

CABRI IRRSAE

Bollettino degli utilizzatori di CABRI-géométre

Marzo 1998 - N. 15

SOMMARIO

Cabri discusso

- Che fine farà Alice?

Come fare

- Sull'asse radicale di due circonferenze e non solo
- Omologia del piano
- L'ombra del lampione
- Elicottero
- Soluzione di "un problema sul triangolo"
- 6 Unità didattiche a carattere geometrico

Proposte di lavoro

- Caccia al tesoro - Non ci posso credere - Sommatorie

Da AbraCAdaBRI

- Simulazione della rotazione di un cubo attorno a uno dei suoi assi

Indirizzo

Bollettino CABRI IRRSAE

IRRSAE-Emilia Romagna

Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna

Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21

E-mail: cabri@arci01.bo.cnr.it

<http://arci01.bo.cnr.it/cabri/>

Gruppo di discussione:

E-mail: cabrinews@arci01.bo.cnr.it

Fardiconto:

<http://arci01.bo.cnr.it/fardiconto/>

Flatlandia:

<http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/>

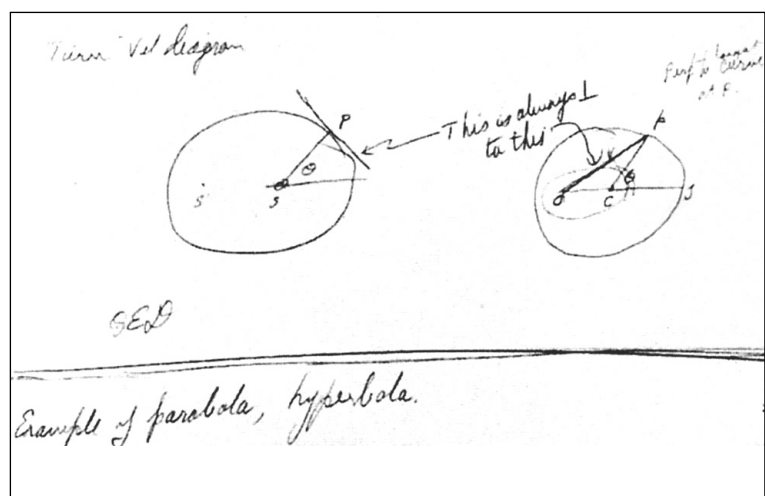
La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:

<http://arci01.bo.cnr.it/cabri/rivista.html>



I.R.R.S.A.E.

Emilia-Romagna



Cabri discusso

Che fine farà Alice?

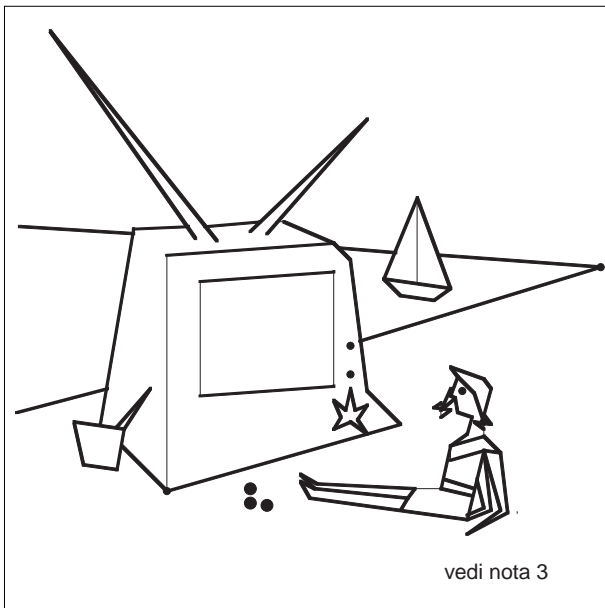
di Mario Barra

Università degli studi di Roma "La Sapienza"
Dipartimento di Matematica Istituto "G. Castelnuovo"

"I canali della televisione... esistono per servire il benessere della società nella sua totalità."

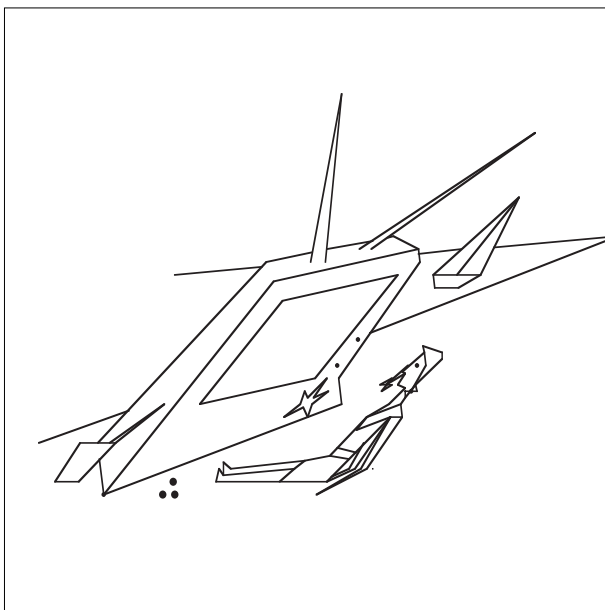
Karol Wojtyła¹

Che fine farà Alice?²



vedi nota 3

anche l'affinità⁴ insidia Alice



Uno "in che modo Alice diviene grande e piccola?"

Un altro "per affinità"

Uno "oh...ho capito è il fungo"

"quando parliamo di pensiero dobbiamo riferirci all'orientamento del mondo", una capacità che di fatto è fondamentale perché possa esserci il pensare."

Karol R. Popper⁵

"Il critico e psicologo dell'arte Rudolf Arnheim⁶ sostiene che si è sviluppata nel pensiero occidentale una forma di "patologia" consistente nella scissione tra i concetti astratti e gli elementi visivi che li hanno prodotti e li accompagnano, scissione che produce una grave sterilità intellettuale."

S. Benedan e A. Antonietti⁷

Proviamo a cercare degli argomenti di geometria⁸ adatti ad Alice.

Anzi sarà lei stessa a presentare qualche approfondimento.

Cabri farà i disegni che renderanno possibili alcune piccole scoperte.

Per noi qualche cenno storico-teorico.

Da Euclide al 1965 con l'equiscomponibilità⁹

Nel 1900 a Parigi, al secondo Congresso internazionale dei matematici, David Hilbert pone 23 problemi che toccano i differenti domini della matematica e che ispireranno la ricerca matematica nel XX secolo¹⁰. Il terzo problema riguarda la matematica elementare ed ha per titolo: "Sulla uguaglianza in volume di due tetraedri di base ed altezza uguali". Hilbert, citando due lettere indirizzate a Gerling da Gauss¹¹, che a sua volta cita Euclide, esprime l'esigenza di una dimostrazione rigorosa dell'impossibilità per due tetraedri di uguale base ed altezza di essere equiscomponibili in generale. Proviamo ad inquadrare il problema dall'inizio.

Due figure sono equiscomponibili se si possono dividere in un numero finito¹² di parti¹³ rispettivamente uguali¹⁴ o, che è lo stesso, se è possibile decomporre una in un numero finito di parti da riposizionare per comporre l'altra.

Da Euclide deriva abbastanza facilmente che due poligoni con la stessa area (cioè equivalenti) sono sempre scomponibili in parti poligonali rispettivamente uguali¹⁵. Si ha così che "l'aver la stessa area" fra poligoni può essere sostituito dalla equiscomponibilità e questo permette, "limitandosi al qualitativo", di eliminare elegantemente il concetto primitivo di area, la necessità di definire una unità di misura e le formule per determinarla e soprattutto di evitare il ricorso a procedimenti "al limite". Ma questo è possibile con molte limitazioni. Infatti ad esempio Ugo Amaldi¹⁶ ha dimostrato quello che tutti sanno e cioè che un cerchio e un poligono non sono equiscomponibili. E' infatti impossibile riposizionare i bordi tondi del cerchio senza lasciare dei buchi. Ma anche escludendo il tondo, basta salire a tre dimensioni e quello che prima era sempre possibile per i poligoni, diviene spesso impossibile per i poliedri.

E qui entra in gioco il problema posto da Hilbert. Per calcolare il volume di una piramide e per mostrare in

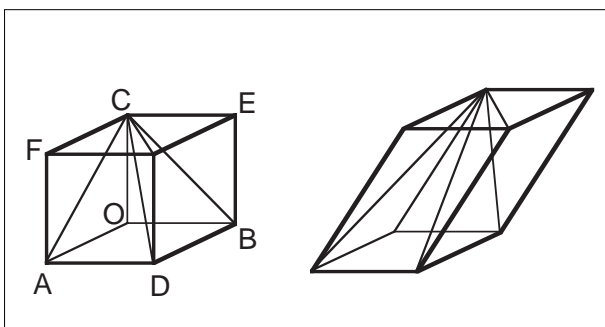
generale che due piramidi di uguale base ed altezza hanno lo stesso volume, i matematici, dai tempi di Euclide, hanno fatto ricorso a dei metodi più complicati della equiscomponibilità, come il metodo di esaustione¹⁷ o altri metodi che fanno intervenire delle nozioni infinitesimali. Hilbert chiede di dimostrare che questa esigenza è necessaria. Hill¹⁸, nel 1895, fornisce 3 tipi di tetraedri equiscomponibili con un cubo, e Bricard¹⁹, nel 1896, presenta una condizione affinché due poliedri con lo stesso volume siano equiscomponibili. Hilbert capisce che quelli di Hill sono dei casi particolari e non cita Bricard perché la sua dimostrazione è incompleta. Max Dehn, un allievo di Hilbert, mostra nel 1900²⁰, pochi mesi dopo il Congresso di Parigi, che due poliedri possono avere lo stesso volume senza che ciò comporti la scomponibilità in un ugual numero finito di poliedri rispettivamente uguali, e precisa la condizione di Bricard. E' una questione di angoli diedri. Così un tetraedro regolare e un cubo non sono equiscomponibili perché l'angolo diedro del primo è incommensurabile con quello del secondo. Manca in generale nello spazio la proprietà fondamentale dei poligoni di avere la somma degli angoli interni uguale ad un multiplo intero di π . Nello spazio, dimostra Dehn, perché due poliedri siano equiscomponibili, è necessario che esista una combinazione lineare a coefficienti interi²¹ dei loro diedri che sia uguale ad un multiplo di π . Così la piramide di Jeuel, che si ottiene proiettando dal centro di un cubo una sua faccia, è equiscomponibile con un prisma con lo stesso volume²².

Con delle considerazioni sulla divisione di un prisma in tre piramidi di uguale volume, altri matematici riprendono il problema, e infine Sydler, nel 1965²³, dimostra che le condizioni di Dhen, oltre che necessarie, sono anche sufficienti per l'equiscomponibilità di due poliedri con lo stesso volume.

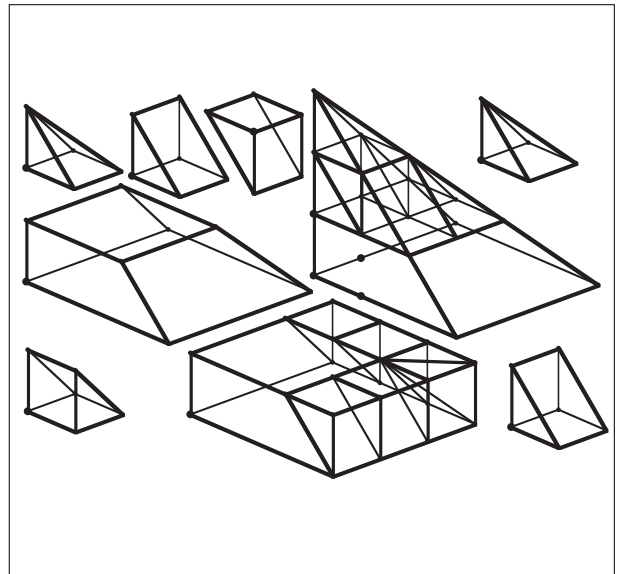
Il problema è così completamente risolto.

E' un problema che ritroviamo per lunghissimo tempo nella storia della matematica e che presenta anche delle caratteristiche che lo accostano al gioco. Pensiamo che questo possa essere utile per uno sviluppo naturale e piacevole delle capacità argomentative e dimostrative, connesse anche con quelle della visione spaziale²⁴.

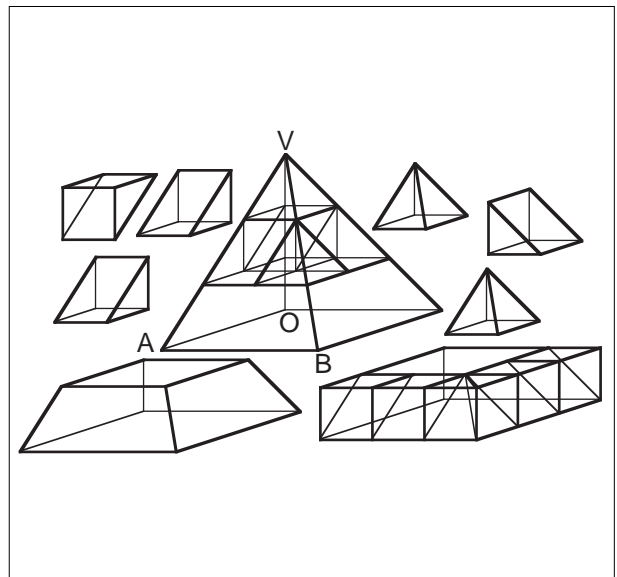
L'argomento sarà approfondito nei prossimi numeri. Per ora riprendo una versione più semplice dei tetraedri di Hill, che ho presentato nel 1993²⁵ sotto forma di gioco. Si tratta di una piramide ottenuta proiettando da un vertice di un cubo, uno dei quadrati che hanno in comune il vertice opposto²⁶.



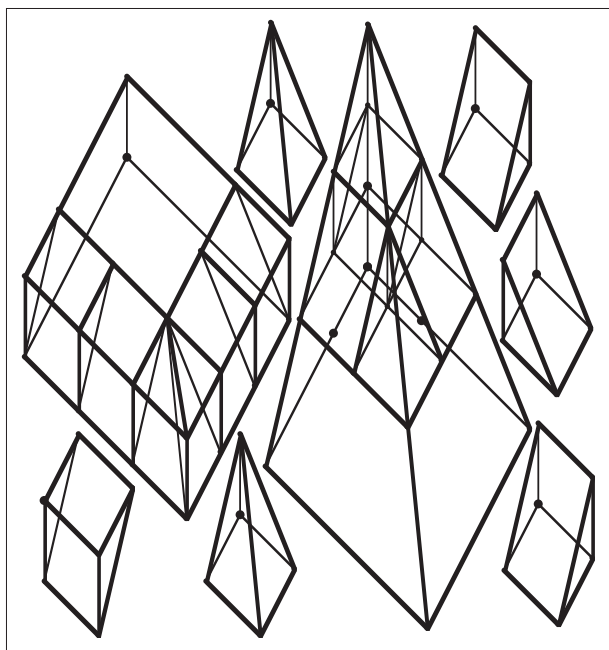
Tale piramide si scompone in 7 pezzi che danno luogo ad un parallelepipedo rettangolo con la stessa base. Con Cabri, disegnato il cubo, con "la tecnica di Alice"²⁷, e in esso la piramide²⁸, si nasconde il primo e si disegnano i 7 pezzi sul secondo.



"Alice" permette di scegliere la dimensione e l'angolo di osservazione a seconda delle esigenze tecniche²⁹, estetiche o dimostrative.



Per rendere chiara la provenienza ed evidenziare singolarmente i pezzi e la loro ricomposizione nel parallelepipedo rettangolo, e infine per renderli mobili, si può usare "la tecnica del coniglio che ha fretta"³⁰. Modificando i "3 versori" della piramide, questa, assieme ai 7 pezzi mobili, scomposti e ricomposti, è modificata dalla stessa affinità che "trasforma lo spazio", raffigurato nel piano. Così, con una affinità che mantenga uguale la lunghezza dei 3 spigoli VO, OA e AB e modifichi allo stesso modo gli angoli VOA e OAB, ci accorgiamo che la scomposizione già ottenuta permette anche di scomporre tutta una serie di piramidi in 7 pezzi da ricomporre in parallelepipedi.



Rinunciando a questa ultima possibilità, Alice vuole fare meglio e propone il seguente problema:

“Questo pezzo va qui perché non va lì, disse Alice osservando con attenzione un tetraedro”³¹



Il problema di Alice n.1³²

Determinare un numero di pezzi minore di 7 per equiscomporre una piramide³³ ed un prisma con la stessa base. ■

Note al Testo

¹ Karol Wojtyła, La potenza dei media, Discorso pronunciato all'Angelus del 28/01/96. *Bollettino della sala stampa della Santa Sede*.

² Lo psichiatra Brandon S. Centerwall, dell'università di Washington, in un articolo pubblicato nel giugno 1992 sul *Journal of the American Medical Association*, ha riferito che l'arrivo della televisione in Sudafrica ha coinciso con un raddoppio del tasso di omicidi. Durante il 'periodo critico' della preadolescenza, ha spiegato lo studioso, l'esposizione alla violenza televisiva ha un impatto particolarmente profondo. “Mentre i bambini hanno un desiderio istintivo di imitare i fatti osservati, non posseggono un istinto per valutare a priori se un comportamento dato sia da emulare o no”. Leonard Eron dell'università del Michigan, che presiede la commissione dell'Apa su giovani e violenza, ha passato 36 anni a studiare la violenza in TV. I suoi studi longitudinali sono iniziati nel 1960 ed hanno seguito un gruppo di 875 soggetti dei due sessi fra gli 8 anni di età ed i 30, analizzando le percentuali di criminalità e le caratteristiche personali. Secondo i risultati del suo studio, chi aveva assistito a più scene di violenza in TV aveva commesso reati più gravi, era più aggressivo sotto l'influenza dell'alcool ed era più brutale nel punire i propri figli, i quali a loro volta mostravano dei segni di aggressività. “Ciò che si impara dal piccolo schermo sembra trasmettersi alle generazioni successive” afferma Eron.

Certo è più difficile valutare l'influenza della televisione sulla passività e sulla tendenza all'omologazione.

³ Si deve intendere che il televisore è stato costruito con la sabbia.

⁴ Si veda “La tecnica di Alice” in: Cabri e il disegno, CABRIRRSAE, *Bollettino degli utilizzatori di Cabri-Géométre*, n.13, Settembre 1997, p.7.

⁵ Popper R. K., *Cattiva maestra Televisione*, Edizione CDE spa, 1996, p.39.

⁶ Arnheim R., *Il pensiero visivo*, Einaudi, Torino, 1969.

⁷ Benedan S. e Antonietti A., *Pensare le immagini*, Erickson, Trento 1997, p.37.

⁸ Le parole chiave di quanto segue ora e nei prossimi articoli, di chi scrive, su questa rivista, potrebbero essere: ‘esercizi per le immagini mentali’, ‘sviluppo delle capacità argomentative e dimostrative’, il ‘tema di matematica’ e ‘matematica con le mani e con la mente’.

⁹ Parte di quanto segue è presente in: Barra M., *Geometria dello spazio*, testo di lezioni e seminari tenuti al 2° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica, per la Sezione Scuola Media, dal titolo: “l'insegnamento della geometria dello spazio” tenuto a Viareggio dal 26/02 al 2/03/96, quaderno 19/1 MPI (Direzione Classica)-UMI, maggio 97.

¹⁰ Hilbert D., *Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problèmes*, Gauthier-Villars, 1902. Ristampa nelle Editions Jaques Gabay, 1990, p.17.

¹¹ Anche Legendre nei suoi *Eléments de Géométrie*, si era interessato al problema agli inizi del XIX secolo.

¹² Nel caso infinito Banach e Tarski dimostrano la possibilità di ricomporre un oggetto escludendo una parte dei suoi ‘pezzi’. (vedi *Mathematical Intelligencer*, v.10, n.10, 1980, p.21).

¹³ Tali parti debbono essere “sufficientemente regolari”.

¹⁴ Più spesso viene usata la parola “congruenti” che qui sta per “uguali dal punto di vista geometrico”. In questo caso è una precisazione necessaria?

¹⁵ La dimostrazione esplicita è data da Farkas Bolyai (padre di Janos) nel 1832 e da Gerwien, un ufficiale prussiano amante della matematica, nel 1833. Si veda Boltianskii V.G. *Equivalent and equidecomposable figures*, D.C. Heath and co, Boston, 1963.

¹⁶ Amaldi U., Sulla teoria della equivalenza in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da Enriques F. parte I, Vol. II, Zanichelli, Bologna 1925, p.1. Si veda anche: Benedetti P., *Fondamenti della geometria*, in

Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, a cura di Berzolari L., Vivanti G., Gigli D., Hoepli, 1937, v. II, parte I, 5-48. Vengono evidenziati in neretto i riferimenti bibliografici che si ritengono più importanti.

¹⁷ Schema di ragionamento matematico (per assurdo), che permette di evitare l'uso dell'infinito, o comunque di procedimenti infinitesimali, nelle questioni relative alle aree e ai volumi. Il metodo di esaustione venne valorizzato nel IV secolo a.C. da Eudosso di Cnido. E' un metodo perfettamente rigoroso, ma era in realtà impiegato dai geometri greci, soprattutto da Archimede, a giustificazione di risultati acquisiti per altra via.

¹⁸ Hill M.J.M., Determination of the volumes of certain species of tetraedra without the employment of the method limits, *Proc. London Math. Soc.* 27, 1896, 39-53.

¹⁹ Bricard R. Sur une question de géométrie relative aux polyèdres, in *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 15, 1896, 331-334.

²⁰ E' parere di chi scrive che la dimostrazione venga fornita, già nel 1997, da G. Sforza. Ma questo esula troppo dai possibili obiettivi che si pone questa rivista.

²¹ Questi coefficienti interi dipendono dalla lunghezza degli spigoli.

²² Su 1/4 della piramide di Jeuel viene dimostrata tale proprietà (v.o.) con materiale didattico manipolabile, utile alla dimostrazione della formula del volume della piramide. 1/8 di tale piramide è un particolare tetraedro di Hill. L'equiscomponibilità è collegata alle tassellazioni dello spazio (v.o.) con cubi o con esaedri.

²³ Sydler J.P. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions, *Comment. Math. Helvetica*, 40, 1965, 43-80. Dello stesso autore e sullo stesso argomento: Sur la décomposition des polyèdres, *Comment. Math. Helvetica*, 16, 1943-1944, 266-273 e Sur les tétraèdres équivalents à un cube, *Element. Math.*, 11, 1956, 78-81. Precedentemente un discorso panoramico è in Lebesgue H., Sur l'équivalence des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers, et sur la dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers, *Annales de la Soc. Polonaise de Math.*, 17, 1938, 193-226.

²⁴ Verranno presentati in questa rivista molti altri argomenti connessi con questo che stiamo trattando e dello stesso tipo.

²⁵ Barra M., Matematica ed allievi in difficoltà, *Matematica & difficoltà 2*, a cura di Pertichino M., Sandri P. e Zan P., Pitagora Editrice, Bologna, 1993, p. 61-76.

²⁶ Approfittiamo del disegno e delle sue potenzialità per ottenere la formula del volume dei solidi "a punta" cioè dei conoidi generalizzati. Se da un vertice del cubo proiettiamo i 3 quadrati che hanno in comune il vertice opposto: otteniamo 3 piramidi uguali. Con una affinità che "allontani" 2 quadrati paralleli del cubo, le 3 piramidi divengono differenti ma il loro volume è ancora uguale perché tutti i cubetti, che queste contenevano nella configurazione iniziale, si sono trasformati allo stesso modo. Così dal volume del parallelepipedo si ottiene quello della piramide a base quadrata: area di base per altezza diviso 3. La formula resta allora valida per i conoidi generalizzati intendendoli composti dalle piramidi che proiettano dal vertice i quadrati della base, che ne determinano l'area. La dimostrazione è riproducibile in dimensione qualsiasi dividendo il cubo in 3 piramidi in R_3 e in d piramidi in R_d proiettando da un vertice i d cubi di dimensione $d-1$ che hanno in comune il vertice

opposto.

²⁷ Si veda la nota n.4, oppure, trattandosi di spazio, la chiesa gotica e romanica in: Cabri, le affinità e un omaggio ad una insegnante,"CABRIRRSAE" *Bollettino degli utilizzatori di Cabri-Géomètre*, n.10, Dicembre 1996, 2-9.

²⁸ Si scelgono 4 punti base O, A, B, C, uno per l'origine e 3 per i versori di un riferimento cartesiano nello spazio. Questi versori sono 3 spigoli di un cubo. 3 altri vertici, D, E, F, si determinano con i simmetrici dell'origine rispetto ai punti medi delle coppie di punti, AB, BC, AC. L'ottavo vertice è, ad esempio, il simmetrico di C rispetto al punto medio di EF. O, A, B e C sono i vertici della piramide.

²⁹ Ad esempio, allungando i versori senza modificarne la direzione e il verso, si può ottenere un ingrandimento che agevoli la possibilità di nascondere agevolmente degli oggetti all'interno di un insieme particolarmente denso.

³⁰ Nota n.4, p.8.

³¹ Falso palese dello scrivente.

³² La soluzione verrà data nel prossimo numero assieme ad una dimostrazione, in termini semplici, del teorema di Dehn. Chi vuole può inviare la sua risposta al quesito a questo indirizzo:

Mario Barra
Dipart. di Mat., Univ. "La Sapienza"
P.le A. Moro 2, 00185 Roma
fax (39)6 44701007
e-mail: barra@mat.uniroma1.it.

³³ Il poligono di base della piramide può essere qualsiasi.

Errata corrige

Nell'articolo: R. Ricci, "Asse radicale di due circonferenze" apparso su CABRIRRSAE n°13, l'autore propone come generale una seconda costruzione (riportata in Camalon C., Puissance d'un point par rapport à un cercle, *AbraCAdaBRI* n.6, pp 9-10, citata in C. Pellegrino - M. Zagabrio, "Invito alla geometria con Cabri-géomètre", 1996, IPRASE del Trentino) che fallisce invece nel caso in cui una delle due circonferenze è interna all'altra. Se ne scusa con i lettori e ringrazia il prof. C. Pellegrino per il suggerimento.

Nel bollettino n°14 sono state invertite le prime due figure nell'articolo "Problemi di primo e secondo grado .." pp 15-16. La redazione si scusa per il disguido.

Come fare

Sull'asse radicale di due circonferenze e non solo

di Elena Barozzi

Gruppo di Ricerca in Didattica della Matematica
Università di Modena

Il diffondersi di *Cabri* ha risvegliato l'interesse per le costruzioni geometriche per via sintetica. In questo ambito sono state proposte varie costruzioni per l'asse radicale di due circonferenze. Una costruzione che coinvolge 25 oggetti è stata presentata da Camalon (1994). Detta costruzione non è generale, ossia non "funziona" qualunque sia la mutua posizione delle due circonferenze. Pellegrino e Zagabrio (1996, pp. 112-116) oltre a riportare la costruzione di Camalon ne hanno proposta una che è generale e coinvolge 21 oggetti. Ricci (1997) ne ha presentata una che ne coinvolge 18'. In questa breve nota proponiamo una nuova costruzione che è generale e coinvolge 17 oggetti. In questo modo, oltre a raccogliere l'invito alla caccia di costruzioni più semplici avanzato da Pellegrino e Zagabrio (*op. cit.*, pp. 44-47), avremo l'occasione di richiamare un teorema che caratterizzando le omotetie che mutano una circonferenza in un'altra consente di rispondere al quesito posto in Pellegrino e Bonacini (1997, p. 72).

Una costruzione per l'asse radicale

La costruzione, per via sintetica, dell'asse radicale r di due circonferenze c e c' , di centri distinti C e C' rispettivamente, è molto semplice quando esse sono secanti in due punti U e V o tangenti in un punto T .

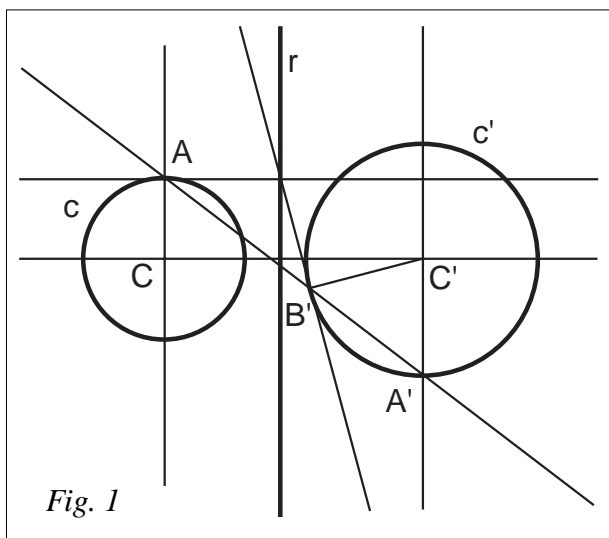


Fig. 1

Nel primo caso r coincide con la retta UV , nel secondo coincide con la perpendicolare a CC' passante per T . Ricordiamo che in ogni caso r è perpendicolare a CC' . In considerazione di questo fatto, al fine di individuare r , sia Camalon sia Pellegrino e Zagabrio hanno costruito un punto R dell'asse radicale utilizzando una terza cir-

conferenza che dipendeva dalle due date e le intersecava entrambe. Noi qui, al fine di ridurre il numero degli oggetti coinvolti, costruiamo direttamente un punto R dell'asse radicale attraverso i seguenti passi (fig. 1):

- tracciamo la retta CC' ;
- intersechiamo c con la retta p passante per C e perpendicolare a CC' ;
- intersechiamo c' con la parallela a p passante per C' ;
- tra i quattro punti costruiti nei due passi precedenti scegliamo un punto A su c ed un punto A' su c' in modo che A ed A' stiano da parti opposte rispetto a CC' ;
- costruiamo il punto B' , distinto da A' , di intersezione tra AA' e c' ;
- costruiamo il punto R dato dall'intersezione tra la retta per A perpendicolare a p e la retta per B' perpendicolare a $B'C'$.

Essendo R punto comune a due rette che, per come sono state costruite, sono tangenti rispettivamente a c e c' , per dimostrare che esso appartiene all'asse radicale delle due circonferenze basta dimostrare che $RA=RB'$. A tal fine dimostriamo che gli angoli RAB' e $RB'A$ sono congruenti. Consideriamo quindi gli angoli CAA' e $C'A'A$ congruenti perché alterni interni delle parallele CA e $C'A'$ tagliate dalla trasversale AA' . Essendo $C'B'$ e $C'A'$ raggi di c' gli angoli $C'A'A$ e $C'B'A'$ sono congruenti. Se ora consideriamo l'angolo RAB' complementare di CAA' questo è congruente all'angolo complementare di $C'B'A'$, ovvero all'angolo contenuto tra il segmento $A'B'$ e la semiretta di $B'R$ di origine B' e non contenente R ; tale angolo è però opposto al vertice di $A'B'R$ e quindi ad esso congruente. Per la proprietà transitiva della congruenza possiamo quindi affermare che RAB' è congruente ad $RB'A$.

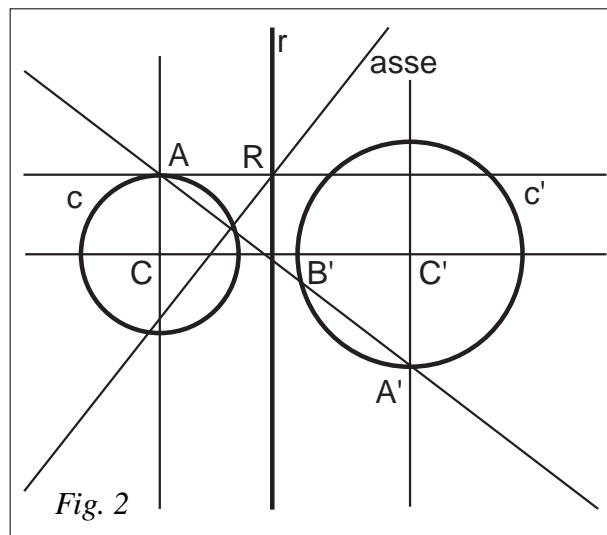


Fig. 2

Da quanto detto segue che R è un punto dell'asse radicale. C'è da dire poi che R oltre ad appartenere all'asse radicale esiste sempre perché B' è sicuramente distinto da A' e dal simmetrico di A' rispetto a C' e quindi la tangente in B' a c' non è parallela alla tangente in A a c . La precedente precisazione assicura che la suddetta costruzione è generale e quindi consente di realizzare una macro-costruzione che "funziona" senza eccezioni. (Cogliamo l'occasione per ricordare che quando si rea-

lizza una costruzione geometrica è buona norma analizzare a fondo la situazione in modo da giungere ad una dimostrazione di quanto si afferma proprio per non correre il rischio di rimanere “ingannati” anche quando si ha la possibilità di utilizzare la dinamicità di Cabri.)

Il cabri-disegno realizzato utilizza 18 oggetti e, volendo realizzare una macro-costruzione a partire da esso, essendo R un punto dell'asse del segmento AB' in quanto $RA=RB'$, al fine di ridurre il numero degli oggetti conviene determinare R come intersezione tra l'asse del segmento AB' e la retta per A perpendicolare ad AC (fig. 2). In questo modo il numero degli oggetti coinvolti scende a 17.

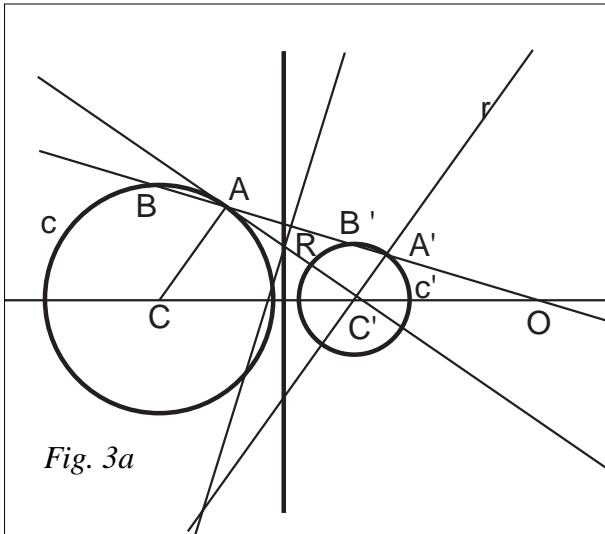


Fig. 3a

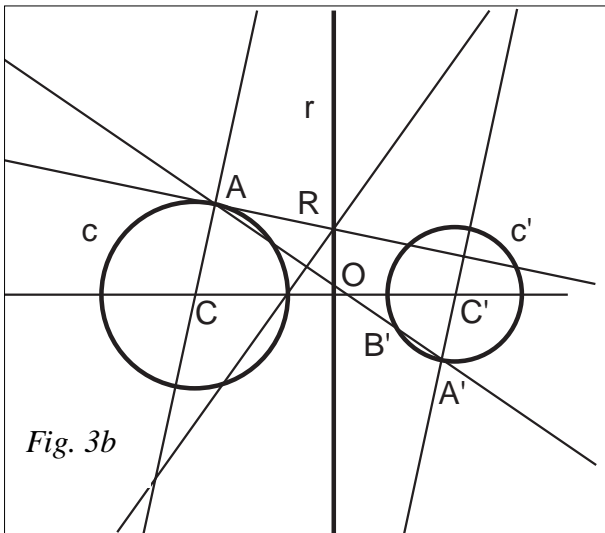


Fig. 3b

Addendum

La precedente costruzione in effetti si basa sul seguente **Teorema** (cfr. Castelnuovo 1903 [2a ed., rist. 1961], eserc. 12, pag. 456): Date due circonferenze non concentriche di raggio diverso esistono quattro omologie che mutano una circonferenza nell'altra, di queste, due sono omotetiche ed hanno come centri i centri di similitudine dei due cerchi; le altre due non omotetiche sono le omologie aventi per centro gli stessi centri, ma hanno come asse l'asse radicale delle due circonferenze. Da questo teorema segue dunque che:

- la precedente costruzione può essere generalizzata sostituendo il punto A con un punto qualunque di c che non stia su CC' ed il punto A' con uno qualunque dei due punti d'intersezione di c' con la retta per C' parallela a CA (nelle fig. 3a e 3b sono riportati rispettivamente i casi in cui A ed A' stanno, o non stanno, dalla stessa parte rispetto a CC');
- il punto O d'intersezione di AA' con CC' è in entrambi i casi il centro di una omotetia che trasforma c in c' (in effetti se afferriamo il punto A e lo facciamo scorrere su c , possiamo osservare che la posizione di O non cambia; precisiamo però che nel caso in cui A ed A' stanno dalla stessa parte rispetto CC' e le due circonferenze hanno lo stesso raggio allora la retta AA' non interseca CC').

Da quanto detto segue che due circonferenze c e c' con centro diverso sono sempre omotetiche e che di omotetie che trasformano l'una nell'altra ce ne sono due se i raggi di c e c' sono diversi altrimenti ce n'è un sola.

Note al Testo

¹ Questa costruzione, simile a quella di Camalon, non è generale: se, tenendo premuto “Alt”, facciamo in modo che il raggio della circonferenza di centro A sia minore di quello della circonferenza di centro B, l'asse radicale ivi costruito viene a mancare quando portiamo la prima delle suddette circonferenze dentro la seconda.

Riferimenti Bibliografici

CAMALON C., 1994, Puissance d'un point par rapport à un cercle, *ABRACADABRI*, n. 6, pp. 9-10

CASTELNUOVO G., 1903 (2a ed., rist. 1961), *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, vol. 1, Dante Alighieri, Milano-Roma, pp. 606

PELLEGRINO C., BONACINI B., 1997, Esplorazioni geometriche: Cabri e le similitudini, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 1, pp. 69-73

PELLEGRINO C., ZAGABRIO M.G., 1996, *Invito alla geometria con Cabri-géomètre*, IPRASE del Trentino, Trento, pp. 128

RICCI R., 1997, Asse radicale di due circonferenze, *CABRIRRSAE*, n. 13, pp. 27-28

Cabri in biblioteca

Nella collana “quaderni di CABRIRRSAE”, è uscito il quaderno N.12, “I poliedri regolari: un tema di geometria dello spazio rivisitato con Cabri-géomètre” di Sandra Bernecoli e Luigi Tommasi.

Chi è interessato a ricevere il quaderno può farne richiesta all'IRRSAE-ER oppure può prelevare dalla rete in formato Acrobat 3.0 al seguente indirizzo web <http://arci01.bo.cnr.it/cabri/quaderni.html>



Omologia del piano

(seconda parte)

di **Giovanni Margiotta**

Liceo Scientifico Francesco d'Assisi - Roma

Questa è la continuazione di una nota pubblicata nel numero 12 di questo bollettino alla quale si farà riferimento per le notazioni e le osservazioni. Partiamo dalla costruzione di figura 4 di [1]. Per realizzare tale figura si creano la retta r , un punto P e un punto P' , corrispondente di P , senza alcun vincolo. Preso un punto generico Q si creano le rette PQ e PP' indicando con H ed M le loro intersezioni con r , quindi si costruisce K come intersezione fra le rette HM (in questo caso coincidente con r) e QP' . Il punto Q' , corrispondente di Q , si ottiene dalla intersezione fra la retta PK e la retta HP' . Ripetiamo la costruzione della figura 4, indebolendo i vincoli su M . M può non appartenere alla retta r , ma si conserva l'allineamento fra H , K e M (vedere la figura 7). Costruiamo la macro **omologia** che ha per oggetti iniziali i punti P, P', M, Q e la retta r e come oggetto finale il punto Q' .

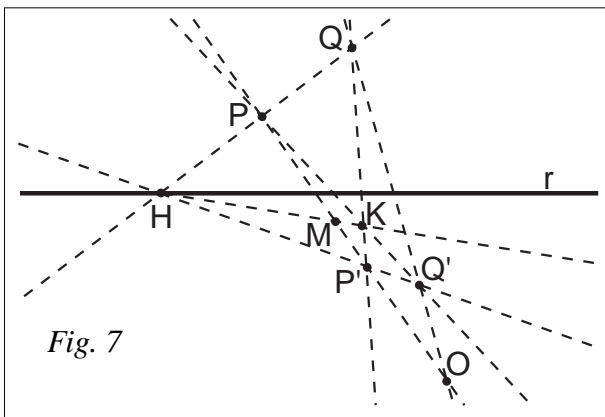


Fig. 7

Fissati i punti P, P', M , e la retta r applichiamo la macro **omologia** a due generici punti Q ed R . Le rette per PP', QQ' e RR' sono incidenti nel punto O (vedere la figura 8).

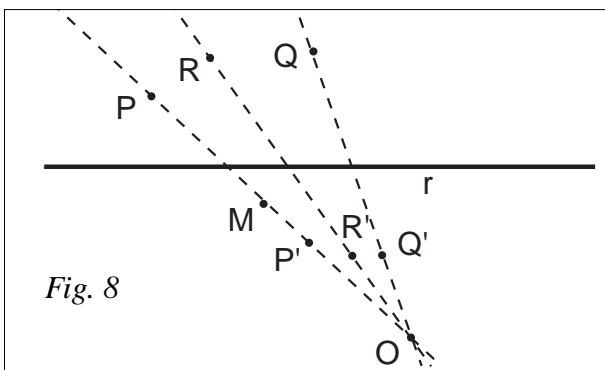


Fig. 8

Se si ripetono le costruzioni per ottenere la figura 6 di [1] si possono osservare le stesse proprietà scoperte per la trasformazione **pro**.

La posizione del punto O dipende da quella del punto M , in particolare se M coincide con il punto medio di PP' si ottiene la trasformazione **aff**. (vedere la figura 9)

La costruzione precedente fa corrispondere ad ogni quadrupla P, P', M ed r un punto O intersezione tra la retta per PP' e la retta per QQ' , Q' è il corrispondente di un qualsiasi punto Q ; cosa accade se il corrispondente di un generico punto è costruito a partire da P, P', O ed r secondo la seguente costruzione suggerita dalla figura 1 (vedere la figura 10)?

1- tracciare la retta PQ

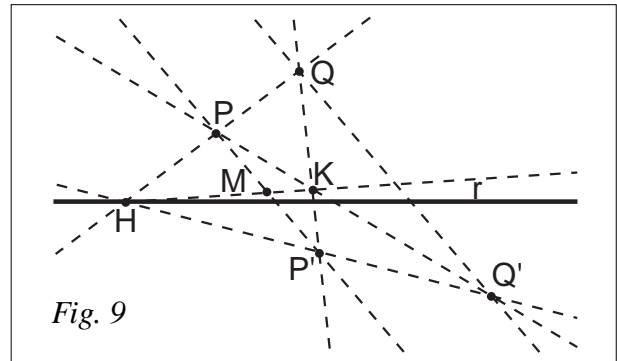


Fig. 9

2- costruire la retta HP' , H è il punto di intersezione tra r e PQ

3- costruire la retta QO

4- costruire Q' intersezione tra la retta HP' e la retta OQ

Costruiamo la macro **omologia1** individuata dalla precedente costruzione che ha per oggetti iniziali P, P', O, Q ed r e per oggetto finale Q' .

Determiniamo i corrispondenti Q' ed R' di Q ed R rispetto ad **omologia1**. Indichiamo con K il punto di intersezione tra PQ' e $P'Q$, con H il punto di intersezione tra PQ ed r , la retta HK interseca PP' in M (vedere la figura 11).

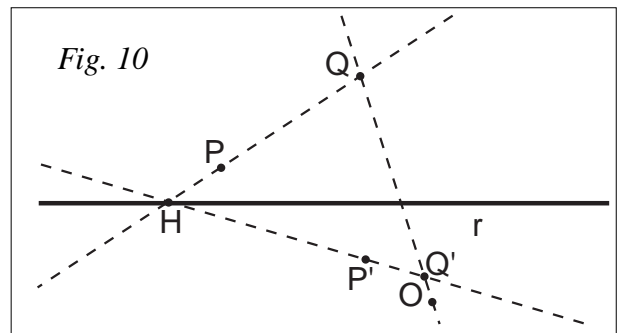


Fig. 10

Costruiamo il punto K_R intersezione tra RP' e PR' ed il punto H_R intersezione tra PR ed r .

Dalla figura si osserva che i punti H_R, K_R ed M sono allineati qualunque sia R . Possiamo concludere che la costruzione precedente associa a P, P', O ed r il punto M . Le corrispondenze **omologia** e **omologia1** trasformano nello stesso modo i punti del piano.

Nel caso della trasformazione **aff** si può verificare che, utilizzando il teorema di Talete, il rapporto tra $Q'W$ e QW è uguale al rapporto tra PT e $P'T$ qualunque sia il punto Q , cosa si può dire nel caso della trasformazione **omologia** (o **omologia1**) ?

Si effettua il seguente esperimento: si fa variare l'asse r

nella direzione perpendicolare alla retta s (vedere la figura 12)

[Costruita la retta s , la semicirconferenza C , il punto **controllo** su C si determina la semiretta t per il centro della semicirconferenza e per il punto **controllo**, si costruisce la perpendicolare r ad s per il punto di intersezione tra s e t].

Al variare del **controllo** sull'arco C la retta r individua le rette del fascio, quando **controllo** si avvicina agli estremi dell'arco C le rette s e t tendono ad essere parallele ed r tende alla posizione limite.⁽¹⁾

Fissati P, P', M e Q si costruisce Q' ed O , al variare di r si osserva che

- il punto O è fisso (vedere la figura 13)
- al tendere di r alla posizione limite i punti P, M, P' ed

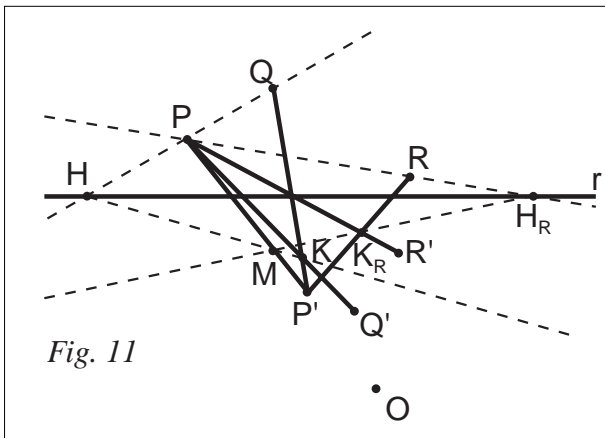


Fig. 11

O sono allineati come Q, M, Q' e O ed i segmenti $PQ, MM_Q, P'Q'$ tendono ad essere paralleli. (vedere la figura 14) Da quanto osservato si può concludere che il rapporto tra $Q'M_Q$ e QM_Q tende al rapporto tra $P'M$ e PM per r che tende alla posizione limite.

Questo, insieme al fatto che **aff** è un caso particolare di **omologia**, fa ipotizzare la presenza del rapporto tra $P'M$ e PM e del rapporto tra $P'T$ e PT nella relazione algebrica invariante associata alla trasformazione.

Nel caso della trasformazione **pro** T coincide con M , quindi la più semplice relazione algebrica che assume valore costante è :

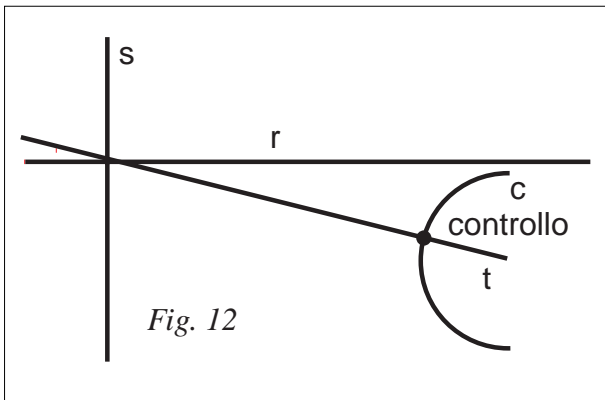


Fig. 12

Realizziamo alcuni esperimenti numerici con Cabri per testare la validità della nostra ipotesi nel caso generale. (vedere la figura 15)

Si può osservare che al variare di Q è sempre valida la relazione (1).

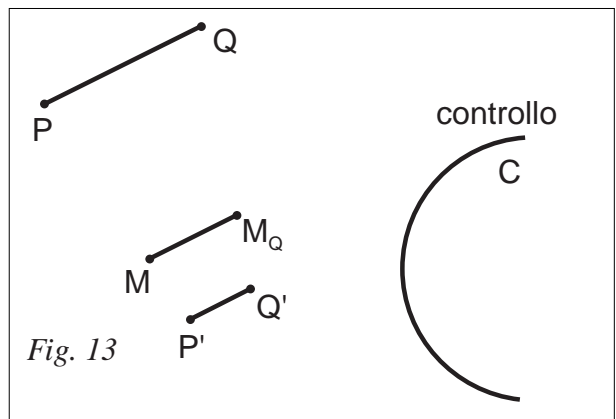


Fig. 13

Per **omologia** si ha lo stesso risultato, basta sostituire O ad M .

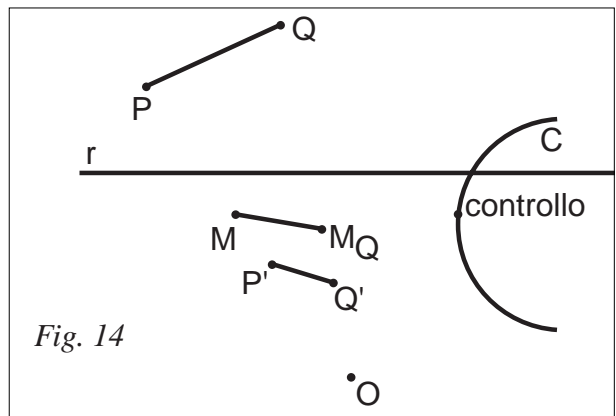
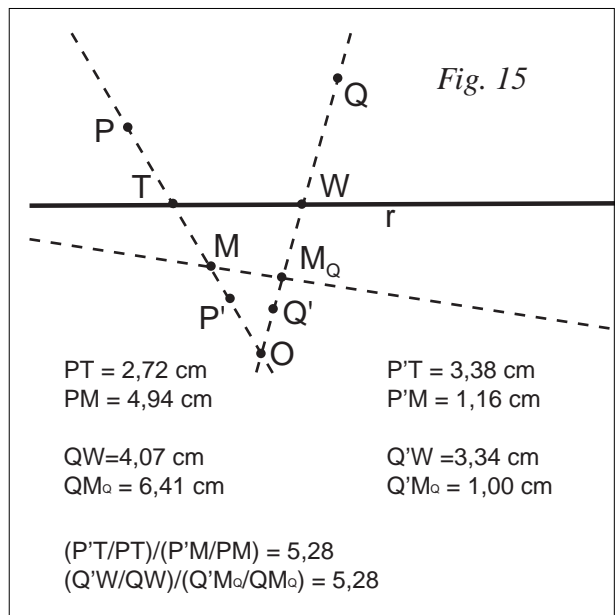


Fig. 14

$$(1) \quad \frac{P'T}{P'M} = \frac{Q'W}{Q'M_Q}$$



[1] Margiotta G., Omologie del piano, Cabri rrsae n.12, giugno 1997.

⁽¹⁾ Cabri II permette di gestire anche i punti all'infinito. ■

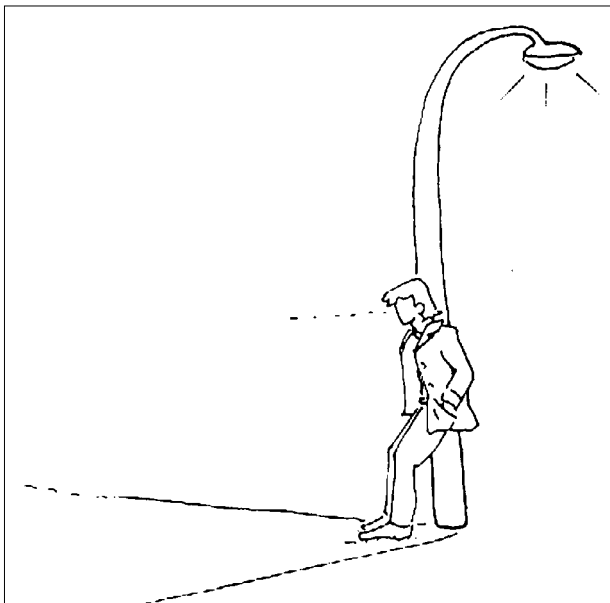


L'ombra del lampione

di Francesco Curti

Liceo Statale d'Arte "Chierici" Reggio Emilia

Una sera, poco dopo la mezzanotte, uscendo da un locale mi fermai assieme ad un amico per conversare prima di rientrare a casa. Dopo aver disquisito su differenti opinioni in merito a gusti musicali, egli osservò con interesse l'ombra che il palo del lampione proiettava sul suolo. Era possibile osservarla fino a grande distanza poichè ci trovavamo su una piazza che affiancava vasti prati della nostra pianura. Appoggiato con le spalle al palo del lampione e guardando verso l'orizzonte nella direzione in cui si distendeva l'ombra, si ricordò come una tale situazione gli si fosse già presentata quando era bambino, e notò come ancora percepisse l'impressione che le linee di demarcazione tra luce ed ombra gli apparissero parallele. Io perplesso volli subito mettermi al suo posto ed osservai che guardando verso il basso era evidente che l'ombra formava un angolo di una certa ampiezza, ma guardando lontano, verso l'orizzonte in effetti l'impressione delle linee parallele era avvertibile.



La serata mi offrì uno spunto per riprodurre schematicamente il fenomeno con CABRI. Semplificando il meccanismo della visione come una proiezione prospettica, si mandano raggi proiettanti non paralleli dall'occhio dell'osservatore e formanti un cono ottico avente per vertice l'occhio; su un piano perpendicolare (immaginato trasparente) al piano orizzontale si raccoglie l'imma-

gine dell'oggetto (l'ombra sul suolo). Il primo passo da realizzare con CABRI è stato quello di costruire una figura di base che potesse rappresentare il piano dell'oggetto e quello dell'immagine proiettata. Due parallelogrammi che si bisecano perpendicolarmente realizzabili come si vuole, possono assolvere questo scopo. Si tratta in pratica di una rappresentazione in assonometria dello spazio suddiviso in quattro diedri retti. I due parallelogrammi che rappresentano i due piani ortogonali (occorre immaginarli con estensione illimitata) si intersecano in una retta detta Linea di Terra (LT).

Sul piano orizzontale (PO) tracciamo due rette incidenti, che rappresentano le linee di demarcazione tra luce ed ombra (chiamerò retta orizzontale ogni retta perpendicolare al Piano Verticale, retta verticale ogni retta perpendicolare al Piano Orizzontale):

- 1) punto S su LT (proiezione su PV del punto di incidenza delle due rette)
- 2) Retta orizzontale per S
- 3) Punto V su retta 2) (vertice dell'angolo d'ombra)
- 4) Punti A e B su LT
- 5) Retta per due punti: rette VA e VB

Consideriamo delle due rette suddette le semirette VA e VB di origine comune V formanti l'angolo d'ombra, e supponiamo di trovarci in piedi nel diedro in cui si trova il vertice V, ad osservare la proiezione dell'ombra sul Piano Verticale (PV). Definiamo la posizione dell'occhio dell'osservatore fornendone le tracce sui due piani.

- 6) punto H su LT
- 7) Retta orizzontale per H
- 8) Retta verticale per H
- 9) punto Ho su retta 7) (traccia dell'occhio sul PO)
- 10) punto Hv su retta 8) (traccia dell'occhio sul PV)
- 11) retta orizzontale per Hv, retta verticale per Ho
- 12) Intersezione rette 11) (punto di vista O)

Ora si tratta di costruire l'immagine dell'ombra (delle due rette VA e VB) sul piano verticale. Un modo può essere quello di prendere due punti, C sulla retta VA e D sulla retta VB. Successivamente ribaltare detti punti ed il punto di vista O sul piano verticale, ottenendo i punti Or, Cr, Dr. L'immagine C' del punto C sul piano verticale sarà l'intersezione delle rette OrCr e OC; l'immagine D' del punto D l'intersezione tra le rette OrDr e OD. Per finire, le rette AC' e BD' così ottenute rappresentano la proiezione cercata dell'angolo d'ombra sul piano verticale.

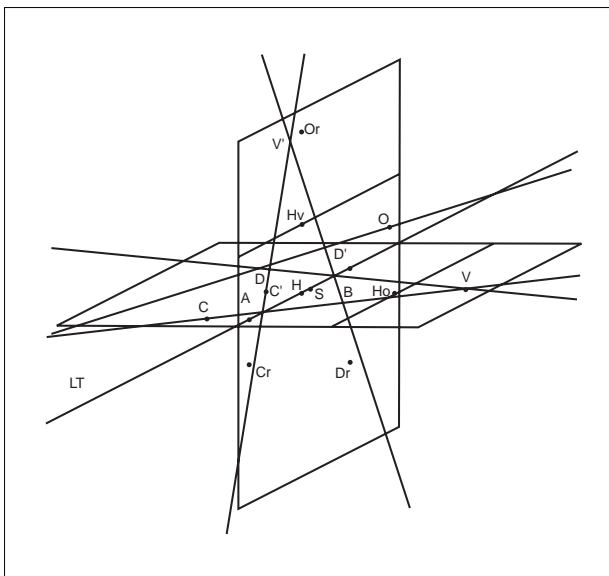
- 13) punto C su retta VA; punto D su retta VB
- 14) retta orizzontale per C; retta orizzontale per D
- 15) Intersezioni rette 14) con Linea Terra nei punti Ct e Dt
- 16) retta verticale per Ct
- 17) retta verticale per Dt
- 18) bisettrice angolo H Ho O
- 19) retta per O parallela a retta 18)
- 20) intersezione retta 19) con retta 8) \mapsto punto Or (O ribaltato)
- 21) retta per C parallela a retta 18)
- 22) retta per D parallela a retta 18)
- 23) intersezione retta 16) con retta 21 \mapsto punto Cr.

(C ribaltato)

- 24) intersezione retta 17) con retta 22 \mapsto punto Dr (D ribaltato)
- 25) retta OC per punti O e C; retta OD per punti O e D
- 26) retta OrCr per punti Or e Cr; retta OrDr per punti Or e Dr
- 27) intersezione rette OC e OrCr \mapsto punto C'
- 28) intersezione rette OD e OrDr \mapsto punto D'
- 29) rette AC' e BD' (sono la proiezione sul piano verticale delle rette che delimitano l'ombra).
- 30) intersezione rette 29) \mapsto punto V' immagine del vertice dell'angolo.

Ora si può notare come si comporta l'immagine dell'ombra al variare del punto di vista O. Fissata l'altezza di O si vede come le rette AC' e BD' convergano o divergano a seconda che il punto di vista O sia più vicino o più lontano dal piano verticale rispetto al vertice dell'ombra. Nel caso particolare in cui tale distanza fosse la stessa, le rette risulterebbero parallele. Se poi il punto di vista O fosse proprio sopra al vertice V dell'ombra, risulterebbero parallele ed ortogonali al piano orizzontale. E' proprio a questo caso che ci si può ricondurre per visualizzare l'effetto prospettico dell'ombra del palo (le considerazioni esposte appaiono più evidenti se si tracciano sui piani PO e PV le rette per Ho ed Hv parallele alla linea di terra LT).

Per chi ha una certa dimestichezza con l'omologia nel piano, si può pensare di ribaltare il punto di vista O e il piano orizzontale PO, sul piano verticale PV. In questo modo si avrà una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano PO e quelli del piano PV, che è proprio un'omologia piana. Il centro dell'omologia è Or, ribaltamento del punto di vista O; l'asse di omologia è la linea di terra LT; le due rette limiti sono le rette per Ho ed Hv parallele alla linea di terra LT (la prima appartenente al piano PO è la retta che ha come immagine i punti impropri del piano PV, la seconda appartenente al piano PV è la retta immagine dei punti impropri del piano PO). Si dimostra che la bisettrice della striscia individuata dalle due rette limiti è equidistante dal centro e dall'asse. Da queste considerazioni è possibile ricostruire il fenomeno sul piano (si tratta in realtà dei due piani



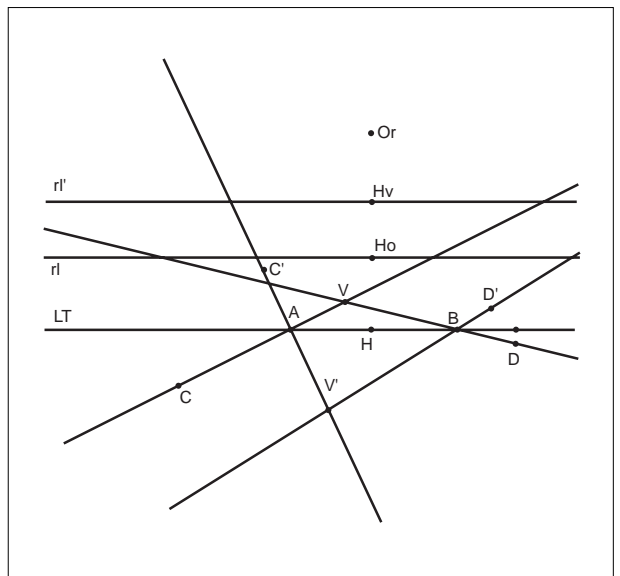
PO e PV sovrapposti). Propongo ora un modo per riprodurre tutto sul piano, mantenendo gli stessi nomi dati agli oggetti nella visione assonometrica.

- 1) crea retta (LT)
- 2) Punto H su retta LT
- 3) retta perpendicolare per H a retta LT
- 4) punti Ho e Hv su retta 3)
- 5) rette parallele per Ho ed Hv a retta LT (rette limiti rl ed rl')
- 6) punto medio tra Ho ed Hv
- 7) simmetrico di H rispetto a punto 6 \mapsto punto Or, cioè punto di vista ribaltato
- 8) crea punto V (vertice d'ombra)
- 9) punti A e B su retta LT (per definire l'angolo d'ombra)
- 10) rette VA e VB (linee di demarcazione luce-ombra)

Ora occorre ricavare l'immagine sul PV. Per come è stato pensato il ribaltamento, tutti gli oggetti sopra menzionati stanno da una stessa parte rispetto alla retta LT. Sulle rette VA e VB prendiamo i punti C e D, ne troviamo i corrispondenti C' e D' attraverso l'omologia di centro Or, asse LT e rette limiti rl ed rl'. Infine le rette AC' e BD' saranno le rette di demarcazione luce-ombra proiettate sul piano verticale PV che si incontrano nel punto V'.

- 11) punto C su retta VA; punto D su retta VB
- 12) retta per due punti CO
- 13) retta per C parallela a retta HvOr
- 14) intersezione retta LT con retta 13)
- 15) retta per due punti: Hv e punto 14)
- 16) intersezione retta COOr con retta 15 \mapsto punto immagine C'
- 17) stessa sequenza di operazioni, da 12 a 16 con il punto D, per ottenere D'
- 18) rette per due punti AC' e BD'
- 19) intersezione rette 18 \mapsto punto V' immagine del vertice V.

Ora si vede bene che quando il vertice V si avvicina alla retta limite rl, V' diverge all'infinito, cioè le due rette immagine di demarcazione luce-ombra diventano paral-



lele (se V coincide con H_o le due rette sono parallele tra loro e ortogonali alla LT , caso particolare che più si avvicina al problema posto all'inizio). Per visualizzare tali osservazioni si può muovere direttamente il punto V , o spostare il punto di vista ribaltato Or per mezzo

delle sue tracce H_o ed H_v sui due piani PO e PV (Or si avvicina o allontana dalla retta LT) o anche del punto H sulla retta LT (Or si sposta lateralmente, cioè parallelamente alla retta LT). ■



Elicottero

di *Simone Lavecchia e Alessandro Bianconi*
 Classe 4Ai (a.s.1996/97)
 ITCS Salvemini - Casalecchio di Reno (BO)

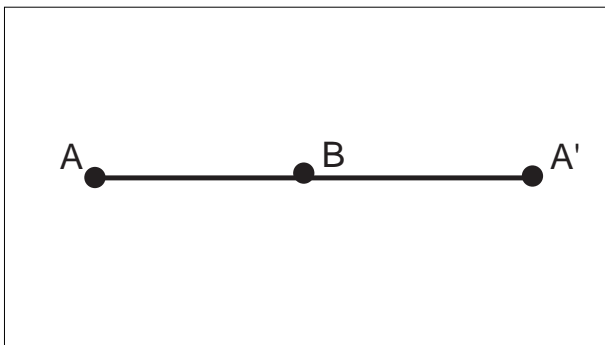
Cabri Geometre è un programma di geometria piana che può essere utilizzato anche per creare oggetti 3D. Noi l'abbiamo usato in Matematica per studiare i luoghi geometrici e abbiamo presentato il lavoro fatto alla Rassegna "Scuola 3.0". Durante la rassegna, per ingannare il tempo, ci siamo un po' sbizzarriti e abbiamo costruito oggetti diversi, fra cui un elicottero.

L'elicottero ha solo due parti un po' complesse:

- il rotore principale;
- il rotore posteriore.

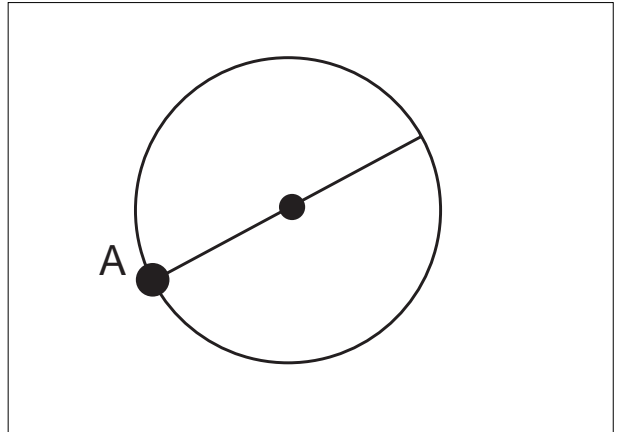
L'elica superiore utilizza un effetto prospettico che dà l'impressione che questa si muova verso il fondo dell'immagine, infatti quando si sposta il punto lasciato visibile sembra che essa giri nello spazio.

In pratica sfrutta una simmetria fra punti. Dati i punti A e B , abbiamo costruito il simmetrico di A rispetto a B ottenendo A' . In questo modo quando si muove A , il segmento AA' si restringe o si allarga a seconda della distanza di A rispetto a B .



L'unico problema è la lunghezza del segmento che unisce A e A' perché in Cabri non si possono fissare dei limiti. Quando si muove A l'elica può diventare sproporzionata. La seconda elica invece è molto più semplice. Abbiamo creato una circonferenza (centro, punto) e su questa abbiamo creato un punto A e quindi il suo simmetrico rispetto al centro del cerchio. Il nuovo punto A' è stato collegato ad A con un segmento. Abbiamo infine

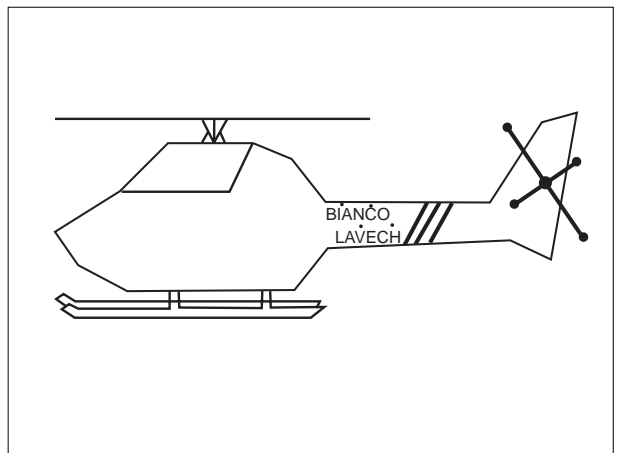
nascosto con la gomma il centro del cerchio e il punto A' in modo che si potesse vedere solo A , per poterlo poi muovere intorno alla circonferenza e vedere un segmen-



to che gira come un'elica.

Il resto dell'elicottero è stato fatto con punti che sono stati nascosti e vari segmenti collegati fra loro.

Infine è stata utilizzata un po' di fantasia coi colori, che purtroppo non potrete ammirare. ■



Cabri informa

Sta nascendo il sito web "Fardiconto: risorse in rete per l'area matematica" (<http://arci01.bo.cnr.it/fardiconto/>).

Queste pagine sono rivolte a studenti e docenti di scuola secondaria e a quanti, anche se impegnati in altri ambienti professionali, conservano curiosità ed interesse per la matematica. Il progetto nasce per fornire soprattutto informazioni, in lingua italiana, su varie attività che riguardano questa disciplina.

Invitiamo tutti i lettori di CABRIRRSAE a prenderne visione e a segnalare eventuali osservazioni e suggerimenti.



Soluzione di "un problema sul triangolo"

proposto sul CABRIIRSAE n° 13

di Franca Noé

I.R.R.S.A.E. - E.R. Bologna

Dato un triangolo ABC, siano a, b, c le misure dei lati opposti rispettivamente ai vertici A, B, C; sia inoltre p la misura del semiperimetro.

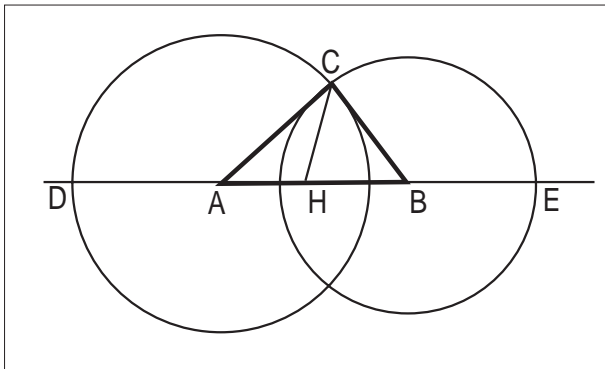
Se un segmento CH divide ABC in due triangoli isoperimetrici allora dovrà essere

$$CA + AH = HB + BC = p$$

per cui

$$AH = p - b \quad \text{e} \quad HB = p - a$$

Per individuare il punto H basta quindi prolungare AB dalla parte di A con un segmento AD congruente ad AC e dalla parte di B con un segmento BE congruente a BC; il punto medio del segmento DE sarà il punto H cercato (fig.1).

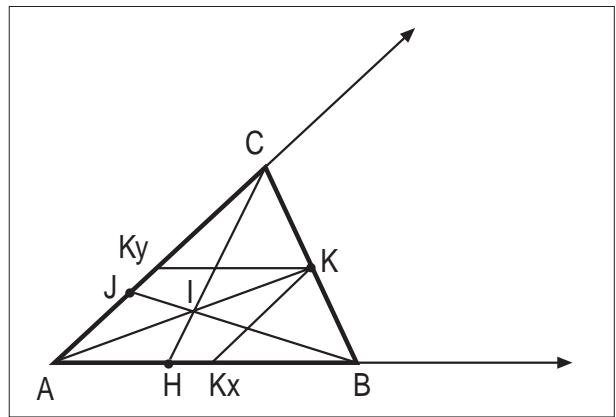


In modo analogo si ottengono i punti K e J sui lati BC e CA tali che

$$BK = p - c \quad KC = p - b \quad CJ = p - a \quad JA = p - c$$

E' evidente che i segmenti in cui H, K, J dividono i lati sono a due a due congruenti.

Modificando a piacere il triangolo si scopre inoltre che i segmenti CH, AK, BJ passano tutti per uno stesso punto I. Questa ulteriore proprietà della nostra figura può essere dimostrata dagli studenti del triennio in modo algebrico: fissando un sistema di riferimento obliquo con origine in A e gli assi lungo le rette dei lati AB e AC (fig.2), si hanno le coordinate



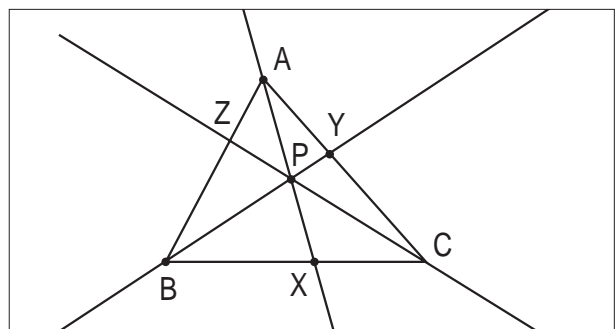
$$\begin{matrix} A(0; 0) & B(c; 0) & C(0; b) \\ K(c(p-b)/a; b(p-c)/a) & J(0; p-c) & H(p-b; 0) \end{matrix}$$

con le quali si scrivono facilmente le equazioni delle rette AK, BJ, CH e si verifica che concorrono in uno stesso punto I.

Un'altra verifica della stessa proprietà può essere fatta utilizzando un teorema dovuto a Giovanni Ceva¹ di cui ho trovato due diversi enunciati:

1) Se tre rette, dette ceviane, AX, BY, CZ, passanti per i vertici di un triangolo ABC e secanti i lati in X, Y, Z, concorrono in uno stesso punto P (fig.3), allora

$$\frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \frac{AZ}{ZB} = 1$$

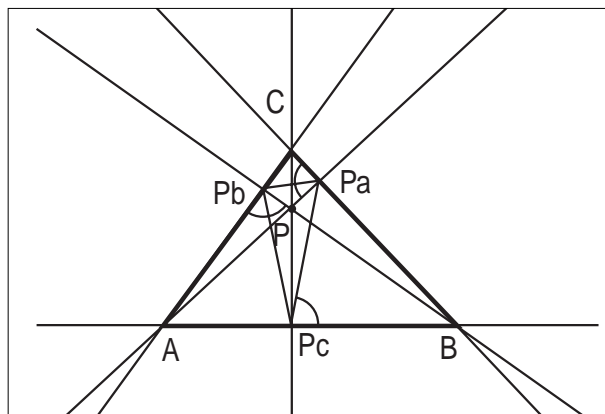
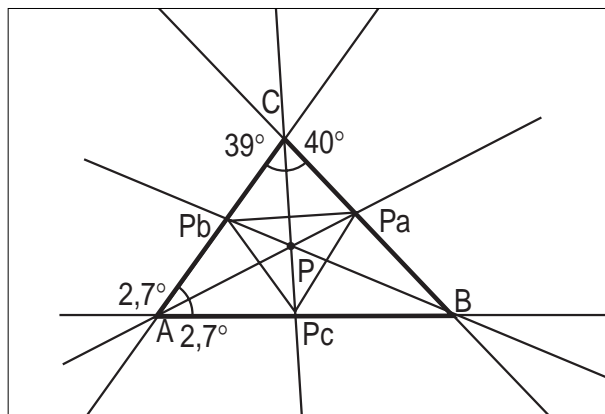
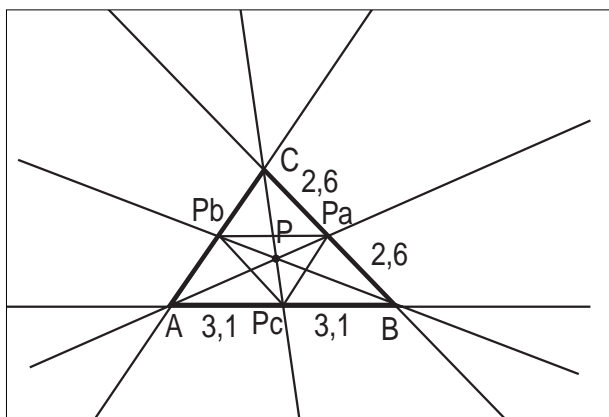
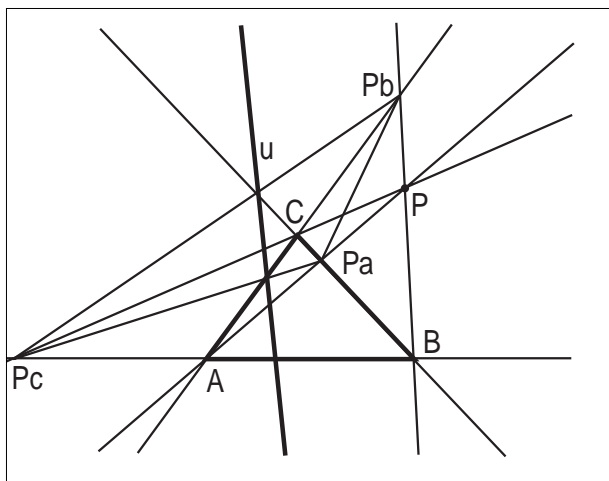


2) Dato un triangolo ABC, se P è un punto qualunque del piano e le rette PA, PB, PC incontrano le rette dei lati in P_a, P_b, P_c, i triangoli ABC e P_aP_bP_c si corrispondono in una omologia di centro P e asse u (fig.4), detti polo trilineare e polare trilineare rispetto al triangolo ABC; sussiste allora il seguente teorema

$$(BCP_a)(CAP_b)(ABP_c) = -1$$

dove la scrittura con le parentesi rappresenta il rapporto semplice di tre punti su una retta orientata.

Il teorema vale anche inversamente: i punti H, K, J verificano ciascuna delle uguaglianze per cui possiamo affermare che i segmenti CH, AK, BJ concorrono in uno stesso punto I. Utilizzando il Cabri si può modificare la posizione del punto P della figura 4 per ottenere una visualizzazione delle analoghe proprietà delle mediane, bisettrici, altezze.



¹ G. Ceva, De lineis rectis invicem secantibus statica constructio, Milano 1678

Bibliografia

• *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, a cura di L. Berzolari - G. Vivanti - D. Gigli, edita

dalla Hoepli, vol. II parte prima, Cap. XXIV: La geometria del triangolo. Rette notevoli.

- *Esercizi di geometria*, di Mario Villa vol. I, terza edizione, edito dalla Patron di Bologna
- *Geometry revisited*, di H.S.M. Coxeter e S.L. Greitzer, pubblicato dalla Mathematical Association of America.

Cori e seminari

Il Centro di Ricerca P.R.I.S.T.E.M.-ELEUSI dell'università Bocconi di Milano organizza nei giorni 30-31 marzo e 1 aprile un convegno di aggiornamento dal titolo *Multichee?, MATEMATICA E NUOVI LINGUAGGI MULTIMEDIALI*. Il Convegno si svolgerà presso l'Università Bocconi, via Sarfatti, 25 Milano e si rivolge in particolare agli insegnanti di discipline matematiche, fisiche e informatiche. Per informazioni rivolgersi alla segreteria del Centro, tel 02/58365113, fax 02/58365112.

Nei giorni 3 e 4 aprile presso l'Auditorium Santa Margherita, Università Cà Foscari di Venezia, si terrà il Convegno "Matematica e Cultura 1998" il cui scopo è di proseguire l'analisi (affrontata nel precedente del 1997) delle possibili connessioni tra la matematica e altri aspetti del sapere umano.

Per informazioni sul convegno:

Michele Emmer, Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza di Roma

Fax 041/44701007

E-mail emmer@mat.uniroma1.it

Per informazioni logistiche:

Dipartimento di Matematica Applicata e Informatica, Università Cà Foscari di Venezia

Tel 041/5221345-2578266

Fax 041/5221756

E-mail roxi@unive.it roxi@unive.it

Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, sede di venezia

Tel 041/717940 Fax 041/720510

A Milano, Palazzo delle Stelline, Corso Magenta 61, si svolgerà nei giorni 21-22-23 aprile p.v. la XI edizione di "INFORSCUOLA 98"; la manifestazione, organizzata da Hugony Editore, comprende un area "Spazio aperto: progetti, prodotti ed esperienze delle Scuole", da proporre a Scuole e Docenti come occasione particolare di comunicazione e valorizzazione di esperienze realizzate con le nuove tecnologie.

Per informazioni rivolgersi a Maria Luisa Penati, Segreteria Relatori

Tel 02/4983721-4981587 Fax 02/48006387



6 Unità didattiche a carattere geometrico

di Paolo Neri

Scuola Media Statale "Giovanni XXIII" Saliceto (CN)

Pubblichiamo ancora due U.D. delle sei presentate dal Prof. Paolo Neri (vedi bollettino n° 14)

U2:

- angoli al centro e angoli alla circonferenza
- triangolo costruito su una semicirconferenza

Classe 3° Media

Unità didattica di geometria

Aree disciplinari:

Matematica

Educazione Tecnica

Tempo previsto:

5 ore

Prerequisiti:

Conosce e sa usare il software applicativo "Cabri"

Conosce il segmento e la retta

Conosce l'angolo: misura e classificazione

Conosce il triangolo e le relazioni tra gli angoli interni ed esterni

Conosce le proprietà di una circonferenza

Conosce e sa usare una relazione tra due grandezze

Obiettivi:

Trovare la relazione tra un angolo alla circonferenza ed un angolo al centro

Capire che un triangolo costruito in una semicirconferenza è rettangolo

Trovare l'invarianza della misura di un angolo alla circonferenza rispetto ad un angolo al centro

Contenuti:

Relazione tra un angolo alla circonferenza ed un angolo al centro di una circonferenza

Proprietà del triangolo inscritto in una semicirconferenza

Fasi di lavoro:

1) Presentazione U.D. e delle sue fasi

2) Consegna scheda n. 1 contenente le istruzioni per costruire la figura da analizzare stiracchiando i punti

base A, B, C, O

3) Osservazioni e discussione delle osservazioni

4) Consegna scheda lavoro n. 2 di comprensione e verifica contenente quesiti guidati per scoprire e verificare i concetti principali analizzati e le eventuali osservazioni dei ragazzi

5) Consegna scheda lavoro n. 3 per analizzare i triangoli costruiti in una semicirconferenza

Scheda di lavoro n. 1: costruzione figura

1) CREAZIONE: Circonferenza (centro O e punto P)

2) COSTRUZIONE: punto su un oggetto (A, B, C sulla circonferenza)

3) CREAZIONE: segmento (AC, CB, AO, OB)

4) CREAZIONE: retta per 2 punti (CO)

5) EDIZIONE: nomi (circonferenza) c; (retta per C e O) r

6) COSTRUZIONE: intersezione tra 2 oggetti (c, r) D

7) DIVERSI: segna un angolo: $\hat{A}CB$, $\hat{A}OB$, $\hat{A}CO$, $\hat{A}OD$, $\hat{B}CO$, $\hat{B}OD$

8) DIVERSI: misura segmenti CO, AO, OB; gli angoli $\hat{A}CB$, $\hat{A}OB$, $\hat{A}CO$, $\hat{A}OD$, $\hat{B}CO$, $\hat{B}OD$

9) EDIZIONE: aspetto degli oggetti: aspetto

angoli $\hat{A}CO$, $\hat{A}OD$ rosso

angoli $\hat{B}CO$, $\hat{B}OD$ verde

segmenti AO, OB, OC verde

Scheda di lavoro n. 2: comprensione e verifica

1) Osserva il triangolo ACO: come lo classifichi in base ai lati?

dirai: AO.....CO perchè rappresentano 2 della stessa circonferenza, quindi il triangolo ACO è

; sfruttando la nota proprietà del triangolo puoi affermare che gli angoli $\hat{A}CO$ e $\hat{C}AO$ sono fra loro

2) Ricordando le proprietà dell'angolo esterno in un triangolo puoi affermare che l'angolo $\hat{A}OD$ $\hat{A}CO + \hat{C}AO$, poiché $\hat{A}CO$ $\hat{C}AO$ puoi concludere che $\hat{A}OD$ $2\hat{A}CO$

3) Osserva ora il triangolo BOC: ripetendo passaggi analoghi nel triangolo ACO puoi concludere che è valida la relazione: $\hat{B}OD$ $2\hat{B}CO$.

4) Quale relazione puoi ora stabilire tra gli angoli $\hat{A}OB$ e $\hat{A}CB$?

5) Sfruttando le conclusioni precedenti e tenendo presente che:

$$\hat{A}OB = \hat{A}OD \dots \hat{B}OD \text{ e che}$$

$$\hat{A}CB = \hat{A}CO \dots \hat{B}CO$$

puoi concludere che $\hat{A}OB = \dots \hat{A}CB$ perchè somma di angoli nello stesso rapporto

6) Prova ora a formulare la relazione fra un angolo al centro e un corrispondente angolo alla circonferenza:

dirai : **un angolo al centro è sempre il di un corrispondente angolo alla circonferenza.**

Scheda di lavoro n. 3:

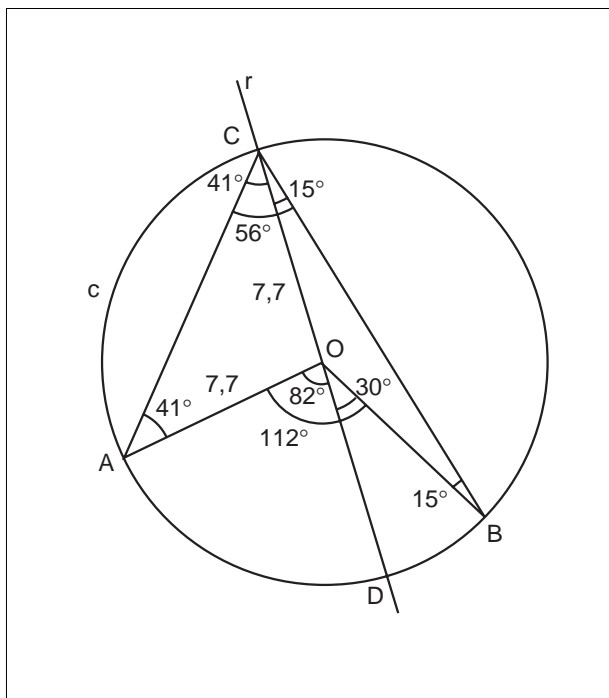
proprietà di un triangolo costruito su una semicirconferenza

1) Prova a muovere i punti base A o B finchè la misura

- dell'angolo $\hat{A}OB$ non diventa di 180° .
 Quanto misura l'angolo ACB ? Perchè?

 2) Lasciando fermi i punti A e B, prova a muovere il punto C rilasciando il mouse in diverse posizioni scelte da te a caso.
 Cosa puoi dire della misura dell'angolo $\hat{A}CB$?
 dirai: la misura rimane perchè

 3) Cosa puoi dire della posizione del triangolo ABC rispetto alla circonferenza c?
 dirai: poichè il lato AB coincide col
 della circonferenza (e il punto C è anch'esso sulla circonferenza), puoi affermare che il triangolo ABC è **costruito** su una **semicirconferenza**.
 4) Quanto misura l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC?
 dirai: poichè l'ipotenusa del triangolo coincide con
 della circonferenza, la sua misura è
 5) Prova ora a formulare una proposizione che riassume quanto appreso ai punti 2) e 3), dirai:.....



U3:
costruzione e proprietà delle tangenti ad una circonferenza condotte da un punto P esterno alla circonferenza

Classe 3° Media
 Unità didattica di geometria
 Aree disciplinari:
 Matematica
 Educazione Tecnica
Tempo previsto:
 5 ore
Prerequisiti:
 Conosce e sa utilizzare il software applicativo "Cabri"

- Conosce i triangoli
- Conosce l'angolo: misura e classificazione
- Conosce la circonferenza e le posizioni reciproche di 2 circonferenze e tra una circonferenza e un punto
- Conosce il triangolo rettangolo ed il teorema di Pitagora
- Conosce e sa usare una relazione tra due grandezze
- Conosce la simmetria assiale
- Conosce la relazione tra un angolo alla circonferenza ed un angolo al centro

Obiettivi:

- Capire che esistono 2 rette tangenti ad una circonferenza passanti per un punto P esterno alla circonferenza
- Costruire le tangenti ad una circonferenza per un punto P esterno alla circonferenza
- Capire che i segmenti di tangenza ad una circonferenza per un punto P esterno alla circonferenza sono fra loro congruenti
- Capire la posizione reciproca tra una tangente ed il raggio che passa per il punto di tangenza

Contenuti:

- tangenti ad una circonferenza per un punto esterno
- relazione fra i segmenti tangenti ad una circonferenza passanti per un punto esterno ad una circonferenza
- relazione tra una retta (o un segmento) tangente ad una circonferenza e il raggio che passa per il punto di tangenza

Fasi di lavoro:

- 1) Presentazione U.D. e delle sue fasi
- 2) Consegna scheda di lavoro n. 1 contenente le istruzioni per costruire la figura da analizzare "stiracchiando la circonferenza c ed il punto base P"
- 3) Consegna scheda lavoro n. 2 di comprensione e verifica contenente quesiti guidati per scoprire e verificare i principali concetti analizzati e le eventuali osservazioni dei ragazzi
- 4) Consegna scheda lavoro n. 3 per analizzare cosa accade quando il punto P assume posizioni particolari rispetto alla circonferenza c

Scheda di lavoro n. 1:
costruzione figura

- 1) CREAZIONE: circonferenza
- 2) COSTRUZIONE: centro di una circonferenza: O
- 3) COSTRUZIONE:
- 4) CREAZIONE: punto: P (esterno alla circonferenza)
- 5) CREAZIONE: segmento (PO)
- 6) COSTRUZIONE: punto medio di un segmento (OP) M
- 7) CREAZIONE: circonferenza (centro M; punto O)
- 8) EDIZIONE: nomi (circonferenza centro O) c; (circonf. centro M) c'
- 9) COSTRUZIONE: intersezione di 2 oggetti (circonf c e c') A e B
- 10) CREAZIONE: segmento (AO, B)
- 11) CREAZIONE: retta per 2 punti (PA e PB)
- 12) CREAZIONE: segmento (PA, PB)
- 13) EDIZIONE: aspetto degli oggetti gomma (rette PA e PB)
- 14) DIVERSI: segna un angolo (angoli $\hat{P}AO$, $\hat{P}BO$,

$\hat{A}OP, \hat{B}OP, \hat{A}PO, \hat{B}PO$

- 15) DIVERSI: misura (angoli punto 13), (segmenti PA, PB, AO, BO)
- 16) EDIZIONE: aspetto degli oggetti aspetto segmenti AP e BP rosso segmenti AO e BO blu angoli OAP e OPB verde

Scheda di lavoro n. 2: comprensione e verifica

- 1) Osserva il triangolo AOP. Qual è la sua posizione rispetto alla circonferenza c'?
- Dirai : il lato OP coincide con un della circonferenza c', il vertice A alla circonferenza c' (ed anche alla circonferenza c) ; pertanto puoi concludere: il triangolo AOP è in una semicirconferenza appartenente alla circonferenza c'.
- 2) Come definiresti l'angolo OMP rispetto all circonf c'?
- Dirai OMP è un angolo al e misura perchè i suoi lati sono adiacenti.
- 3) Come definiresti l'angolo OAP?
- dirai: OAP è un angolo alla corrispondente all'angolo al centro OMP.
- 4) Quanto misura l'angolo OAP?
- Dirai l'angolo OAP misura in quanto dell'angolo al centro OMP che misura
- 5) Cosa puoi dire di un triangolo costruito in una semicirconferenza?
- Dirai: un triangolo costruito in una semicirconferenza è sempre
- 6) Osserva ora il triangolo OBP. Com'è l'angolo OBP?
- dirai : l'angolo OBP è per le stesse ragioni del triangolo
- 7) Confronta ora i lati AP e BP dei triangoli OAP e OBP.
- Dirai:
- a) i lati AO e BO sono fra loro perchè di una stessa circonferenza.
- b) il lato OP è in cioè appartiene ad entrambi i triangoli.
- c) poichè l'angolo OAP = OPB = 90° e sfruttando il teorema di Pitagora, puoi concludere: AP BP.
- 8) Come sono fra loro i triangoli AOP e BOP?
- Dirai: essi sono in quanto hanno i 3 lati a 2 a 2 congruenti.
- 9) In quale isometria si corrispondono i triangoli AOP e BOP?
- Dirai poichè sono congruenti e il segmento OP è in, essi si corrispondono in una di asse OP.
- 10) Prova ora a formulare una conclusione riguardo ai segmenti di tangenza ad una circonf per un punto esterno, dirai:
- i segmenti di tangenza condotti per un punto esterno ad una circonferenza sono sempre fra loro.
- 11) Qual è la posizione reciproca tra un segmento tangente ed il raggio che passa per il punto di tangenza?
- Dirai :
- 12) Prova a muovere il punto base P o la circonferenza c. Quali sono gli elementi o le relazioni varianti e in-

rianti che noti in questa trasformazione della figura?

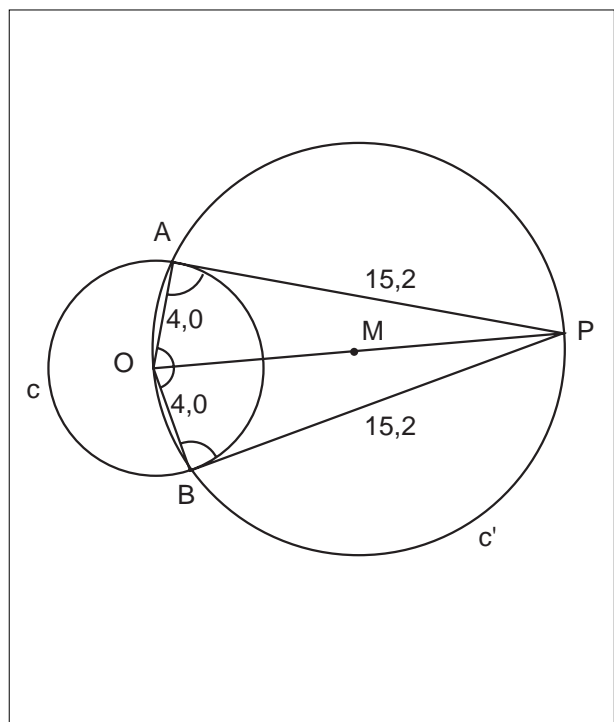
Dirai:

elementi varianti:.....

elementi invarianti:

Scheda di lavoro n. 3: analisi casi particolari

- 1) Sposta ora il punto base P fino a quando non si trova sulla circonf c.
- Cosa accade ai segmenti di tangenza AP e BP?
- Dirai:.....
- 2) Quante rette tangenti ad una circonferenza passanti per un punto P che sta sulla circonferenza stessa esistono ?
- Dirai:.....
- 3) Sposta ulteriormente il punto P finchè risulta interno alla circonf c.
- Cosa accade ai segmenti tangenti AP e BP?
- Dirai:.....
- 4) Perchè secondo te accade questo?
- Per rispondere tieni presenti come è stata costruita la figura con Cabri.
- Dirai:.....
- 5) Prendi un foglio di carta; disegna una circonferenza ed un punto interno ad essa e chiamalo P.
- Prova a costruire, con gli strumenti della geometria, le (o la) tangenti alla circonferenza.
- Cosa noti?.....
- Cosa puoi concludere?.....
- 6) Prova infine a formulare in modo completo una conclusione relativamente alle tangenti ad una circonferenza condotte per un punto P
- Dirai:.....



Proposte di lavoro

Tre Istituti di Suzzara (MN), SMS "G. Pascoli - IM "A. Manzoni" - ITC "G. Marangoni", si sono associati per promuovere un corso di aggiornamento sull'uso degli strumenti informatici nell'insegnamento della geometria. Il corso è strutturato in due parti, di cui la prima si è svolta nell'anno scolastico 1996/97 e la seconda nell'anno 1997/98.

La metodologia utilizzata è "un approccio euristico alla geometria con presentazione e soluzione di problemi e quesiti la cui soluzione sia possibile anche per via geometrica".

Presentiamo in questa sezione del bollettino tre quesiti proposti nella prima parte curata da:

Vanni Gorni

Liceo Scientifico annesso a IM "A. Manzoni" - Suzzara MN

Aldo Compagni

Liceo Linguistico annesso a IM "A. Manzoni" - Suzzara MN

Caccia al tesoro

Un cacciatore di tesori trova un antico diario di bordo su cui un pirata ha scritto:

" ... raggiunta l'isola cerea l'unica orchidea O che io ho piantato nell'isola e, a partire da essa, cammina in linea retta fino alla grande acacia A e misura questa distanza. Dall'acacia A ruota di un angolo retto verso destra e cammina in linea retta per una distanza pari a quella che hai appena misurato e segna questo punto con un sasso S. Ancora partendo dall'orchidea O cammina in linea retta fino al baobab B e misura questa distanza. Dal baobab B ruota di un angolo retto verso sinistra e cammina in linea retta per una distanza uguale a quella appena misurata, segna questo punto con un rametto R. Unisci R con S e nel punto medio troverai il tesoro T. "

Il cacciatore raggiunge l'isola, individua l'acacia A, il baobab B ma l'isola è ora tutta ricoperta da bellissime orchidee. Nonostante ciò il cacciatore riesce ugualmente ad individuare la posizione esatta del Tesoro. Come ha fatto?

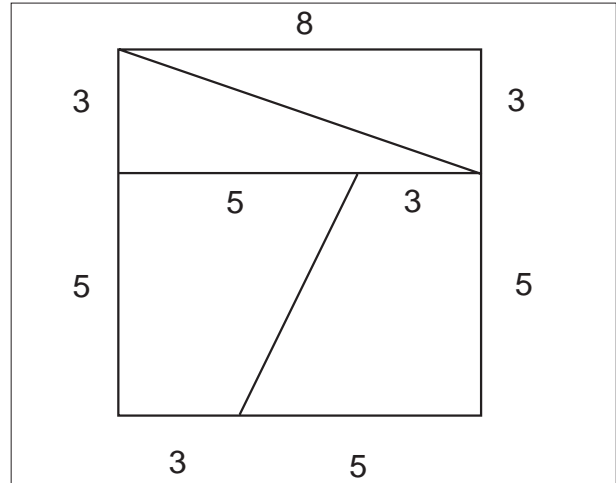
Si consiglia di:

1. Sulla base della descrizione ricostruire la mappa originale con Cabri-Géomètre.
2. Osservare cosa succede al variare di O.
3. Stabilire una strategia che consenta di trovare il Tesoro T senza conoscere la posizione della prima orchidea piantata sull'isola.

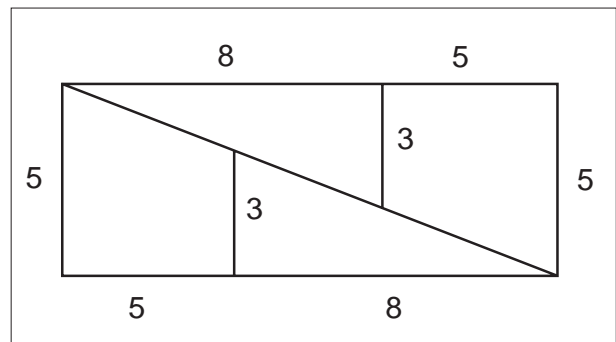
Non ci posso credere !

(un falso dimostratore)

Un foglio di carta a forma di quadrato di lato 8 U (unità arbitrarie) quindi di area $64 U^2$, viene ritagliato come da figura. Se ne ricavano due trapezi e due triangoli rettangoli.



Ricomponendo gli oggetti come nella figura riportata sotto si ottiene un rettangolo di lati 5 e 13 U ed ovviamente di area $65 U^2$.

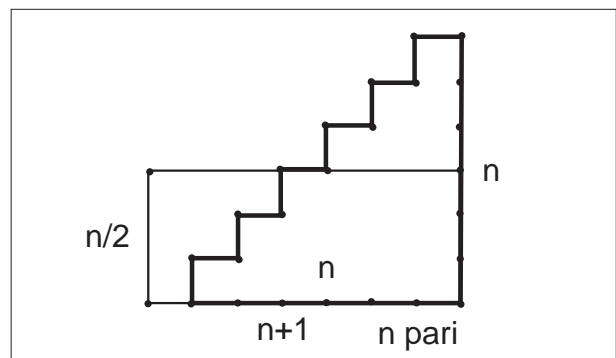


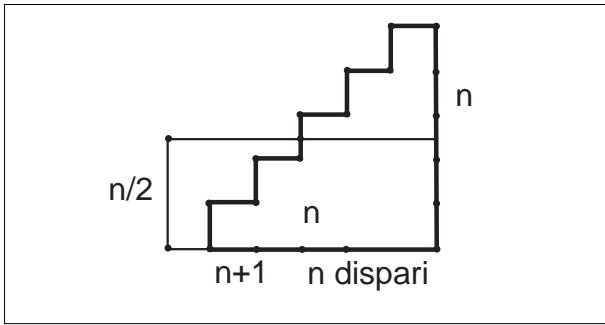
Quindi o si è creato dal nulla un'area di $1 U^2$ oppure ... si dia la caccia all'errore utilizzando Cabri-Geometre. Lo scarto è piccolo ma si può utilizzare lo zoom.

Σ(Sommatorie)

Per provare che $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

si possono utilizzare delle figure come quelle riportate sotto e in esse far ricorso alle proprietà di simmetria.



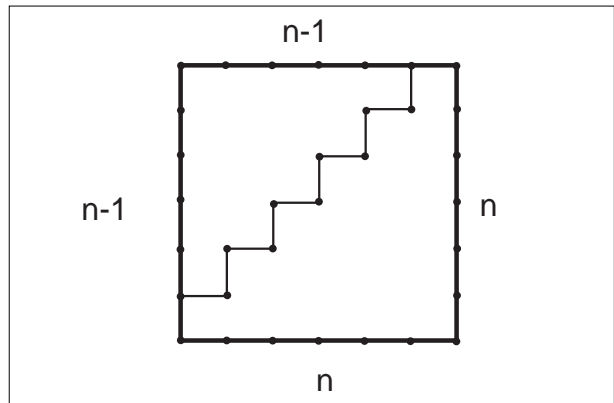


- Quale figura costruire per provare che $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$?
- La tecnica é utilizzabile per determinare la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica qualsiasi? Ricordando che i numeri naturali del tipo

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

sono detti triangolari si ha che ogni quadrato é la somma di due triangolari consecutivi:

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$



- Con l'aiuto di Cabri si costruisca un triangolo equilatero con i lati divisi in n parti uguali e si congiungano questi punti con dei segmenti paralleli ai lati stessi. Quanti equilateri piú piccoli si ottengono? Si cerchi di "contarli" con le tecniche geometriche viste sopra.

Da AbraCAdabRI

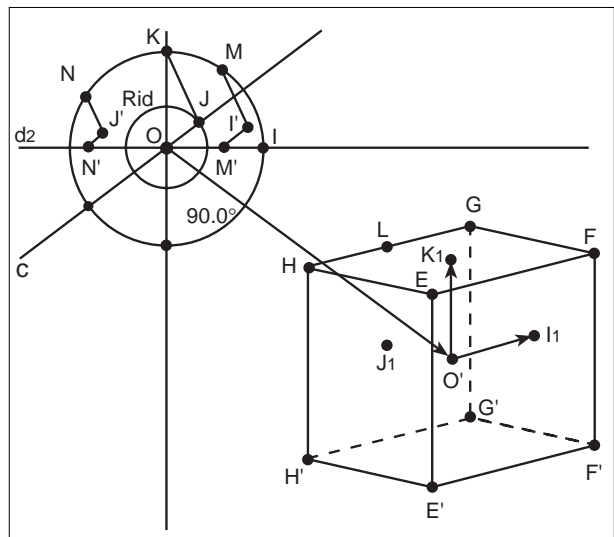
Simulazione della rotazione di un cubo attorno a uno dei suoi assi

traduzione di Giuliana Bettini
I.R.R.S.A.E. E-R Bologna

Nella traduzione da Abracadabri apparsa nel N.14 del bollettino ci si proponeva di simulare, con Cabri-géomètre, la rotazione di un triedro attorno a uno dei suoi assi; quella costruzione ci permette ora di fare una breve incursione nell'universo dei poliedri: iniziamo con il cubo.

Si richiama la figura "triedro" ⁽¹⁾. Sia O' un punto base e ci si proponga di disegnare il cubo di centro O' che ammetta le immagini I₁, J₁, K₁ dei punti I', J', K nella traslazione di vettore OO' come centro di tre delle sue facce.

E' sufficiente costruire i punti L e G immagini di J₁ e L nelle traslazioni di vettore O'K₁ e O'I₁, poi i punti H e E



simmetrici di G rispetto a L e K' e infine il punto F simmetrico di H rispetto K₁. Si ottengono i quattro vertici E, F, G, H della faccia superiore del cubo, i vertici G', H', E', F' della faccia opposta si ottengono con l'aiuto della simmetria di centro O'.

Non resta che tracciare gli spigoli del cubo e nascondere i punti I₁, J₁, K₁ (il punto O' servirà per spostare il cubo sullo schermo se necessario).

Spostando il punto M sul cerchio c si simula la rotazione del cubo intorno all'asse O'K₁.

⁽¹⁾ La costruzione della figura "triedro" utilizzata in questo breve articolo é apparsa nella sezione Abracadabri del bollettino N.14.

In questo numero

- Nella sezione *Cabri discusso* presentiamo un articolo in cui si affronta il problema della equiscomponibilità nello spazio e si propone il ricorso alle “tecniche” illustrate in “Cabri e il disegno” (bollettino N.13, *Speciale convegno*), per realizzare la scomposizione e la ricomposizione di cubi, parallelepipedi e piramidi.
- Nella sezione *Come fare* viene proposta una costruzione dell’asse radicale di due circonferenze più generale e con un minor numero di oggetti di quella apparsa nel N.14. Seguono per la media superiore, quattro articoli di cui due sulla omologia: in uno continua la presentazione della omologia piana iniziata in un articolo precedente (N.12), nell’altro si utilizza l’omologia per simulare con Cabri l’ombra di un lampione; segue un breve articolo scritto da due ragazzi che hanno realizzato con Cabri la costruzione di un elicottero: è il primo lavoro, ospitato dal bollettino, scritto da alunni della scuola media e speriamo che sia seguito da altre iniziative del genere. Il quarto articolo per le medie superiori è la soluzione del problema proposto nel N.13. Chiude la sezione un lavoro dedicato alla scuola media inferiore: due unità didattiche sulla relazione fra angoli al centro e alla circonferenza e la costruzione delle tangenti a una circonferenza.
- Nella sezione *Proposte di lavoro* si presentano tre quesiti che sono stati proposti in un corso di aggiornamento sull’uso di Cabri.
- Infine, da *AbraCAdaBRI*, proponiamo la simulazione della rotazione di un cubo nello spazio tridimensionale.

L'immagine

L’immagine di copertina è tratta dal volume “Il moto dei pianeti intorno al sole. Una lezione inedita di Richard Feynman”, a cura di D.L. Goodstein e J.R. Goodstein, Zanichelli Editore, Bologna 1997. L’autografo, proveniente dagli appunti per la lezione, si riferisce agli ultimi passaggi della dimostrazione geometrica della legge delle ellissi data da Isaac Newton, ma elaborata in modo originale dal fisico americano per gli studenti del California Institute of Technology.

Inviateci i vostri articoli

CABRIRRSAE pubblica contributi relativi all’utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre, con particolare attenzione alla valenza didattica e all’inserimento nel curriculum scolastico.

Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• SUPPORTO CARTACEO

- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell’autore;
- indicate per ogni figura il nome con cui è registrata sul supporto magnetico;
- per i “*luoghi geometrici*” inviate la stampata con l’indicazione del punto d’inserimento.

• SUPPORTO MAGNETICO

- il file di *testo* in **formato Word** (estensione .DOC) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte in formato Cabri (estensione .FIG) e in formato Hewlett Packard Graphics Language (estensione .HGL). Per ottenere le figure in questo formato si rimanda al capitolo 8.5 Stampa su File (pag. 70) del manuale di Cabri Géomètre;
- anche se Cabri Géomètre permette di tracciare oggetti a colori, non utilizzate questa opzione nei file che allegate;
- altri materiali (immagini, tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell’applicativo che le ha generate.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull’utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana “Quaderni di CABRIRRSAE”.



COMITATO SCIENTIFICO

Giulio Cesare Barozzi (Università di Bologna)
 Mario Barra (Università La Sapienza - Roma)
 Paolo Boieri (Politecnico di Torino)
 Colette Laborde (IMAG Grenoble)
 Gianni Zanarini (Università di Bologna)

COMITATO DI REDAZIONE

Anna Maria Arpinati, Maria Elena Basile, Giuliana Bettini, Maria Grazia Masi, Valerio Mezzogori, Franca Noè, Daniele Tasso

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 Bologna

Supplemento al n.1 Gennaio-Febbraio 1998, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell’Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell’Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE/ER.



Il materiale pubblicato da CABRIRRSAE può essere riprodotto, citando la fonte