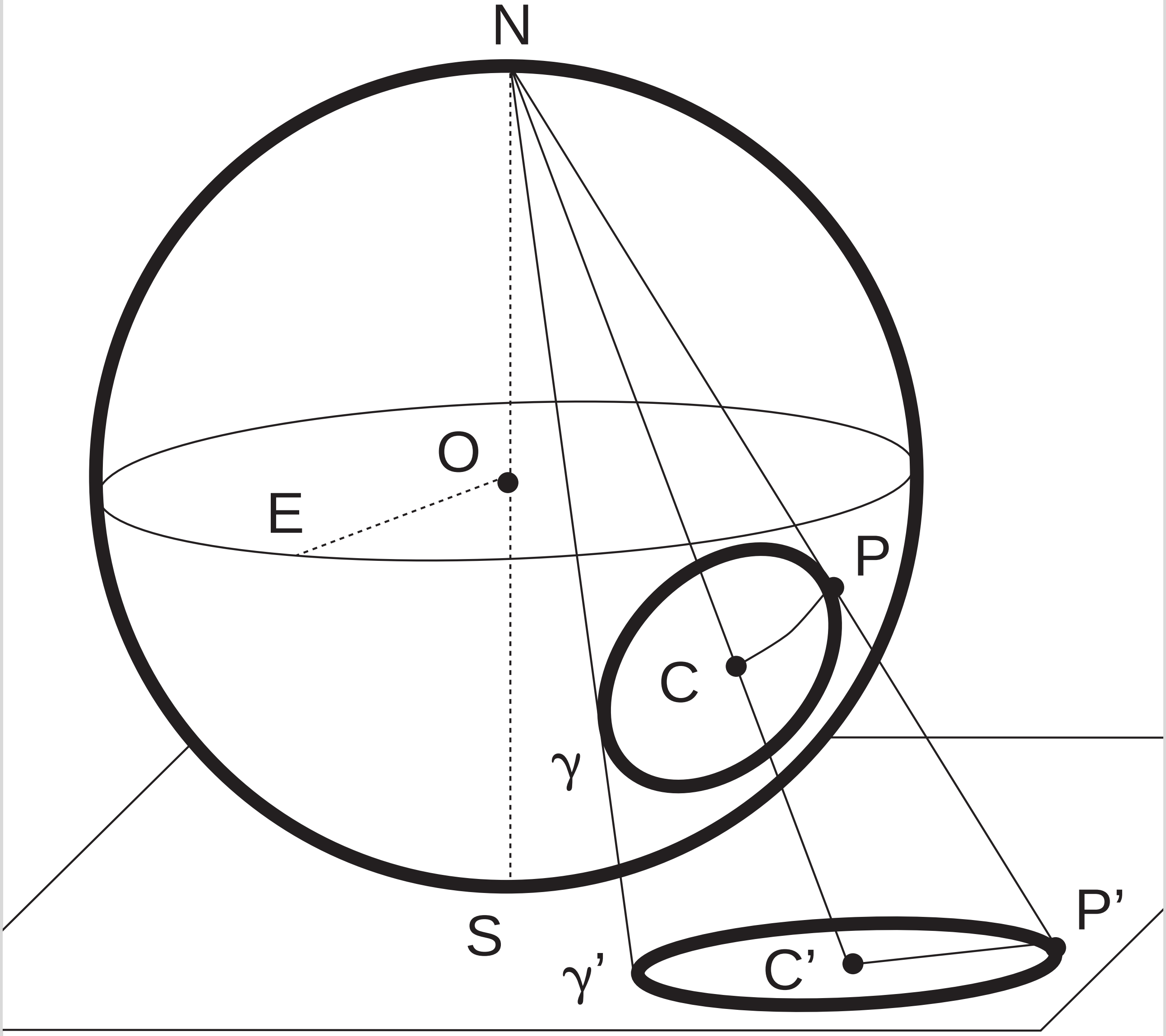
CABRIRRSAE 2001

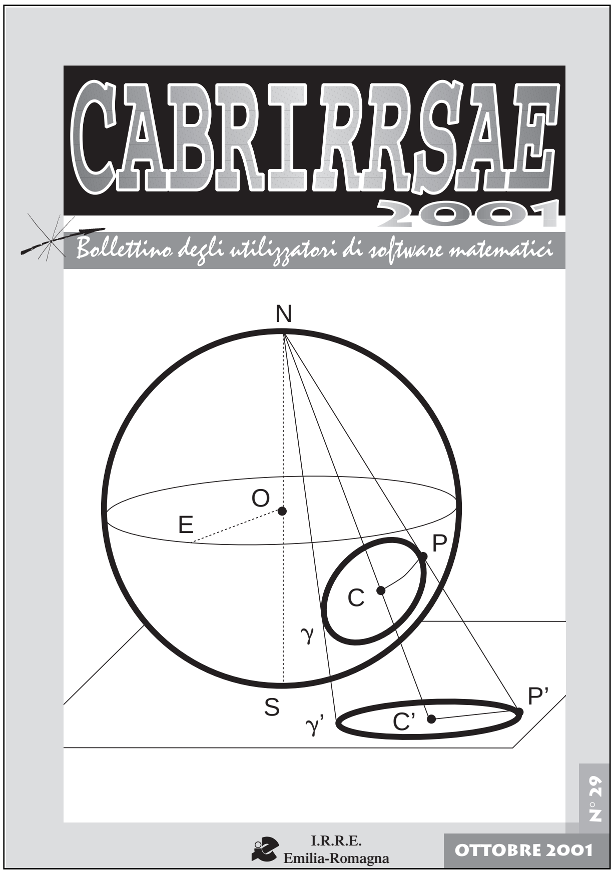
Bollettino degli utilizzatori di software matematici



N° 29

I.R.R.E.
Emilia-Romagna

OTTOBRE 2001



L'immagine

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

Il disegno, realizzato con Cabri-géomètre II, da L. Tomasi, rappresenta la proiezione stereografica di una sfera su un suo piano tangente nel polo Sud. Tra le tante proprietà, la figura suggerisce che questa bella trasformazione muta circonferenze sulla sfera in circonferenze sul piano tangente, tranne nel caso in cui la circonferenza passi per il polo Nord: in questo caso si ottiene una retta, perché N si trasforma nel punto all'infinito.

Per vedere una animazione della figura di copertina si veda questa pagina:
http://cabrijava.free.fr

In questo numero

Nella sezione ***Cabri discusso*** pubblichiamo un commento ad un documento relativo all'insegnamento delle o con le nuove tecnologie nella scuola secondaria.

In ***Come fare*** presentiamo la soluzione completa del tema di matematica, anno 2001, per l'indirizzo sperimentale PNI, corredato da figure realizzate con Cabri-

segue a pagina 3

Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE* 2000
IRRE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@kidslink.scuole.bo.it
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@kidslink.scuole.bo.it

Fardiconto:
http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.4, Luglio Agosto 2001, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Luciano Lelli, Direttore edit. Arnaldo Luisi proprietà IRRE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

SOMMARIO

segue da pagina 2

géomètre.
Segue un articolo che invita a trattare la matematica per problemi indicando siti Internet dove rintracciare materiali per ogni livello scolastico.
Per la scuola media inferiore presentiamo una simulazione della caduta di un grave sul piano inclinato, realizzata con Cabri-géomètre, sperimentata in una classe seconda o terza.

Nella ***Recensione del mese*** viene proposto un argomento di matematica ricreativa, il gioco a blocchetti mobili.

CORSI E SEMINARI

Nei giorni 11, 12 e 13 settembre 2001 si è tenuto presso l'hotel Piccadilly di Bellaria (RN) il seminario residenziale "TI-73 – Azione 5", rivolto a docenti di scuola secondaria di 1° grado che si sono dichiarati disponibili a sperimentare nelle proprie classi esperienze di laboratorio di matematica e di scienze con l'utilizzo delle piccole tecnologie.
Come calcolatrice grafica è stata scelta la TI-73, nata negli Stati Uniti appositamente per la "middle school" americana; questa calcolatrice non è presente sul mercato europeo.
L'IRRE dell'Emilia Romagna, che ha acquisito un certo quantitativo di attrezzature, ha messo a punto un programma di prestito gratuito per le scuole che si sono mostrate interessate a questo tipo di esperienza. In queste settimane i docenti stanno sperimentando nelle classi le attività messe a punto durante il seminario.
La sperimentazione terminerà presumibilmente in aprile; i risultati saranno sicuramente pubblicati sul sito Fardiconto, gestito da IRRE Emilia Romagna.

CABRI IN BIBLIOTECA

Informiamo che sul sito web Fardiconto (http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto) è prelevabile, dal 1° ottobre 2001, in formato PDF, la traduzione, dall'inglese all'italiano, del documento "Report to the President on the Use of Technology to Strengthen k-12 Education in the United States, march 1997".
Riteniamo che lo scritto, anche se molto datato, possa ancora fornire degli utili spunti anche alla scuola italiana.
Poichè sembra che il testo originale in lingua inglese non sia più rintracciabile nel sito della Casa Bianca, da cui noi lo abbiamo prelevato, informiamo che presso il nostro Istituto esiste copia cartacea dell'originale in inglese.

INVIATECI I VOSTRI ARTICOLI

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di **CABRI***RRSAE* ".

CABRI DISCUSSO

Le nuove tecnologie a scuola o la scuola delle nuove tecnologie?

di Anna Maria Arpinati
IRRE Emilia-Romagna
e di Daniele Tasso
SMS Rolandino de Passeggeri, Bologna

Il 16 maggio scorso, sul sito del Ministero della Pubblica Istruzione è apparso un documento relativo a "Le nuove tecnologie della scuola secondaria. Strumenti per l'apprendimento o ambienti di formazione dell'esperienza e della conoscenza".
A cura di Silvano Tagliagambe (coordinatore) e Marta Genoviè de Vita (moderatore).
A questo documento ha dedicato un articolo, domenica 27 maggio, anche il "Sole-24 ore", nella pagina dedicata al mondo della scuola.
Il fatto che un quotidiano, generalmente attento come il "Sole 24 ore", lo avesse citato come documento degno di interesse ed il prestigio stesso dei due nomi che apparivano quali coordinatore e moderatore, facevano ben sperare sulla bontà del prodotto.
Dopo una lettura attenta (ed è stata una lettura non facile, dato lo stile del testo), noi ci siamo dovuti ricredere.
Evidentemente, coordinatore e moderatore non sono riusciti ad incidere su una discussione che deve essere stata forse accesa sulle linee di principio, ma anche superficiale e vaga per quanto riguarda i contenuti veri e propri e le diverse modalità di utilizzo delle Tecnologie della Informazione e della Comunicazione (in inglese ICT).
Infatti, se pur nello scritto, piuttosto scorrettamente, non vengono citati i nomi e le qualifiche dei partecipanti alla discussione, appare evidente che il documento è il risultato un po' stravagante di una mediazione fra coloro che parlavano di tecnologia ad un livello piuttosto "accademico", e altri, molto più realistici, che erano lì probabilmente per motivi solo "politici", e proponevano invece soluzioni ai problemi. Il tutto in assoluta incoerenza fra teoria e pratica. Per accertarsene, è sufficiente confrontare le "premesse" con le "tabelle", dove nessuna delle cose dette precedentemente appare più.

Doverosa premessa di principio

E' necessario fare una premessa di principio per evitare fraintendimenti. Per prima cosa la scuola deve usare le nuove tecnologie. Gli studenti devono imparare a leggere, scrivere, calcolare, con gli strumenti informatici.
In questa fase di transizione gli studenti devono apprendere le abilità culturali di base *anche* attraverso i mezzi tradizionali.
Quando i computer saranno "indossabili", forse si potranno mettere in soffitta libri e quaderni. Oggi no, perché la tecnologia è ancora ingombrante e dispendiosa. Se l'uso delle nuove tecnologie, anziché del libro e del quaderno, modificherà non solo il nostro modo di operare, ma anche il nostro modo di pensare, nessuno al momento lo sa. Tutte le ricerche empiriche, ad esempio sulle strategie adottate dai lettori di ipertesti, mostrano che nelle nuove tecnologie riproduciamo i consueti processi di pensiero. Sembra che la teoria del computer come modello *della* mente o viceversa, il computer come modello *per* la mente, non abbia più la fortuna di vent'anni fa.
Sicuramente molte cose che prima si facevano "manualmente", si potranno fare domani virtualmente. L'idea però che tutta la realtà possa essere manipolata esclusivamente attraverso processi digitali, non sembra realistica. Probabilmente i "tamagochi" non soppianteranno le "barbie" nell'immaginazione infantile ancora per qualche anno.

Dopo i princìpi, la concretezza

Detto questo, rimane aperto il problema di come concretamente e proficuamente organizzare l'apprendimento e l'uso delle nuove tecnologie. Negli Stati Uniti le (pochissime) scuole virtuali, dove gli studenti ricevono le lezioni sul monitor ed eseguono i compiti assegnati da un insegnante remoto, sono sotto osservazione, per studiarne i pro e i contro. E in Italia, a che punto siamo?
Tradizionalmente le sperimentazioni condotte nelle nostre scuole, non sono vere sperimentazioni, ma attuazioni "alla cieca" di teorie; oppure, se sono attività più serie, non sono trattate come tali: valutate e diffuse capillarmente. La nostra scuola non è cambiata attraverso il metodo sperimentale, ma in grazia dei vari "ordini" più o meno illuminati piovuti dall'empireo ministeriale e alle diverse più o meno fedeli "interpretazioni" che della cosa si dà localmente. Sperimentare le nuove tecnologie è ancora più complesso che sperimentare le vecchie. L'ostacolo principale del ricercatore è il "tempo": l'innovazione tecnologica e culturale nel campo delle nuove tecnologie è più rapida dei tempi di ricerca a cui siamo abituati. C'è insomma il rischio reale di diffondere risultati di ricerche su oggetti non più presenti sulla scena educativa.
D'altronde rinunciare al dovere di sperimentare l'efficacia educativa delle tecnologie, andrebbe contro due tacite regole che stanno alla base dei nostri sistemi scolastici: a scuola si insegna "la verità", e lo si fa nel modo "più utile" alla persona da educare.
Insomma, non si può non insegnare con le nuove tecnologie, fingendo che non esistano; ma non si può farlo in

modo spontaneistico e potenzialmente dannoso ed improduttivo.

Un documento ambiguo

Ritornando al nostro documento, esso già dal titolo si pone come problematico. *Nuove tecnologie della scuola secondaria. Strumenti per l'apprendimento o ambienti di formazione dell'esperienza e della conoscenza.*
Non era sufficiente fermarsi alla prima frase (anche se in realtà ci sarebbe apparso più corretto "Le nuove tecnologie *nella* scuola secondaria"?
La seconda frase suggerisce un tema di discussione "filosofico", su cui evidentemente ci si vuole soffermare, perché questo implicherebbe delle significative differenze di prospettiva sulle modalità di introduzione delle nuove tecnologie nel ciclo secondario.
Per chiarire il dilemma: intendere le nuove tecnologie come "strumento" significa pensarle come sostituti aggiornati di carta e penna. Intendere invece le nuove tecnologie come "ambiente" significa attivare un processo di "indagine" e "teorizzazione" non realizzabile con carta e penna, ma *esclusivamente* con le nuove tecnologie. Ma la mancanza, nello scritto, di una bibliografia di riferimento fa ritenere che forse la commissione non si è preoccupata di informarsi sui risultati della ricerca nazionale e internazionale, per quanto concerne questa problematica.
Non si sente cioè l'esigenza di affermare che si segue una determinata corrente di pensiero o che si fa riferimento a determinate ricerche scientifiche di alto livello; si fa tutto "in casa", e con una certa sicurezza di chi non ha, sul tema trattato, dubbi; il tema in questione invece, a nostro parere, è troppo recente per dare luogo solo a certezze. Ma se si prosegue nella lettura dello scritto si osserva che si ritrovano, in definitiva, le solite cose "molto trasversali" e generiche a cui ci ha abituato la linea pedagogica degli esperti di Berlinguer e De Mauro; quella linea che ha permeato molti dei documenti emanati dai due ministri negli ultimi anni e per cui ogni cosa che si propone per la scuola deve ricondursi, sempre e solo, a discorsi generali, teorici, genericamente propositivi. Si parla infatti (Parte1. *Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione (TIC): motivazioni e finalità*) di:

- acquisizione di competenze (trasversali e non) per potersi efficacemente inserire nella società …
- sviluppo di competenze reticolari provenienti da diversi ambiti e riferite a diversi tipi di conoscenza …
- trasversalità fra saperi e la possibilità di studiare una disciplina anche attraverso altre discipline …
- messa in risalto come *l'informatica metta oggi a disposizione nuovi e fondamentali modi di comunicazione proprio, altrui e collettivo*
- eccetera, …

Manca sempre, in questo come in altri documenti, una qualsivoglia esemplificazione convincente delle cose genericamente proposte. Potrebbe ad esempio essere gradito un esempio di "competenze reticolari" o un esempio che ci faccia vedere come sia possibile, nella scuola secondaria, imparare "seriamente" chimica o matematica, "attraverso" altre discipline.
Ma, proseguendo nella lettura, ci si accorge che questo documento, volendo parlare non solo di didattica, ma anche, se pur superficialmente, di tecnologia, mette in evidenza banalità o imprecisioni.

- si parla di società *con sistemi produttivi in cui si pongono in essere "oggetti" artificiali, virtuali, digitali*
- si parla di giovani che devono essere consapevoli *della disponibilità di strumenti operativi (modellizzazione, simulazione, ecc) che rendono possibile orientarsi anche in ambienti complessi*
- si considera *l'articolazione dell'oggetto digitale in due componenti: il "dato" (risultato della traduzione in formato digitale del contenuto analogico originario) e i "metadati" (istruzioni e convenzioni per assegnare a questo dato specifico un nome che lo individui, instradarlo e ritrasformarlo nel formato analogico di partenza)*;

e si potrebbe andare avanti e trascrivere intere frasi dal significato generico e non sempre chiaro. Vogliamo riportare, a titolo di esempio, un pezzo intero del documento:
Il computer, infatti, è sia una macchina fisica (l'hardware) sia una macchina non fisica. Il software, i programmi, gli algoritmi, sono strutture astratte, certo "incarnate in un insieme di processi fisici, ma nei quali la parte relativa alle "strutture di dati" e alle "regole" usate per trasformare queste strutture di dati appare la più significativa. Va comunque sottolineato che tali regole e strutture di dati non sono svincolate dal loro supporto fisico e che, di conseguenza, è indispensabile cogliere il tipo di relazione che fra essi si stabilisce. Ad esempio una struttura di simboli scritta su una lavagna è inerte: senza la macchina fisica non c'è la possibilità autonoma di passare da essa ad altre strutture e di generare successive elaborazioni, per cui il software non è riducibile a pura logica. Per rendersi meglio conto di questa differenza, basta pensare al caso dei dimostratori automatici.
Abbiamo fatto leggere questo testo a più persone, alcune hanno cattedre universitarie ed insegnano in facoltà scientifiche; per molti lo scritto è ai limiti dell'incomprensione. Siamo arrivati a questo punto di incomunicabilità con il nostro Ministero? Ci siamo informati in sede accademica competente: pare che in Italia le persone che sappiano parlare, consapevolmente, di dimostratori automatici, siano 5 o 10 in tutto e questo è un tipico argomento di ricerca avanzata; inserito al termine di quella frase, a che serve questo riferimento?

Un nuovo docente per l'insegnamento delle TIC

Arrivati però al quinto foglio del documento ministeriale, al sentimento di meraviglia e stupore si aggiunge

quello di una forte preoccupazione: per il biennio della scuola superiore si consiglia un insegnamento autonomo delle TIC; sorge immediato il timore che il futuro docente delle TIC abbia un profilo professionale non del tutto chiaro.
Il profilo che si propone per l'insegnante delle TIC è infatti, a nostro parere, un po' troppo generico. Si sostiene (Parte 2. *Chi deve insegnare le TIC*) che deve essere una figura con competenze diversificate, *che riguardano aspetti teorici legati alla teoria dell'informazione, teorico-pratici (legati all'uso delle tecnologie informatiche), relazionali (legati all'esigenza di collaborare con insegnanti di diverse discipline …), didattico-pedagogici (legati all'opportunità di fare delle TIC, oltre che uno strumento di lavoro anche oggetto di studio e di riflessione).*
Poco oltre si sostiene che (tale insegnante delle TIC) deve essere, fra le infinite altre cose, persona capace:
- *di utilizzare nel contesto didattico gli aspetti teorici, i metodi e gli strumenti della scienza dell'informazione (logica, algoritmi, architetture, linguaggi, metodi di progettazione, eccetera)*
- *di usare più di un sistema operativo e di un linguaggio di programmazione*
- *di integrare diversi linguaggi nella realizzazione di prodotti multimediali e ipermediali*
- *di valorizzare diversi stili cognitivi e di sviluppare una riflessione metacognitiva.*

In queste righe ci pare di cogliere molta superficialità. L'insegnante in oggetto dovrebbe essere un superuomo, se fosse in grado di controllare contemporaneamente tutti questi saperi; e se non è un superuomo, può solo essere un "tuttologo"; un altro fra i tanti che stiamo immettendo negli ultimi anni nelle scuole di vario ordine e grado. Di quali contenuti poi questo "superesperto" riempirebbe questi schemi che gli vengono attribuiti? Deve conoscere più sistemi operativi e più linguaggi di programmazione (cose da niente!) per fare cosa? Per risolvere problemi di matematica o statistica, lui che la matematica e la statistica non deve necessariamente conoscere? Per fare simulazioni di fisica o chimica, materie che forse non ha mai approfondito? Per mettere a punto modelli di fenomeni naturali o economici, fenomeni che forse non è tanto banale mettere a fuoco?
Qualcuno potrebbe obiettare, specie in questi tempi di interdisciplinarità a tutti i costi, che questa persona, in collaborazione con gli altri insegnanti disciplinari, riuscirà certamente a portare a termine tutte le ipotesi di lavoro sopra citate. Pensiamo che non sia così e per cambiare opinione avremmo bisogno di vedere alcune esemplificazioni convincenti; ma queste esemplificazioni in Italia, fra i cultori di didattica, non sono mai fornite e tanto meno mai vagliate con accuratezza.
Quale tipo di laurea dovrebbe poi possedere questo eventuale insegnante? E' sufficiente una laurea in Scienze dell'Informazione? Forse no, sarebbe necessaria una cultura più approfondita anche in altri campi.
Gli estensori del documento hanno già pensato a tutto; dando per scontato che la "disciplina" TIC, sarà nel futuro della scuola superiore italiana, con i suoi *principi fondanti* ed il suo *quadro di riferimento organico* (citiamo direttamente dal testo), si pensa di potere formare tali eventuali insegnanti con un corso di 180 ore (leggasi 180 ore!). Chissà perché, per noi che siamo nella scuola da tanti anni, a sentire queste proposte, ci tornano alla mente analoghe soluzioni adottate per "formare" gli insegnanti di sostegno (per qualunque tipo di handicap!), o, più recentemente per promuovere a dirigenti scolastici tutti i presidi e direttori didattici del territorio italiano. Soluzioni che non hanno certamente fatto fare un salto di qualità alla scuola italiana.
E' poi curioso che si parli solo di formazione in servizio dei docenti e non vi sia nel documento alcun cenno alla formazione iniziale (sulle TIC), per i giovani che vorranno intraprendere la carriera di insegnanti.

Le tecnologie nei curricoli

In tutto il documento solo tre righe sono dedicate all'unica cosa, a nostro parere, importante: l'integrazione delle tecnologie nei curricoli delle diverse discipline (italiano, matematica, inglese, francese, chimica, contabilità aziendale, economia, eccetera).
Nel punto 3. *Collocazione curricolare delle TIC*, si propone di collocare le TIC: Nelle diverse discipline del quinquennio (esplicitando fra gli obiettivi e le metodologie quali competenze e quali strumenti informatici, telematici, comunicativi possono essere utilizzati per migliorare la didattica). Punto e basta.
Un po' poco, tenuto conto che alcune, se pur piccole esperienze cominciate nelle nostre scuole ci dicono che alcuni risultanti didattici interessanti si possono avere proprio in ore curricolari ben definite, con l'utilizzo di software mirati, con navigazioni in rete assistite da docenti particolarmente preparati in determinate aree di interesse. Un po' poco, tenuto conto che là, dove hanno cominciato molto prima di noi ad introdurre nelle scuole l'uso dei computer e delle reti, cioè negli Stati Uniti, dopo anni di esperienze evidentemente non troppo proficue, è stato messo a fuoco, come nodo principale del problema, quello di dover dare tempo ed incentivi agli insegnanti curricolari che ricercano e progettano per un'efficace integrazione delle tecnologie nei curricoli delle loro discipline (bibliografia 1 e 2).
Oltreoceano hanno già capito che se un docente ha il tempo di impadronirsi in maniera approfondita e completa anche solo di un paio di software veramente adatti alla sua materia o di un solo linguaggio autore, che gli permetta di bene raggiungere molti degli obiettivi che si è proposto nel suo piano didattico, quel docente riuscirà sicuramente a scoprire quel "guadagno formativo", quel "valore aggiunto" che le tecnologie possono dare all'insegnamento/apprendimento della sua disciplina; e que-

sto sarà di grande giovamento per i suoi allievi.
La commissione di esperti del Presidente Clinton, di cui si parla in bibliografia 2, invita proprio espressamente a concentrarsi sull'apprendimento "grazie alla tecnologia" e non sull'apprendimento "della tecnologia", che è in definitiva, invece, la proposta che emerge dal documento dei nostri esperti ministeriali.
E qui non si vuole tanto difendere (a che pro?) un consiglio dato da un diverso gruppo di esperti alla Casa Bianca ben 5 anni fa (consiglio comunque motivato da una esperienza già avvenuta oltre oceano e dai risultati di ricerche nel settore), quanto far presente che anche l'esperienza italiana ci dice quanto questa sia una via perdente. Concentrarsi sull'apprendimento delle TIC, come materia a sé stante, vorrebbe solo dire, in ultima analisi, incentivare quella produzione di pagine web, quella superproduzione di ipertesti di cui le reti italiane sono già sovraccariche e che sono spesso, nella realtà dei fatti, di solo aiuto all'immagine della scuola e del suo dirigente scolastico.
Poiché viviamo poi nel mondo della scuola da più di vent'anni, siamo del parere che, impostato come sembra nel documento ministeriale, nella realtà delle scuole oggi esistenti, in queste eventuali ore di "disciplina" TIC, i ragazzi usufruirebbero al massimo di conoscenze base dell'hardware (quella che gli americani chiamano "to teach students about computer") e, al massimo, di alfabetizzazione informatica, chiamando "alfabetizzazione informatica", sostanzialmente un uso abbastanza consapevole di un pacchetto stile "Office".
Ambedue questi aspetti inutili forse nei futuri ragazzini di 15 e 16 anni che probabilmente a casa possiedono un computer e, se non lo possiedono direttamente, hanno già avuto modo di usarlo, a questi livelli minimali, nei corsi di studi che precedono la scuola secondaria.
Per quanto riguarda poi l'utilizzo della rete per ricercare fonti documentarie, per usare mailing-list o chat, pensiamo che forse non vi sia nulla da insegnare, dal punto di vista operativo, a queste giovani generazioni che stanno avanzando, superesperte nell'utilizzo di telefonini, di codifica di messaggini, già esperte nell'utilizzo approfondito della navigazione in rete.
A nostro parere, a questo punto della loro carriera scolastica i nostri ragazzi, molto più svelti di noi dal punto di vista di operatività sulle macchine, sono pronti per impadronirsi ed usare consapevolmente software più raffinati e complessi, ma molto più formativi (pensiamo ad esempio a Cabri, Derive o Mathematica per la matematica, a ToolBook per la stesura di ipertesti).
La dotazione tecnologica auspicata nel documento ministeriale (Punto 5. *Strategie e risorse*), appare allora sovrabbondante e forse non indispensabile al momento attuale: laboratori con rapporti alunno/macchina uno ad uno, isole informatiche, un computer in ogni classe, scuole cablate, complesse attrezzature per alunni disabili, … eccetera.
Proposte poco ancorate alla realtà delle scuole, se si vuole evitare che i nostri Istituti diventino un deposito informatico di attrezzature costose e non utilizzate (ricordiamo che attrezzature sofisticate possono divenire obsolete nel giro di tre – cinque anni); forse prima è bene dare tempi e spazi agli insegnanti curricolari per decidere gli utilizzi più efficaci di tali sofisticate attrezzature. Basterebbe andare in giro oggi, per le scuole in cui sono già state acquistate, grazie ad esempio al piano triennale di informatica 1997-2000 nuove tecnologie per gli alunni normali e per gli alunnii disabili e controllare chi in realtà è capace di usarle; verificare, con ancora più cura, quali competenze in più il disabile abbia acquisito, grazie a queste tecnologie. Gli esperti del Ministero potrebbero trovarsi di fronte ad una realtà molto diversa da quella da loro sognata.

Alcune proposte costruttive

Ci sembra corretto, dopo aver criticato in molte sue parti il documento ministeriale, fare alcune proposte minime, ma molto concrete; sono proposte che offriamo alla discussione comune, in un momento di ripensamento generale sulla riforma scolastica in atto.
Alcune di queste proposte hanno il loro principio ispiratore nel documento citato in bibliografia 2; documento datato nel tempo, ma forse ancora molto adatto alla situazione italiana.
A nostro parere, cercando di essere molto operativi, sarebbe indispensabile:
1) concentrare finanziamenti non solo sull'acquisto di nuove attrezzature, ma anche sulla manutenzione delle attrezzature esistenti e su un serio controllo delle infrastrutture degli edifici scolastici che le dovranno accogliere (cavi di collegamento, "portata" di questi cavi, contratti telefonici, eccetera). Pensare che un argomento come questo possa essere lasciato alle iniziative dell'attuale dirigenza scolastica e dell'attuale scuola autonoma, ci sembra utopistico.
2) Finanziare corsi di aggiornamento sulle TIC per aree disciplinari o per discipline singole; inventare delle sorti di semiesoneri per i docenti più interessati, o pagare il "tempo" di tali docenti, che possono fare proposte e costruire materiali su come determinate tecnologie possono essere utili per avere "guadagno formativo" nel processo di insegnamento/apprendimento di una determinata disciplina. E' molto importante mettersi nell'ottica che le idee e i progetti di questi insegnanti e la loro professionalità, sono i beni intellettuali più importanti che abbiamo attualmente a disposizione.
3) Riservare una notevole quantità di risorse per la digitalizzazione di materiali didattici interessanti, presenti attualmente in biblioteche o presso Istituti Universitari; molti di questi materiali sono talvolta difficili da rintracciare anche su carta; una volta digitalizzati possono costituire degli archivi di dati e di informazioni veramente utili per il mondo scolastico.

4) Dotare ogni scuola di un (o più di uno, se la scuola è particolarmente grande ed estesa sul territorio) efficiente tecnico multimediale, a tempo pieno, in grado di seguire le varie attrezzature e di tenersi in contatto con le ditte di manutenzione.

5) Quando le attività del precedente punto 2) cominciano a dare i primi risultati, creare a livello di distretto (o di singolo comune) delle equipe specializzate di professionisti delle varie discipline, che sappiano essere di supporto ai docenti delle scuole del territorio. Nel documento citato in bibliografia 2) si parla di una esperienza positiva, nella contea di Jefferson, nel Kentucky in cui un “ufficio studi” di 22 “docenti professionisti” è divenuto punto di riferimento, spesso “on line” per circa 153 scuole. Tali docenti debbono mantenersi aggiornati sulle novità didattiche del mercato, sulla uscita di articoli o di libri di divulgazione ed interesse per le diverse discipline, sulla produzione di software mirati al mondo della didattica; dovrebbero essere in grado di visionare in anteprima il software e di dare su di esso dei pareri motivati. Persone quindi scelte e selezionate dal mondo della scuola o della ricerca universitaria curricolare, e non dal mondo della burocrazia ministeriale o della scienza dell’educazione in senso lato. Gruppetti di 2 o 3 di questi professionisti, potrebbero diventare il serio punto di riferimento di una singola disciplina per tutti gli insegnanti del territorio.

6) Sollecitare provvedimenti ed iniziative affinché le TIC diventino mezzo e oggetto di studio, nella formazione iniziale dei giovani che vogliono intraprendere la carriera dell’insegnamento; molto meglio, a nostro parere, puntare sulla formazione iniziale piuttosto che sulla formazione in servizio.

7) Avviare serie esperienze pilota su alcune ipotesi di attività, senza cadere nella trappola (molto comune nella ricerca italiana) di “scoprire” che le sperimentazioni pilota vanno sempre e comunque bene; spesso invece i dati negativi che emergono da una sperimentazione ben controllata sono fondamentali per apporre correzioni.

8) Finanziare la ricerca didattica disciplinare in alcuni campi, molto ristretti, per la produzione di materiale software e di pacchetti applicativi di alto livello.

Sono forse utopie? Onestamente non ci sembra proprio. Con finanziamenti adeguati ci sembrano tutte proposte “fattibili” e, oseremmo dire, “abbastanza chiare”.

Bibliografia

1) A.M.Arpinati, D.Tasso: “La formazione docenti: il caso Cabri”, lettera Pristem, n° 37, Springer Editore

2) Documento “Report to the President on the Use of Technology to Strengthen k-12 Education in the United States, march 1997

Disponibile nella sua traduzione in italiano, sul sito : http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto

COME FARE

media superiore

Il tema di Matematica

per l’indirizzo sperimentale P.N.I. dell’esame di Stato di Liceo Scientifico 2000/2001

di Luigi Tomasi

Liceo Scientifico “Galileo Galilei” Adria - RO

In questo articolo si propone una soluzione del tema assegnato nella prova scritta di Matematica per il Liceo Scientifico PNI dell’esame di Stato 2000-2001. Segue un commento alla prova e alla sua nuova struttura (introdotta quest’anno per la prima volta).

PROBLEMA 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.
Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che $PA/PB=k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

c) posto X**,** appartenente a γ, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l’angolo $X\hat{A}C$, si illustri l’andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = (XB/XA)^2$ e $x=tg\alpha$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

Conviene fissare un sistema di riferimento Oxy in cui l’asse x coincide con la retta AB e l’origine O nel punto medio C del segmento AB. Gli estremi A e B del segmento avranno pertanto come coordinate $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$.

Punto a)

Un punto $P(x, y)$ del piano appartiene al luogo geometrico se e soltanto se: $PA/PB=k$ (con $k>0$)

Otteniamo:

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=k$$

Elevando al quadrato e semplificando si ricava l'equazione equivalente alla precedente:

$$(1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2+2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2=0$$

Se $k = 1$, si ottiene l'equazione $x = 0$, cioè l'asse del segmento AB (circonferenza degenere). Se $k\neq1$, l'equazione diventa:

$$x^2+y^2+2a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)x+a^2=0$$

che rappresenta infinite circonferenze (circonferenze di Apollonio) - un fascio se si usa come parametro k^2, ponendo ad esempio $h=k^2$ - di centro generico nel punto

$$\left(a\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right),0\right)$$

e raggio

$$r=\frac{2ak}{|k^2-1|}$$

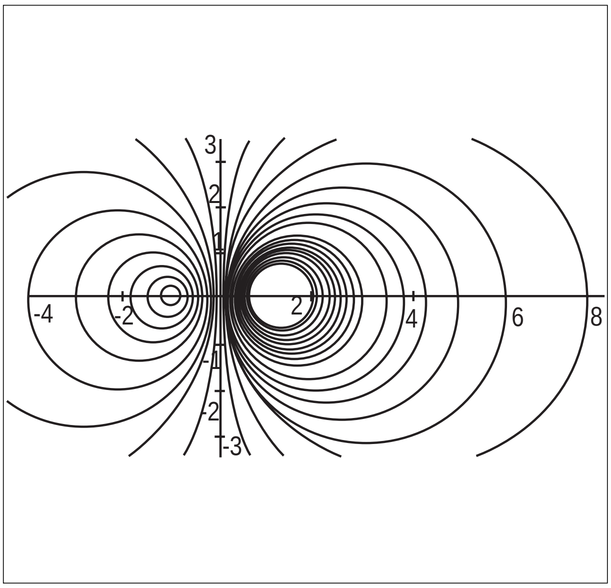


Figura 1. Grafico del fascio di circonferenze

Punto b)

Il luogo geometrico dei punti che "vedono" il segmento AC secondo un angolo di 45° è formato dalla unione di due archi ("archi capaci") di circonferenza simmetrici rispetto alla retta della corda AC. Infatti AC deve formare con il centro degli archi di circonferenza un angolo retto; quindi la corda AC deve essere il lato di un quadrato inscritto in una circonferenza. Poiché $\overline{AC}=a$, e $a=2r\sin\alpha$, ne segue che il raggio della circonferenza deve essere:

$$r=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

I centri degli archi di circonferenza cercati, pertanto, devono essere a distanza $a/2$ dall'asse delle ascisse. Avranno pertanto per coordinate $O_1(-a/2, a/2)$ e $O_2(-a/2, -a/2)$

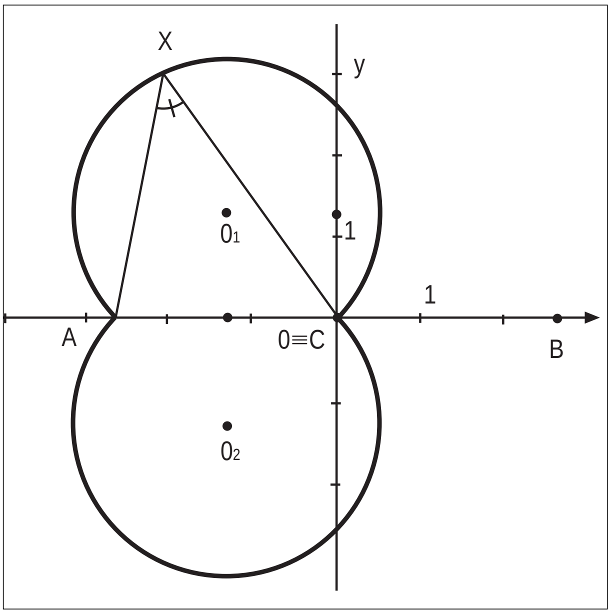


Figura 2. Grafico del luogo γ

Data la simmetria del luogo γ rispetto all'asse delle ascisse, la sua equazione sarà:

$$x^2+y^2+ax-a|y|=0$$

Punto c)

Consideriamo il punto X appartenente al luogo γ nel semipiano delle ordinate non negative e il triangolo AOX.

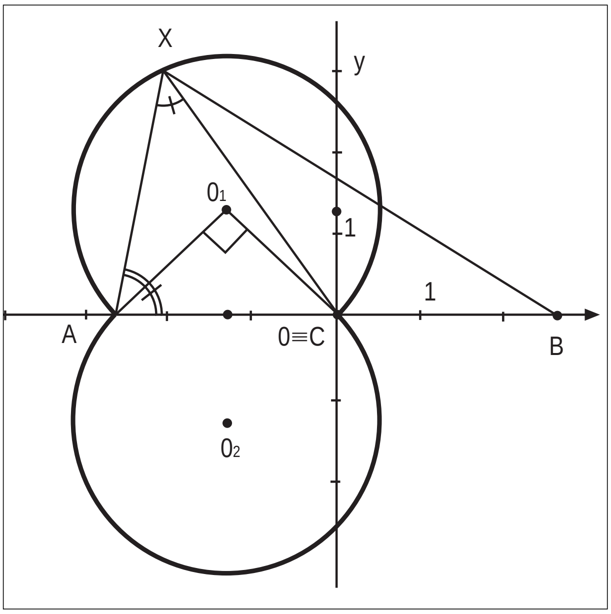


Figura 3. Luogo γ e triangolo AOX

Poiché $X\hat{A}O=\alpha$ e $A\hat{X}O=\pi/4$, allora $A\hat{O}X=(3\pi/4)-\alpha$, con $0\leq\alpha<3/4\pi$. L'angolo α non può essere $3\pi/4$ perché in questo caso $\overline{XA}=0$ e quindi non è definito il rapporto XB/XA.

Applicando il teorema della corda nell'arco di circonferenza di centro O_1 si ha

$$\overline{XA}=a\sqrt{2}sin\left(\frac{3}{4}\pi-a\right)=a(sin\alpha+\cos\alpha)$$

Applicando il teorema del coseno (di Carnot) al triangolo ABX, si ottiene:

$$\overline{XB}^2=\overline{XA}^2+\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AX}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{XB}^2= a^2(5\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$$

Pertanto il rapporto richiesto diventa:

$$\left(\frac{XB}{XA}\right)^2=\frac{5sin^2\alpha-2sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

Dividendo al numeratore ed al denominatore per $\cos^2\alpha$ (supposto non nullo, quindi $\alpha\neq\pi/2$), si ottiene:

$$\left(\frac{XB}{XA}\right)^2=\frac{5\tan^2\alpha-2\tan\alpha+1}{(\tan\alpha+1)^2}$$

Sostituendo $x=\tan\alpha$, si arriva all'espressione della funzione richiesta:

$$f(x)=\frac{5x^2-2x+1}{(x+1)^2}$$

con $x<-1$ o $x\geqslant 0$ (tenuto conto delle condizioni poste sull'angolo α).

La funzione è ovviamente positiva, ha un asintoto verticale di equazione $x = -1$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = 5$. La presenza dell'asintoto $y = 5$ è dovuta alla condizione $\alpha\neq\pi/2$. Infatti, per $\alpha=\pi/2$, il triangolo ABX è rettangolo, con $\overline{XB}=a\sqrt{5}$ e $\overline{XA}=a$. Pertanto

$$(XB/XA)^2=5$$

Si osservi inoltre che

$$(XB/XA)^2=1/k^2,$$

ma questo è l'unico legame con il quesito a) del problema, dove k rappresenta la costante positiva della circonferenza di Apollonio. Infatti, per ogni X del luogo geometrico γ esiste una ed una sola circonferenza di Apollonio (eventualmente degenere) passante per X.

La derivata prima della funzione è:

$$f'(x)=\frac{4(3x-1)}{(x+1)^3}$$

La funzione ha un minimo assoluto per $x=1/3$ e il valore minimo vale $f(1/3)=1/2$; è crescente per $x < -1$ o $x>1/3$ e decrescente per $0< x<1/3$.

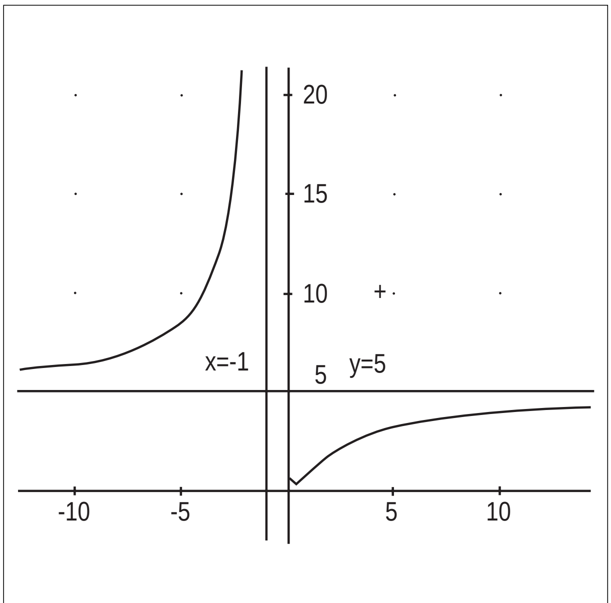


Figura 4. Grafico della funzione richiesta nel punto c)

La derivata seconda è

$$f''(x)=\frac{24(1-x)}{(x+1)^4}$$

La funzione ha un flesso per $x = 1$, che corrisponde all'angolo $\alpha=\pi/4$; si ottiene il punto di coordinate $F(1, 1)$. La curva è concava per $x > 1$ e convessa nella parte rimanente del dominio.

Il grafico della funzione è riportato nella figura 4:

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), è assegnata la funzione:

$$f(x)=x^2+a\log(x+b)$$

con a e b diversi da zero.

a) si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;

b) si studi e si disegni Γ;

c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y=|x^2+a\log(x+b)|$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto a)

Data la funzione

$$f(x) = x^2+a\log(x+b)$$

per trovare i valori di a e di b richiesti poniamo prima di tutto

$$x > -b$$

Poiché sappiamo che la funzione deve essere definita anche per $x = 0$, ne segue che $0 > -b$ e in definitiva $b > 0$

Il testo non lo precisa, ma d'ora in poi supponiamo che la base dei logaritmi sia il numero di Nepero.

Ricaviamo la derivata prima:

$$f'(x)=2x+\frac{a}{x+b}$$

Ponendo le condizioni richieste dal problema, dovendo $f(x)$ passare per l'origine degli assi ed avere un minimo assoluto (e relativo) nel punto $x = 1$ (punto interno al dominio), si ha:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} b=1 \\ 2+\dfrac{a}{1+b}=0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione da studiare diventa quindi:

$$f(x)=x^2-4\log(x+1)$$

Punto b)

La funzione trovata ha per dominio la semiretta aperta] -1, + ∞[e interseca l'asse x, oltre che nell'origine degli assi, anche in un altro punto di ascissa $x = \alpha$, con $\alpha \approx 2,1,...$

Per verificarlo, si deve risolvere l'equazione:

$$x^2-4\ln(x+1)=0$$

che equivale ad intersecare i grafici di due funzioni elementari, una parabola e una curva logaritmica che si ottiene da una traslazione verso "sinistra" di 1 della curva $y = \ln x$:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = ln(x+1) \end{cases}$$

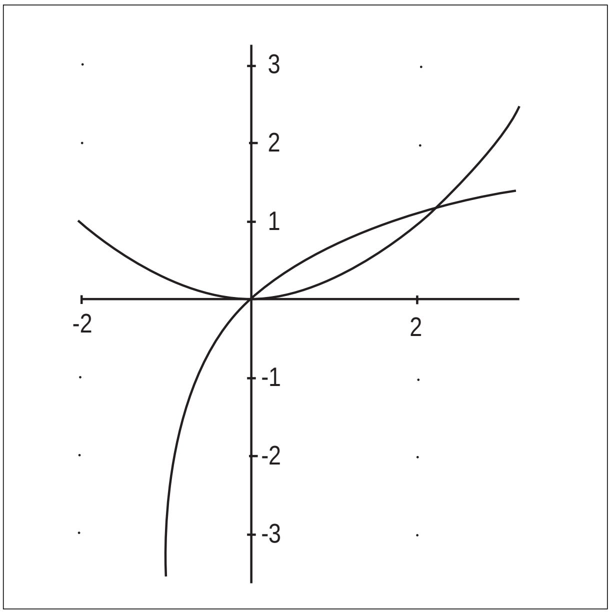


Figura 1. Ricerca grafica di un valore approssimato di α

Il segno della funzione si ottiene risolvendo la disequazione:

$$x^2- 4\ln(x+1)\geqslant 0$$

Dall'esame del grafico precedente si ricava che

$$f(x) > 0 \text{ per } -1< x <0 \text{ o per } x > \alpha$$

Calcolando i limiti della funzione agli estremi del dominio, si trova che $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2 - 4ln(x-1)\right] = +\infty$$

Per calcolare quest'ultimo limite, che si presenta in forma indeterminata, si può raccogliere e poi applicare la regola di De L'Hospital in un'opportuna "sottoespressione": $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(x - \dfrac{4ln(x-1)}{x}\right)\right] = +\infty$

La retta di equazione $x = -1$ è quindi un asintoto verticale per il grafico della funzione, ma non ci sono asintoti obliqui.

La derivata prima della funzione è data:

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = \frac{2\left(x^2+x-2\right)}{x+1}$$

Tale derivata è positiva per $x > 1$ ed è negativa in $-1 < x < 1$. Quindi il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo (e anche assoluto), come si sapeva fin dall'inizio. Il minimo vale:

$$f(1) = 1-4\ln 2$$

La derivata seconda della funzione è:

$$f''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

Essendo f "(x) positiva per ogni x nel dominio, segue che la funzione è convessa.

Il grafico è il seguente:

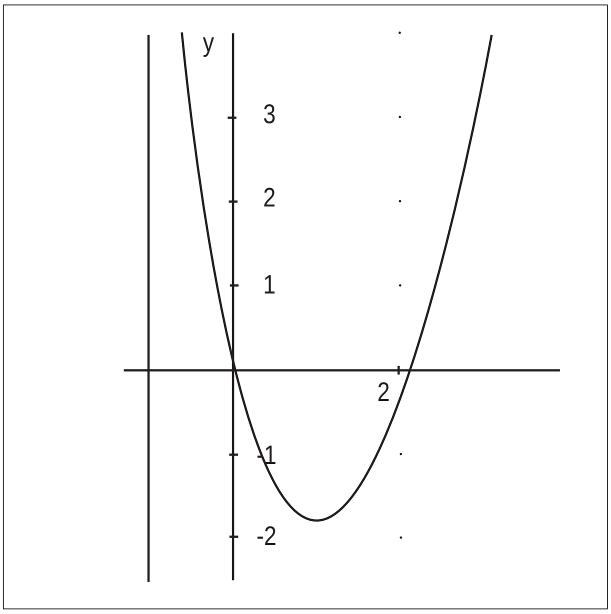


Figura 2. Grafico della funzione $f(x)$

Punto c)

Come si è detto nel precedente punto b), la radice è approssimativamente $\alpha = 2,1...$ come si ricava con i grafici di due opportune funzioni.

Per determinare una migliore approssimazione della radice, si può usare uno dei metodi approssimati, come il metodo di bisezione, il metodo delle tangenti (di Newton), il metodo delle corde,... Prima di applicare uno di questi due ultimi metodi occorre controllare le ipotesi; si può, ad esempio, usare il metodo di Newton perché la funzione è derivabile, con derivata prima positiva nell'intervallo [2, 3] e derivata seconda positiva.

Nel testo del problema non viene precisata quale sia l'approssimazione voluta; con 5 iterazioni del metodo di Newton, applicando la formula

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

a partire da $\alpha_0 = 3$ si trovano 9 cifre corrette dopo la virgola:

$$a \approx 2{,}139098578...$$

Punto d)

La retta di equazione $y = y(1)$ diventa

$$y = 1\text{-}4 \ln 2$$

La simmetria rispetto ad una retta $y = y_0$, parallela all'asse x, ha per equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2(1 - 4ln2) - y \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene l'equazione:

$$2(1\text{-}4 \ln 2)\text{-}y = x^2\text{-}4 \ln(x+1)$$

che fornisce la seguente espressione per la curva Γ':

$$y = 2(1\text{-}4 \ln 2)\text{-}x^2 + 4 \ln(x+1) \quad \text{ovvero:}$$

$$y = 4ln\left(\frac{x+1}{4}\right) + 2 - x^2$$

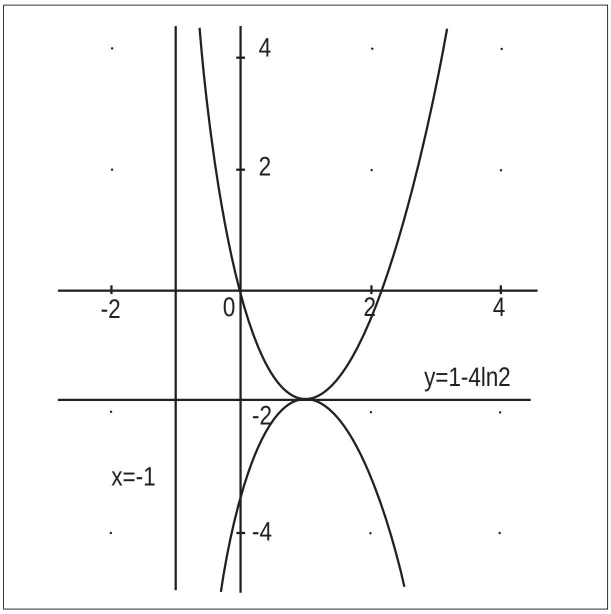


Figura 3. Grafico della funzione del punto d)

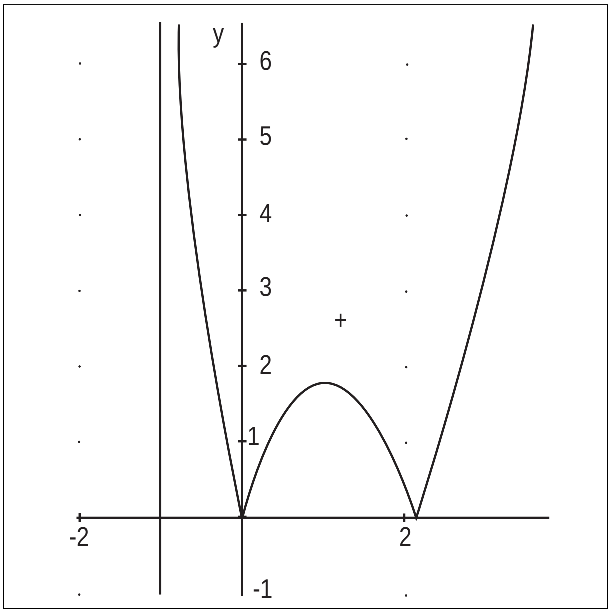


Figura 4. Grafico della funzione $y = |f(x)|$

Punto e)

Il grafico della funzione

$$y = |f(x)| = |x^2\text{-}4 \log(x+1)|$$

diventa ovviamente quello di figura 4.

Il punto di minimo diventa un punto di massimo relativo e si formano due punti angolosi, di non derivabilità, nei punti di ascissa x = 0 e x = α .

QUESTIONARIO

1. Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.
2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:
$$xe^x + xe^{-x} \text{-}2 = 0$$
3. Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.
4. Calcolare la derivata della funzione
$$f(x) = \text{arcsen}x + \text{arccos}x$$
Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?
5. Calcolare l'integrale
$$\int \frac{logx}{x} dx$$
6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito
$$\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx$$
e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.
7. Verificato che l'equazione x - e^{-x} = 0 ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?
9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.
10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: "se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h".

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

Domanda 1

Questo quesito si trova risolto in ogni libro di geometria dello spazio ed in ogni libro di analisi per il liceo scientifico.

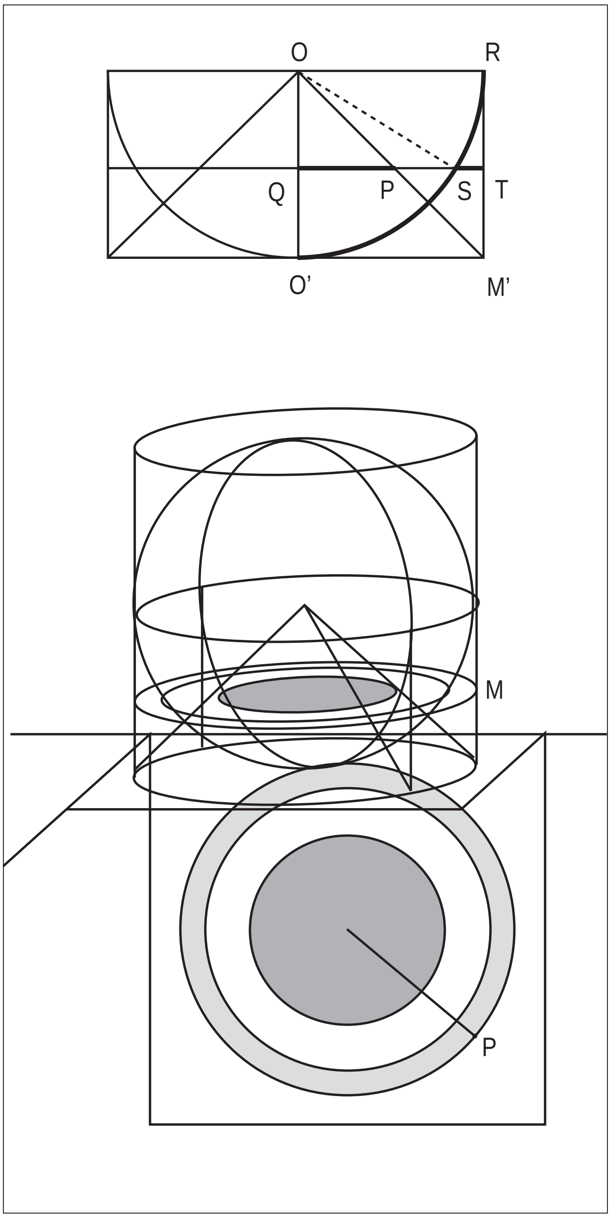


Figura 1. La "scodella di Galileo"

La dimostrazione si può fare senza il calcolo integrale, ma in questo caso occorre usare il principio di Cavalieri e la dimostrazione che fa uso della cosiddetta "scodella di Galileo".

Con il calcolo integrale, basta applicare la formula che fornisce il volume di un solido di rotazione

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

applicata ad una semicirconferenza in un opportuno sistema di assi cartesiani di centro la semicirconferenza.

Si ottiene:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 dx = 2\pi \int_0^r \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 dx$$

e in conclusione:

$$V = 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Il rapporto del volume della sfera con il volume del cilindro circoscritto (cilindro "equilatero") è dunque 2/3. Si poteva aggiungere, ma la domanda non lo richiedeva, che 2/3 è anche il rapporto tra le superficie dei due solidi (Teorema di Archimede). Questo notevole risultato, che Plutarco testimonia fosse riportato anche sull'epigrafe tombale di Archimede, viene presentato come uno dei grandi teoremi della matematica nel seguente bel libro:

W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica*, pag. 122, Zanichelli, Bologna 1992.

Domanda 2

Per determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$

si può procedere graficamente, scrivendo l'equazione nel seguente modo, ad essa equivalente, dopo che si sia osservato che certamente $x = 0$ non è soluzione dell'equazione:

$$(e^x + e^{-x})/2 = 1/x$$

ovvero, se si ricorda la definizione della funzione coseno iperbolico, all'equazione:

$$\cos h(x) = 1/x$$

Risolvere quest'ultima equazione equivale ad intersecare le funzioni:

$$\begin{cases} y = \cosh(x) \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Graficamente si ottiene quindi:

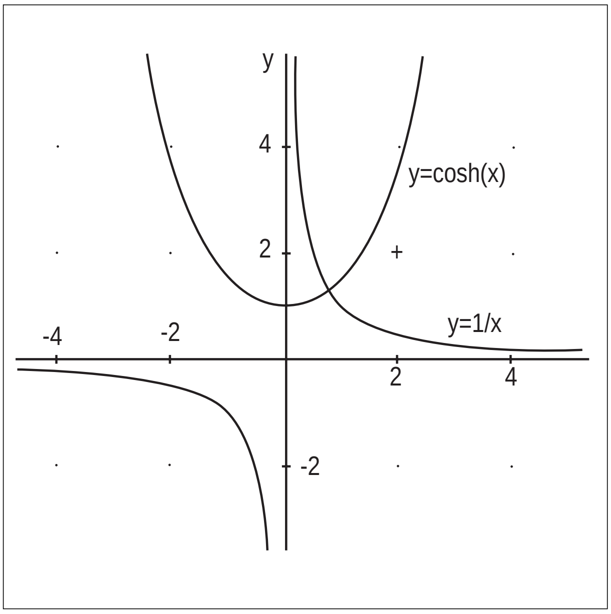


Figura 2. Grafico delle funzioni $y=cosh(x)$ e $y= 1/x$

Esiste quindi una sola soluzione, che sta tra 0 e 1. In modo più rigoroso si può usare il teorema dei valori intermedi nell'intervallo [0, 1].

Domanda 3

A questa domanda si rispondeva con un'immediata applicazione del teorema di Rolle. Una qualsiasi funzione polinomiale, infatti, è una funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$; pertanto è anche continua. Inoltre, se α e β sono due radici distinte di $f(x)$, ne segue che nell'intervallo $]\alpha, \beta[$ esiste almeno un punto z tale che

$$f'(z) = 0$$

Domanda 4

La funzione:

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

definita nell'intervallo chiuso [-1, 1], è derivabile nei punti nell'intervallo aperto]-1, 1[, con derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Per un corollario del teorema di Lagrange, segue che, nell'intervallo aperto]-1, 1[, la funzione è costante. Il suo grafico è dunque un segmento parallelo all'asse delle ascisse di equazione

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{con} \quad x \in [-1,\ 1]$$

Naturalmente, se uno studente conosceva già l'identità (sulla quale però non sempre si insiste nella scuola superiore):

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

valida se $x \in [-1, 1]$, allora il quesito diventava quasi banale.

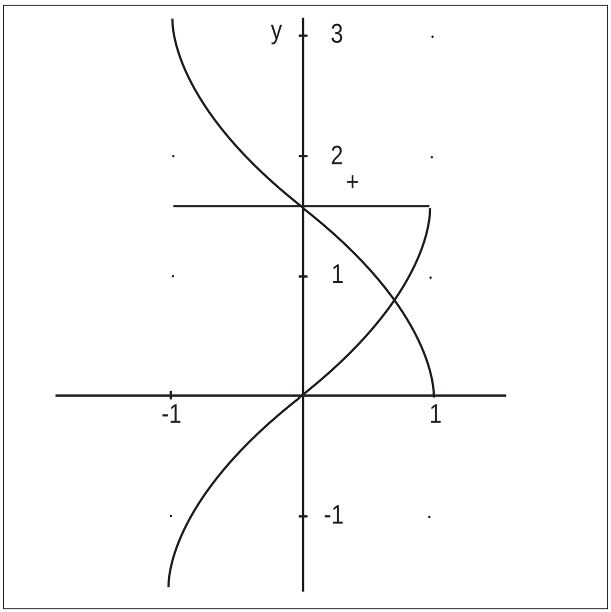


Figura 3. Grafico delle funzioni

Domanda 5

Il calcolo dell'integrale dato si poteva fare immediatamente oppure con il metodo di sostituzione. È un caso particolare della seguente regola:

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$$

Si ha quindi:

$$\int \frac{lnx}{x} dx = \frac{1}{2}(lnx)^2 + c$$

Domanda 6

Si ha ovviamente:

$$S = \int_0^{\pi} sin\, x\, dx = 2$$

Per approssimare tale integrale, si può usare uno dei metodi per calcolare in modo approssimato un integrale definito: metodo dei rettangoli, metodo dei trapezi, metodo di Cavalieri-Simpson, metodo "Montecarlo", ecc. Si rinvia ad un buon libro per i licei scientifici sperimentali.

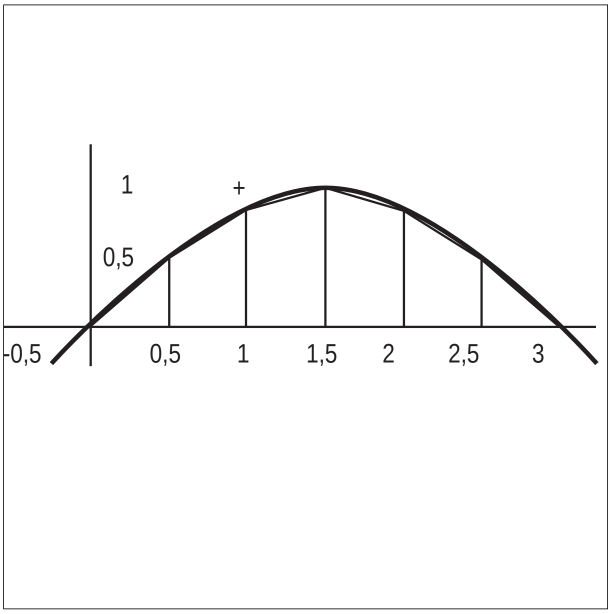


Figura 4. Calcolo approssimato dell'area con il metodo dei trapezi

Con il metodo dei trapezi applicato nell'intervallo [a, b] si ottiene:

$$S \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + ... + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(b)\right)$$

Data la simmetria rispetto alla retta $x = \pi/2$, si può fare il calcolo nell'intervallo $[0, \pi/2]$, dividendolo in tre parti uguali. Essendo la funzione concava in $[0, \pi]$ si trova un valore approssimato per difetto:

$$S \approx 2 \cdot \frac{\pi}{12}\left(2 \cdot sin\frac{\pi}{6} + 2 \cdot sin\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ovvero

$$S \approx \frac{\pi}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}954097$$

Domanda 7

Per verificare che l'equazione

$$x - e^{-x} = 0$$

ammette una ed una sola radice positiva compresa tra 0 e 1, si poteva procedere per via grafica, intersecando le funzioni elementari:

$$\begin{cases} y = x \\ y = e^{-x} \end{cases}$$

con il grafico rappresentato in figura 5.

Si poteva anche, in modo più rigoroso, applicare il "teorema degli zeri delle funzioni continue" nell'intervallo

[0, 1] alla funzione

$$f(x) = x - e^{-x}$$

Applicando uno dei metodi approssimati, ad esempio il metodo delle tangenti di Newton, si trova (dopo cinque iterazioni) la radice approssimata:

$$\alpha = 0{,}5761432904...$$

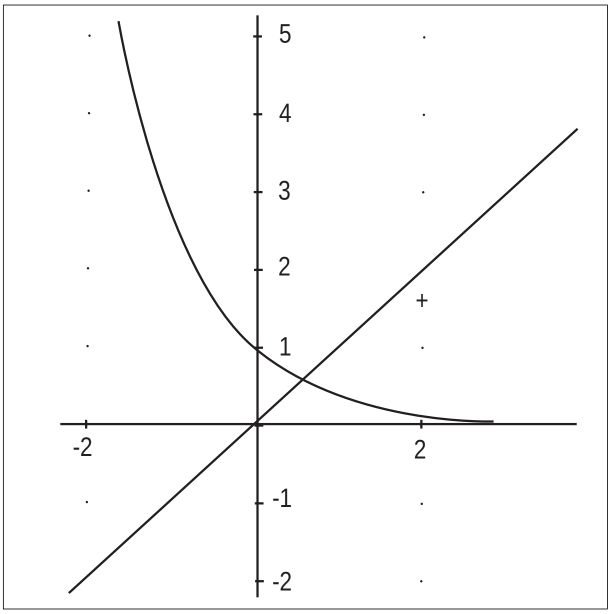


Figura 5. Calcolo approssimato della radice

Domanda 8

La probabilità si può calcolare direttamente:

$$p(E) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{11}{28} = 0{,}3928...$$

Oppure si disegna un diagramma ad albero e poi si applica il teorema della probabilità composta. Si pensa ad una estrazione di tre nomi da un'urna, dove sono stati inseriti tutti i nomi degli allievi della classe, senza reimbussolamento.

Si ottiene quindi:

$$p(E) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cap B) =$$
$$= \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28} = 0{,}3928...$$

Domanda 9

Questo quesito sembra adatto alla prova orale più che alla prova scritta perché si presta ad un collegamento naturale tra matematica e filosofia. Risulta anche più difficile, per la commissione, costruire una "risposta criterio" che serva poi da guida per la valutazione degli elaborati. Per qualche idea sullo svolgimento del quesito si rinvia alle voci Assioma/Assiomatico, in S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, edizione a cura di F. Speranza e L. Grugnetti, pag. 50, Zanichelli, Bologna, 1998 e per i riferimenti storici alla seguente opera di riferimento:

M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, vol. I e II, Einaudi, Torino 1991 (cap. IV su Euclide e cap. XLII sui fondamenti della geometria).

Domanda 10

La domanda richiede non solo l'enunciato del teorema di Lagrange, ma anche di motivare perché si chiama "teorema del valor medio". Molto spesso nei libri di testo si cita il teorema di Lagrange chiamandolo anche "del valor medio", ma non tutti i libri di testo spiegano perché si chiama in questo modo. Per dare questa spiegazione occorre riferirsi alla interpretazione cinematica di una funzione $y = f(x)$ in cui x viene pensato come istante di tempo e y come ascissa di un punto mobile su una retta. La funzione deve essere continua in [a, b] e derivabile almeno nei punti interni. Occorre quindi riferirsi al "diagramma orario" e pensare la derivata prima della funzione come velocità istantanea. Con questa interpretazione cinematica l'enunciato del quesito diventa chiaro, perché se per un certo intervallo di tempo ci muoviamo alla velocità media di 60 km/h, vi sarà almeno un istante in cui la velocità è stata esattamente di 60 km/h. Questo si traduce geometricamente nel ben noto grafico relativo al significato geometrico del teorema di Lagrange, presente in ogni libro di testo.

Commento al tema di Matematica del P.N.I. e alla nuova struttura della prova scritta di matematica all'esame di Stato

Il tema di matematica assegnato quest'anno all'esame di Stato ha presentato la novità, preannunciata fin dall'inizio dell'anno scolastico (Ottobre 2000) nel sito Internet del Ministero della P.I., del questionario che è andato a sostituire uno dei tre problemi che fino allo scorso anno sono stati dati all'esame di stato di liceo scientifico. Questa innovazione, e soprattutto le prime esemplificazioni di nuova prova proposte in Internet, avevano provocato molte discussioni, con giuste critiche, tra gli insegnanti - in particolare nella lista "Cabrinews" (gestita dall'IRRE Emilia Romagna) - sia sul modo scelto per introdurre questa novità che sulla valutazione di una tale prova. Veniva rilevata in particolare l'assenza di "standard" nazionali riguardo alle conoscenze, competenze e capacità matematiche obbligatorie, da raggiungere al termine del corso di studi superiore. La nuova prova di matematica, insomma, veniva posta come una specie di "cerotto" su un organismo, come quello del liceo scientifico, che nella sua maggior parte ha programmi del tutto obsoleti e che nella sostanza risalgono al 1923.

A conti fatti, dopo lo svolgimento degli esami, sembra che l'introduzione del questionario sia da apprezzare, perché ha permesso agli studenti più possibilità di scelta. In particolare, quest'anno, le domande proposte nel

questionario del PNI sono risultate alla portata dello studente medio e formulate in modo da non essere puramente teoriche, presentando questioni semplici, ma varie e su temi basilari del programma di studio.
Tutto è avvenuto però in modo non sistematico, né organizzato, in maniera quasi informale e per iniziativa degli ispettori di matematica, almeno sembra. Cosa succederà il prossimo anno? Si metterà finalmente mano ai programmi e ai curricoli di matematica del liceo scientifico normale (e sperimentale)? Si fornirà agli insegnanti di matematica un quadro certo delle conoscenze, competenze e capacità matematiche da raggiungere al liceo scientifico o ci si dovrà basare ancora sulla "consuetudine" e sugli "esempi", sia pure telematici, presenti nel sito Internet del Ministero?

La consegna del compito era:
"La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario."
Il problema 1 del tema sperimentale (PNI), non è risultato dello stesso livello di difficoltà del problema 2; indubbiamente il primo problema era più difficile del secondo, richiedeva maggiore intuizione geometrica (soprattutto nello studio del luogo geometrico) ed anche più competenze di manipolazione trigonometrica (nella parte finale). Se ne è avuta conferma nelle valutazioni degli elaborati. Con la nuova struttura, gli allievi dovevano scegliere un solo problema e cinque dei dieci quesiti. Quasi tutti hanno scelto il problema 2 perché era nettamente più facile. Si tenga presente che i due problemi andavano "pesati" dalle commissioni in modo uguale, con lo stesso punteggio, perché la "consegna" della prova richiedeva la risoluzione di un problema e di 5 quesiti del questionario. Quegli allievi, dunque, che hanno scelto il primo problema hanno realizzato punteggi più bassi rispetto agli altri.
Le domande del questionario, a differenza dei due problemi, sono apparse abbastanza equilibrate tra loro, anche se alcuni punti avrebbero dovuto essere formulati in modo più preciso (ad esempio nei quesiti dove si chiedeva di trovare il valore approssimato di una radice era opportuno dire fino a che cifra arrivare). In genere, quindi, il questionario del PNI ha presentato domande su argomenti fondamentali e sui quali tutti gli insegnanti insistono e quindi sono risultate fattibili da quasi tutti gli allievi. Complessivamente, quindi, per quasi tutti gli studenti il tema del PNI è risultato fattibile e particolarmente facile per quelli più preparati. Gli allievi "medi", quelli che hanno sempre studiato guadagnadosi dignitosamente la sufficienza, inoltre, si sono trovati meglio degli studenti di pari livello che hanno fatto l'esame gli scorsi anni. In genere, al termine della prova sono usciti con più soddisfazione e con l'impressione di aver fatto qualcosa di più, se non bene, rispetto a quello che succedeva di solito negli anni precedenti.

E allora, va tutto bene in questa nuova struttura della prova di matematica?
In realtà rimangono aperte le questioni - non di poco conto - già più volte sottolineate da molti insegnanti, in particolare quelli intervenuti nella lista di discussione "Cabrinews":
- dello sfondo non ben definito (in particolare nel liceo scientifico non sperimentale) dei programmi o dei curricoli, nei quali non sono precisate a livello nazionale le conoscenze e le competenze obbligatorie da raggiungere (sulle quali costruire la prova d'esame);
- dell'uso delle calcolatrici programmabili e simbolico-grafiche ancora vietato (anche nei licei sperimentali PNI);
- della valutazione della prova, che a parere di molti insegnanti dovrebbe essere fatta sulla base di una "griglia" fissata a livello nazionale, per evitare di creare eccessive disparità tra le commissioni, precisando non solo il livello di eccellenza, ma anche quello di sufficienza o addirittura fissando i punteggi per ogni problema, per i quesiti dei problemi e per le domande del questionario.

Problemi che passione
Perché "meno per meno fa più"

di Enrico Pontorno
I.S.I.S.S. Motta di Livenza TV - sez Liceo Classico
Collaboratore esterno IRRE Emilia-Romagna

Se 5 lavoratori produttivi si trasferiscono in una città (trasferimento = +5), e ogni lavoratore porta progresso alla città, più guadagno, più acquisti, etc. calcolabili in $20 (+crescita di $20 = $+20), allora la città è più ricca di prima di $100. (+5 volte +$20 = $100).
Se 8 lavoratori produttivi se ne vanno dalla città (uscita dalla città = -8), allora la città possiede attualmente meno valore rispetto a prima di 160$ (minor valore significa -160$).
D'altra parte, se 3 persone improduttive si trasferiscono in città (trasferimento = +3), ed ogni persona costa attualmente alla città $20 (peso sulle finanze cittadine = -20$) allora la città ha diminuito il suo valore di $60 (3 volte -$20 = -$60).
Infine, se 4 lavoratori improduttivi se ne vanno dalla città (uscita dalla città = -4), ed essi costavano alla città $20 ciascuno (-$20) allora la città è attualmente più ricca di prima di $80 (-4 volte -$20 = $80)."
Questo ed altro potete trovare al sito
www.mathstories.com,
dove i piccoli allievi delle elementari e i loro insegnanti possono trovare una ricchissima scelta di problemi divertenti ed utili suggerimenti didattici. Allo stesso indirizzo si trova molto materiale utile anche per le classi della media inferiore.

Un altro esempio, sotto forma di gioco, che può dare notevoli spunti per una discussione in classe:

1. *Scegli un numero;*
2. *Somma ad esso il suo consecutivo maggiore;*
3. *Aggiungi 9 alla somma precedente;*
4. *Dividi per 2;*
5. *Sottrai il numero iniziale…*
6. *Il risultato è sempre 5!*

Nella prima stesura dei programmi del Piano Nazionale per l'Informatica era riportata, tra l'altro, la frase "La matematica deve servire a risolvere problemi." Nelle successive stesure quella frase scomparve, ma rimase in molti insegnanti appassionati la voglia di proporre problemi in classe, con motivazioni le più varie: per scelta metodologica, come momento di pausa ricreativa "intelligente", come grimaldello per vincere la diffidenza nei confronti della matematica, soprattutto negli allievi delle classi prime, o ancora come stimolo e sfida gratificante per gli allievi più capaci.

Il più bel sito per la matematica è, a detta di molti cultori,

http://forum.swarthmore.edu/

Ricchissimo di notizie, articoli, iniziative didattiche e di ricerca, propone settimanalmente problemi di algebra, geometria, trigonometria, calcolo, di cui, puntualmente, vengono fornite le soluzioni che vengono raccolte in un apposito archivio.
Un sito dove trovare problemi (e relative soluzioni) accessibili allo studente medio italiano è

www.vector007.com/DrRich/index.html

In via di rinnovamento un sito che è un nodo cruciale per la matematica ricreativa. Si tratta di curato da Stanley Rabinowitz, autore, fra l'altro della più completa raccolta di problemi di matematica che si conosca; un compendio di oltre 5000 problemi (nel giro dei bibliofili matematici è noto come ***The Big Red Book***!), che raccoglie problemi di matematica pubblicati dalle riviste di tutto il mondo negli anni 1980-84, completo di chiavi di ricerca per soggetto, per argomento, per autore. Un secondo volume, relativo agli anni 1975-79, è in via di pubblicazione, e ne è annunciato un terzo riguardante problemi pubblicati negli anni 1985-89.
Un'altra finestra aperta sulla matematica ricreativa la potete trovare all'indirizzo

http://dir.altavista.com/Science/Math/177641.shtml

da dove potrete navigare tra puzzles e origami, curiosità e divertimenti matematici, nonchè raccolte di problemi "olimpici" da tutto il mondo, di cui potrete fare download in pochi secondi.
Sapete che i numeri di Fibonacci hanno una rivista a loro dedicata? Si tratta del ***Fibonacci Quarterly***, i cui articoli trattano esclusivamente le proprietà, e curiosità, dei numeri di Fibonacci e di quelli, meno noti, di Lucas, ai primi tuttavia strettamente legati. Anche questa rivista propone problemi di varia difficoltà, dei quali potete avere un saggio visitando il sito:

www.solstate.edu/~wesc/http/fibhome.html

Ricordiamo infine, in Italia, il sito benemerito dell'IRRSAE Emilia-Romagna che da anni ormai propone, con cadenza mensile, problemi di geometria per gli alunni delle medie inferiori e del biennio delle superiori all'indirizzo

http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

Da poco lo stesso sito ospita anche una sezione di problemi per il triennio delle superiori all'indirizzo:

http://arci01.bo.cnr.it/cabri/probmat

La più ricca raccolta di problemi della rete si trova senz'altro al sito

http://members.tripod.com/~PertselV/RusMath.html

ed è facilmente trasferibile sul proprio PC. Vladimir Pertsel ha raccolto più di 400 problemi tratti da gare di matematica dell'ex-URSS. Si tratta naturalmente di problemi "tosti", adatti ad atleti di talento.
Il file di testo è scritto in modo da essere quasi pronto per una traduzione in TEX.

Altri siti

http://problems.math.umr.edu/index.htm

Una raccolta di links per gli appassionati di problemi e matematica ricreativa è

www.abc.se/~m9847/problem.html

Sponsorizzato da una nota casa produttrice di calcolatrici tascabili il sito

http://pegasus.cc.uct.edu/thed/problem.html

dove trovate rimandi ad altri siti, come

www.olemiss.edu/mathed/geometry

che vi mettono a disposizione anche una calcolatrice online per risolvere i problemi proposti.
Un sito dedicato a problemi di logica e puzzles è

www.thewizardofodds/math/group2.html

Infine non potete mancare di dare un'occhiata –col rischio di restarci per ore! – al sorprendente sito

www.cut-the-knot.com

ricchissimo di notizie, articoli, informazioni, una vera manna per i cultori della matematica.

Conclusioni

La ricerca su **Internet** di argomenti di matematica ricreativa è semplicissima; basta rivolgersi ai più noti motori quali www.yahoo.com o www.altavista.com. Si trova di tutto e per tutte le età. Purtroppo si trova un unico rimando ad un sito italiano, curato dal dott. Mario Velucchi dell'Università di Pisa. Anche se il problem solving non è attualmente di moda nella didattica della matematica, storicamente abbiamo delle buone tradizioni che potremmo riprendere. Rovistando tra le bancarelle e nelle librerie dell'usato forse è ancora possibile reperire qualche numero o raccolta della rivista "Il Pitagora", o del supplemento al "Periodico di Matematica", fascicoli interamente dedicati (un secolo orsono!) a problemi di matematica e fisica e a "noterelle" didattiche per gli studenti delle medie. In questo senso si stanno muovendo prestigiose Istituzioni e Case Editrici. Da qualche anno la rivista "Archimede" dedica qualche pagina alla proposta di problemi. Anche la rivista del Centro Morin di Paderno del Grappa (TV), "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate" ha una rubrica dedicata. Meritorio il lavoro che la Scuola Normale di Pisa e l'Università Bocconi svolgono nell'organizzare le Olimpiadi di matematica e i Giochi di matematica. Anche nei programmi 'Brocca' per la secondaria superiore si trova un invito, forse troppo timido, ad affrontare "problematicamente" l'insegnamento della matematica. Servirà tutto questo a migliorare l'immagine della matematica nell'immaginario collettivo? L'esperienza in classe ci insegna, tra l'altro, che spesso i più "tardi" tra gli studenti sono coinvolti dai problemi più che dal normale curriculum scolastico, quindi...perchè no?

media inferiore

Costruzione di un modello che simuli la caduta di un corpo lungo un piano inclinato

Spunto per una attività di laboratorio

di Maddalena Di Vincenzo
Scuola Media Tiepolo, Milano

Le leggi di caduta di un corpo nel vuoto, oltre alla loro intrinseca e indiscutibile importanza sono interessanti perché ci permettono, ricostruendo gli esperimenti di Galileo, di ripercorrere la nascita del metodo sperimentale.

Galileo aveva escogitato il sistema per studiare, "al rallentatore", le caratteristiche del moto di un corpo che cade nel vuoto, rallentando appunto, a piacere, la velocità di caduta del corpo con un piano di cui poteva variare l'inclinazione .

In questo modo tutte le osservazioni e le misurazioni potevano essere fatte più facilmente e con strumenti poco sofisticati, quali quelli di cui disponeva.

Noi, avvalendoci dell'aiuto di Cabri, simuliamo quegli esperimenti con un modello di piano inclinato che, variando a piacere, ora l'inclinazione del piano, ora il peso del corpo stesso, ci permette di osservare quali effetti conseguono.

Le modalità di esecuzione

Il modello deve tener conto dei requisiti richiesti alle varie parti del modello stesso.

Considerati i prerequisiti richiesti, questo lavoro potrebbe essere proposto alla fine della seconda media o in terza.

Prerequisiti:

Conoscenza della relazione tra massa e peso.

Regola del parallelogramma per la scomposizione delle forze.

Conoscenza del primo e secondo principio della dinamica.

Conoscenza della similitudine tra figure piane.

Costruzione del modello:

Le parti del modello sono:

1) Il piano inclinato,

2) l'oggetto che poggia su di esso e il vettore che rappresenta la forza peso,

3) le forze che, trascurando l'attrito e la resistenza dell'aria, agiscono su di esso.

Le caratteristiche che devono possedere:

1) Il piano inclinato viene rappresentato come un triangolo rettangolo in cui possano variare le misure dei lati.

2) Il corpo sul piano inclinato può essere ridotto ad un punto materiale e quindi si può rappresentare come un punto M sull'ipotenusa.

La forza peso si rappresenta con un vettore, di lunghezza variabile, con estremi M e P.

3) La forza peso deve essere decomposta con un vettore parallelo al piano ed uno perpendicolare al piano stesso, secondo la regola del parallelogramma.

1) Costruzione del triangolo rettangolo:

- Traccio un segmento AB, base del triangolo.
- Mando la perpendicolare per A.
- Traccio un segmento CB, con C sulla perpendicolare.

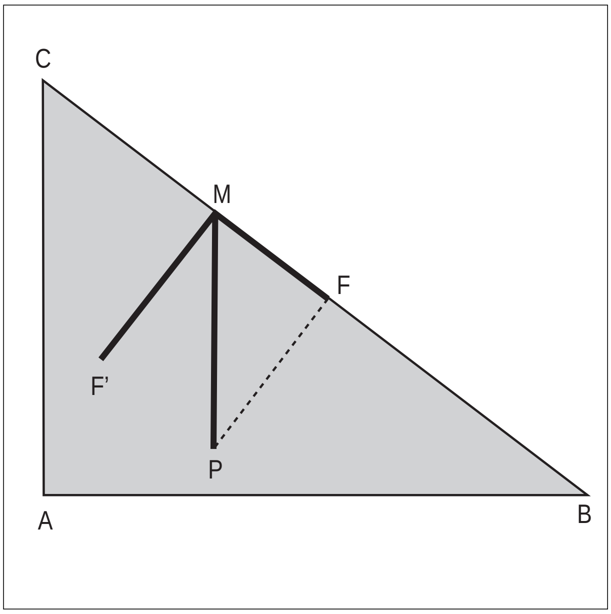
- Disegno il triangolo rettangolo ABC .
- Nascondo la costruzione.

2) Il punto materiale

- Segno un punto M sull'ipotenusa.
- Disegno la perpendicolare ad AB per M.
- Disegno sulla perpendicolare un vettore a piacere con estremi M e P, verso il basso.
- Nascondo la retta.

3) Decompongo la forza peso:

- Traccio per M la perpendicolare a CB e la chiamo r.
- Mando per P la perpendicolare a CB e intercetto il punto F.
- Mando da P la perpendicolare ad r e intercetto il punto F'.
- Disegno i vettori MF e MF'.
- Disegno il segmento PF tratteggiato.
- Nascondo le rette.



OSSERVAZIONI SULLA CADUTA DI UN CORPO LUNGO UN PIANO INCLINATO

Abbiamo un corpo di massa **m** e peso **P** posto su un piano inclinato.
Abbiamo decomposto la forza peso **P** nelle sue componenti: **F**, parallela al piano e **F'**, perpendicolare al piano stesso.
Evidentemente **F è la componente efficace**.

1) Osserviamo come varia l'intensità di F al variare della massa:

Osserva il triangolo rettangolo che ha per lati il vettore P e il vettore F; esso ha due lati perpendicolari ai lati del triangolo ABC, quindi i due triangoli sono simili.
Se muovi il punto P, aumenta o diminuisce la misura del vettore P, e aumenta o diminuisce in proporzione anche la misura degli altri lati.
In particolare, possiamo dire che, l'intensità della forza efficace F è direttamente proporzionale alla forza peso P e per conseguenza alla massa stessa del corpo.

Ciò vuol dire che se aumenta la massa, aumenta in proporzione la forza efficace F che tende a far cadere il corpo lungo il piano.

2) Qual è il valore dell'accelerazione?
Sappiamo che l'accelerazione impressa ad un corpo di massa **m**, da una forza **F** è data dal rapporto

$$\mathbf{a = F/m}$$

quindi nel caso della caduta di un corpo lungo un piano inclinato, dal momento che la forza efficace **F** varia proporzionalmente alla massa,

se la massa è **m** sarà:

$$\mathbf{F / m = a}$$

se la massa raddoppia avremo:

$$\mathbf{2F / 2m = a}$$

se la massa triplica sarà :

$$\mathbf{3F / 3m = a},$$

e via di seguito.
L'accelerazione è sempre la stessa.
Ciò significa che corpi diversi posti sullo stesso piano inclinato si muovono con la stessa accelerazione e quindi cadono nello stesso tempo.

3) Osserviamo come varia l'intensità di F al variare dell'inclinazione del piano:
Muovendo il punto C varia la misura dell'altezza CB e quindi l'inclinazione del piano.
Puoi osservare che, di conseguenza, varia anche l'intensità della forza efficace F.
Tenendo conto della similitudine tra i due triangoli rettangoli vista sopra, sarà:

$$\mathbf{F : P = CA : CB}$$

Ciò significa che, all'aumentare dell'inclinazione del piano, aumenta in proporzione l'intensità di F e in particolare:
se il piano è orizzontale CA sarà nulla ,come pure F, quindi il corpo sta fermo, aumentando l'inclinazione, l'intensità di F aumenta, così pure la sua accelerazione,
se il piano diventa addirittura verticale, la F è il peso del corpo stesso e l'accelerazione sarà l'accelerazione di gravità.

LA RECENSIONE DEL MESE

Giochi a blocchetti mobili

di **Federico Peiretti**

Il più antico gioco a blocchetti mobili è il *Khun Phaen* di origine tailandese, il più recente è il *Century Puzzle*, proposto nel 1975 da John Horton Conway, e il più popolare è il *Gioco del 15* propagandato da Sam Loyd alla fine dell'Ottocento. Tutti questi giochi sono costituiti da una serie di blocchetti mobili che possono scorrere all'interno di una scatola attraverso spazi vuoti, senza poter superare i confini della scatola stessa, dalla quale non possono neanche essere sollevati. Il *Khun Phaen* è composto da blocchetti quadrati e rettangolari. Una scacchiera 4 x 5 rappresenta la prigione nella quale Khun Phaen, eroe leggendario, il quadrato 2 x 2, è stato rinchiuso. Per fuggire Khun Phaen deve superare i nove guardiani che lo sorvegliano, rappresentati da quattro quadrati 1 x 1 e da cinque rettangoli 1 x 2. Egli deve raggiungere la porta della libertà che si trova in basso nella posizione centrale, scivolando tra le guardie, sempre osservando la regola del gioco del 15: i blocchetti scorrono andando a occupare gli spazi vuoti. Non è facile far uscire Khun Phaen dalla prigione. E' stato dimostrato che per arrivare alla soluzione, come minimo, sono necessarie 81 mosse. Una variante di questo puzzle è stata proposta da Conway, uno dei più originali e anticonformisti matematici americani, al quale dobbiamo il più bel gioco matematico inventato negli ultimi cent'anni: il *Gioco della vita. Century Puzzle* è il nome che ha dato al suo gioco, semplicemente perché occorrono, al minimo, 100 mosse per arrivare alla soluzione e lo ha presentato come il più difficile gioco a blocchetti mobili su scacchiera 4 x 5. Le possibili posizioni dei blocchetti, partendo dalla posizione iniziale di figura, calcolate al computer sono 109260. Ma il puzzle più intrigante è il *Gioco del 15*, con i blocchetti numerati dall'uno al quindici che possono scorrere in una scacchiera 4 x 4 grazie alla sedicesima posizione vuota e che devono essere rimessi in ordine, partendo da una configurazione qualsiasi. Un puzzle che diventò popolare grazie alla versione "14 - 15" proposta da Sam Loyd, il grande esperto americano in giochi e rompicapi, nel 1878. Una versione "perversa", senza soluzione.

Le varianti dei giochi a blocchetti mobili sono infinite e l'insegnante interessato ad approfondire l'argomento troverà nuovi puzzle, anche da giocare online, e la relativa teoria matematica, ai collegamenti segnalati in questa pagina. E' anche facile realizzare i puzzle, con scacchiere disegnate su fogli di carta, ritagliando i blocchetti in cartoncino o, meglio ancora in legno. In questo modo potrà portare in classe qualche problema divertente, con una discussione al livello più opportuno, in sostituzione dei calcoli e dei problemi ripetitivi, sovente inutili, della maggior parte dei nostri manuali scolastici. Esercizi per i quali, come già diceva Peano "gli allievi non veggono alcuna applicazione, perché spesso non ne hanno".

Giochi a blocchetti mobili in rete

Un'ampia analisi dei giochi a blocchetti mobili:
http://info.ex.ac.uk/cimt/puzzles/slideblk/sbint.htm

Biografia di Sam Loyd:
http://www.uconect.net/~advreason/samloyd.htm

Matematica e *Gioco del 15*:
http://cut-the-knot.com/pythagoras/SLIDER.html

Diverse versioni del *Gioco del 15*:
http://bd.thrijswijk.nl/15puzzle/15puzjav.htm

Presentazione del *Gioco del 15* e della sua realizzazione in linguaggio Java:
http://www.mokabyte.it/1998/04/quindici.htm

Applet Java per l'*Asino rosso* e altri giochi:
http://www-irma.u-strasbg.fr/~grosse/

La soluzione del *Khun Phaen*, in dieci varianti:
http://nrich.maths.org/mathsf/journalf/sep98/game1/index.html#khun

Applet del *Jeu du Taquin*:
http://member.aol.com/rigolmath/taquin/taquin.htm#retour

Puzzle a blocchetti mobili:
http://johnrausch.com/SlidingBlockPuzzles/default.htm
http://www.smileyland.com/games/sliding-block-puzzles.html
http://imagiware.com/puzzle/

Si invia un'immagine e questa viene automaticamente trasformata in puzzle:
http://www.xpservice.com/applets/puzzle2/game27.htm

Il gioco a blocchetti mobili inventato da Conway nel 1975 e battezzato *The Century Puzzle*, perché richiede 100 mosse per essere risolto:
www.ex.ac.uk/cimt/puzzles/ slideblk/century.htm