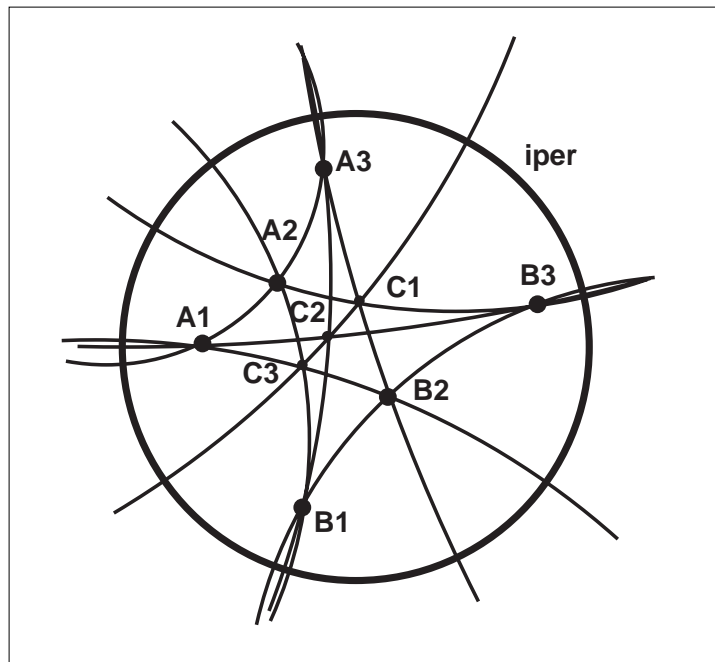


figura II.39

Se elimino la condizione di appartenenza di A_3 ad r si perde l'allineamento dei punti C_1 , C_2 e C_3 . L'esperimento precedente dà gli stessi risultati nel caso del *cerchio* (vedi la figura II.40)

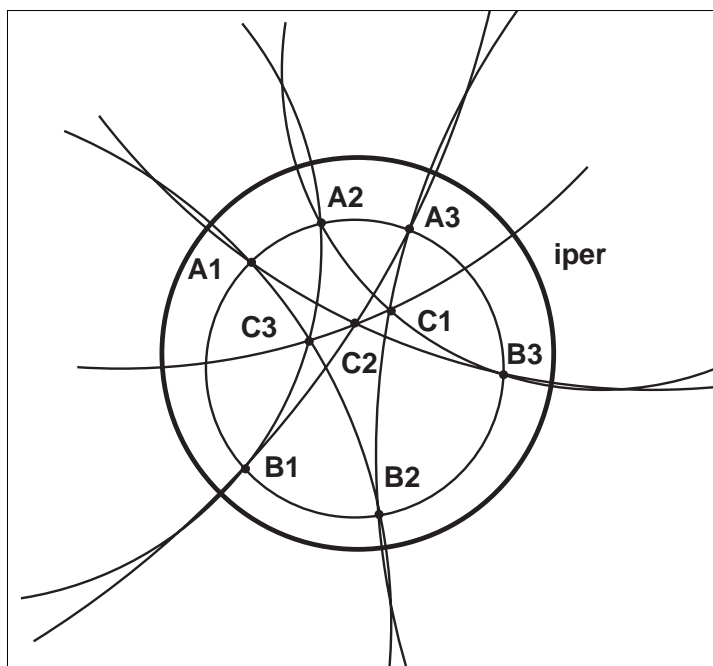


figura II.40

E per la *parabola* ?

Individuo il luogo descritto dai punti *equidistanti* dal punto F e dalla *retta* d (vedi la figura II.41)

- costruire la *retta* d
- costruire il punto K su d

- creare il punto **F**
- costruire la *perpendicolare* **t** per **K** a **d**
- costruire l'*asse* **s** di **FK**
- determinare l'intersezione **P** tra **s** e **t**

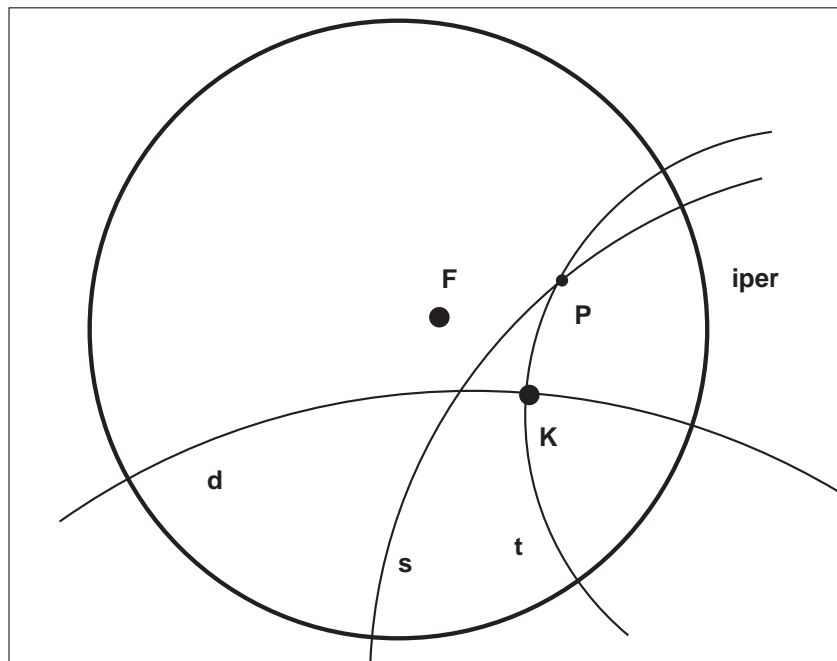


figura II.41

Ripeto l'esperimento del *cerchio* sulla *parabola* (vedi la figura II.42), scopro che si verificano gli stessi risultati dell'esplorazione precedente.

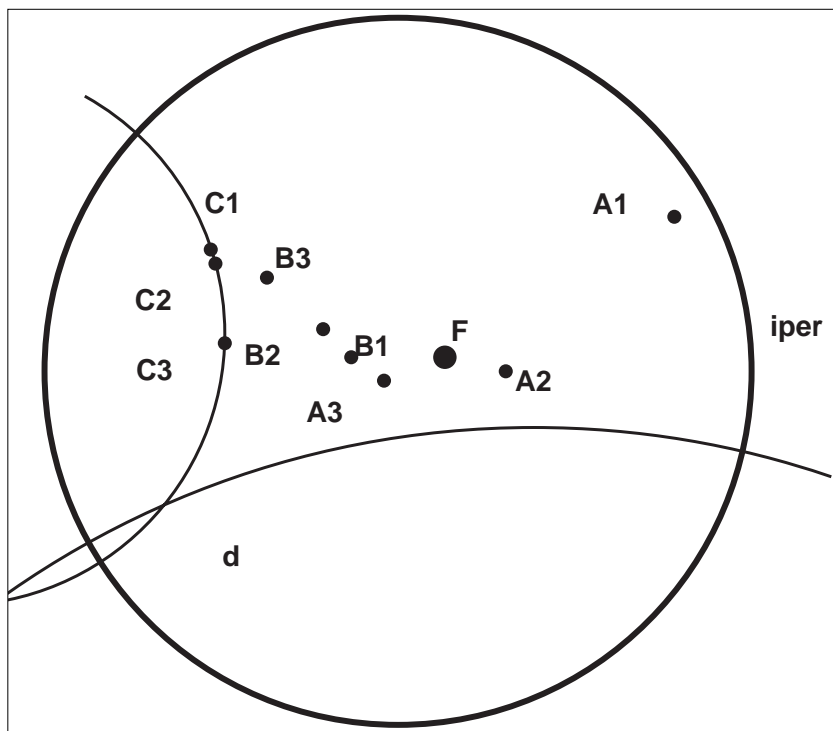


figura II.42

In maniera analoga posso esplorare le possibili configurazioni che si presentano variando la posizione dei punti e scoprire che

▼ Teorema di Desargues

Costruisco tre rette incidenti in V , (vedi la figura II.43), su ognuna scelgo rispettivamente i punti A e A' , B e B' , C e C' , individuo

$$C'' = AB \cap A'B', \quad B'' = AC \cap A'B' \text{ e } A'' = BC \cap B'C'$$

traccio la retta r per $A''B''$, osservo che $C'' \in r$,

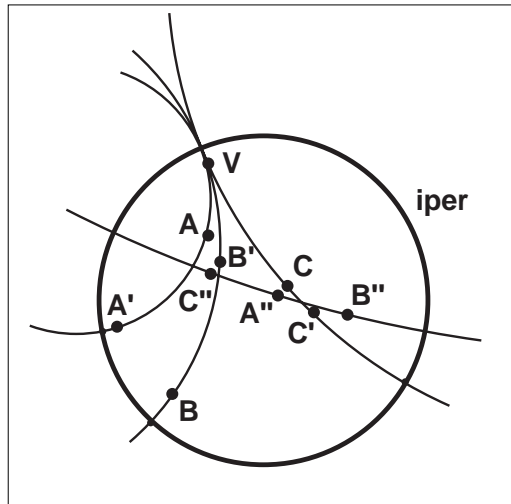


figura II.43

muovo C , (vedi la figura II.44), scopro che se la retta per AB è parallela alla retta per $A'B'$ allora la retta per $A''B''$ appartiene allo stesso fascio.

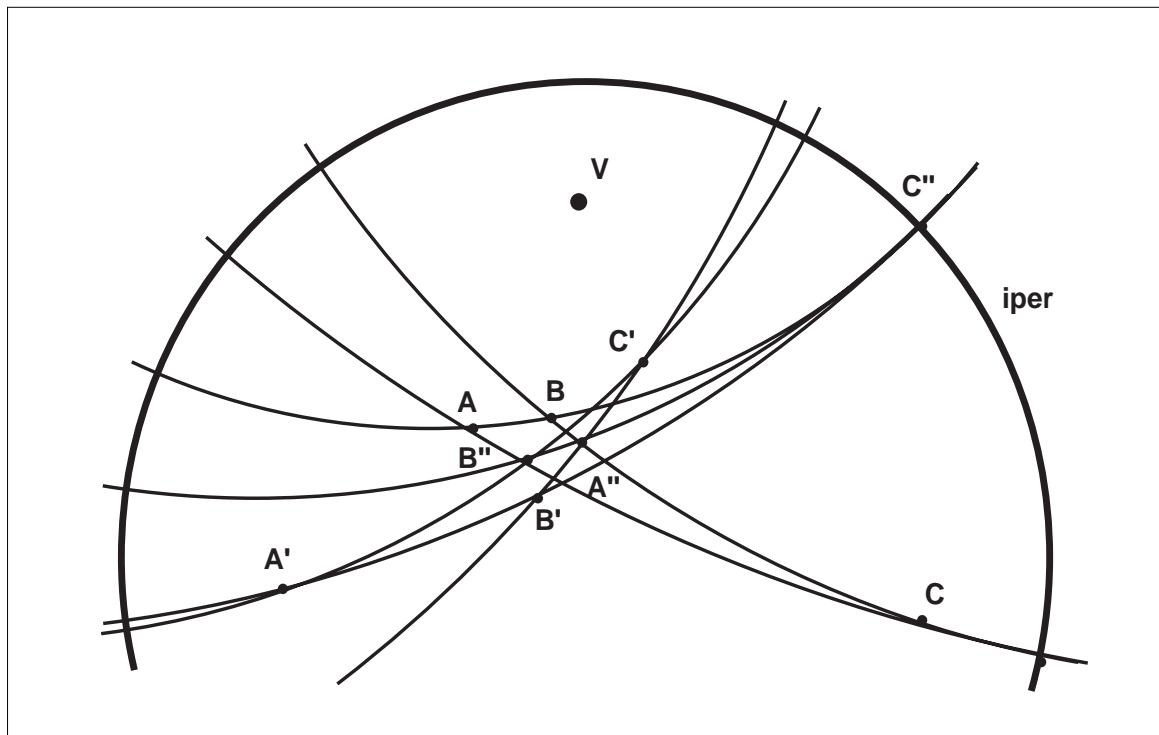


figura II.44

se le rette per AA' , BB' e CC' appartengono ad un *fascio* del terzo tipo, (vedi la figura II.45), individuato da a , se B'' e C'' esistono le rette BC , $B'C'$ e $B''C''$ appartengono allo stesso *fascio*.

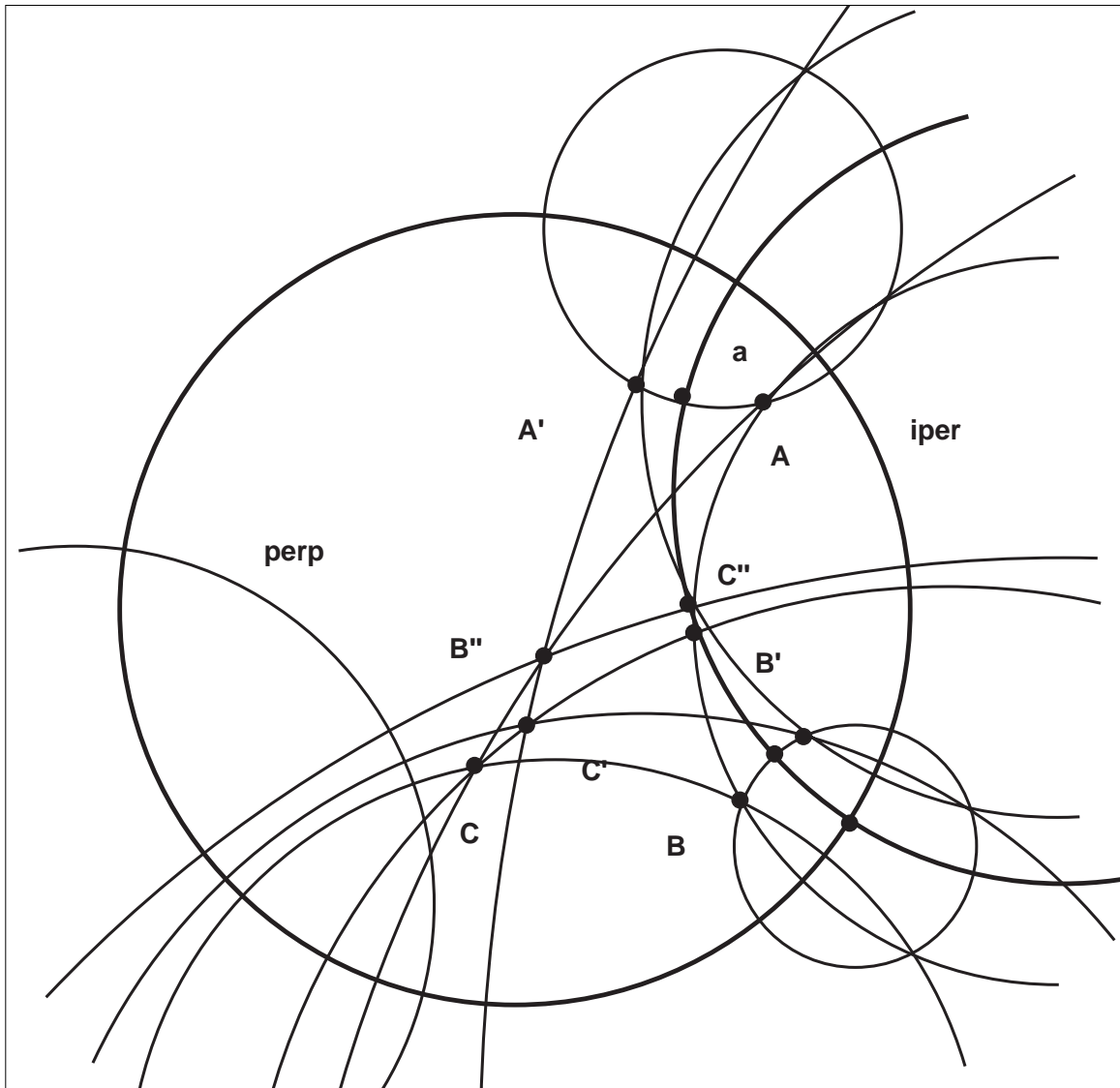


figura II.45

Esploro tutte le altre configurazioni scopro che

- se A'' , B'' e C'' esistono sono allineati
- se B'' e C'' esistono allora le rette per BC , $B'C'$ e $B''C''$ appartengono allo stesso *fascio*.

Bibliografia

- [1] Agazzi E., Palladino D., *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Mondadori, 1978.
- [2] Cannizzaro L., Carosi M., *Esplorando la geometria del modello di H. Poincaré*, Archimede n.2, 1981.
- [3] Dedò M., Volpini M., *Esistono i punti notevoli di un triangolo iperbolico ?*, Archimede n.2, 1995.
- [4] Margiotta G., *Inversione circolare*, Cabrirrsae n.4, 1995.
- [5] Martin G. E., *The foundation of geometry and non-euclidean plane*, Springer-Verlag, 1992.
- [6] Zagabrio M. G., *Ancora sull'inversione circolare*, Cabrirrsae n.6, 1995.

Il dominio di applicazione
del Cabri
può essere esteso alla geometria
non euclidea.
Costruito con l'opzione
macrocostruzione
un menu iperbolico per il modello
di Poincaré
sul disco si può iniziare
l'esplorazione del modello
alla ricerca di analogie
e diversità
rispetto al modello euclideo.



I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 5 settembre-ottobre 1995, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE - Emilia-Romagna.