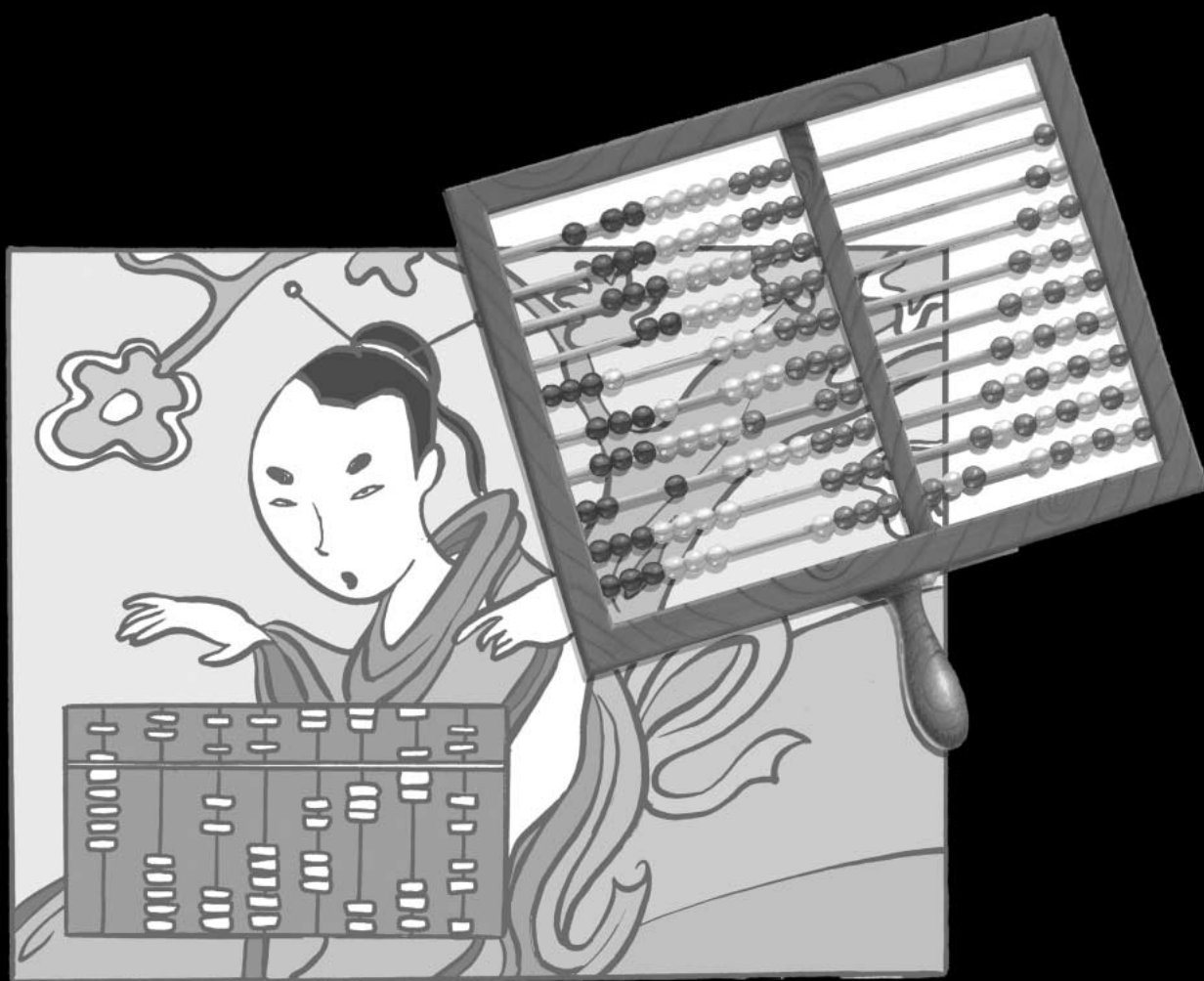


CABRIARRSAE 2004

Bollettino degli utilizzatori di software matematici



N° 39



I.R.R.E.
Emilia-Romagna

APRILE 2004

CABRIRRSAE 2004

Bollettino degli utilizzatori di software matematici



I.R.R.E.
Emilia-Romagna

APRILE 2004

N° 39

L'IMMAGINE

Sin dal 600 a.C. l'abaco viene usato in Cina per facilitare le operazioni aritmetiche.

Più tardi anche Egiziani e Romani introducono l'uso di strumenti di calcolo basati sullo stesso principio. L'abaco a linee orizzontali compare invece nel tardo Medioevo.

Il lungo percorso che porterà alla produzione degli attuali elaboratori è tracciato nel manifesto "dall'Abaco al Computer" riprodotto alle pagg. 22 e 23 del presente bollettino, da cui è tratta l'immagine.

IN QUESTO NUMERO

In apertura del bollettino si trovano i saluti della redazione ai lettori: con questo numero infatti cessa la pubblicazione del CABRIRRSAE.

Nella sezione *Cabri discusso* presentiamo un articolo in cui, dopo l'analisi dei diversi gradi di complessità con cui può essere presentato lo stesso problema, si propone il ricorso a *Cabri* per cogliere il legame funzionale fra le misure delle grandezze in gioco.

Nella sezione *Come fare* presentiamo, per la scuola

continua a pag 3

Indirizzo

Bollettino CABRIRRSAE 2003

IRRE-Emilia Romagna

Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna

Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21

E-mail: cabri@kidslink.scuole.bo.it

<http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/>

Gruppo di discussione:

E-mail: cabrinews@kidslink.scuole.bo.it

Fardiconto:

<http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/>

Flatlandia:

<http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/>

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:

<http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.html>

COMITATO SCIENTIFICO

Giuseppe Accascina

(Università "La Sapienza" Roma)

Giulio Cesare Barozzi

(Università di Bologna)

Mario Barra

(Università La Sapienza - Roma)

Paolo Boieri

(Politecnico di Torino)

Colette Laborde

(IMAG Grenoble)

Gianni Zanarini

(Università di Bologna)

COMITATO DI REDAZIONE

Anna Maria Arpinati, Giuliana Bettini, Sebastiano Cappuccio, Michele Impedovo, Giovanni Margiotta, Maria Grazia Masi, Valerio Mezzogori, Franca Noè, Daniele Tasso, Renato Verdiani

Supplemento al n.1-2, Marzo 2004, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino mensile dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativa dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. NA - n° 28 del 16 - 3 - 2004. Direttore resp. Antonio Crusco, Direttore Franco Frabboni, proprietà IRRE/ER.



Il materiale pubblicato da CABRIRRSAE può essere riprodotto, citando la fonte

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART

Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna

Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

SOMMARIO

- Saluti dalla redazione

Cabri discusso

- Problemi e funzioni

Come fare

- La riflessione multipla
- Soluzione di un problema
- Laboratorio: equazione della retta nel piano

Proposte di lavoro

- Una costruzione con riga e compasso: soluzioni

La recensione del mese

- Fardiconto

segue da pag. 2

superiore, un lavoro in cui si utilizza *Cabri* per studiare le immagini di un oggetto posto fra due specchi piani. Segue la risoluzione di un problema di geometria in cui si rivela l'importanza di *Cabri* nella esplorazione delle figure e nella formulazione di congetture che porteranno poi alla dimostrazione.

Per la scuola media inferiore pubblichiamo due schede di lavoro frutto di una esperienza, condotta da due insegnanti di scuola media inferiore, sull'utilizzo di *Cabri* nello studio delle rette nel piano cartesiano.

Chiude questo ultimo bollettino la presentazione delle risposte alla *Proposta di lavoro* pubblicata nel n.37.

CORSI E SEMINARI

Nei giorni 5 - 6 - 7 novembre 2004 si terrà a Castel San Pietro Terme (Bologna) il **XVIII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica, La Didattica della matematica: una scienza per la scuola.**

Sono previste conferenze, seminari, mostre, laboratori e attività teatrali.

Proponiamo qui una piccola parte del nutrito programma.

Mostre e Laboratori. Istituto Alberghiero

Scuola dell'infanzia:

- A. Donadel, E. Fabian e D. Coccia (SdI Marghera) (a cura di S. Sbaragli): Un mondo in equilibrio.

- Scuola dell'infanzia "G. Rodari", Direzione Didattica di Gonzaga, con la collaborazione di D. Fontanesi: Abbasso la noia, viva la matematica!

- Scuole FISM di Arezzo con la collaborazione di M. Francini: Alla scoperta... della matematica.

Scuola dell'infanzia e elementare:

- Forma Rete Lucca con la collaborazione di I. Marazzani: Passeggiando per il mondo.

- C. Lanciotti e I. Marazzani (R.S.D.D.M. Bologna): Non solo la matematica è logica.

- I.C. di Corinaldo in rete con I.C. Ostra, I.C. Ripe, I.C.

"Federico II" Jesi, D.D. Senigallia Sud: Numeringio.

Scuola dell'infanzia, elementare e media:

- G. Gabellini e F. Masi (R.S.D.D.M. Bologna): Puzzlemania.

Scuola elementare:

- A. Monaco (198° Circolo didattico di Roma): Il mercatino dell'euro... continua.

Scuola elementare e media:

- M.P. Nannicini (Istituto Comprensivo "Giovanni XXIII", Terranuova Bracciolini), G. Ceccherini (Scuola Media "E. Fermi", Laterina): Trasformando, trasformando...

Scuola elementare, media e superiore:

- A. Ferrini, M. Francini, A. Cini, E. Dal Corso, C. Stella, C. Nobis, (R.S.D.D.M. Bologna): Uguale: procedurale o relazionale?

Scuola elementare, media e superiore:

- ITIS "Q. Sella" di Biella e Direzione Didattica Biella III con la collaborazione di I. Foresti: Una proposta di itinerario sulla misura dalla scuola primaria a quella superiore.

- B. Jannamorelli e A. Strizzi (L. S. "E. Fermi", Sulmona): Antichi strumenti di calcolo aritmetico e loro uso didattico.

- Studenti della classe V (Liceo della Comunicazione "S. Pio X", Castel San Pietro Terme) con la collaborazione di G. Nobili: Cosa vedono le mie fosche pupille?

Scuola superiore:

- L'Officina del Cielo a cura di C. Zeller Mayer e O. Spazzoli: Le misure del Cielo e della Terra.

- Studenti della classe V I (L.S. "E. Fermi", Bologna) con la collaborazione di F. Monari: Il nostro portfolio di matematica.

Per avere informazioni, ci si può rivolgere a:

Assessorato alla Cultura - Comune di Castel San Pietro Terme - telefono 051.6954124 - fax 051.6954180

e-mail: cultural1@cspietero.provincia.bo.it

<http://www.dm.unibo.it>

<http://www.comune.castelsanpietroterme.bo.it>

CABRI IN BIBLIOTECA

È uscito il Quaderno di CABRIRRSAE n.26, a cura di Franca Noè e Daniele Tasso, dedicato agli atti del convegno *L'insegnamento dell'algebra (e non solo) nell'era dei computer*, tenutosi a Bologna il 15 Marzo 2004.

È prevista inoltre la pubblicazione del Quaderno n.27, *Alcune proprietà delle coniche con Cabri*, di P. Carboni e L. Carosati. In esso verrà proposto un percorso didattico sulle proprietà proiettive delle coniche, sperimentato in un liceo scientifico.

I Quaderni di CABRIRRSAE sono disponibili in formato PDF all'indirizzo www.fardiconto.it, oppure possono essere richiesti via fax all'IRRE Emilia Romagna (051 269221).

Saluti dalla Redazione

Il bollettino degli utilizzatori di *Cabri-géomètre*, che qui presentiamo, nasce come punto di incontro tra gli utilizzatori presenti e futuri di questo software, con l'intento di rendere un servizio agli insegnanti.

Così, nel novembre del 1993, si proponeva, nel suo numero zero, il bollettino CABRIRRSAE.

La pubblicazione, giunta ora alla sua trentanovesima apparizione, chiude – crediamo gloriosamente – i battenti.

Quel primo numero di prova – francescano nelle sue scarse sei paginette - era frutto dell'interesse suscitato dall'apparizione sul mercato educativo del software *Cabri-géomètre*. Sviluppato dall'IMAG di Grenoble il software *Cabri-géomètre* era stato tradotto già in molte lingue e parecchi ricercatori ne stavano studiando le potenzialità educative. Anche il mondo universitario guardava con interesse la versione italiana appena tradotta, per la sua semplicità e prontezza d'uso.

Affascinati dalla ricetta che metteva insieme flessibilità del personal computer e possibilità di *sperimentare* la geometria, molti nostri insegnanti di matematica si erano lanciati in una pionieristica attività di sperimentazione.

In parallelo alla pubblicazione, nascevano anche le iniziative di raccolta della documentazione esistente sul software; gli incontri di presentazione e elaborazione di materiali, l'*invenzione* del prestito per i docenti più interessati, le conferenze degli autori. La scelta decisiva però, fu la diretta applicazione nelle classi, la produzione di materiale, l'avvio del dibattito sulla "più vantaggiosa" utilizzazione didattica del programma informatico.

Oggi, alla distanza di undici anni e di parecchie pubblicazioni, possiamo trarre un bilancio, crediamo, positivo.

Pare che l'Italia, insieme alla Francia, sia il paese

europeo con la maggior presenza nelle scuole del software *Cabri*. I colleghi francesi riconoscono il merito di questo risultato all'IRRSAE (oggi IRRE) emiliano romagnolo.

La pubblicazione ha ospitato dal n° 17 in poi, oltre agli articoli dedicati al programma *Cabri*, anche interventi che proponevano l'uso di altri software progettati per l'apprendimento della matematica. Anche *Derive*, *Mathematica*, *Mathview*, ... hanno trovato così spazio nelle pagine del bollettino.

Prova di merito questa per la casa editrice Loescher di Torino, che non solo per dieci anni ha tenuto in vita il bollettino finanziandone la riproduzione e la diffusione, ma che, nonostante distribuisse *Cabri* in Italia, non ha mai imposto il suo logo commerciale e si è sempre astenuta, con ammirevole correttezza nei rapporti professionali, dall'influenzare le scelte della redazione.

Fenomeno tanto più significativo in un momento in cui nel nostro paese sembra che l'*indipendenza della ricerca culturale* dalle lusinghe dei poteri economici e dai vincoli della politica sia un valore tutt'altro che scontato.

Nel frattempo gli abbonati al bollettino hanno raggiunto quota 1300. Senza dubbio il fatto che l'abbonamento sia gratuito può avere "gonfiato" in modo inverificabile il numero dei lettori rispetto a coloro che utilizzano le nostre pubblicazioni come reali proposte didattiche da mettere in pratica nelle loro classi. Tuttavia crediamo che anche la sola presenza del bollettino in sala insegnanti o nel laboratorio di informatica, possa essere di per sé uno stimolo.

CABRIRRSAE ha permesso a numerosi colleghi insegnanti di matematica di uscire "dall'anonimato" della propria, spesso riduttiva, realtà scolastica. Le nostre pagine hanno ospitato decine di interventi che provenivano dalla pratica didattica diretta e che hanno permesso agli autori di creare contatti, di allacciare collaborazioni, di condividere risorse. Un'utile attività "di servizio", come si dice. Un incoraggiamento per i docenti, che tra l'altro vedono piovere incentivi solo per chi si dedica a compiti *organizzativi*, di *orientamento*, di *valutazione della*

qualità, di accoglienza, di benessere scolastico, di tutoraggi e monitoraggi vari; nell'assenza più totale di iniziative mirate alla qualità dell'apprendimento disciplinare (e forse ai veri problemi del nostro sistema scolastico).

Un effetto particolare della nostra iniziativa è stata forse una sollecitazione verso i docenti universitari, oggi in numerosi casi meno sordi e meno restii a farsi carico dei problemi – teorici e pratici – posti dall'introduzione dei software matematici nel curriculum disciplinare.

Nonostante questi indubitabili "successi" la redazione del bollettino CABRIRRSAE ha preso la decisione di interrompere la propria attività con la pubblicazione di questo ultimo numero. Sono diversi i motivi che hanno portato a questa scelta.

Pensiamo, per esempio, che la pubblicazione abbia essenzialmente esaurito la sua funzione divulgativa. Rispetto alla situazione degli anni novanta oggi – soprattutto grazie a Internet – l'informazione sui software didattici, e in particolare su *Cabri*, è imponente. L'idea che il software matematico sia un "utile" (se non indispensabile) strumento cognitivo è ormai per tutti "un articolo di fede", crediamo. Il problema ancora aperto, se mai, è quello della formazione dei docenti al corretto e vantaggioso impiego dei programmi disponibili: ma qui l'impegno è titanico (almeno in termini numerici) rispetto alle esigue, ma agguerrite forze di cui disponiamo. Si deve quindi passare la mano a chi può impiegare ben altre capacità e ben altre risorse. I mutamenti organizzativi che hanno coinvolto gli Istituti di Ricerca Educativa hanno poi volatilizzato i già risicati finanziamenti che permettevano a IRRE Emilia Romagna la cura del bollettino (non la sua riproduzione e diffusione da sempre affidata ad uno sostegno esterno). Entrando nella complessa macchina organizzativa degli Uffici Scolastici Regionali, la struttura dipende ora dalle decisioni di questi dirigenti. Dirigenti che, purtroppo, alla nostra iniziativa hanno mostrato un interesse nullo: considerando il bollettino CABRIRRSAE un investimento non sufficientemente remunerativo in termini di *politica e larga visibilità!*

Si aggiunga che attualmente le riviste che nel

nostro paese si occupano di utilizzo di software matematici sono molteplici e tutte più robuste dal punto di vista organizzativo e più provviste di finanziamenti della nostra. Gli insegnanti professionalmente impegnati potranno trovare certamente altre fonti altrettanto e forse più valide, solo se i responsabili del nostro sistema educativo daranno loro – come promettono – la "legittimazione" necessaria a una innovazione didattica efficace e responsabile.

Un'altra motivazione, forse meno influente, ma non trascurabile, è la riduzione, per raggiunti limiti di età, di buona parte del comitato di redazione. Una redazione impegnata - in pratica volontaristicamente - nella notevole mole di lavoro che la selezione, revisione, pubblicazione e diffusione dei materiali ha sempre richiesto.

Come commiato vorremmo innanzitutto ringraziare tutti coloro che hanno collaborato per la creazione dei nostri trentanove numeri e dei supplementi. Un particolare ringraziamento va anche a Media Direct di Bassano del Grappa, che da un anno finanzia la riproduzione del bollettino e che ha permesso la realizzazione dell'animato Convegno dedicato alla Geometria che si è tenuto a Bologna il 15 febbraio del 2003.

Come sempre, auguri di buon lavoro a tutti!

La redazione

P.S.

Collegata, in qualche maniera alla chiusura del bollettino CABRIRRSAE, vi sarà anche la cessazione della rubrica telematica *probleMATICAMENTE*. Questa iniziativa è stata proposta per un quinquennio, dal 1999 al 2004. Ora mancano i fondi per retribuire adeguatamente le persone che si prendono l'onere (non facile!) di preparare e correggere i problemi matematici proposti in rete, problemi adatti ad un triennio di scuola superiore. Potrebbe invece rimanere in vita *FLATlandia*; un piccolo gruppo di volontari è disposto a farlo proseguire a "costo zero".

(Come sempre, il sito di riferimento per accedere agli archivi delle attività concluse e per osservare quelle ancora in corso, è: <http://www.fardicono.it>)

CABRI DISCUSO

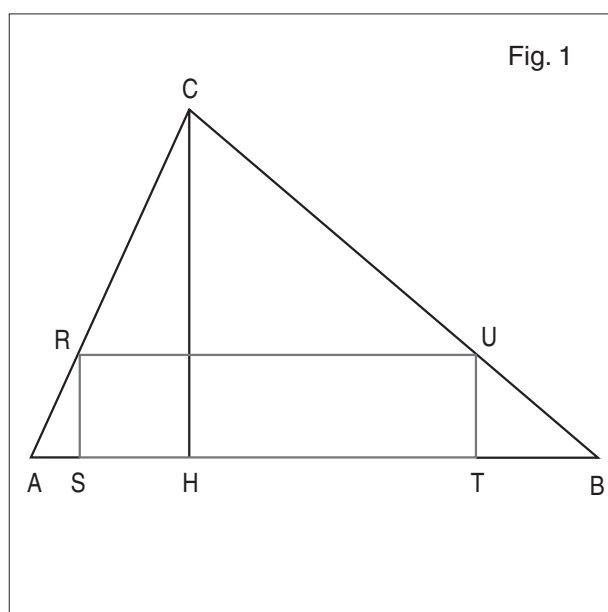
Problemi e funzioni

di Angela Rizza

Istituto Magistrale "A. Sanvitale" Parma

Nel corso del quinquennio della scuola superiore si torna più volte ad affrontare problemi che traggono origine da una stessa situazione geometrica, ma inseriti in contesti diversi, in relazione alla scansione dei programmi dei vari anni.

Ad esempio nella seguente situazione (figura 1):



si può focalizzare l'attenzione sull'area del rettangolo RSUT inscritto nel triangolo ABC e costruire vari problemi, con caratteristiche diverse e con un differente grado di complessità:

Problema 1 (aritmetico) Assegnate le misure dei segmenti AB, CH, RU, determinare la misura dell'area del rettangolo RSTU.

Problema 2 (algebrico) Assegnate le misure dei segmenti AB, CH, determinare la misura del segmento RU in modo che l'area del rettangolo RSTU abbia un valore dato.

Problema 3 (parametrico) Assegnate le misure dei segmenti AB, CH, determinare per quali valori k è possibile determinare la misura del segmento RU in modo che l'area del rettangolo RSTU sia uguale a k .

Problema 4 (di massimo) Assegnate le misure dei segmenti AB, CH, determinare la misura del segmento RU

in modo che l'area del rettangolo RSTU sia massima.

Nella prassi scolastica, problemi analoghi a questi vengono principalmente proposti allo scopo di utilizzare in contesti problematici tecniche algebriche acquisite precedentemente (calcolo, risoluzione di un'equazione di 2° grado, discussione di un'equazione di 2° grado parametrica, applicazioni del calcolo differenziale). Quello che, credo, si rischia di perdere è la profonda analogia "di fondo" fra i vari problemi, che si potrebbe sottolineare mettendo l'accento più sulla loro impostazione che sulla loro risoluzione e proponendo una visione di insieme delle diverse tecniche. Esse invece, nel tradizionale percorso scolastico, sembrano via via sostituirsi alle precedenti, oscurandole completamente e creando talvolta pericolosi automatismi.⁽¹⁾

Penso che l'utilizzo di *Cabri* possa far cogliere fin dall'inizio del percorso il concetto-chiave alla base di tutti i problemi illustrati e cioè il legame funzionale fra la misura di una grandezza (in questo caso la lunghezza del segmento RU) e la misura di una grandezza da essa dipendente (in questo caso l'area del rettangolo RSTU). Da un punto di vista didattico la situazione si presenta ricca di spunti e anche l'attività in laboratorio potrebbe articolarsi in vari momenti.

In una prima fase può essere proposta la costruzione della figura assegnando una condizione iniziale, ad esempio il vincolo per il punto R di muoversi sul segmento AC. Si può chiedere quindi di analizzare, mediante il trascinarsi, come variano le coppie di misure lunghezza-area. Tale esplorazione dinamica permette di formulare le prime congetture, ad esempio relativamente alla simmetria della situazione, al numero di soluzioni dei vari problemi, all'esistenza di un unico valore massimo. Essa inoltre, pur senza ricorrere esplicitamente al concetto di funzione, consente di cogliere un legame di dipendenza fra le due variabili, strettamente legato alla costruzione geometrica e alla possibilità di modificare il rettangolo RSTU solo agendo sulla posizione del punto R.

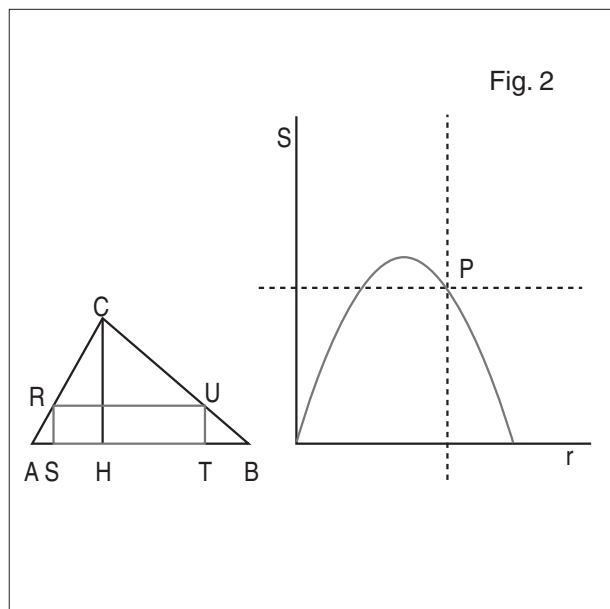
In una seconda fase si può chiedere di tracciare, nello stesso foglio in cui si è disegnata la figura, il grafico della funzione associata al problema relativo al legame di dipendenza fra le variabili considerate precedentemente (lunghezza del segmento RU e area del rettangolo) (figura 2). Per far questo, si utilizza la nota costruzione basata sull'applicazione dello strumento "traspor-

⁽¹⁾ È ad esempio ben nota la questione dell'inopportunità didattica di utilizzare il calcolo differenziale per risolvere problemi di massimo e di minimo che coinvolgono funzioni elementari o che si possono affrontare più semplicemente con considerazioni di simmetria (si veda a questo proposito la risoluzione "elementare" di problemi ben più complessi di quello qui proposto esposta nell'articolo di B. Piochi [P])

to di misura”, già presentata in vari articoli apparsi su questo bollettino (si veda ad esempio [D]).

I passaggi fondamentali di tale costruzione sono i seguenti (i primi si riferiscono alla precedente attività di esplorazione):

1. Costruzione del punto R sul segmento AC
2. Costruzione del rettangolo RSTU



3. Misura della lunghezza del segmento RU (l) e dell'area del rettangolo RSTU (a)
4. Costruzione di due semirette perpendicolari
5. Trasporto sulle due semirette delle misure trovate
6. Con le perpendicolari alle semirette, determinazione del punto P di coordinate (l, a)
7. Luogo descritto dal punto P al variare del punto R sul segmento AC.

Un primo vantaggio di questa rappresentazione è quello di collegare più strettamente la configurazione geometrica al grafico della funzione che descrive il legame fra le variabili considerate; tale collegamento può essere evidenziato mediante il trascinamento, che permette di osservare il movimento del punto P sulla curva in conseguenza di quello del punto R sul segmento AC. Esso è inoltre sottolineato dall'utilizzo di un sistema cartesiano strettamente connesso al problema, come attestato anche dall'uso delle stesse unità di misura per le grandezze geometriche coinvolte e gli assi cartesiani in cui esse sono rappresentate.

Una seconda considerazione è che, contrariamente alla pratica didattica ordinaria, l'espressione analitica della funzione che esprime l'area del rettangolo in funzione della misura del segmento RU (legge di cui si intuisce l'esistenza e che pure può essere determinata senza difficoltà) assume in questo caso un ruolo di secondo piano, mentre prevale l'aspetto qualitativo legato al grafico della funzione in esame. Ciò permette di mettere in evidenza vari aspetti caratteristici del concetto di funzione e di far emergere in qualche modo la complessità

insita nel concetto stesso, che una semplificazione eccessiva porterebbe invece a nascondere.⁽²⁾ Nella situazione considerata coesistono infatti sia elementi della definizione insiemistica di funzione, come tema costituita da due insiemi e da un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano, che della definizione euleriana, come legame tra due variabili espresso da una legge.⁽³⁾ Il concetto di dominio qui implicato è da ricondursi ad esempio alla prima definizione: esso è infatti qualcosa di strettamente legato alla funzione stessa, dedotto “naturalmente” in conseguenza del vincolo imposto dal problema al movimento del punto R sul segmento AC e non ottenuto “a posteriori” in base alle operazioni coinvolte nella legge associata alla funzione.⁽⁴⁾ Invece, il legame di dipendenza fra le due variabili e il senso di dinamicità collegati all'operazione di trascinamento rinviano in un modo abbastanza “naturale” alla definizione euleriana, pur senza un esplicito riferimento alla legge associata alla funzione. Un semplice ragionamento su come agisce il comando “misura” di *Cabri* (e cioè attraverso l'utilizzo delle note formule per il calcolo dell'area), dovrebbe comunque far intuire l'esistenza di tale legge e favorirne la ricerca.

La terza osservazione riguarda infine la possibilità di inserire in un unico schema basato sul concetto di funzione tutti i problemi: il primo corrisponde infatti alla ricerca dell'immagine di un elemento del dominio della funzione, il secondo alla ricerca di contro immagini di un dato valore del codominio, il terzo alla determinazione dell'insieme immagine. L'approccio attraverso *Cabri* non consente in tutti i casi di ottenere “la” o “le” solu-

⁽²⁾ Come è stato sottolineato ad esempio in un articolo di Maffini [M], le maggiori difficoltà didattiche legate al concetto di funzione sono da ricondursi principalmente alla presenza nel concetto stesso di elementi diversi e apparentemente contraddittori (definizione insiemistica e/o euleriana, visione statica e/o dinamica, aspetti sintattici e/o semantici...) che ostacolano la costruzione di una immagine unitaria e coerente. Per gestire tale complessità spesso si rischia di semplificare eccessivamente, come accade ad esempio quando si identifica di fatto una funzione con la legge che la rappresenta e si richiede ad esempio di “determinarne il dominio” come insieme in cui le operazioni coinvolte sono definite.

⁽³⁾ La nomenclatura utilizzata fa sempre riferimento a [M].

⁽⁴⁾ Nella risoluzione dei problemi geometrici proposta dai libri di testo, invece, di solito (vedi ad esempio [MP]) la funzione (intesa principalmente come legge) è inizialmente pensata nel suo insieme di esistenza diciamo così “naturale” e successivamente, mediante una restrizione, in un dominio dedotto dalle limitazioni geometriche; tale operazione può apparire come una “forzatura” non sufficientemente giustificata.

zioni del problema (in quanto sono comunque necessari strumenti algebrici), ma rende particolarmente agevole l'analisi qualitativa del grafico della funzione considerata, e, attraverso una opportuna selezione delle informazioni che di volta in volta interessano, permette di giustificare l'esistenza di una o più soluzioni. La formalizzazione algebrica che consente l'effettiva risoluzione viene avvertita di conseguenza come necessità e pertanto può apparire più giustificata. In base a tutte le precedenti considerazioni, ritengo che attività come quella proposta possano favorire la comprensione della potenza dello strumento "funzione" nella risoluzione di problemi matematici di vario tipo e contribuire alla creazione di una immagine più significativa di tale concetto.

Bibliografia

[D] Dané C., *Un classico problema di massimo*, CABRIRRSAE n.19, 1999, pp.11-12.
 [M] Maffini A., Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria, Riv. Mat. Univ. Parma (6) 3*, 2000, pp.91-122. <http://digilander.libero.it/maffini/>
 [MP] Maraschini W., Palma M., *ForMat*, Paravia, 1996.
 [P] Piochi B., *Metodi elementari per la soluzione dei problemi di minimo*, in MPI-UMI, Analisi Matematica Seminario di formazione per Docenti Viareggio 1996-1997, Quaderno 24, Matteoni, Lucca, 1998, pp.106-112. <http://www.liceo-vallisneri.lu.it/>

COME FARE



La riflessione multipla su due specchi piani formanti un diedro studiata mediante Cabri

di *Pietro Romano*
 Liceo Scientifico Statale "Leonardo" Giarre (CT)

In queste pagine, il software Cabri-géomètre viene utilizzato per studiare il problema della formazione delle immagini di un oggetto posto tra due specchi piani formanti un diedro. È noto che il meccanismo che conduce alla formazione delle immagini è la riflessione multipla che i raggi uscenti dall'oggetto effettuano alternativamente sui due specchi.

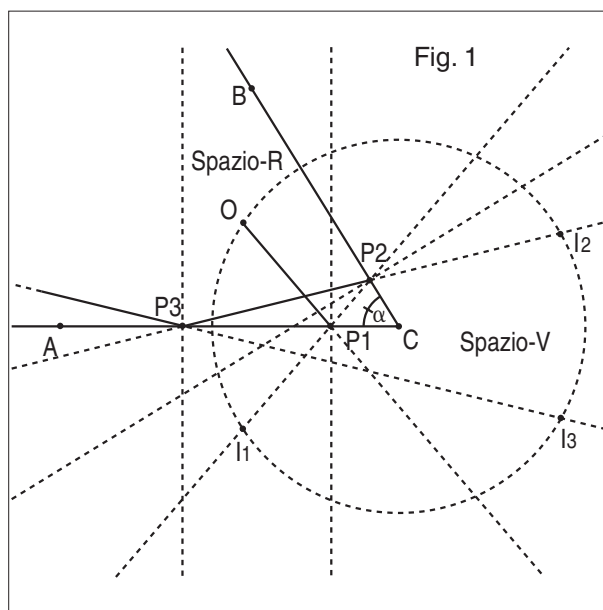
Viene in primo luogo descritta la costruzione Cabri; si

indica quindi brevemente il modo in cui i risultati del calcolo sono stati confrontati con gli esperimenti; ed, infine, si determina come varia il numero delle immagini al variare della sezione normale del diedro e della posizione dell'oggetto.

La costruzione Cabri

La costruzione della figura in ambiente Cabri si realizza attraverso i seguenti passaggi⁽¹⁾:

1. Si tracciano due semirette con l'origine in comune (CA e CB), che rappresenteranno i due specchi;
2. Detto α uno dei due angoli ACB, si fissa un punto O al suo interno⁽²⁾; indichiamo quindi con β l'angolo ACO che individua la posizione di O all'interno dell'angolo α ;
3. Si traccia la circonferenza c di centro C e raggio CO;
4. Si sceglie un punto P₁ sulla semiretta CA e si traccia la retta OP₁;
5. Si traccia la perpendicolare per P₁ alla semiretta CA (retta r₁);
6. Si costruisce la retta simmetrica di OP₁ rispetto a r₁ e si indica con P₂ l'intersezione⁽³⁾ tra questa retta e la semiretta CB;
7. Si fissa il punto di intersezione tra la retta P₁P₂, dalla parte di P₁, e la circonferenza c (punto che denotiamo I₁);
8. Si ripetono le operazioni indicate in 5. e 6. e 7., con riferimento al punto P₂, quindi per un eventuale punto P₃, e così via.
9. Le operazioni da 4. a 8. vanno inoltre ripetute a partire da un punto P'₁ scelto su CB.



La formazione delle immagini attraverso la costruzione Cabri

In figura 1, viene mostrato il percorso di un raggio che esce dall'oggetto O ed effettua tre processi di riflessione alternativamente su CA e CB, nei punti P₁, P₂ e P₃, iniziando da CA. Il numero di processi di riflessione

dipende dall'ampiezza dell'angolo α (ed aumenta al diminuire di α). Prolungando i tre raggi riflessi in verso opposto a quello della loro propagazione, si individuano sulla circonferenza c (e nello spazio-V) tre punti, I_1, I_2, I_3 . Variando la posizione del punto P_1 sulla semiretta CA , si può osservare come i punti P_2 e P_3 , a loro volta, si spostano (rispettivamente, su CB e CA), ma i tre punti I_1, I_2, I_3 non subiscono alcuno spostamento. In essi si ha pertanto concentrazione dei prolungamenti (nel verso opposto a quello di propagazione) dei raggi riflessi e quindi la formazione di tre immagini (virtuali). In un esperimento reale, queste tre immagini risulterebbero visibili guardando lungo la direzione del raggio riflesso da P_3 (o, più in generale, lungo la direzione dell'ultimo raggio riflesso). Non è superfluo sottolineare che, nel caso in esame, le immagini sono tre in quanto questo è il numero di processi di riflessione effettuati dal raggio uscente da O , al variare comunque della posizione di P_1 (in altre parole, il raggio riflesso in P_3 non effettua più alcun processo di riflessione).

Facendo in modo che il raggio uscente da O effettui il primo processo di riflessione su un punto $P_1 \in CB$, si giunge con analogo procedimento alla determinazione di altri tre punti immagine I_i (non evidenziati in figura 1). Il numero complessivo di immagini dipende quindi dal numero di processi di riflessione che i raggi uscenti da O effettuano alternativamente sui due specchi.

La verifica sperimentale

Una semplice verifica dei risultati che si deducono dalla costruzione Cabri può essere effettuata in modo molto semplice, utilizzando due specchi piani rettangolari (le prove sono state effettuate con due specchi di 20cm x 26cm). Dopo aver effettuato la stampa di una costruzione Cabri, si dispongono i due specchi sulle semirette CA e CB .

È stata effettuata una notevole quantità di rilevazioni, verificando sempre che le immagini fornite dalla costruzione Cabri coincidono (sia come numero che come posizione) con quelle ottenute sperimentalmente, e que-

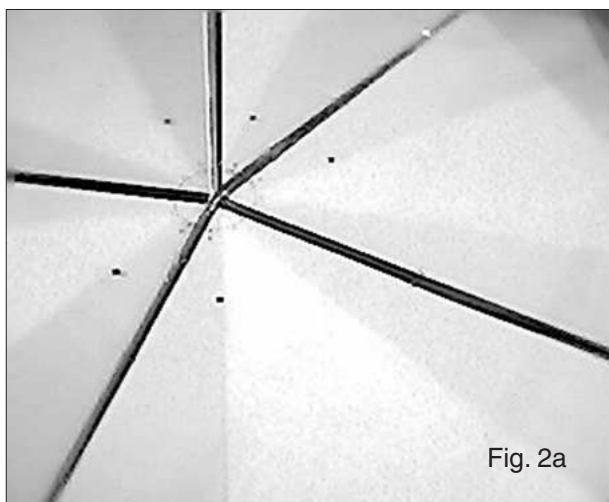
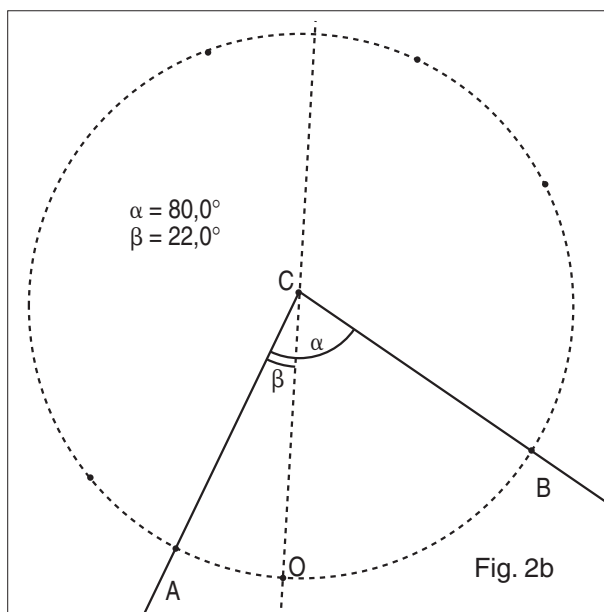


Fig. 2a

sto al variare comunque degli angoli α e β . Nelle figure 2, viene mostrato un esempio di questo confronto, per $\alpha = 80^\circ$ e $\beta = 22^\circ$.

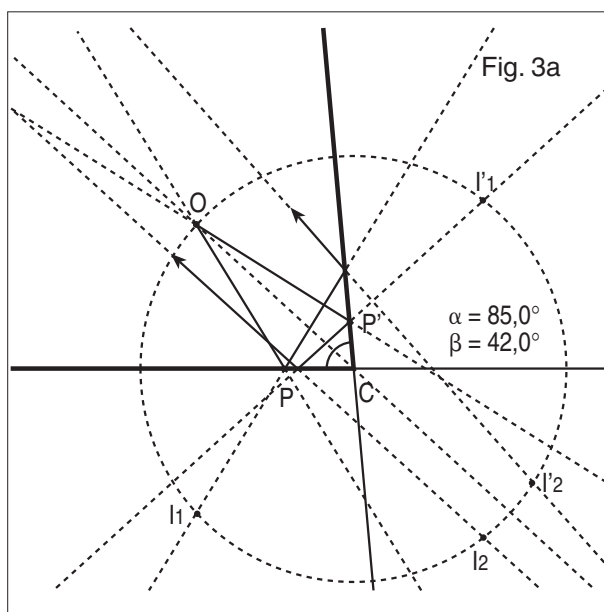


2a-2b confronto tra esperimento e costruzione Cabri

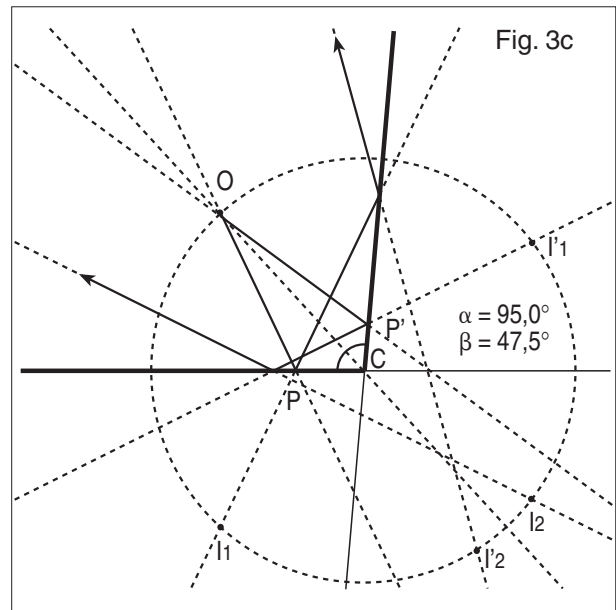
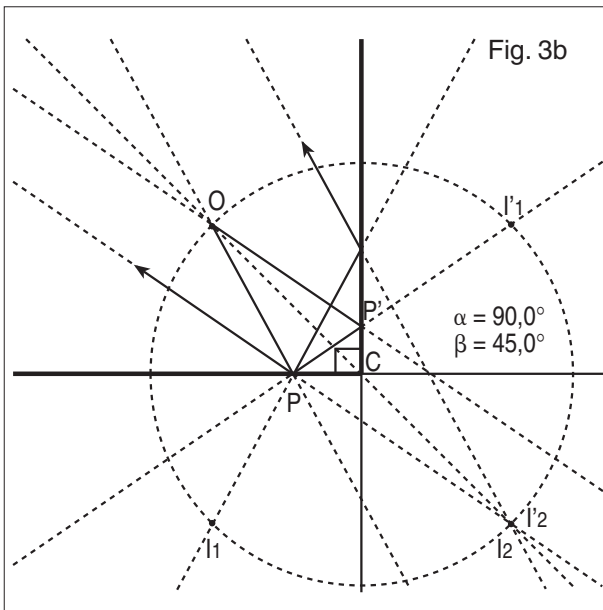
Oggetto O posto sulla bisettrice dell'angolo alfa

Studiamo ora la formazione delle immagini in un caso di particolare simmetria, e cioè con O posto sulla bisettrice dell'angolo α ($\beta = \alpha/2$).

Con riferimento alle figure 3, osserviamo subito un fatto particolare: in queste figure, si possono osservare le costruzioni per $\alpha = 85^\circ, \alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 95^\circ$. Il numero delle immagini che si formano risulta pari a 3 per $\alpha = 90^\circ$, mentre è pari a 4 negli altri due casi (per $\alpha = 90^\circ$, le immagini si riducono a tre in quanto I_2 si sovrappone a I_3).



Tra le due situazioni $\alpha = 85^\circ$ e $\alpha = 95^\circ$, vi è comunque una differenza sostanziale: nel primo caso, infatti, ese-



3a-3b-3c costruzione Cabri per $\alpha = 85^\circ, 90^\circ, 95^\circ$

N	$\Delta\alpha$	$N_c=N_s$	$N_s^{bisettrice}$	N_s^{max}
1-A	$\alpha \geq 240^\circ$	0	0	0
1-B	$180^\circ < \alpha < 240^\circ$	2	0	1
	$\alpha = 180^\circ$	1	1	1
2	$120^\circ \leq \alpha < 180^\circ$	2	2	2
	$90^\circ < \alpha < 120^\circ$	4	2	3
3	$\alpha = 90^\circ$	3	3	3
	$72^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	4	4	4
4	$60^\circ < \alpha < 72^\circ$	6	4	5
	$\alpha = 60^\circ$	5	5	5
5	$51,43^\circ \leq \alpha < 60^\circ$	6	6	6
	$45^\circ < \alpha < 51,43^\circ$	8	6	7
6	$\alpha = 45^\circ$	7	7	7
	$40^\circ \leq \alpha < 45^\circ$	8	8	8
7	$36^\circ < \alpha < 40^\circ$	10	8	9
	$\alpha = 36^\circ$	9	9	9
8	$32,73^\circ \leq \alpha < 36^\circ$	10	10	10
	$30^\circ < \alpha < 32,73^\circ$	12	10	11
9	$\alpha = 30^\circ$	11	11	11
	$27,69^\circ \leq \alpha < 30^\circ$	12	12	12
10	$25,71^\circ < \alpha < 27,69^\circ$	14	12	13
	$\alpha = 25,71^\circ$	13	13	13
11	$24^\circ \leq \alpha < 25,71^\circ$	14	14	14
	$22,5^\circ < \alpha < 24^\circ$	16	14	15
12	$\alpha = 22,5^\circ$	15	15	15
	$21,18^\circ \leq \alpha < 22,5^\circ$	16	16	16
13	$20^\circ < \alpha < 21,18^\circ$	18	16	17
	$\alpha = 20^\circ$	17	17	17
14	$18,95^\circ \leq \alpha < 20^\circ$	18	18	18
	$18^\circ < \alpha < 18,95^\circ$	20	18	19
15	$\alpha = 18^\circ$	19	19	19
	$17,14^\circ \leq \alpha < 18^\circ$	20	20	20

Numero delle immagini nelle diverse regioni angolari

guendo l'esperimento, le quattro immagini risultano contemporaneamente visibili entro un ampio range di variazione del punto di osservazione, mentre nel secondo caso, si hanno posizioni dalle quali si possono vedere due immagini e posizioni dalle quali se ne vedono tre, ma non risulta possibile vedere le quattro immagini contemporaneamente.

Questo fatto può essere compreso dall'analisi delle figure 3, osservando come in figura 3a, i raggi che incidono sullo specchio CA e quelli che incidono su CB emergono in direzione pressoché parallela e quindi entrano entrambi nel campo visivo dell'occhio mentre in figura 3c essi presentano, per qualunque posizione dei punti P_i e P'_i , un grado di divergenza tale da non permettere la contemporanea visione delle quattro immagini. Situazioni analoghe si osservano per tutti gli angoli α tali che $\alpha_n = 180^\circ/n$ $n = 1,2,3,\dots$ (tab. I). (Vedi tabella a fianco)

Rilevando il numero delle immagini Cabri (che indicheremo con N_c) che si formano al variare di α , si ottiene il risultato riassunto nella 3ª colonna di tabella I. Questa tabella, contiene inoltre le seguenti informazioni:

- Nella 1ª e nella 2ª colonna, vengono riportate quelle che denomineremo *regioni angolari*. In particolare, la 1ª colonna riporta il numero che identifica ogni regione, mentre la 2ª colonna riporta i valori di α che la delimitano. La tabella riporta le prime dieci *regioni angolari*. In ognuna di esse, il numero delle immagini Cabri N_c è costante, ad esclusione dell'angolo $\alpha_n = 180^\circ/n$, dove questo numero si riduce di una unità per effetto della sovrapposizione di due di esse. Fa eccezione la 1ª regione angolare, nella quale, per $\alpha > 240^\circ$, il numero delle immagini si riduce a zero.
- La 3ª colonna riporta, come già detto, il numero complessivo delle immagini Cabri N_c
- La 4ª e la 5ª colonna riportano risultati della osservazione sperimentale e precisamente, in 4ª colonna, c'è il numero delle immagini che si osservano guardando lungo la bisettrice di α ($N_s^{bisettrice}$) e in 5ª colonna si riporta il numero massimo di immagini che si vedono contemporaneamente disponendosi ad un opportuno angolo di osservazione (N_s^{max}).

Dai dati di tabella I, si possono dedurre, ponendo $I = \text{Int}(360^\circ/\alpha)$ e $R = \text{Resto}(I/2)$, le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \text{se } \alpha \geq 240^\circ & N_c (= N_s^{bisettrice} = N_s^{max}) = 0 \\ \text{se } \text{Resto}\left(\frac{360^\circ}{\alpha}\right) = 0 & N_c (= N_s^{bisettrice} = N_s^{max}) = I - 1 = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1 \\ \text{se } \text{Resto}\left(\frac{360^\circ}{\alpha}\right) \neq 0 & N_c = I + R; \quad N_s^{bisettrice} = I - R; \quad N_s^{max} = I \end{cases} \quad (1)$$

Fissato il valore di α , la regione angolare di appartenenza è calcolabile dalla relazione:

$$n = (I+R)/2 \quad (2)$$

Inoltre, l'intervallo dei valori di α della regione angolare n -esima è esprimibile come:

$$I_n = \left[\frac{360^\circ}{2n+1}; \frac{360^\circ}{2n-1} \right] \quad (3)$$

Nelle figure 4, vengono rappresentate le immagini che si formano per $\alpha = 19^\circ$ e $\alpha = 110^\circ$.

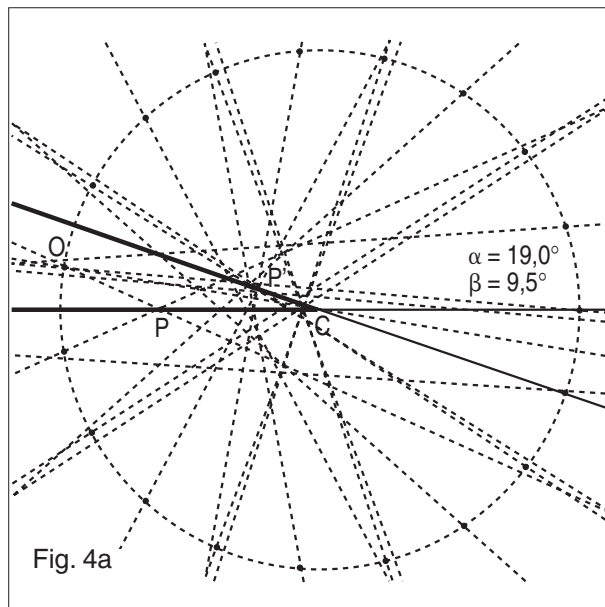


Fig. 4a

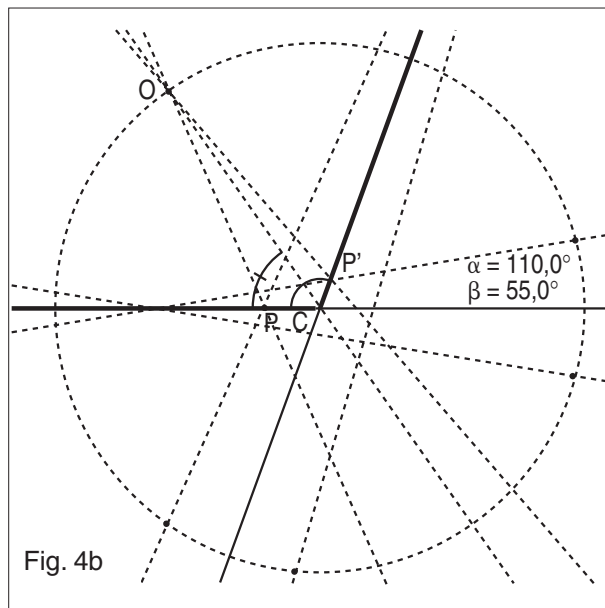


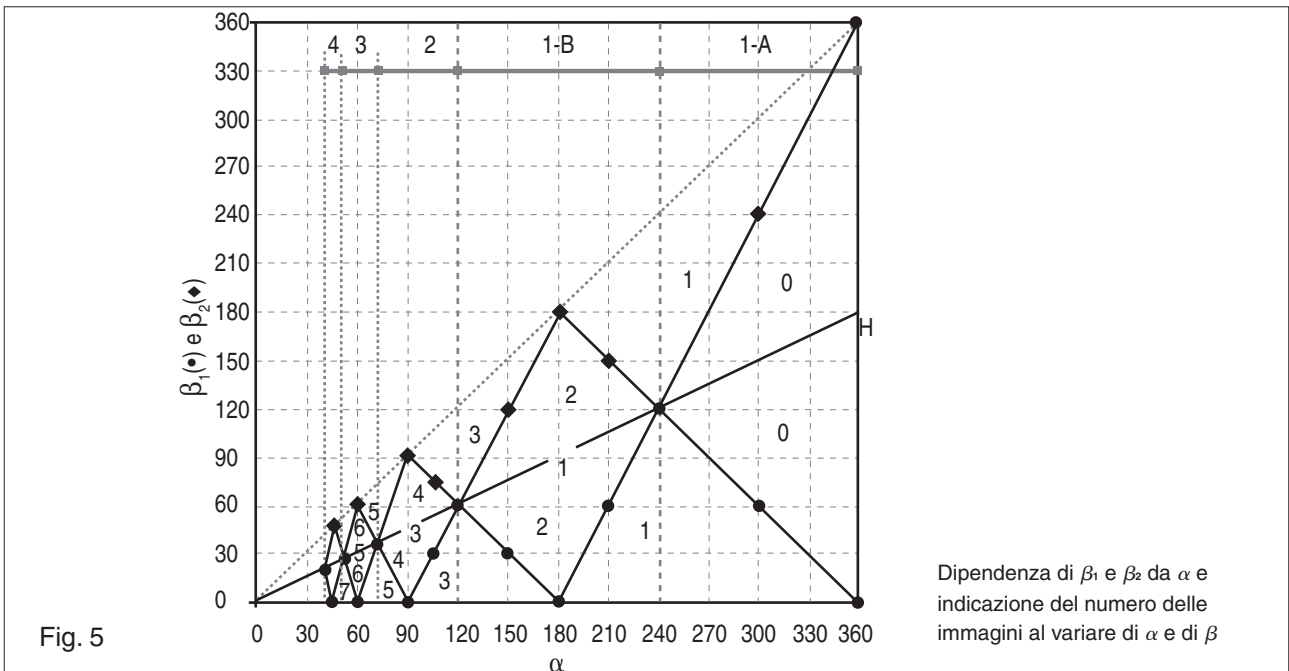
Fig. 4b

4a-4b le immagini ottenute con la costruzione Cabri nei casi $\alpha = 19^\circ$ e $\alpha = 110^\circ$

Oggetto O non appartenente alla bisettrice di alfa

Variando la posizione del punto O all'interno dell'angolo α (cioè, al variare di $\hat{\alpha}$ in $[0, \alpha]$), si rileva che, qualunque sia il valore di α , esistono sempre due angoli, $\beta_1 = \beta_1(\alpha)$ e $\beta_2 = \beta_2(\alpha) = \alpha - \beta_1$, tali che, se $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$, il numero N_c è uguale a quello dato da (1)⁽⁴⁾, mentre per $\beta \in (0, \beta_1) \vee \beta \in (\beta_2, \alpha)$, il numero delle immagini Cabri aumenta o si riduce di una unità.

Il grafico di figura 5, riporta l'andamento rilevato per le due funzioni, $\beta_1 = \beta_1(\alpha)$ e $\beta_2 = \beta_2(\alpha)$ unitamente alla



Dipendenza di β_1 e β_2 da α e indicazione del numero delle immagini al variare di α e di β

indicazione del numero N_c delle immagini, per le prime quattro regioni angolari. Si osservi come, all'interno di ogni regione angolare, β_1 e β_2 sono caratterizzati da una variazione lineare a tratti al variare di α . In particolare, rispetto alla retta OH (che rappresenta i casi in cui l'oggetto si trova sulla bisettrice dell'angolo α), gli angoli β_1 sono rappresentati dalla curva spezzata che giace al di sotto della suddetta retta, mentre la spezzata che si trova al di sopra di OH rappresenta gli angoli β_2 . Le equazioni di questi tratti di retta, per $\alpha < 180^\circ$, sono esprimibili attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \beta_1 = (-1)^R [180^\circ - n\alpha] \\ \beta_2 = \alpha - \beta_1 \end{cases} \quad (4)$$

Parimenti, è possibile determinare una relazione generale per il numero delle immagini:

$$\begin{cases} \text{se } \text{Resto}\left(\frac{360^\circ}{\alpha}\right) = 0 & N_c = \mathbf{I} - 1 = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1 \\ \text{se } \text{Resto}\left(\frac{360^\circ}{\alpha}\right) \neq 0 & N_c = \mathbf{I} - \mathbf{R} + f(\beta) \end{cases} \quad (5)$$

dove $f(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \in (\beta_1, \beta_2) \\ (-1)^R & \text{se } \beta \in (0, \beta_1) \vee \beta \in (\beta_2, \alpha) \end{cases}$

Nelle figure 6, viene mostrato il caso $\alpha = 100$ per tre differenti valori di β ($\beta \in (0, \beta_1)$, $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ e $\beta \in (\beta_2, \alpha)$). Dalle (4), essendo $\mathbf{I} = \text{Int}(360^\circ/100^\circ) = 3$ ed $\mathbf{R} = \text{Resto}(3/2) = 1$, si ha $\beta_1 = 20^\circ$ e $\beta_2 = 80^\circ$.

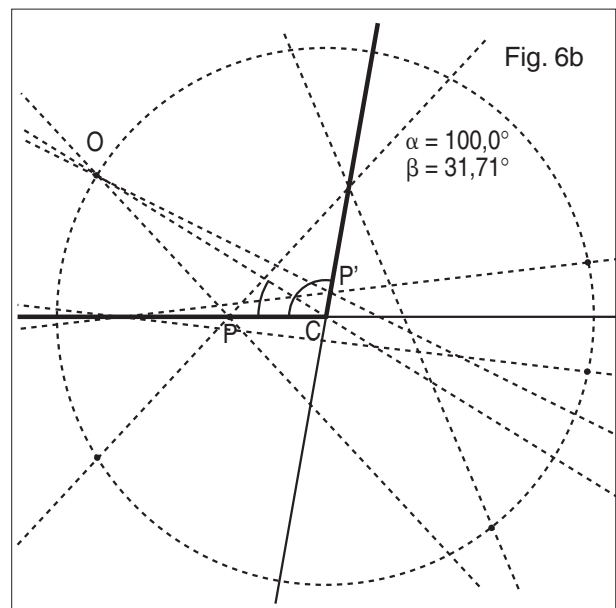
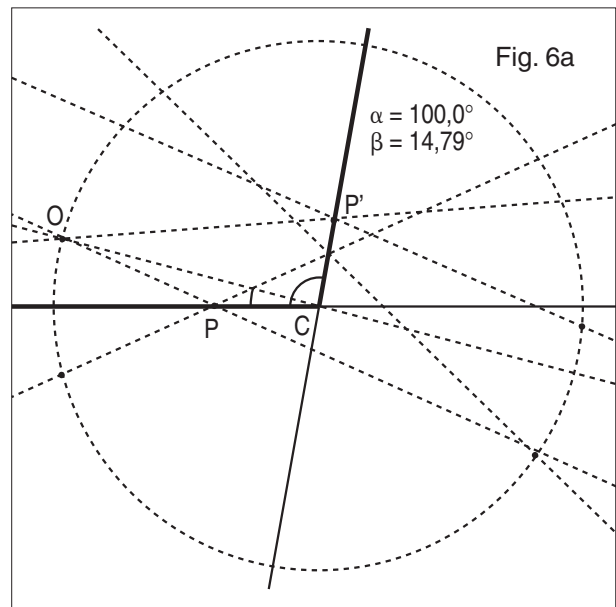
Nel caso in cui è invece $\alpha > 180^\circ$, le (4) non sono più valide e l'angolo β_1 ha la seguente dipendenza da α :

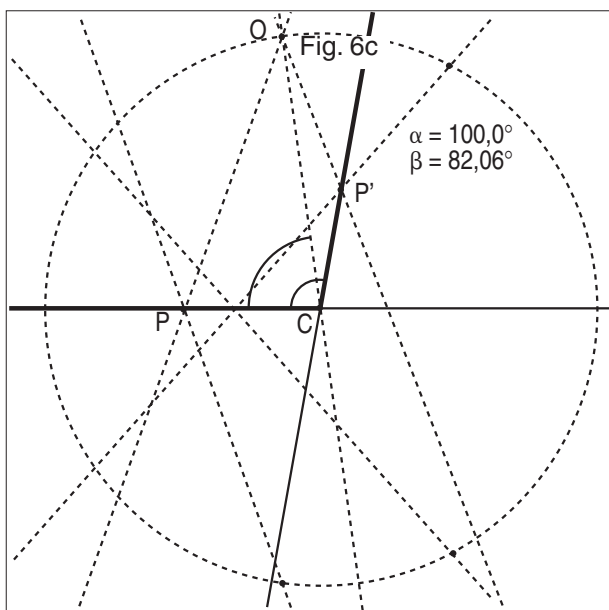
$$\begin{cases} \text{se } 180^\circ < \alpha < 240^\circ & \beta_1 = 2\alpha - 360^\circ \\ \text{se } 240^\circ < \alpha < 360^\circ & \beta_1 = -\alpha + 360^\circ \end{cases} \quad (6)$$

con β_2 che è sempre pari a $\alpha - \beta_1$.

Considerazioni conclusive

Lo studio che è stato qui condotto mostra come la relazione: $n = (360^\circ/\alpha) - 1$





6a-6b-6c numero delle immagini per $\alpha = 100^\circ$ e per tre differenti valori di β

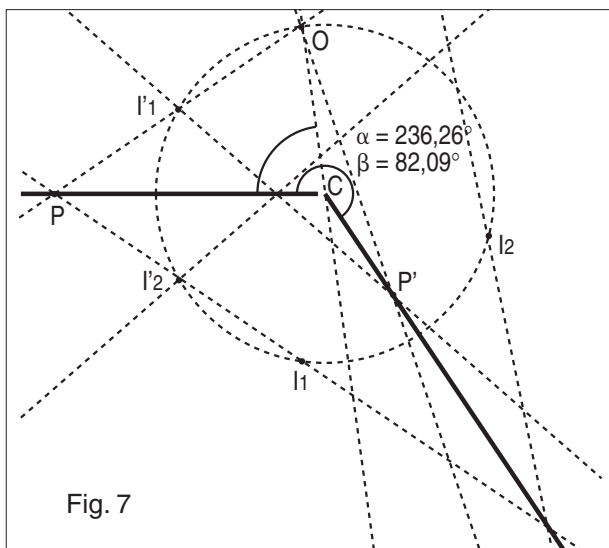


Fig. 7

Formazione di falsi punti immagine

che a volte si trova sui libri di testo, ha in realtà una validità limitata (ed esattamente quando $\text{Resto}(360^\circ/\alpha) = 0$, cioè per $\alpha = 180^\circ/n$ $n = 1,2,3,\dots$), mentre il numero delle immagini ha invece una dipendenza più complessa dall'angolo α e dalla posizione dell'oggetto O (che si esprime attraverso l'angolo β).

Va infine fatto rilevare che, superando l'angolo di 180° , il conteggio delle immagini va fatto con una certa attenzione, in quanto la costruzione può generare punti immagine che in realtà non sono tali. Basta, a tale fine, osservare la figura 7 ($\alpha \approx 236^\circ$; $\beta \approx 82^\circ$): un attento esame rivela infatti che l'immagine I_1 è l'unica da prendere in considerazione in quanto (1) le altre immagini I_2 e I_3 sono nello spazio-R e (2) l'immagine I_2 , pur essendo nello spazio-V, va esclusa in conseguenza del fatto si è già esclusa l'immagine I_1 , da cui essa deriva.

Note

⁽¹⁾ La figura Cabri può essere prelevata dal web all'indirizzo

<http://xoomer.virgilio.it/grsqro>.

⁽²⁾ Indicheremo la regione di piano contenente l'oggetto O come spazio-R o spazio reale, mentre l'altro angolo costituirà lo spazio-V o spazio virtuale, dove si ha la formazione delle immagini.

⁽³⁾ L'esistenza di questa intersezione dipende dal valore di α .

⁽⁴⁾ Variano, rispetto al caso in cui O è posto sulla bisettrice, solamente le posizioni delle immagini sulla circonferenza c , ma non il loro numero.

Nel corso del 2003 sono stati lanciati sulla lista di discussione Cabrinews problemi su vari argomenti. Uno di questi, proposto in Dicembre da Michele Impedovo, ha suscitato una vivace discussione da cui è scaturito l'articolo che segue.

Soluzione di un problema

di Renato Verdiani

Collaboratore dell'IRRE ER

Lo sappiamo tutti: «Cabri permette di esplorare in tempo reale le figure del piano, permette di fare congetture che successivamente suggeriscono la dimostrazione vera e propria».

Lo sappiamo tutti, ripeto, ma soltanto quando ci troviamo di fronte ad un problema nuovo che non conosciamo ci rendiamo conto della profonda verità celata in quella frase. Un esempio per tutti: sappiamo gestire bene la lezione sull'esplorazione dei punti del piano che "vedono" un dato segmento sotto un angolo retto! Dato che sappiamo già la soluzione, le nostre congetture e le indicazioni che diamo ai nostri studenti sono sicuramente "pilotate" e la successiva dimostrazione non scaturisce sempre direttamente dalle fasi precedenti.

È bastato provare a risolvere il problema comparso ultimamente sulla lista di discussione Cabrinews per avere una conferma delle affermazioni precedenti.

Il problema è il seguente (nell'ultima versione).

Dati i punti A , O e G determinare i vertici B e C del triangolo ABC sapendo che O e G ne sono rispettivamente il circocentro e il baricentro.

Successivamente individuare:

- 1) la "zona proibita", cioè l'insieme dei punti A del piano per cui il triangolo ABC non esiste;
- 2) le posizioni del punto A affinché il triangolo sia rettangolo, acutangolo o ottusangolo;
- 3) le posizioni del punto A affinché il triangolo sia isoscele rispetto alla base BC o rispetto alla base AC (o AB).

La parte relativa alla costruzione del triangolo ABC non offre difficoltà. Dobbiamo ricordare solo che il baricentro G divide le mediane in due parti una il doppio dell'altra. Costruiti allora i punti O , G e A , si determina la

circonferenza g di centro O e raggio OA .

Successivamente:

- si costruisce il punto A' omotetico di A rispetto a G con rapporto $-0,5$;
- si costruisce il segmento OA' ;
- si costruisce la retta r per A' perpendicolare a OA' ;
- si determinano i punti B e C d'intersezione tra r e g ;
- si costruisce il triangolo ABC .

Teniamo presente che l'ortocentro H del triangolo ABC (non strettamente necessario per questa prima costruzione) è univocamente determinato anche dai punti dati O e G ; sappiamo infatti che i tre punti (O, G, H) sono allineati (retta di Eulero) e che $GH = 2GO$. Il punto H è quindi l'omotetico di G rispetto ad O con rapporto -2 .

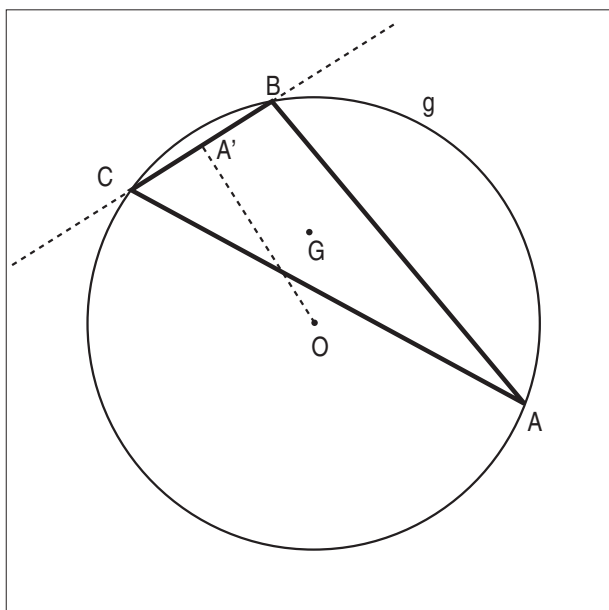
Meno evidente è la soluzione dei punti indicati con 1), 2) e 3) che descriverò invece con commenti più dettagliati.

PUNTO 1

Esplorazione

Si costruiscono due punti O e G e si fissano in modo che siano inamovibili.

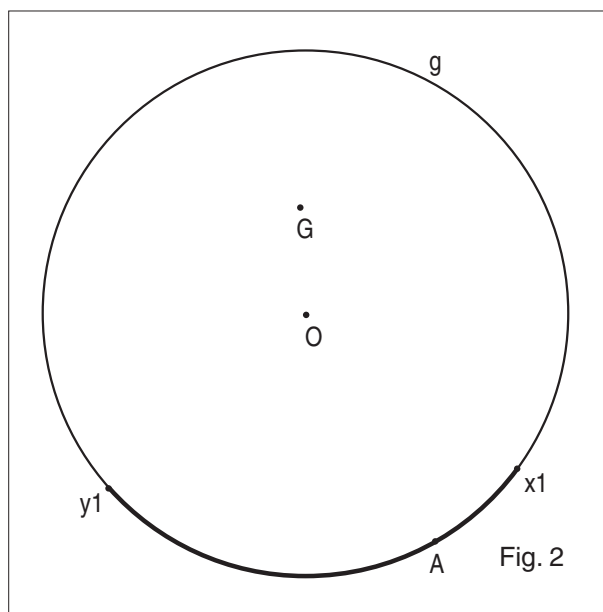
Si costruisce una circonferenza g di centro O e raggio OA (con A arbitrario) e poi si costruisce il triangolo ABC come indicato in precedenza (figura 1). Successivamente nascondiamo tutti gli oggetti escluso il triangolo e la circonferenza g .



Cercando di non variare le dimensioni di g , si varia la posizione di A e si determinano i punti $X1$ e $Y1$ estremi dell'arco di g entro il quale il triangolo ABC non esiste (figura 2).

Si varia il raggio della circonferenza g agendo su un punto generico di essa (diverso da A) quindi si cerca di nuovo, spostando A , l'arco di g - di estremi $X2$ e $Y2$ - entro il quale il triangolo non esiste. Si ripete questa ricerca per altre volte e si individuano altrettante coppie di punti X e Y . Nella figura 3 è messo in evidenza l'arco

di estremi $X4$ e $Y4$; il triangolo ABC è presente perché



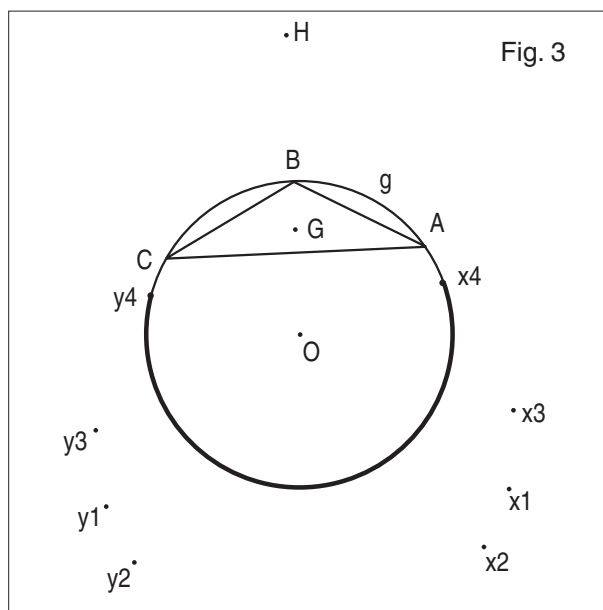
A non si trova su tale arco.

Dilatando o restringendo g si scopre che, quando passa per G , il triangolo non esiste mai e i punti Xi e Yi coincidono con G (figura 4) mentre quando g passa per H il triangolo esiste sempre escluso quando A si trova nel punto indicato con V e i punti Xi e Yi coincidono (figura 5).

Congettura

«Sembra» che i vari punti Xi e Yi , insieme a G e a V , appartengano ad una circonferenza di diametro GV e che il centro di tale circonferenza sia il punto G' , simmetrico di G rispetto ad O .

Allora si costruisce il punto G' simmetrico di G rispetto ad O ed infine la circonferenza g^* di centro G' e raggio GG' . Ci accorgiamo che tutti i punti Xi e Yi indicati in precedenza stanno su g^* , salvo piccoli scarti dovuti alla non esatta sovrapposizione di essi col punto A nella fase precedente (figura 6).



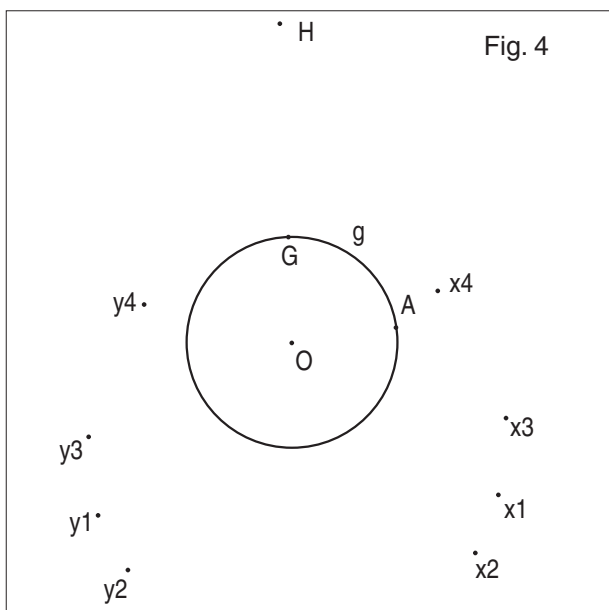


Fig. 4

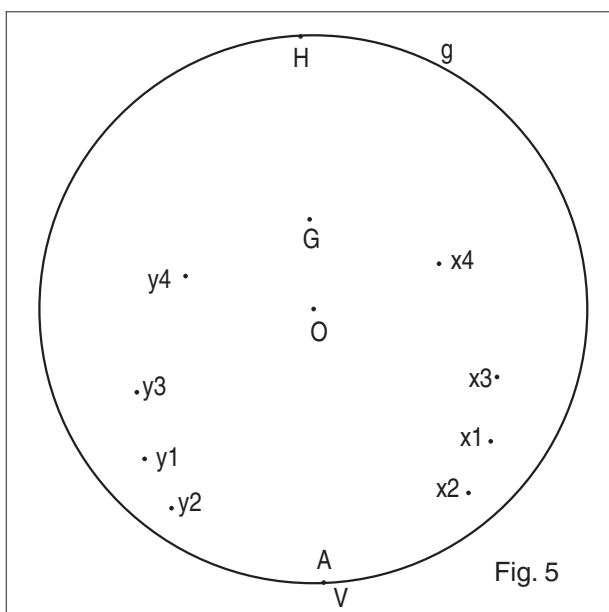


Fig. 5

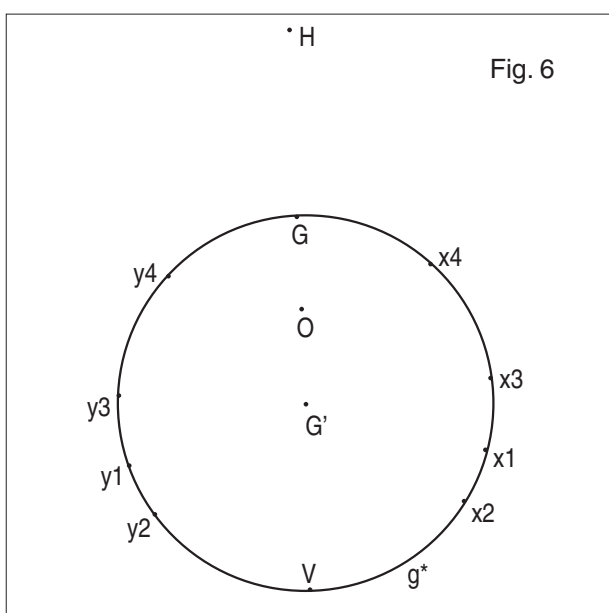


Fig. 6

Dunque affermiamo che: *il triangolo ABC esiste se A è esterno a g^* , non esiste se A è interno a g^** .⁽¹⁾

Dimostrazione

Eliminiamo tutti gli oggetti e, con i soli dati G ed O, costruiamo i punti H, G' e la circonferenza g^* .

Prendiamo un punto A esterno a g^* e ripercorriamo tutta la costruzione del triangolo ABC.

Indichiamo con A' il punto omotetico di A rispetto a G con rapporto -0,5.

Si tenga presente che l'esistenza del triangolo è determinata dalla distanza di A' dal circocentro O.

Dimostriamo allora che:

- a) tutti i punti A interni a g^* sono tali che $OA' > OA$ e quindi il triangolo ABC **non esiste** (figura 7);
- b) tutti i punti A di g^* sono tali che $OA' = OA$ e quindi il triangolo ABC **degenera** in un segmento (figura 8);
- c) tutti i punti A esterni a g^* sono tali che $OA' < OA$ e quindi il triangolo ABC **esiste** (figura 9).

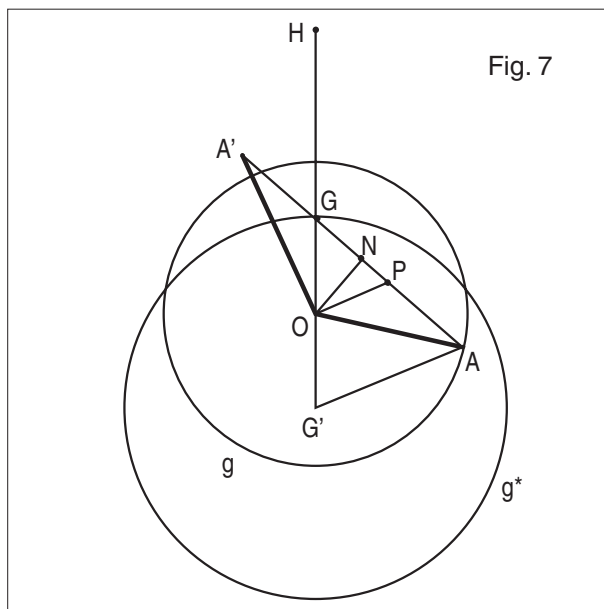


Fig. 7

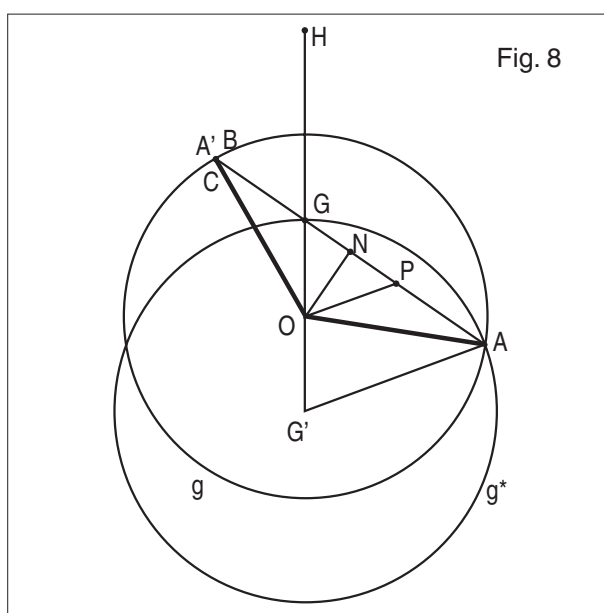


Fig. 8

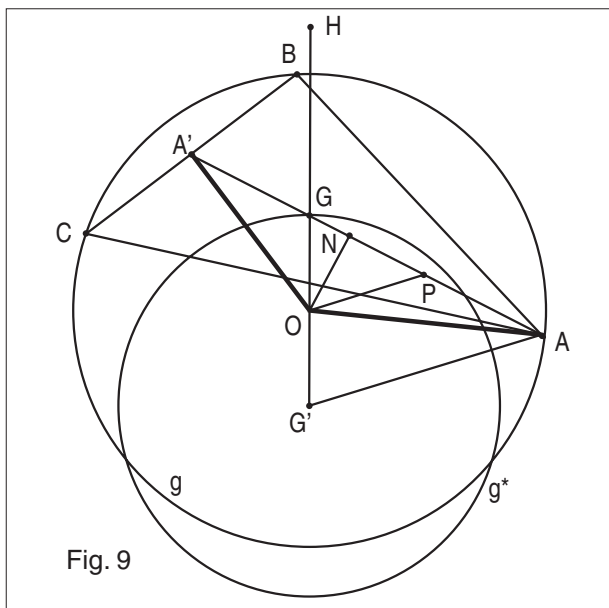


Fig. 9

Caso a)

Questo caso può essere tradotto nella relazione:
 $AG' < GG'$.

Sia N la proiezione di O sul segmento AA'; se P è il punto medio di AG allora

- $A'G = GP = AP$;
- $OP = AG'/2$;

per cui $GO > OP$ e $GN > NP$.

I triangoli ONA' e ONA, rettangoli in N, hanno il cateto ON in comune e il cateto A'N > AN in quanto:

- $A'N = A'G + GN$
- $AN = AP + NP$

Poiché $A'G = AP$ e $GN > NP$ si ha: $A'N > AN$ e le ipotenuse corrispondenti saranno: $A'O > OA$.

Caso b)

Questo caso può essere tradotto nella relazione:
 $AG' = GG'$.

Sia N la proiezione di O sul segmento AA'; se P è il punto medio di AG allora

- $A'G = GP = AP$;
- $OP = AG'/2$;

per cui $OP = GO$ e $NP = GN$.

I triangoli ONA' e ONA, rettangoli in N, hanno il cateto ON in comune e il cateto A'N = AN in quanto:

- $A'N = A'G + GN$
- $AN = AP + NP$

Poiché $A'G = AP$ e $GN = NP$ si ha: $A'N = AN$ e le ipotenuse corrispondenti saranno: $A'O = OA$.

Caso c)

Inutile ripetere la dimostrazione del caso c), del tutto analoga al caso a) precedente.

PUNTO 2

In modo immediato possiamo rispondere alla condizione a cui deve sottostare il punto A affinché il triangolo ABC sia rettangolo in A: essendo H l'ortocentro dovrà essere univocamente $A = H$. Costruita infine la circonferenza g'' di centro O e raggio OH, se A appartiene a g'' il triangolo ABC è rettangolo in B o in C (figura 10a); è acutangolo se A è esterno a g'' (figura 10b); è ottusangolo se A è interno a g'' (figura 10c). È sottinteso che A non deve appartenere alla "zona proibita"!

PUNTO 3

Il triangolo ABC è isoscele rispetto alla base BC se A appartiene alla retta di Eulero in quanto solo in tali posizioni i segmenti OA' e OA sono allineati (figura 11).

Per determinare le posizioni che può assumere il punto A affinché il triangolo ABC sia isoscele rispetto alla

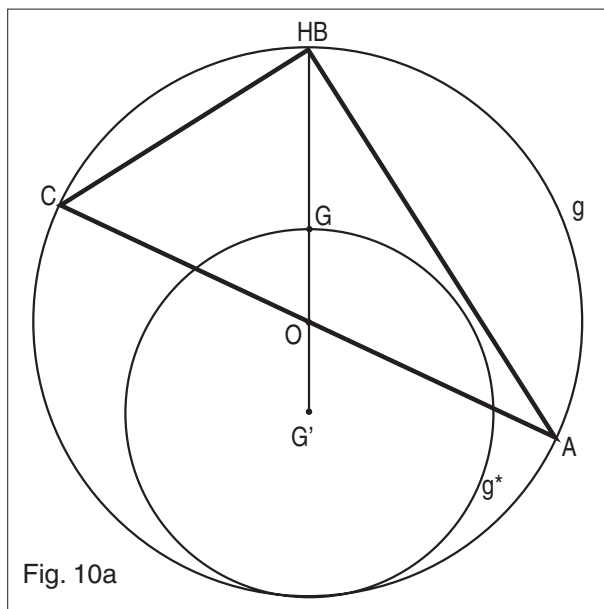


Fig. 10a

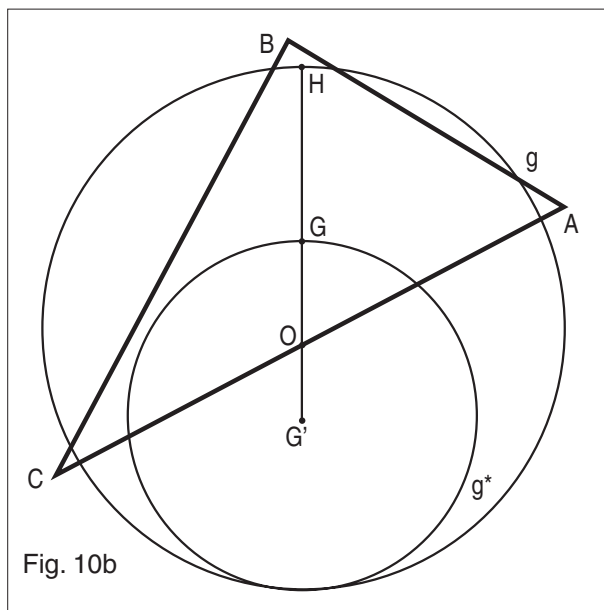


Fig. 10b

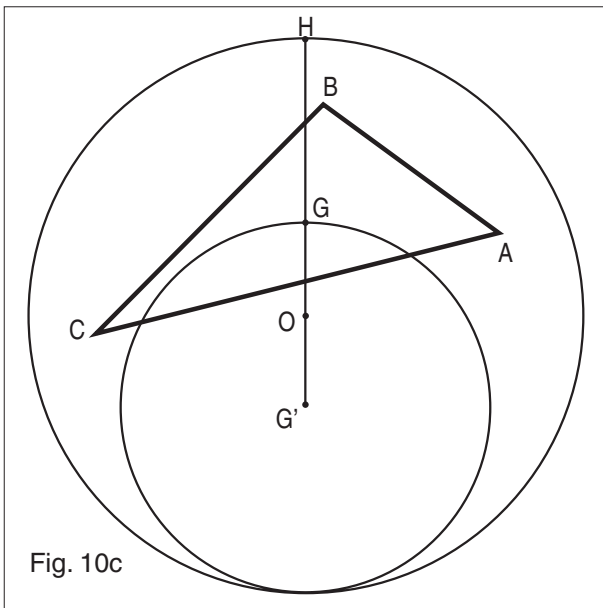


Fig. 10c

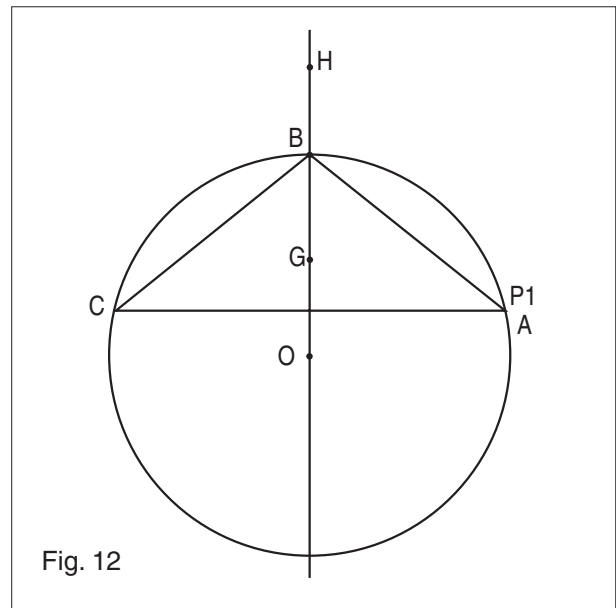


Fig. 12

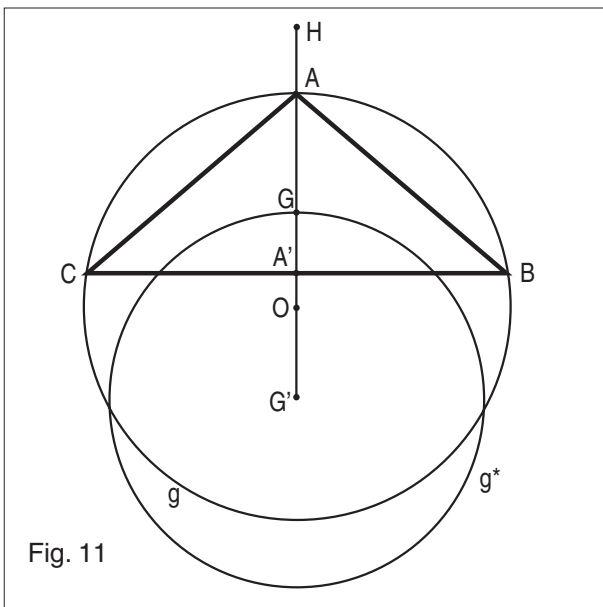


Fig. 11

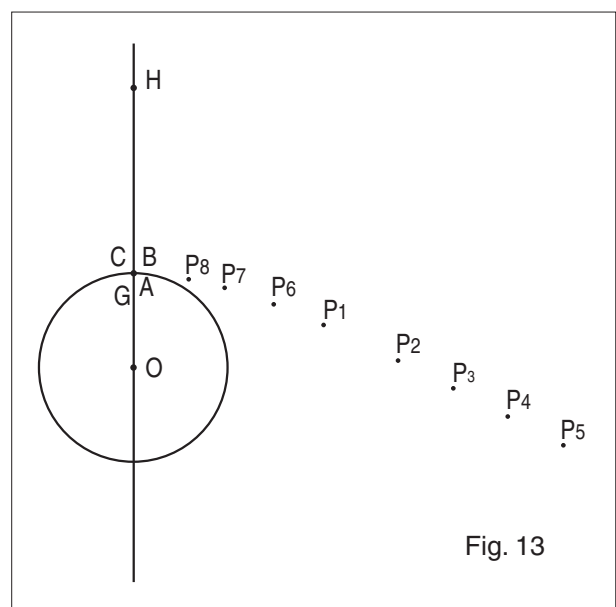


Fig. 13

base AC (o AB) ho dovuto ripercorrere la stessa strategia: esplorazione – congettura – dimostrazione.

Esplorazione

Preso un generico punto A (non appartenente alla zona proibita), si costruisce normalmente il triangolo ABC; successivamente si sposta A in modo che il punto B appartenga alla retta di Eulero.

Si costruisce un generico punto P1 e si sovrappone al punto A (figura 12).

Si ripetono le azioni precedenti scegliendo altre posizioni di A tali che B stia sulla retta di Eulero e si sovrappongono altrettanti Pi sul punto A.

Si nota che, come caso particolare, è accettabile anche che A coincida con G (figura 13) dato che il triangolo ABC degenera in un punto: $A = B = C = G!$

Congettura

La simmetria della costruzione ci suggerisce due cose: la prima che esisteranno altrettanti punti P'i simmetrici dei punti Pi rispetto alla retta di Eulero; la seconda che «sembra» che tali punti appartengano ad un'iperbole. Dopo alcuni tentativi si scopre che l'iperbole ha per asse reale il segmento GH e fuoco O.

Con la MACRO iperbole di Cabri si costruisce una tale conica e ci possiamo rendere conto della veridicità dell'affermazione precedente.

Con l'istruzione "Ridefinizione di un oggetto" costringiamo il punto A ad appartenere all'iperbole dopo di che possiamo verificare che il punto B sta sempre sulla retta di Eulero: il triangolo ABC è isoscele rispetto alla base AC (figura 14).

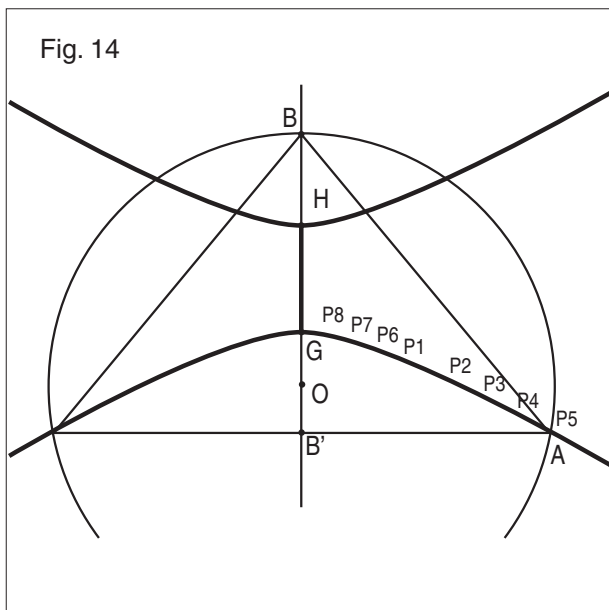


Fig. 14

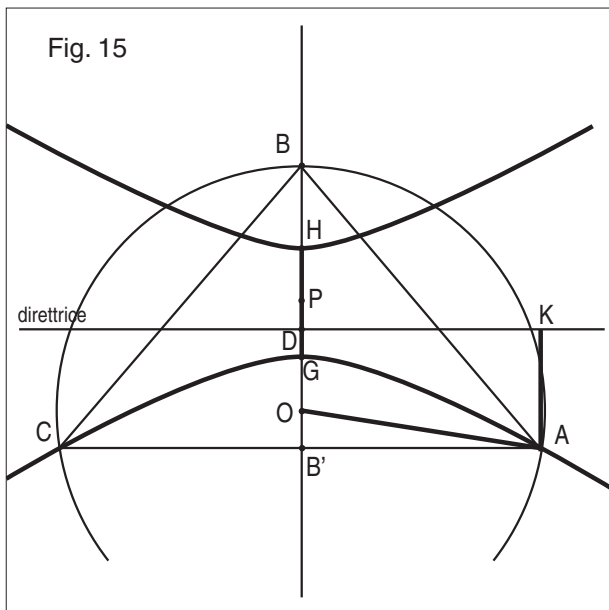


Fig. 15

Dimostrazione

Determiniamo prima di tutto i parametri fondamentali dell'iperbole (figura 15). Poniamo:

$a =$ semiasse reale $= GH/2 = GO$;

$P =$ centro dell'iperbole $=$ punto medio del segmento GH ;

$c =$ distanza del fuoco dal centro $= PO$; quindi $c = 2a$;

$d =$ distanza della direttrice dal centro $= a^2/c = a/2$.

La direttrice incontra la retta di Euler nel punto D tale che $GD = PD = a/2$.

La relazione che lega ogni punto A dell'iperbole rispetto al fuoco e alla direttrice si traduce allora in: $OA / AK = 2$, essendo K la proiezione di A sulla direttrice.⁽²⁾

Sia allora B sulla retta di Euler e poniamo $BG = b$.

Il corrispondente B' di B nell'omotetia di centro G e rapporto $-0,5$, apparterrà anch'esso a tale retta e sarà: $GB' = b/2$. Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC (di centro O) ha il raggio $OA = OB = BG + GO = b + a$.

$BB' = BG + GB' = b + b/2 = 3b/2$

$BD = BG - GD = b - a/2$

$DB' = BB' - BD = 3b/2 - b + a/2 = (b + a)/2$

$AK = DB' = (b + a)/2$

Dunque: se B appartiene alla retta di Euler il punto A è tale che $AK = AO/2$. A deve appartenere all'iperbole con le caratteristiche precedentemente ricordate.

NOTE

⁽¹⁾ Per correttezza dovremmo dire: A esterno (interno) al cerchio determinato dalla circonferenza g^* . Nel testo però faremo uso della scrittura più impropria.

⁽²⁾ Una costruzione delle coniche basata sulle direttrici è stata pubblicata nel bollettino CABRIRRSAE n.11, Marzo 1997. [N.d.R]



Nella sezione *Come fare* del bollettino n.34 è stata pubblicata la prima scheda di questa esperienza di laboratorio, preceduta da una presentazione dell'attività e da una relazione su metodi e finalità del gruppo di lavoro G.Ri.Mat con cui le autrici collaborano. [N.d.R]

Laboratorio:

equazione della retta nel piano cartesiano con Cabri-Géomètre

di *Alessandra Carta e Maria Cristina Miotto*

Gruppo G.Ri.Mat S.M. "Albinoni"

Selvazzano Dentro - PD

Scheda n.2

Rette parallele e rette non passanti per l'origine degli assi

Apri il programma *Cabri*.

1. Dalla casella n.11 clicca MOSTRA GLI ASSI, compariranno sul foglio di lavoro l'asse x e l'asse y.
2. Ancora dalla stessa casella clicca GRIGLIA, che non comparirà finché non avrai confermato avvicinandoti agli assi e cliccato quando compare la richiesta: *questi assi*. Compariranno dei puntini per evidenziare i punti con coordinate intere.

3. Dalla casella n.3 clicca RETTA punta e clicca prima sull'origine degli assi e poi sul punto di coordinate (-1,-2). Chiama n la retta disegnata.
Compila la tabella e trova l'equazione della retta n

X	Y=

$y = \dots\dots\dots$

Verifica la tua ipotesi: casella n.9, COORDINATE ED EQUAZIONI, clicca sulla retta.

4. Individua (casella n.2: PUNTO) e chiama A il punto di coordinate (0,2).
5. Costruisci una retta parallela alla retta n e passante per il punto A (casella n.5: RETTA PARALLELA, punta su n , conferma alla domanda *parallela a questa retta*, clicca su A).
6. Dalla casella n.9 clicca COORDINATE ED EQUAZIONI ed evidenzia l'equazione della retta appena disegnata.
7. Chiama questa retta r e colora di rosso la retta r e la sua equazione.
8. Individua e chiama B il punto di coordinate (0,-3).
9. Costruisci un'altra retta parallela alla retta n , passante per il punto B, chiamala v , evidenzia la sua equazione e colora di verde retta ed equazione.
10. Completa la tabella:

retta n	$y =$	$m =$
retta r	$y =$	$m =$
retta v	$y =$	$m =$

11. LE RETTE n, r, v , SONO PARALLELE, HANNO LA STESSA PENDENZA, DI CONSEGUENZA LE LORO EQUAZIONI HANNO LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE.
12. Tra le seguenti rette sottolinea con colori uguali le rette parallele:

$y = 3x+5$ $y = (1/2)x+9$ $y = 3x+2$
 $y = (1/3)x-1$ $y = -3x +5$ $y = (1/2)x-4$
 $y = (-3/2)x$ $y = (1/3)x+4$ $y = (-3/2)x-3$
 $y = -3x-6.$

13. Ora torniamo alle nostre rette n, r, v . Sofferma la tua attenzione sui termini noti delle equazioni compilando la tabella:

retta n	$y =$	Termine noto = 0
retta r	$y =$	Termine noto =
retta v	$y =$	Termine noto =

15. Prendi il puntatore, punta su B (punto d'intersezione tra la retta v e l'asse y) e spostalo in (0,-2); tutta la retta si è spostata, ora la sua equazione è $y = \dots\dots\dots$
16. Prendi il puntatore, punta ancora su B e spostalo in (0,-1); tutta la retta si è spostata, ora la sua equazione è $y = \dots\dots\dots$
17. Prendi il puntatore, punta ancora su B e spostalo in (0,+4); tutta la retta si è spostata, ora la sua equazione è $y = \dots\dots\dots$
18. Quando B aveva ordinata -2 il termine noto dell'equazione era ; quando B aveva ordinata -1 il termine noto dell'equazione era ; quando B aveva ordinata $+4$ il termine noto dell'equazione era ; quando B aveva ordinata -3 il termine noto dell'equazione era
19. Cosa puoi concludere?.....
20. Completa con le seguenti parole: *intersezione, asse y, termine noto, ordinata, retta.*

IL.....DELL'EQUAZIONE DI UNA.....É L'..... DEL PUNTO D'..... TRA LA RETTA E L'.....

IL TERMINE NOTO SI CHIAMA ANCHE ORDINATA ALL'ORIGINE E SI INDICA PER CONVENZIONE CON LA LETTERA **q**.

21. Completa:
 $y = 5x - 3$ la retta interseca l'asse y nel punto (.....)
 $y = 2x + \dots$ la retta interseca l'asse y nel punto (0, +7)
 $y = 5x$ la retta interseca l'asse y nel punto (.....)
 $y = -x + 1/2$ la retta interseca l'asse y nel punto (.....)
 22. Data l'equazione della retta $t: y = -5/2x + 3$, intuisci e scrivi l'equazione della retta parallela a t e intersecante l'asse y nel punto (0,-3)
 $y = \dots\dots\dots$
 Cambia foglio di lavoro, disegna le due rette e verifica la correttezza della tua ipotesi.

Scheda n.3

Rette perpendicolari: caccia alla relazione

Esiste una relazione tra l'equazione di una retta r e l'equazione di una retta perpendicolare a r . Oggi dovrai scoprirla.

1. Apri il programma *Cabri*.
2. Fai comparire gli ASSI e la GRIGLIA.
3. Completa la tabella e poi considerando i primi due punti disegna la retta di equazione $y = 3x-1$ (casella n.3 RETTA).

X	Y=3x-1
1	
0	

- Chiama A il punto di coordinate (1, 2) e n la retta disegnata.
- Dalla casella n.9, COORDINATE ED EQUAZIONI, evidenzia accanto alla retta la sua equazione.
- Costruisci tre rette perpendicolari a n, procedendo per ognuna di esse nel seguente modo: dalla casella n.5, RETTA PERPENDICOLARE, clicca su n e conferma alla domanda *perpendicolare a questa retta*:
 retta v passante per il punto(6, 0) colorala di verde
 retta t passante per il punto (0,-1) colorala di marrone
 retta r passante per il punto (-3,-6) colorala di rosso
- Potresti costruire altre rette perpendicolari a n?
 SI NO
 Se sì quante?.....
- Come sono le rette v, t, r tra loro?
 Sono.....
- Controlla con il comando PARALLELO?, casella n.8, poi cancella questa proprietà (puntatore, canc).
- SE LE RETTE v, t, r SONO PARALLELE hanno, secondo te, LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE?
 SI NO
- Con la casella n.9, COORDINATE ED EQUAZIONI, verifica la tua risposta evidenziando accanto a ciascuna retta la sua equazione.
- Colora ogni equazione con lo stesso colore della sua retta.
 ATTENZIONE: sposta con il puntatore le equazioni, per rendere più evidente il segno del coefficiente angolare.
- Completa:
 retta n y = retta v y =
 retta t y =
 retta r y =
- IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLE RETTE v, t, r È m =.....
 IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA n È m =.....
- Prendi con il puntatore il punto A e spostalo nel punto (4,1).
- Osserva: sono cambiate tutte l'equazioni delle rette, scrivile e cerchia il loro coefficiente angolare.
 retta n y = retta v y =
 retta t y =
 retta r y =
- Prendi con il puntatore il punto A e spostalo nel punto (4,2), sono cambiate ancora le equazioni, scrivile e cerchia il loro coefficiente angolare.

retta n y = retta v y =
 retta t y =
 retta r y =

18. Completa la tabella riassuntiva dei coefficienti angolari:

retta n y=3x-1 m=3 rette perpendicolari a n m = -1/3

retta n y=1/2x-1 m = rette perpendicolari a n m =

retta n y= m = rette perpendicolari a n m =

19. Completa con le seguenti parole: *coefficienti, perpendicolari, opposto*:

RETTE
 HANNO
 ANGOLARI INVERSI E DI SEGNO

20. Tra le seguenti rette sottolinea con colori uguali le coppie di rette perpendicolari:

y = -5x +3 y = 1/2x +9 y = -2x+5

y = 1/4x y = 1/5x-8 y = -4x +3

y = -2/3x+2 y = 3/2x-1

21. Prendi con il puntatore e sposta A in (4,3).
 22. Osserva ora le equazioni delle rette e in particolare i loro COEFFICIENTI ANGOLARI, completa:

retta n m = retta v m =
 retta t m = retta r m =
 Vale anche in questo caso la relazione tra i coefficienti angolari di rette perpendicolari?

23. Prendi con il puntatore il punto A e spostalo nel punto (4,-1).

24. La retta n è ora PARALLELA all'asse x, la sua equazione è cambiata, ora è y =
 Completa la tabella relativa alla retta n:

X	Y=-1
+3	
-2	
+7	
-13	

Osservando il piano cartesiano cosa noti?

25. Un alunno confuso ha scritto in parole l'equazione della retta n, riordinala tu.

Della retta n ha ogni ordinata punto sempre -1.

26. Scrivi in parole le equazioni delle rette v, t, r

retta v,
 retta t,
 retta r,

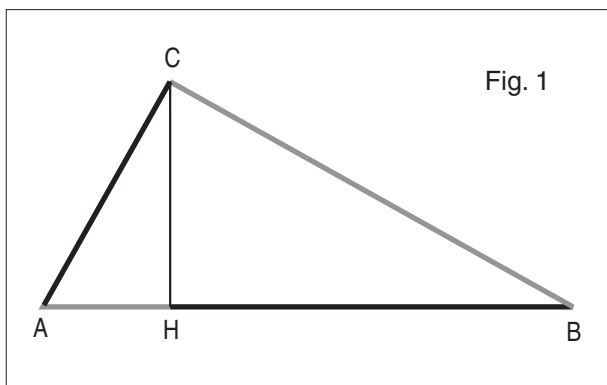
27. Intuisci e scrivi l'equazione dell'asse x
Verifica la tua risposta con il comando COORDINATE ED EQUAZIONI.
28. Scrivi l'equazione di una retta parallela all'asse x e passante per il punto $(-5;+3)$
29. Disegna la retta su un nuovo foglio di lavoro e verifica che la tua risposta sia esatta.
30. Scrivi l'equazione di una retta perpendicolare alla retta di equazione $y = 4/5x-3$, passante per l'origine degli assi $y = \dots\dots\dots$
Disegna le due rette e verifica la tua risposta.

PROPOSTE DI LAVORO

Una costruzione con riga e compasso: soluzioni

a cura della redazione

Nel bollettino n.37 è stata proposta ai lettori la costruzione del triangolo rettangolo ABC data la coppia di segmenti (AC, HB) o (CB, AH)



Abbiamo ricevuto tre risposte. Giacomo Canevari, studente liceale e il nostro collaboratore Renato Verdiani ci hanno proposto la medesima costruzione: pubblicheremo quella dello studente preceduta da una breve comunicazione della sua insegnante di matematica e dalla premessa alla costruzione di Renato Verdiani. La terza risposta ci è pervenuta da Maria Cantoni, l'autrice dell'articolo comparso sul bollettino n. 37 da cui abbiamo tratto lo spunto per questa proposta di costruzione. Maria Cantoni non descrive una costruzione, ma propone una indagine grafica per giungere ad essa.

Alla redazione di CABRIRRSAE

Vi mando un lavoro fatto da un mio allievo in risposta alla PROPOSTA DI LAVORO comparsa sul bollettino n.37, Ottobre 2003.

Il bollettino succitato mi è arrivato in Dicembre e ho proposto in una mia classe la costruzione di un triangolo rettangolo "conosciuta una coppia di segmenti tra quelli che lo compongono". Dovevano studiare tutti i possibili casi, quanti si ripetevano nella costruzione ed infine trovare una costruzione per una delle seguenti coppie: cateto e proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa. Quello che segue è la risposta di un mio allievo che ha pensato ad un immediato approccio algebrico ("forse partendo da qui qualcosa mi viene in mente" è stato il suo commento), ma è notevole, a mio parere, la successiva interpretazione geometrica. Vi mando il lavoro senza aver corretto alcunché.

Cordialmente
Maria Rosa Busseti
Liceo scientifico "G. Aselli", Cremona

Renato Verdiani

collaboratore esterno IRRE Emilia Romagna

Premessa

Credo di aver letto e di aver affermato molte volte che «con la riga e il compasso si possono risolvere problemi geometrici solo se – tradotti algebricamente – questi conducono ad un'equazione di primo o secondo grado». Credo anche di non essermi mai preoccupato – dopo essere riuscito a costruire una figura con gli strumenti offerti da CABRI – di controllare che il problema poteva essere tradotto in un'equazione di primo o secondo grado. Anzi, credo di non essermi preoccupato di verificare la situazione inversa e cioè che «se un problema – risolto algebricamente – conduceva ad un'equazione di primo o secondo grado allora si poteva risolvere anche con la riga e il compasso».

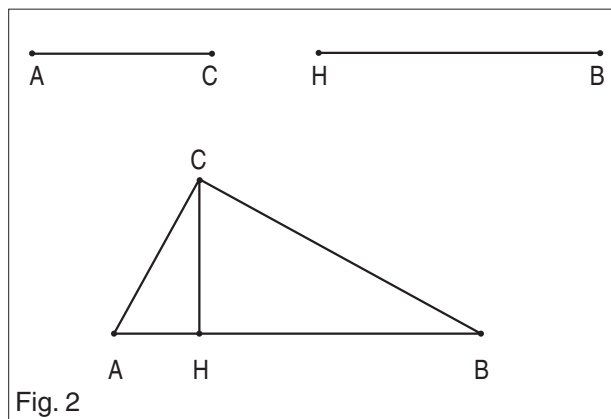
Il problema proposto sul Bollettino n. 37 mi ha fatto riflettere su questo ultimo punto.

Giacomo Canevari

Liceo scientifico "G. Aselli", classe 2C, Cremona

Dato un cateto e la proiezione dell'altro sull'ipotenusa, costruire il triangolo rettangolo.

Consideriamo un triangolo ABC, rettangolo in C, il cateto AC e la proiezione dell'altro sull'ipotenusa, BH



Maria Cantoni

Università cattolica Sacro Cuore – Brescia

La soluzione di questo problema ci è parsa particolarmente interessante.

Prendendo spunto dalla sua soluzione grafica (figura 4) è possibile ampliare la "ricerca" in un campo apparentemente diverso, un'occasione di apertura didattica imprevedibile verso problemi di "linguaggio", lavoro sempre molto complesso, se lo si vuole trattare da punti di vista diversi dal mero addestramento: essa ci porta verso le equazione di secondo grado!

L'analisi della variabilità della figura 4 (e qui il Cabri è

strumento di suggestione) con la posizione limite (quando A coincide con H) e le esperienze di "cattura" di triangoli simili in tanti problemi ci conducono alla figura 5.

E quindi alla soluzione di figura 6.

Ma:

x : a = a : (x + 2 b),

x (x+2b) = a^2

x^2 + 2bx = a^2

si apre un altro discorso ...

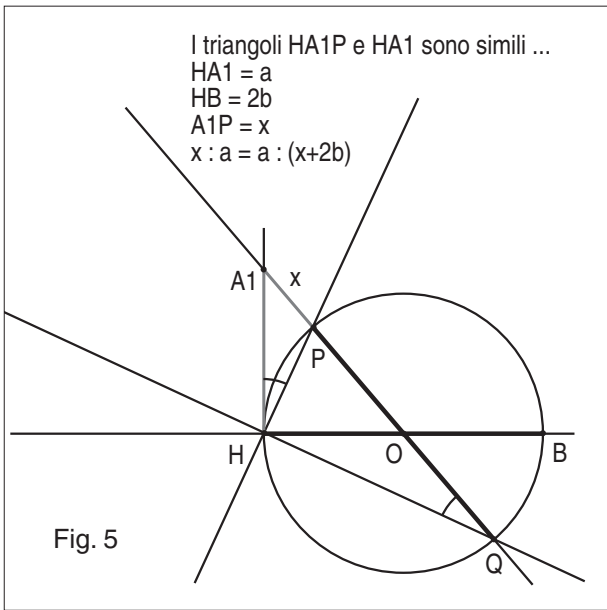


Fig. 5

scoperta del legame fra i due segmenti assegnati

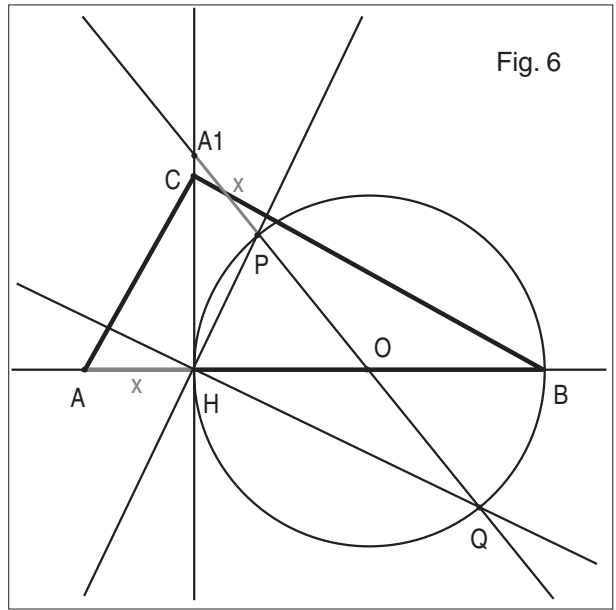


Fig. 6

Robot e computer

Software e computer

World Wide Web

Saperi di riferimento

Investimenti di riferimento

1984 IBM annuncia il primo PC compatibile...
1985 Microsoft introduce Windows...
1986 Intel lancia il processore 386...
1987 Apple lancia il Macintosh...
1988 IBM annuncia il primo PC con schermo...
1989 Microsoft introduce Windows 3.0...
1990 Intel lancia il processore 486...
1991 Apple lancia il Macintosh Plus...
1992 IBM annuncia il primo PC con mouse...
1993 Microsoft introduce Windows 95...
1994 Intel lancia il processore Pentium...
1995 Apple lancia il Macintosh SE...
1996 IBM annuncia il primo PC con CD-ROM...
1997 Microsoft introduce Windows NT...
1998 Intel lancia il processore Pentium II...
1999 Apple lancia il Macintosh G4...
2000 IBM annuncia il primo PC con DVD...
2001 Microsoft introduce Windows XP...
2002 Intel lancia il processore Pentium III...
2003 Apple lancia il Macintosh G5...
2004 IBM annuncia il primo PC con Wi-Fi...
2005 Microsoft introduce Windows Vista...
2006 Intel lancia il processore Pentium D...
2007 Apple lancia il Macintosh Mini...
2008 IBM annuncia il primo PC con touch screen...
2009 Microsoft introduce Windows 7...
2010 Intel lancia il processore Pentium E...
2011 Apple lancia il Macintosh Pro...
2012 IBM annuncia il primo PC con tablet...
2013 Microsoft introduce Windows 8...
2014 Intel lancia il processore Pentium F...
2015 Apple lancia il Macintosh SE2...
2016 IBM annuncia il primo PC con smart TV...
2017 Microsoft introduce Windows 10...
2018 Intel lancia il processore Pentium G...
2019 Apple lancia il Macintosh SE3...
2020 IBM annuncia il primo PC con smartwatch...
2021 Microsoft introduce Windows 11...
2022 Intel lancia il processore Pentium H...
2023 Apple lancia il Macintosh SE4...
2024 IBM annuncia il primo PC con smartwatch e smart TV...

LA RECENSIONE DEL MESE

Fardiconto

www.fardiconto.it

Il sito web Fardiconto continua la sua attività: anzi, da alcuni mesi, ha un dominio tutto suo e quindi un indirizzo più facilmente identificabile:

<http://www.fardiconto.it>

Pensiamo che questo faciliti gli utenti nell'accedere ai materiali e alle attività presenti e future del sito. Ricordiamo qui alcune delle sezioni del sito che corrispondono ad iniziative che si sono consolidate negli anni:

- *L'archivio completo* dei bollettini di CABRIRRSÆ (39 numeri) e la collana completa dei QUADERNI DI CABRIRRSÆ (26 numeri).
- Informazioni sulle mailing list in generale e sulla *mailing list cabrinews* in particolare.
- Le attività con le *calcolatrici grafiche TI-73* (adatte alla scuola media) e TI-89 (adatte alla scuola superiore)
- *FLATlandia* (problemi di Geometria in rete per ragazzi dai 13 ai 16 anni)
-
- Progetto *Cabri-Java*
- Progetto *Eccellenza*
-
- *Materiali* scaricabili in *PDF*, di matematica e non di matematica.

Da questa ultima sezione è scaricabile, da poche settimane, il poster *dall'abaco al computer*, la cui immagine, fortemente rimpicciolita è nelle pagine precedenti. Il cartellone è dedicato ad una breve e sintetica storia delle idee e delle invenzioni che hanno portato alla messa a punto dei moderni *elaboratori*.

Il poster è dedicato prevalentemente ai ragazzi della scuola secondaria. Nel costruirlo, si è cercato di tenere presenti i seguenti obiettivi:

- a) mostrare come, alle spalle dell'invenzione del moderno elaboratore stiano tantissime *idee* che hanno impiegato duemila anni a collocarsi in un sistema;
- b) fare capire come il prodotto finale, il computer, è una specie di puzzle, che ha messo insieme risultati prodotti in ambiti disciplinari diversi, in tempi e luoghi differenti; spesso in campi "di altissima specializzazione", ma talvolta dovuti anche al

sogno, apparentemente visionario, di un singolo;

- c) fare salire alla superficie il ruolo sotterraneo, ma decisivo dell'evoluzione delle *idee* e degli *strumenti matematici* e del supporto cognitivo diretto e indiretto da essi fornito;
- d) rendere evidente che a cambiare le società umane, le loro abitudini e capacità sono gli "oggetti", sempre strettamente intrecciati però con i pensieri che li hanno creati.

Il poster (alcuni docenti l'hanno già sperimentato nelle classi) può favorire:

- un'indagine storica attraverso le tantissime invenzioni che hanno preparato l'arrivo del moderno elaboratore
- la comunicazione efficace di alcune *discipline*; senza la *matematica* e la *fisica*, ed altre discipline che derivano direttamente da queste prime due, i computer, molto semplicemente, ... non esisterebbero
- la consapevolezza che esiste il mestiere di *matematico*. Il poster, appeso alle pareti dell'aula o del laboratorio, può servire proprio come documento del fatto che, almeno fino a ieri, sono veramente esistiti dei *matematici* e che essi hanno contribuito enormemente, con le loro idee, alla nascita del computer.
- un'indagine puntuale sul come i computer abbiano influito in maniera determinante sugli eventi storici degli ultimi 100 anni.

Senza dubbio altre idee ed iniziative, anche didatticamente più interessanti, potranno nascere nelle classi per iniziativa di colleghi o dei ragazzi stessi.

Per avere informazioni sul poster, contattare Marisa Cresci di IRRE Emilia Romagna (cresci@irreer.it), oppure Media Direct di Bassano del Grappa (info@campustore.it)

