CABRIRRSAE

Bollettino degli utilizzatori di CABRI-géomètre

Dicembre 1997 - N. 14

SOMMARIO

Indirizzo

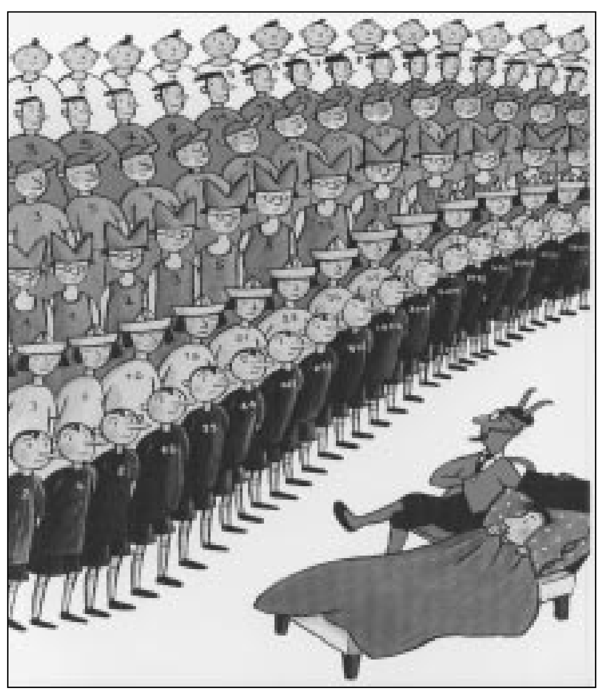
Bollettino CABRI*RRSAE*
IRRSAE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7
40121 Bologna

Tel. (051)22.76.69
Fax (051)26.92.21

E-mail:cabri@arci01.bo.cnr.it
Web: kidslink.bo.cnr.it/cabri/

Gruppo di discussione:
cabrinews@arci01.bo.cnr.it

I.R.R.S.A.E.
Emilia-Romagna



Cabri discusso

Relazione didattica

di Rossana M. Rossi Bucciarelli
Istituto Tecnico Industriale "G. Ferraris"
San Giovanni Valdarno (Ar)

Motivazione della scelta della metodologia seguita e della strumentazione adottata per lo svolgimento del programma di geometria nel primo anno dell'ITI: con i nuovi curricola l'orario di insegnamento è rimasto sempre di cinque ore, di cui due di laboratorio, mentre con il P.N.I ce ne era solo una. Questa nuova situazione mi ha fatto pensare che, non dovendo gli allievi diventare degli esperti informatici, era bene riguadagnare spazio per la parte più prettamente matematica e rimandare alla seconda l'introduzione del linguaggio Pascal. Inoltre, prendendo atto che il mondo della comunicazione sta cambiando, ritengo che sia necessario trattare i contenuti disciplinari, che possono rimanere anche gli stessi, con strumenti didattici di tipo tecnologico. Non ultimo trovo il CABRI un ottimo supporto per l'insegnamento della geometria, trascurata negli ultimi anni per mancanza di tempo.
L'esperienza, se considero il rapporto tra lo sforzo e i benefici, si è rivelata positiva.

Ambiente di lavoro:

l'aula in cui opero è un laboratorio multimediale dotato di dieci posti di lavoro ciascuno con un PC 8088 fornito di mouse, una lavagna, una cattedra con un PC 8088 dotato di mouse, una telecamera e un videoregistratore, che trasmette immagini in movimento, collegati in rete con tutti i banchi. Tale aula mi permette di far lavorare gli allievi in coppia, eccettuato in un caso, e di trasmettere su ogni video le immagini di materiale cartaceo e quelle prodotte dal PC della cattedra. Gli allievi sono quelli di una prima di ventuno alunni di cui tre sono stati licenziati dalla scuola media con ottimo quattro con distinto, cinque con buono e nove con sufficiente. Uno dei ragazzi ha avuto l'insegnante di sostegno nella scuola dell'obbligo, ma, per volere della famiglia, non ha usufruito di tale diritto nell'anno scolastico 95/'96.
Sono presenti, durante le ore di laboratorio, un tecnico e un I.T.P., che fino all' anno scolastico 1994/'95 ha insegnato Reparti di lavorazione, non ha mai seguito corsi di aggiornamento di alfabetizzazione informatica ed è

ARGOMENTI DI GEOMETRIA TRATTATI IN LABORATORIO

FILE *.doc	PROBLEMI	ARGOMENTI
		Fondamenti di geometria (lezione frontale seguita da lettura del libro di testa)
PRO-1	1	Asse di un segmento (prima costruzione fatta a Tecnologia e Disegno)
CABRI2	2	I° e II° criterio di congruenza
ISOSCELE		Teorema sugli angoli alla base di un triangolo isoscele applicando il I° criterio di congruenza (lezione frontale)
TRAS-ANG	3	Costruzione di un triangolo isoscele per dimostrare che se un triangolo ha gli angoli alla base congruenti allora è isoscele
4PROBLEM	4	III° criterio di congruenza (parte della spiegazione con lezione frontale)
5PROBLEM	5	Costruibilità di un triangolo dati tre segmenti
		Disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo (parte della spiegazione con lezione frontale) Disuguaglianza triangolare (lezione frontale)
6PROBLEM	6	Punti notevoli di un triangolo: Ortocentro, incentro, baricentro e circocentro
BIS-ANG BIS-INV	7	Bisettrice (dato un angolo costruire la bisettrice e viceversa)
		Rette parallele tagliate da una trasversale (lezione frontale) Teorema dell' angolo esterno (lezione frontale)
PERPENDI 9PROBLEM	8	Perpendicolare (da un punto esterno o interno)
		Parallelogrammi (lezione frontale)
BIS-PARA	9	Bisettrice dell' angolo esterno (parallela al lato AB)
CIRCO-10	10	Circonferenza per tre punti
11PROBLE	11	Angoli al centro e alla circonferenza (parte della spiegazione con lezione frontale)

stato costretto ad accettare la copresenza con matematica a causa dell' innovazione dei curricola degli I.T.I. entrata in vigore con l'anno scolastico 1995/'96.

Tempo impiegato:

34 ore dal 30/01/'96 al 05/06/'96.

Prerequisiti:

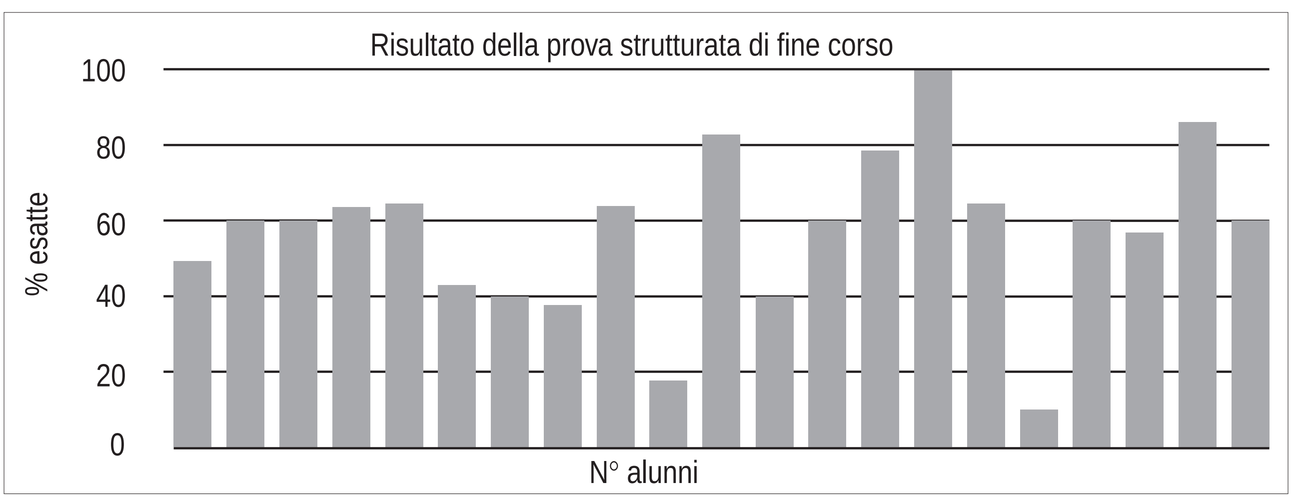
le costruzioni geometriche fatte durante le prime lezioni di Tecnologia e Disegno (materia insegnata per tre ore settimanali), i fondamenti della geometria spiegati con lezioni frontali mentre, per quanto riguarda le conoscenze acquisite alla scuola media, non è fatta alcuna particolare richiesta poichè tutto viene discusso nuovamente e formalizzato.

Metodologia:

dopo una breve introduzione per fare acquisire le basilari capacità operative (durata due ore), si è passati alla metodologia scelta per l'insegnamento della geometria. All' inizio delle lezioni, che si svolgevano solo nelle due ore consecutive settimanali di laboratorio, proponevo un problema di costruzione, definendo di quali macro-costruzioni si poteva usufruire, si discuteva sulla interpretazione del testo, si scopriva di quale prerequisiti si aveva bisogno, si passava quindi ad una fase operativa. I ragazzi a casa stendevano una relazione, una per posto di lavoro, cercando di dimostrare il perchè della scelta di una data costruzione. Gli elaborati mi venivano consegnati prima della successiva lezione in modo che io potessi leggerli, vedere le strade da loro scelte e le loro dimostrazioni per poi riportarle in classe per la discussione e per concordare la definizione esatta degli strumenti usati. In genere le soluzioni proposte si potevano catalogare in due o tre diversi casi. Ogni gruppo motivava la sua scelta e così, attraverso la discussione, si arrivava a capire quali fossero esatte quali errate e il perchè. Si giungeva quindi alla stesura finale della relazione che, in un secondo momento, io scrivevo con il computer e riportavo in classe per farla copiare agli allievi proiettandola sui loro monitor con la telecamera.
Spesso era proprio dalla risoluzione di un problema che scaturiva il testo del successivo o per rispondere alla domanda "ma è vero anche il teorema inverso?" o perchè era stata usata, senza darne dimostrazione, qualche idea scaturita dalle conoscenze della scuola media. I primi tempi naturalmente c'era un continuo intervento da parte mia per provocare e stimolare la discussione. Durante il momento operativo, che era quello più atteso dagli allievi, specialmente durante le prime lezioni, si aspettava con ansia il mio intervento per controllare la figura dato che, approfittando dei mezzi del CABRI, causando alcune opportune variazioni, distruggevo quello che loro avevano costruito. Quando sono riusciti sperimentalmente a capire il modo di operare, provavano una grande soddisfazione nel vedere che sempre più spesso la figura ben costruita manteneva le stesse caratteristiche richieste anche al variare di alcuni componenti. Solo in alcuni casi sono ricorsa a lezioni frontali, ma sempre facendo uso del CABRI per sfruttarne la dinamicità.

Obiettivi formativi e informativi che si perseguono:

- gli studenti di quattordici anni sono abituati alla scuola della tutela e il metodo operativo sicuramente li abitua a diventare più autonomi;
- devono acquisire potere di astrazione, ma questo non si può ottenere immediatamente; il Cabri, pur continuando a farli lavorare con figure reali, li abitua a staccarsi dall'uguaglianza che deriva dalla misura per farli giungere al concetto di congruenza per dimostrazione;
- colgono bene la differenza tra costruzione, verifica e dimostrazione;
- arrivano a sentire la necessità della dimostrazione;
- data la dinamicità delle figure, ottengono una convincente generalizzazione;
- acquisiscono la capacità di cogliere gli elementi che variano da quelli invarianti;
- imparano a redigere una relazione;
- si impadroniscono del linguaggio specifico della materia;
- acquisiscono il concetto di luogo geometrico;
- ripetendo molte volte nelle relazioni i prerequisiti, finiscono per imparare la forma esatta per enunciare teoremi o definizioni;



- si scoprono facilmente le immagini mentali sbagliate che si possono tempestivamente correggere;
- imparano che l'algoritmo risolutivo di un problema va adattato al tipo di strumento usato per l'esecuzione;
- scoprono che si può giungere allo stesso risultato con vie diverse, imparando anche a dare una valutazione su quale sia conveniente seguire.

Le verifiche:

parlando, discutendo e correggendo relazioni ho un continuo monitoraggio sull'evolversi del processo educativo. Nei compiti in classe e nelle prove orali, oltre alla parte dedicata alla verifica del programma svolto nelle altre ore, ci sono sempre o problemi di geometria sintetica o dimostrazioni di teoremi, che ben si prestano a misurare le capacità logico-deduttive. Inoltre, durante l'ultima lezione di laboratorio, è stata effettuata una prova strutturata, esclusivamente di geometria, al fine di valutare il grado di acquisizione del linguaggio specifico della materia e dei contenuti.
Il tempo assegnato per lo svolgimento di tale verifica è stato di trenta minuti. I valori percentuali riportati nel grafico sono stati calcolati sommando i punti ottenuti da ciascun alunno nei due tipi di questionari. Il punteggio, per gli item a doppia uscita, è stato computato facendo la differenza tra il numero delle risposte esatte e le errate.

Gli ostacoli cognitivi:

i ragazzi trovano una grande difficoltà ad abbandonare la famosa frase "si vede, che bisogno c' è di dimostrarlo?", ad acquisire un linguaggio specifico, a diventare rigorosi e a confrontarsi in una discussione.

I risultati raggiunti:

insegno in due prime ed ho avuto modo di confrontare i risultati ottenuti da questa classe con l'altra che, involontariamente, si è trovata a fare da classe di paragone. Ho scritto involontariamente poichè avevo programmato di adottare la stessa metodologia in ambedue le prime, ma in una ho dovuto sensibilmente diminuire i momenti di discussione, sia per la presenza di ventotto alunni, anche se nessuno con difficoltà tali da avere alla scuola media inferiore l'insegnante di sostegno, sia per la mancanza di continuità causata dal succedersi di varie circostanze come il gran numero di assenze dei ragazzi. Questa esperienza è articolata in modo tale che la maggior parte del lavoro va svolto in classe. Anche nell'anno scolastico '94/'95 avevo fatto un tentativo di attuazione di tale esperienza. Non ricorrendo esclusivamente a lezioni frontali, rischiavo di non trattare tutti gli argomenti programmati e comunque le lezioni di laboratorio finivano proprio nel momento in cui la discussione stava diventando interessante. Non ho la possibilità di confrontarmi con altri docenti poichè sono l'unica, nella mia scuola, ad avere adottato questa metodologia. In base anche ad una venticinquennale esperienza didattica, posso ritenermi soddisfatta poichè gradatamente quasi la totalità degli allievi ha partecipato alla discussione ed ha avanzato ipotesi accettando, nella fase operativa, la sfida di riuscire a costruire una figura che rispondesse alle richieste del problema. Nelle verifiche c'è un netto miglioramento, anche se si evidenzia la necessità di una nuova metodologia anche per l'insegnamento dell'algebra. Negli anni precedenti succedeva spesso che gli allievi non leggessero il testo del problema, cosa che puntualmente emergeva durante la correzione alla lavagna. Ora la parte del compito che riguarda la geometria viene svolta per prima ed è proprio questo fatto che spesso ne salva l'esito. In genere i due problemi assegnati sono di diversi gradi difficoltà pur essendo comunque banali.

Possibili sviluppi del tema ed eventuali collegamenti interdisciplinari:

e' chiaro che una mia maggiore padronanza porterà a sfruttare sempre meglio il software a disposizione, inoltre prevedo, per la seconda di riutilizzare il CABRI in alcuni momenti come nell' introduzione dei numeri irrazionali, nella costruzione geometrica di formule algebriche, nell'esecuzione di alcuni problemi di geometria analitica che, solo con una padronanza della costruzione della figura, possono essere facilmente risolti o nel disegno di luoghi geometrici. Per quanto riguarda i collegamenti, cercherò una sempre maggiore collaborazione con l'insegnante di Tecnologia e Disegno anticipando l'inizio dello svolgimento del programma in modo che avvenga contemporaneamente la costruzione con riga e compasso e con il CABRI. I miei tempi sono però molto diversi da quelli del collega vedremo, in sede di programmazione, come strutturare il nuovo anno scolastico, anche se questa metodologia si è rivelata tale da non permetterne una rigida.

Bibliografia:

mi è difficile citare una bibliografia perchè questa esperienza proviene dalle idee che si sono andate formando negli anni. E' stata la dimostrazione avvenuta durante il Convegno del Gruppo di formazione matematica" del 1993 che mi ha fatto conoscere il CABRI e mi ha spinto a farlo acquistare dalla scuola e a studiare il libro di istruzioni allegato al software. Dato che il mio entusiasmo andava aumentando, ho promosso un corso di autoaggiornamento nella scuola dove insegno al fine di trovare tra i colleghi di matematica consensi ed idee. Sono venuta a conoscenza dell'esistenza del bollettino CABRI*RRSAE* e la pubblicazione di un lavoro redatto da me e da una collega sui primi due criteri di congruenza mi ha dato il coraggio per far diventare operative le mie convinzioni. Ho consultato il libro di testo di Tecnologia e Disegno per conoscere il programma svolto dai miei allievi in tale disciplina. Si sono rivelate molto utili anche le indicazioni emerse da un incontro, avvenuto a Pisa nel Maggio del 1994, con la Dott.ssa Mariotti. ■

6 Unità didattiche a carattere geometrico

di Paolo Neri
Scuola Media Statale “Giovanni XXIII” Saliceto (CN)

Pubblichiamo le ultime due U.D.
delle sei presentate dal
Prof. Paolo Neri.

Le U. D. preparate sono abbastanza correlate fra loro, nel senso che ciascuna fa da prerequisito per le successive.
Fa eccezione la U.4 che è a se stante.
Questa U. D. presuppone la conoscenza dell’enunciato del T. di Pitagora e si incentra maggiormente sul concetto di misura, errore nella misura, errore relativo ed assoluto. Inoltre se la misura di una grandezza sia sufficiente per la validazione o falsificazione di una ipotesi.

Obiettivi principali:

a) Scoperta di importanti proprietà geometriche relative ai triangoli, agli angoli e ai quadrilateri rispetto alla circonferenza.
b) Passaggio graduale da un tipo di geometria intuitiva ed operativa (tipico della scuola media) ad uno più rigoroso e deduttivo basato sulle proprietà valide in generale (caratteristico della scuola superiore).

Metodologia:

a) Nella scheda 1 di ogni U. D. le indicazioni per la costruzione della figura sono complete ma essenziali.
b) Nella scheda 2 di comprensione e verifica i quesiti sono abbastanza guidati affinchè lo studente abbia una via sicura a cui fare riferimento.
c) Nella scheda 3 di approfondimento, sintesi e/o casi particolari, i quesiti sono di difficoltà crescente e più aperti e danno quindi la possibilità allo studente di un maggior contributo personale.

Software usato:
• per i files di testo: WORD ver 6.0
• per i disegni: figure e macro: CABRI ver 1.7 per DOS

Distribuzione files su dischetto:
• files di testo: A:\
• files disegno figure: A:\figure
• macro: A:\macro

U5: Proprietà di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza

Classe 3ª Media
Unità didattica di geometria

Aree disciplinari:
Matematica
Educazione Tecnica

Tempo previsto:
5 ore

Prerequisiti:
Conosce e sa utilizzare il software applicativo “Cabri”
Conosce i quadrilateri
Conosce la circonferenza
Conosce e sa usare una relazione tra due grandezze
Conosce le proprietà dei segmenti tangenti ad una circonferenza condotti da un punto esterno alla circonferenza

Obiettivi:
Capire la posizione dei lati di un quadrilatero circoscritto rispetto alla circonferenza
Capire la relazione fra i lati di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza
Saper utilizzare una “macro”, precedentemente costrui-

Tabella riassuntiva
U. D. preparate

Num U. D.	Titolo U.D.	Nome file Word	Nome/i files disegno Cabri	Nome macro
U1	Relazione fra gli angoli di un triangolo	CABU1RAT	U1RELATR	
U2	Angoli al centro e angoli alla circonferenza	CABU2ACC	U2ACACIR	
U3	Costruzione e proprietà tangenti ad una crf condotte da P esterno alla crf	CABU3TCP	U3TGPCIR	
U4	Verifica del teorema di Pitagora	CABU4PIT	U4VPIT1	QUASULAT
			U4VPIT2	
			U4VPIT3	
U5	Proprietà di un quadrilatero circoscritto ad una crf	CABU5QUC	U5PQCIRC	TGPECRF
U6	Proprietà di un quadrilatero inscritto in una crf	CABU6QIN	U6QINSCR	

ta e salvata su disco, per costruire una figura.

Contenuti:

Quadrilateri circoscritti ad una circonferenza

Posizione dei lati di un quadrilatero circoscritto rispetto alla circonferenza

Proprietà dei lati di un quadrilatero circoscritti ad una circonferenza

Fasi di lavoro:

1) Presentazione U.D. e delle sue fasi

2) Consegna scheda di lavoro n. 1 contenente le istruzioni per costruire la figura da analizzare "stiracchiando" la circonferenza *c* ed i punti base A e B

3) Consegna scheda lavoro n. 2 di comprensione e verifica contenente quesiti guidati per scoprire e verificare i principali concetti analizzati e le eventuali osservazioni dei ragazzi

4) Consegna scheda lavoro n. 3 per analizzare cosa accade quando il punto P assume posizioni particolari rispetto alla circonferenza *c*

Scheda di lavoro n. 1: costruzione figura

1) DIVERSI macro costruzioni apri A:\MACRO\TGPECRF

2) CREAZIONE circonferenza *c*

3) CREAZIONE punto: (A, C , esterni alla circonferenza *c*)

4) COSTRUZIONE tangenti ad una circonferenza per P (circonferenza *c*, punto C)

5) EDIZIONE nomi (K, L : punti di tangenza condotti da C)

6) COSTRUZIONE tangenti ad una circonferenza per P (circonferenza *c*, punto A)

7) EDIZIONE nomi (H, M: punti di tangenza condotti da A)

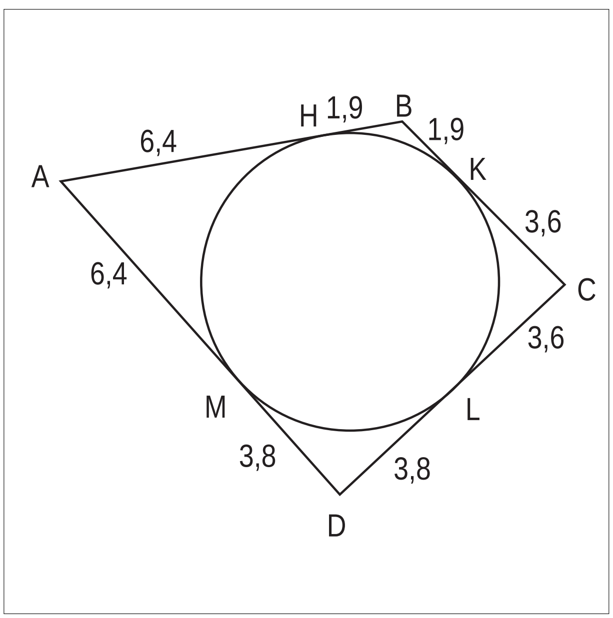
8) CREAZIONE retta per 2 punti (AH, AM, CK, CL)

9) COSTRUZIONE intersezione tra due oggetti (rette AH, KC; AM,CL)

10) EDIZIONE nomi (B punto intersezione rette AH, CK ; D punto intersezione rette AM, CL)

11) EDIZIONE aspetto degli oggetti gomma (rette per AH, CK, CL, AM)

12) CREAZIONE segmento (AB, BC, CD, DA, AH, HB, BK, KC, CL, LD, DM, MA)



13) EDIZIONE aspetto degli oggetti aspetto:
- rosso: AH, AM
- verde: HB, BK
- blu: KC, CL

14) DIVERSI misura (segmenti AB, BC, CD, DA, AH, HB, BK, KC, CL, LD, DM, MA)

Scheda di lavoro n. 2: comprensione e verifica

1) Considera il quadrilatero ABCD. Qual è la posizione di ciascuno dei suoi lati rispetto alla circonferenza?
Dirai: poichè ciascun lato incontra la circonferenza in .... punto, ciascun lato è .... alla circonferenza.

2) Qual è la posizione reciproca tra un lato ed il raggio passante per il punto di tangenza del lato?
Aiutati eventualmente tracciando il raggio opportuno e segnando un angolo appropriato.

3) Qual è la distanza di ciascun lato rispetto al punto O?
Dirai: i lati sono .... dal punto O. Infatti la distanza di ciascun lato dal punto O è uguale al .... della circonferenza.

4) Come definiresti la posizione del quadrilatero ABCD rispetto alla circonferenza *c*?

5) Qual è il rapporto fra i segmenti AH e AM?
Sfruttando le proprietà delle tangenti per un punto esterno ad una circonferenza dirai:
AH .... AM
analogamente:
BH ...... BK; CK ...... CL; DL ...... DM

6) Sfruttando le conclusioni del n 5), riesci a trovare una relazione fra le misure dei lati del quadrilatero ABCD?
Dirai AB .... CD = BC .... AD perchè somma di segmenti a due a due congruenti.

7) Come faresti a stabilire se un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza conoscendo le misure dei suoi lati?

Scheda di lavoro n. 3: analisi casi particolari

1) Muovendo il mouse fa in modo che il punto A sia allineato con la retta che contiene il segmento CD.
Come appare ora il quadrilatero ABCD?
Come diventano le tangenti DM e DL?

2) Riporta il punto A in posizione generica (non piùallineato con la retta CL).
Muovendo il mouse avvicina C alla circonferenza *c*.
Come "tende a diventare" ABCD quando C sta sulla circonferenza *c*?
Come diventano le tangenti CK e CL?

3) Riporta C in posizione generica (non appartenente alla circonferenza *c*)

4) Usando il mouse, riesci a "stiracchiare" i punti B e D? Perchè?

5) Muovendo opportunamenti i punti base A, C e la circonferenza *c*, riesci a trasformare ABCD in un deltoide? In tale caso qual è la posizione di B e D rispetto a *c*?

6) Muovendo opportunamente i punti base A e C e la circonferenza *c*, riesci a trasformare ABCD in un rombo? In tale caso qual è la posizione di B e D rispetto a *c*?

E la posizione di A e C rispetto a *c*?
E la posizione reciproca dei segmenti BD e AC?

U6: Proprietà di un quadrilatero inscritto in una circonferenza

Classe 3ᴬ Media
Unità didattica di geometria
Aree disciplinari:
Matematica
Educazione Tecnica
Tempo previsto:
4 ore
Prerequisiti:
Conosce e sa utilizzare il software applicativo "Cabri"
Conosce i quadrilateri
Conosce la circonferenza
Conosce la relazione tra un angolo alla circonferenza ed un angolo al centro
Conosce la somma degli angoli interni di un triangolo e di un quadrilatero
Conosce e sa usare una relazione tra due grandezze
Obiettivi:
Capire la posizione dei lati di un quadrilatero inscritto in una circonferenza
Capire la relazione fra gli angoli di un quadrilatero inscritto in una circonferenza
Contenuti:
Quadrilateri inscritti in una circonferenza
Posizione dei lati di un quadrilatero inscritto in una circonferenza
Proprietà degli angoli di un quadrilatero inscritto in una circonferenza
Fasi di lavoro:
1) Presentazione U.D. e delle sue fasi
2) Consegna scheda di lavoro n. 1 contenente le istruzioni per costruire la figura da analizzare "stiracchiando" la circonferenza *c* ed i punti base A, B, C, D
3) Consegna scheda lavoro n. 2 di comprensione e verifica contenente quesiti guidati per scoprire e verificare i principali concetti analizzati e le eventuali osservazioni dei ragazzi
4) Consegna scheda lavoro n. 3 per analizzare quadrilateri particolari inscritti nella circonferenza *c*

Scheda di lavoro n. 1: costruzione figura

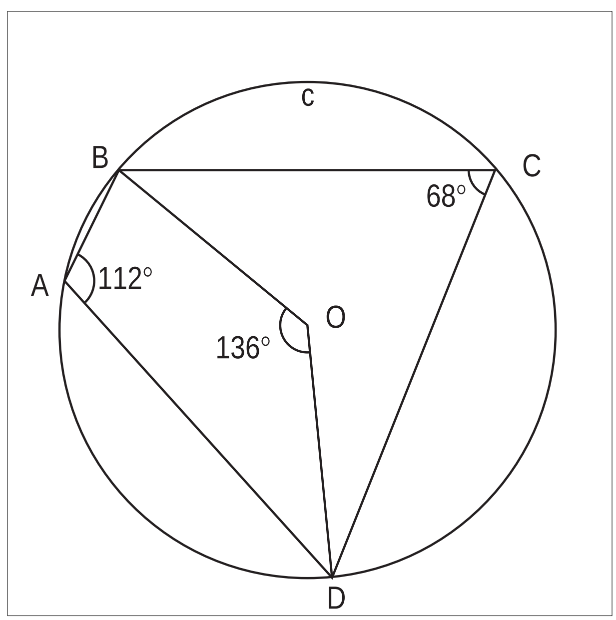
1) CREAZIONE punto: O,Q
2) CREAZIONE circonferenza per 2 pti: *c* (centro O, punto Q)
3) CREAZIONE punto su circonferenza *c*: A,B,C,D
4) CREAZIONE segmento: AB, BC, CD, DA, BO, DO
5) DIVERSI segna un angolo: $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{O}D$
6) EDIZIONE aspetto oggetti gomma: punto Q
7) EDIZIONE aspetto oggetti:
• verde AB, BC, CD, DA
• blu A, B, C, D
• pennello rosso: angoli $B\hat{C}D$, $B\hat{O}D$

Scheda di lavoro n. 2: comprensione e verifica

1) Osserva il quadrilatero ABCD. Qual è la posizione dei suoi vertici ?
Dirai: poichè A,B,C,D appartengono alla....................... .... , sono .... rispetto al punto O.
2) Come definiresti la posizione di ABCD rispetto alla circonferenza *c*?
3) Considera gli angoli $B\hat{O}D$ (convesso) e $B\hat{C}D$. Quale relazione vi è tra le loro ampiezze?
Dirai: $B\hat{O}D$ = ... $B\hat{C}D$ poichè rispettivamente angolo al .... e angolo alla .... passanti per gli stessi punti B e D.
4) Qual è la relazione tra le ampiezze degli angoli $B\hat{O}D$ (concavo) e $B\hat{A}D$?
5) Quale relazione riesci a stabilire tra $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$?
Dirai $B\hat{A}D + B\hat{C}D$ = ... in quanto somma di angoli alla circonferenza i cui corrispondenti angoli al centro BOD (concavo e convesso) sono fra loro esplementari.
6) Qual è la somma degli angoli interni di ABCD?
7) Quale relazione vi è tra le ampiezze degli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$? Sfruttando la relazione trovata in 5) e in 6) dirai: $A\hat{B}C + A\hat{D}C$ = ...
8) Enuncia in modo chiaro, sintetico e completo le proprietà scoperte di un quadrilatero inscritto in una circonferenza.

Scheda di lavoro n. 3: analisi casi particolari

1) Le proprietà di un quadrilatero inscritto in una circonferenza dipendono dalla misura del raggio della circonferenza *c*?
E dalla posizione dei vertici A, B, C, D sulla circonferenza?
Motiva la tua risposta.
2) Muovi col mouse il punto B in modo che l'angolo $B\hat{O}D$= 180°.
Osserva i triangoli ABD e BCD: come li classifichi in base agli angoli? Perchè?
3) D'ora in avanti tieni inalterata la posizione di B.
Esegui ora le seguenti modifiche alla figura:
CREAZIONE segmento CO, AO



DIVERSI segna una angolo $D\hat{O}C$, $A\hat{O}D$
DIVERSI misura:
• gli angoli $D\hat{O}C$, $A\hat{O}D$
• segmenti AB, BC, CD, DA
4) Muovendo il punto C col mouse, è possibile trasformare ABCD in un rettangolo?
Quale deve essere la posizione di C rispetto ad A affinchè ciò accada?
5) Muovendo col mouse i punti A e C, è possibile trasformare ABCD in un rombo? Perchè?
6) Muovendo col mouse i punti A e C, è possibile trasformare ABCD in un quadrato?
Quali devono essere le posizioni reciproche dei vertici affinchè ciò accada? ■

Circonferenze e quadrilateri

di Anna Strolin Franzini
Scuola Media Statale "Guido Reni" Bologna

In questo articolo vengono presentate quattro schede di lavoro per alunni di seconda media. Esse possono essere utilizzate per introdurre lo studio della circonferenza e approfondire le conoscenze sui quadrilateri. Si presuppone che siano già note le proprietà dei punti dell'asse di un segmento e che siano stati studiati i punti notevoli di un triangolo, in particolare il circocentro. Tali argomenti vengono di solito trattati in prima media per cui queste schede di lavoro offrono agli studenti l'occasione di utilizzare e rielaborare conoscenze acquisite in contesti diversi.
La sequenza proposta è quella che ho sperimentata nelle mie classi. Le schede di esercitazione sui quadrilateri sono state precedute da un lavoro, analogo e più tradizionale, con carta, matita, forbici e piegature di carta. Nel laboratorio di informatica, con Cabri, le osservazioni sulle figure analizzate (raccolte e formalizzate nelle due tabelle allegate) si consolidano e si evidenziano come proprietà generali.
La prima scheda, che fa indagare sulla possibilità di disegnare circonferenze per uno, due e tre punti, termina sollevando un problema: l'esistenza di una circonferenza per quattro punti. In questa fase non vengono date indicazioni su come affrontarlo. Si intende infatti solo stimolare gli studenti a porsi il problema avendo Cabri a disposizione per esplorarlo. E' però esperienza acquisita che attività di questo tipo vedono gli studenti impegnati in modo molto diverso l'uno dall'altro e quindi raramente garantiscono una sufficiente omogeneità di apprendimento. Il problema viene quindi ripreso in un secondo tempo e affrontato in modo guidato proponendo agli studenti l'ultima delle schede presentate in questo articolo. Con tale scheda si completano inoltre le conoscenze sui quadrilateri considerandone l'iscrittibilità in una circonferenza.
Nelle schede si suggerisce di utilizzare il colore come codice che permette di classificare, visivamente, gli oggetti geometrici che vengono disegnati. Verde gli oggetti geometrici iniziali della figura, i dati del problema. Rosso gli oggetti finali della figura, ciò che viene richiesto dal problema. Nero tutti gli oggetti geometrici intermedi, quelli cioè che è necessario costruire per ottenere gli oggetti richiesti. Questa impostazione aiuta gli studenti che disegnano una figura geometrica a essere più consapevoli del problema affrontato e dei procedimenti utilizzati per risolverlo. Aiuta inoltre sia gli studenti che l'insegnante a osservare e interpretare una figura una volta che sia stata completata.

Circonferenze per uno, due, tre punti

Parte prima: circonferenze passanti per un punto

• Punto
• Nomi: punto A
• Aspetto degli oggetti, pennello verde: punto A
IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA PUO' AVERE UNA QUALUNQUE DISTANZA DAL PUNTO A
• RIPETI QUESTO PROCEDIMENTO
  • Circonferenza con centro un punto qualunque e passante per A
  • Aspetto degli oggetti, rosso: punto e circonferenza
  FINCHE' non vuoi più disegnare circonferenze
Muovere i centri delle circonferenze disegnate.

SI POSSONO DISEGNARE INFINITE CIRCONFERENZE PASSANTI PER UN PUNTO DATO A.
I LORO CENTRI SONO PUNTI QUALUNQUE DEL PIANO.

Parte seconda: circonferenze passanti per due punti

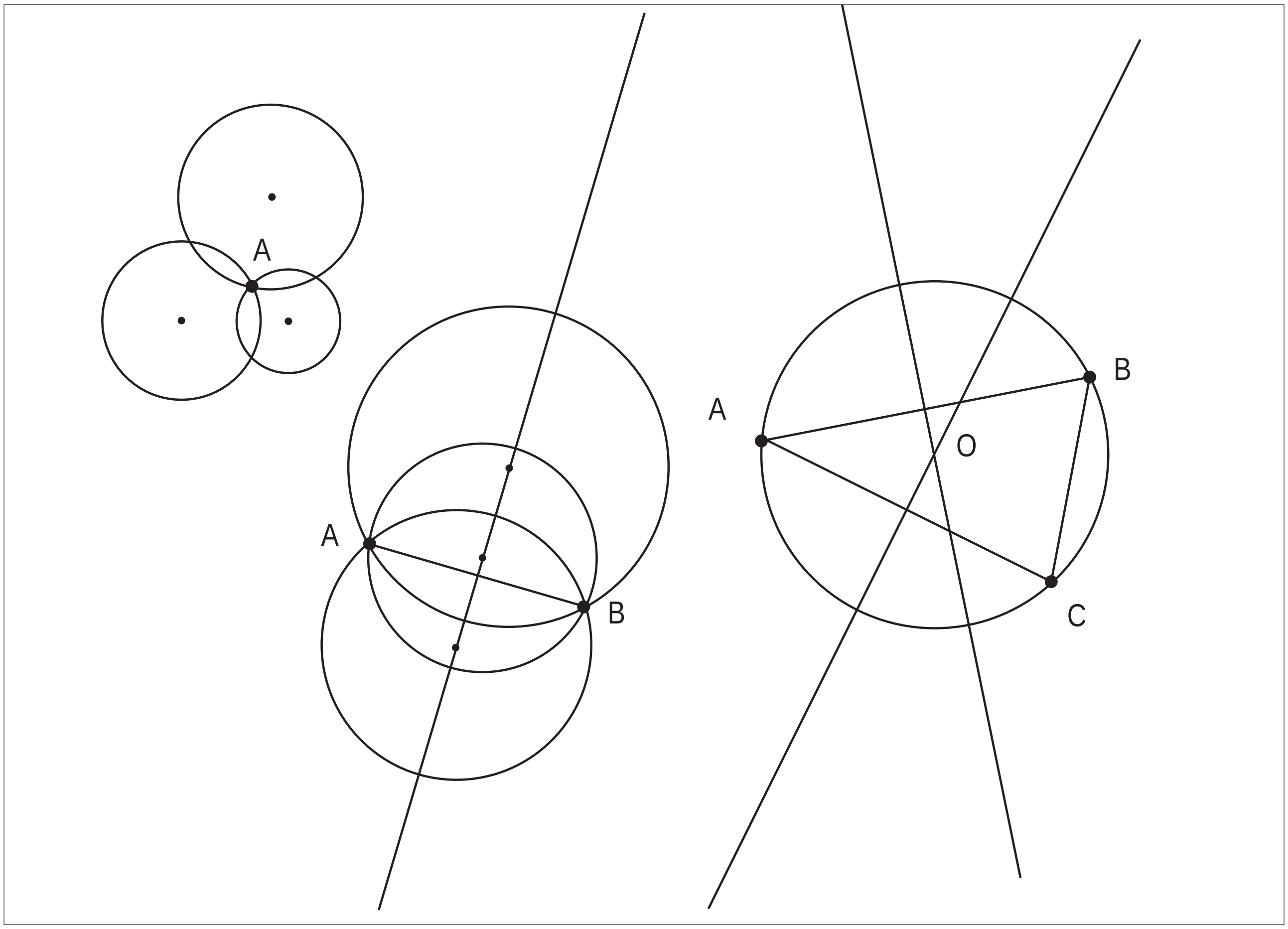
• Punto (due volte)
• Nomi: punti A e B
• Aspetto degli oggetti, pennello verde: punti A, B

IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA DEVE AVERE LA STESSA DISTANZA DAI DUE PUNTI DATI A e B.
QUANTI SONO I PUNTI DEL PIANO CHE HANNO QUESTA PROPRIETA'?...
A QUALE RETTA APPARTENGONO?........................
• Retta dei punti che hanno uguale distanza da A e B
• RIPETI
  • Punto sulla retta disegnata
  • Circonferenza con centro un punto della retta e passante per A oppure per B
  • Aspetto degli oggetti, pennello rosso: punto
  • Aspetto degli oggetti, rosso: circonferenza
FINCHE' non vuoi più disegnare circonferenze
Muovere i punti A e B. Muovere i punti sull'asse di AB.

SI POSSONO DISEGNARE INFINITE CIRCONFERENZE PASSANTI PER DUE PUNTI DATI, P A e B.
I LORO CENTRI SONO I PUNTI DELLA RETTA ....

Parte terza: circonferenze passanti per tre punti

• Punto (tre volte)



• Nomi: punti A, B, C
• Aspetto degli oggetti, pennello verde: punti A, B, C

IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA DEVE AVERE LA STESSA DISTANZA DAI TRE PUNTI A, B e C.
QUANTI SONO I PUNTI DEL PIANO CHE HANNO QUESTA PROPRIETA'?..
A QUALI RETTE APPARTENGONO?...
....
IL CENTRO DEVE QUINDI ESSERE L'INTERSEZIONE...

• Retta dei punti con uguale distanza da A e da B
• Retta dei punti con uguale distanza da B e da C
• Intersezione delle due rette disegnate
• Nomi: punto intersezione O
• Circonferenza con centro in O e passante per A (oppure per B, oppure per C)
• Aspetto degli oggetti, rosso: punto O e circonferenza

Muovere i punti A, B e C.

• Segmento: AB, BC, AC
• Aspetto degli oggetti, rosso: segmenti AB, BC e CA

SI PUO' DISEGNARE UNA SOLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER TRE PUNTI DATI, A, B e C. ESSA E' LA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA AL TRIANGOLO ABC.
IL SUO CENTRO E' IL .... DEL TRIANGOLO ABC.

E se i punti fossero QUATTRO?
Pensi si potrebbe disegnare almeno una circonferenza passante per quattro punti dati?.............................

Esercitazione: parte prima
Insieme di quadrilateri

1) QUADRILATERI GENERICI
Disegnare quatto punti liberi nel piano, A, B, C e D
Colorare i punti con il pennello verde
Disegnare i lati del quadrilatero ABCD
Muovere i vertici A, B, C e D per ottenere altri elementi dell'insieme di quadrilateri

QUALI DEI SEGUENTI QUADRILATERI SI POSSONO OTTENERE COME CASI PARTICOLARI DELL'INSIEME?
TRAPEZI ....
PARALLELOGRAMMI: ....
ROMBI: ....
RETTANGOLI: ....
QUADRATI: ....

2) TRAPEZI
Disegnare tre punti liberi nel piano, A, B e C
Colorare i punti con il pennello verde
Disegnare i lati consecutivi AB e BC del trapezio

COME SI PUO' COSTRUIRE IL PUNTO D, QUARTO VERTICE DEL TRAPEZIO?
(scrivi l'elenco ordinato degli oggetti che occorre costruire)
1)...
2)...
Colorare il punto D con il pennello rosso
Disegnare i lati AD e CD del parallelogramma
Muovere i vertici liberi A, B, C per ottenere altri trapezi dell'insieme

QUALI DEI SEGUENTI QUADRILATERI SI POSSONO OTTENERE COME CASI PARTICOLARI DELL’INSIEME DI TRAPEZI?
PARALLELOGRAMMI: ....
ROMBI: ....
RETTANGOLI: ....
QUADRATI: ....

3) PARALLELOGRAMMI
Disegnare tre punti liberi nel piano, A, B e C
Colorare i punti con il pennello verde
Disegnare i lati consecutivi AB e BC del parallelogramma

COME SI PUO’ COSTRUIRE IL PUNTO D, QUARTO VERTICE DEL PARALLELOGRAMMA?
(scrivi l’elenco ordinato degli oggetti che occorre costruire)
1)..
2)..
3)..

Colorare il punto D con il pennello rosso
Disegnare i lati AD e CD del parallelogramma
Muovere i vertici liberi A, B e C per ottenere altri parallelogrammi dell’insieme

QUALI DEI SEGUENTI QUADRILATERI SI POSSONO OTTENERE COME CASI PARTICOLARI DELL’INSIEME DI PARALLELOGRAMMI?
ROMBI: ....
RETTANGOLI: ....
QUADRATI: ....

4) RETTANGOLI
Disegnare due punti liberi nel piano, A e B
Colorare i punti con il pennello verde
Disegnare il lato AB del rettangolo

COME SI POSSONO COSTRUIRE I PUNTI C e D, TERZO e QUARTO VERTICE DEL RETTANGOLO?
(scrivi l’elenco ordinato degli oggetti che occorre costruire)
1)..
2)..
3)..
4)..
5)..

Colorare i punti C e D con il pennello rosso
Disegnare i lati BC, CD e AD del rettangolo
Muovere i vertici liberi A e B per ottenere altri rettangoli dell’insieme

QUALI DEI SEGUENTI QUADRILATERI SI POSSONO OTTENERE COME CASI PARTICOLARI DELL’INSIEME DI RETTANGOLI?
ROMBI: ....
QUADRATI: ....

5) ROMBI
Disegnare due punti liberi nel piano, A e B
Colorare i punti con il pennello verde
Disegnare il lato AB del rombo

COME SI POSSONO COSTRUIRE I PUNTI C e D, TERZO e QUARTO VERTICE DEL ROMBO?
(scrivi l’elenco ordinato degli oggetti che occorre costruire)
1)..
2)..
3)..
4)..
5)..

Colorare i punti C e D con il pennello rosso
Disegnare i lati BC, CD e AD del rombo
Muovere i vertici liberi A e B per ottenere altri rombi dell’insieme

QUALI DEI SEGUENTI QUADRILATERI SI POSSONO OTTENERE COME CASI PARTICOLARI DELL’INSIEME DI ROMBI?
RETTANGOLI: ....
QUADRATI: ....

6) QUADRATI
Disegnare due punti liberi nel piano, A e B
Colorare i punti con il pennello verde
Disegnare il lato AB del rettangolo

COME SI POSSONO COSTRUIRE I PUNTI C e D, TERZO e QUARTO VERTICE DEL QUADRATO?
(scrivi l’elenco ordinato degli oggetti che occorre costruire)
1)..
2)..
3)..
4)..
5)..
6)..

Colorare i punti C e D con il pennello
Disegnare i lati BC, CD e AD del quadrato
Muovere i vertici liberi A e B per ottenere altri quadrati dell’insieme.

RAPPRESENTARE CON UN DIAGRAMMA DI VENN I SEI INSIEMI DI QUADRILATERI ANALIZZATI.

Esercitazione: parte seconda
Proprietà di lati, diagonali e angoli dei quadrilateri

1) LATI
In ciascuno dei sei insiemi di quadrilateri disegnati nella prima parte di questa scheda scrivere la misura dei lati.
Muovere nel piano i vertici liberi (colorati in verde)

IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI I LATI OPPOSTI SONO SEMPRE
UGUALI?..
....
IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI I LATI SONO SEMPRE

TUTTI UGUALI?...
....
Cancellare le misure dei lati.

2) ANGOLI
In ciascuno dei sei *insiemi di quadrilateri* disegnati nella prima parte di questa scheda scrivere la misura degli angoli
Muovere nel piano i vertici liberi

IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI GLI ANGOLI OPPOSTI SONO SEMPRE UGUALI?...
....
IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI GLI ANGOLI SONO SEMPRE TUTTI UGUALI?...
....
Cancellare la misura degli angoli

3) DIAGONALI
In ciascuno dei sei *insiemi di quadrilateri* disegnati nella prima parte di questa scheda disegnare le diagonali e scrivere la loro misura
Muovere nel piano i vertici liberi

IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI LE DIAGONALI SONO SEMPRE UGUALI TRA LORO?...
....

Disegnare il punto di intersezione tra le due diagonali e colorarlo con pennello blu.
Disegnare il punto medio di ciascuna diagonale.
IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI LE DIAGONALI SI INTERSECANO SEMPRE NEL PUNTO MEDIO?............................
....
....
Disegnare le bisettrici degli angoli

IN QUALI INSIEMI DI QUADRILATERI LE DIAGONALI SONO SEMPRE BISETTRICI DEGLI ANGOLI?..
....

Circonferenza per quattro punti del piano
Quadrilateri iscritti in una circonferenza

• Punto (quattro volte)
• Nomi: punti A, B, C, D
• Segmento: AB, BC, CD, DA
• Aspetto degli oggetti, pennello verde: punti A, B, C, D
• Aspetto degli oggetti, verde: segmenti AB, BC, CD, DA
Muovere i punti A, B, C o D in modo da ottenere un quadrilatero convesso e non intrecciato

• Punto
• Nomi: punto O
• Circonferenza con centro in O e passante per A
• Aspetto degli oggetti, rosso: circonferenza
Muovere nel piano il centro O della circonferenza in modo da ottenere che la circonferenza passi anche per i vertici B e C

NEL QUADRILATERO ABCD CHE HAI DISEGNATO SULLO SCHERMO E' POSSIBILE?..

Cambiare più volte la posizione dei vertici B e C e ogni volta provare, muovendo il centro O, a disegnare la circonferenza, che passa anche per i vertici B e C

E' POSSIBILE **SEMPRE, QUALCHE VOLTA O MAI?..................**
....
PERCHE?...

COME SONO LE DISTANZE, DAI PUNTI A, B e C, DEL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER A, B e C?..

IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA E' QUINDI IL .... DEL TRIANGOLO ABC, CIOE' L'INTERSEZIONE...

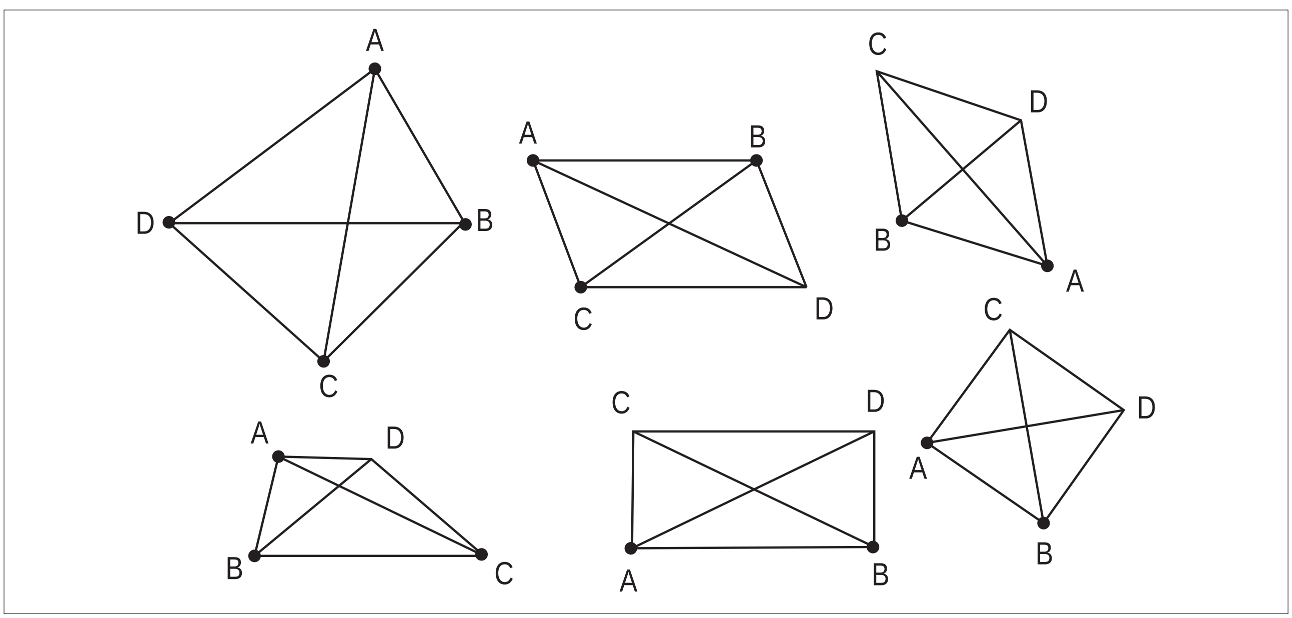


Tabella 1. Proprietà dei quadrilateri										
	lati				diagonali				angoli	
	almeno due paralleli	paralleli a due a due	uguali almeno a due a due	tutti uguali	si dimezzano	bisettrici	perpendicolari	uguali	uguali almeno a due a due	tutti uguali
Quadrati										
Rombi										
Rettangoli										
Parallelogrammi										
Trapezi										
Quadrilateri										

Rispondi colorando le caselle appropriate
Usa un colore diverso per ogni riga.

Tabella 2. Classificazione dei quadrilateri						
appartiene all'insieme dei	Quadrato	Rombo	Rettangolo	Parallelo gramma	Trapezio	Quadrilatero
Quadrati						
Rombi						
Rettangoli						
Parallelogrammi						
Trapezi						
Quadrilateri						

Rispondi colorando le caselle appropriate. Usa un colore diverso per ogni riga (gli stessi colori utilizzati nella tabella 1, sulle proprietà dei quadrilateri).
Rappresenta i sei insiemi di quadrilateri con un diagramma di Venn.

Muovere ancora il centro O della circonferenza in modo da ottenere che la circonferenza passi non solo per i vertici B e C ma ***anche per il vertice D (circonferenza circoscritta al quadrilatero ABCD****)*

NEL QUADRILATERO ABCD CHE HAI DISEGNATO SULLO SCHERMO E' POSSIBILE?..

Cambiare più volte il quadrilatero ABCD (muovendo uno o più vertici) e ogni volta provare, muovendo il centro O, a disegnare la circonferenza circoscritta, che passa cioè per i quattro vertici A, B, C e D

E' POSSIBILE **SEMPRE, QUALCHE VOLTA O MAI?....................**

Muovere il centro O in modo da ottenere una circonferenza che passa per A, B e C.
Muovere lentamente il vertice D in modo che sia ***esterno****,* ***interno*** *oppure* ***sulla*** *circonferenza passante per A, B e C*

QUANTI SONO I QUADRILATERI **NON ISCRITTIBILI** NELLA CIRCONFERENZA?...
QUANTI SONO I QUADRILATERI **ISCRITTIBILI** NELLA CIRCONFERENZA?..

Proprietà dei quadrilateri iscritti in una circonferenza

- Circonferenza
- Centro della circonferenza
- Nomi: centro O
- Aspetto degli oggetti, verde: circonferenza
- Punto sulla circonferenza (quattro volte)
- Nomi: punti A, B, C, D
- Segmento: AB, BC, CD, DA
- Aspetto degli oggetti, pennello rosso: punti A, B, C, D
- Aspetto degli oggetti, rosso: segmenti AB, BC, CD, DA
- Segna un angolo: $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}A$
- Misura: angoli $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}A$ (che, per brevità, chiameremo anche α,β,γ e δ rispettivamente)

Muovere uno o più vertici del quadrilatero ABCD in modo da mettere in evidenza l'insieme di quadrilateri convessi iscritti nella circonferenza

QUALI DEI SEGUENTI QUADRILATERI E' POSSIBILE OTTENERE?
QUADRATO:...
RETTANGOLO:...

ROMBO:...
PARALLELOGRAMMA:..
TRAPEZIO RETTANGOLO:..
TRAPEZIO ISOSCELE:..

Preparare una tabella con sei colonne (a mano o con il foglio elettronico).
Nelle prime quattro inserire la misura degli angoli $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, di almeno dieci quadrilateri iscritti nella circonferenza

NOTI QUALCHE REGOLARITA?..
....
....

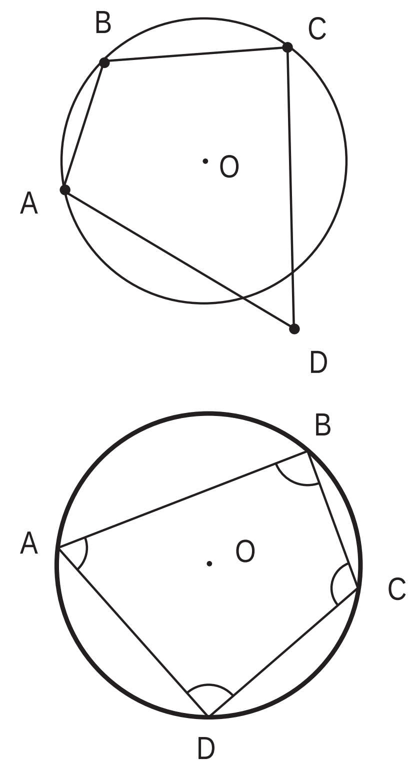
Nella quinta colonna inserire la somma $\alpha+\gamma$
Nella sesta colonna inserire la somma $\beta+\delta$

OSSERVAZIONI:

NON TUTTI I QUADRILATERI SONO ISCRITTIBILI IN UNA CIRCONFERENZA.
SONO ISCRITTIBILI SOLO I QUADRILATERI IN CUI GLI ANGOLI OPPOSTI SONO...
....

COME SONO, TRA LORO, LE DISTANZE DEL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA DAI PUNTI A, B, C e D?...

IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA (CIRCOCENTRO DEL QUADRILATERO) E' QUINDI L'INTERSEZIONE..



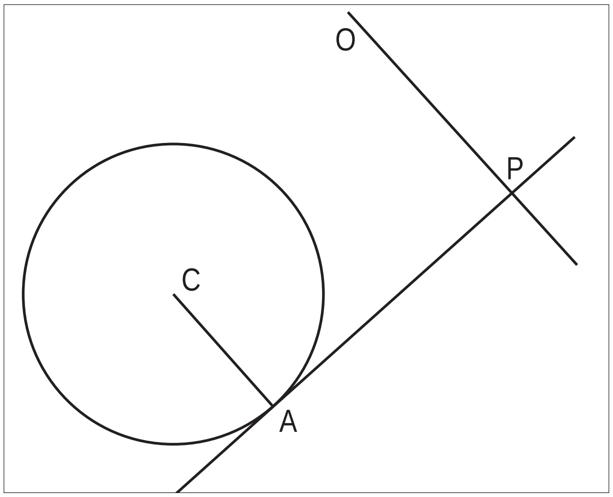
....
Con opportune costruzioni metti in evidenza la validità della tua affermazione. ■

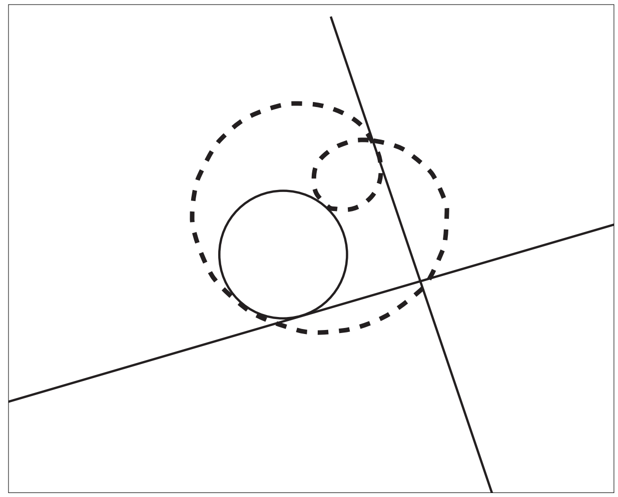
Termina in questo numero la presentazione dei lavori prodotti da alcuni gruppi che si sono costituiti durante un corso di aggiornamento promosso dall'IRRSAE-ER nella primavera del 1995. Ciascuno di tali gruppi ha scelto un argomento sul quale ha progettato, sperimentato e discusso un percorso didattico sull'utilizzazione di Cabri-géomètre nell'insegnamento della geometria.

Cabri e le coniche

di Maria Grazia Gozza, Grazia Grassi
ITIS "Majorana" S. Lazzaro di Savena (BO)
e di Aurelia Orlandoni
ITCS "Salvemini" Casalecchio di Reno (BO)

Nel settembre '95 la Commissione "Uso del software didattico: Cabri géomètre" dell'IRRSAE-ER ha proposto a insegnanti della scuola media inferiore e superiore di formare dei gruppi per costruire percorsi didattici che utilizzassero Cabri-géomètre. Il nostro gruppo ha costruito due unità didattiche: una sulle trasformazioni geometriche da sperimentare nel biennio e una sui luoghi geometrici per il triennio. In questa nota verrà descritto il percorso relativo ai luoghi geometrici sperimentato nell'a.s. 1995/96 in due classi terze: una terza Istituto Tecnico Commerciale ad indirizzo programmatori ed una terza Istituto Tecnico Industriale ad indirizzo elettronici.
Il concetto di luogo è introdotto a partire dalla costruzione dei luoghi che difficilmente si trovano nei libri di testo, ma che sono particolarmente significativi sia dal punto di vista storico sia per il loro aspetto grafico (presenza di assi e di centro di simmetria) quali ad esempio: la concoide di Nicomede, la lumaca di Pascal, l'asteroide, la rosa a quattro foglie, il folium di Cartesio.
Obiettivo di questa prima parte è di suscitare interesse per l'apprendimento di un concetto, il luogo geometrico, spesso di difficile comprensione per gli allievi. Agli studenti vengono fornite schede di lavoro guidato che consentono di costruire un luogo e di definirlo, individuando anche eventuali simmetrie. Quando gli studenti hanno completato il lavoro viene consegnata una scheda di correzione con le risposte e le istruzioni per verifi-





care la correttezza della costruzione fatta.
Come esempio riportiamo la scheda 5 relativa alla costruzione della lumaca di Pascal e della concoide.

Scheda 5

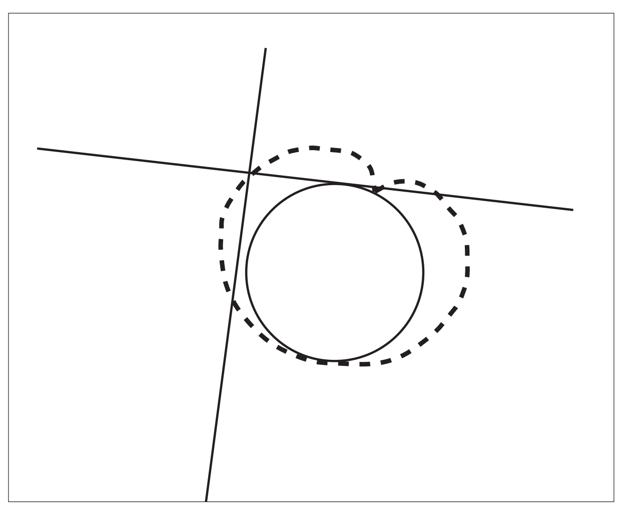
1) Eseguire la seguente costruzione:

- Tracciare la circonferenza di centro C e passante per un punto, utilizzando il comando cfr (centro/punto).
- Fissare un punto O, esterno alla circonferenza.
- Prendere un punto A sulla circonferenza (punto su un oggetto).
- Creare il segmento CA.
- Tracciare la retta per A, perpendicolare al segmento CA. Sia t.
- Costruire per O la perpendicolare a t. Sia r.
- Costruire il punto di intersezione P, tra le due rette r e t.

La figura ottenuta, se hai proceduto correttamente, è quella a fianco rappresentata.
2) Ripeti la costruzione precedente prendendo, come A, altri punti sulla circonferenza.
Varia la posizione di P?
....
Costruisci ora il luogo di punti P, al variare del punto A sulla circonferenza.
Quale proprietà caratterizza tutti e soli i punti che appartengono al luogo?
....
Il luogo geometrico costruito ha il nome di Podaria della circonferenza di centro C rispetto al punto O od anche di Lumaca di Pascal, dal nome del padre del famoso matematico francese del secolo XVII°.=
3) Esistono particolari simmetrie? Rispetto a che cosa?
....
4) Ripetere la costruzione di cui al paragrafo 1), scegliendo come punto O un punto appartenente alla circonferenza (vincolare il punto O alla circonferenza)
Costruire nuovamente il luogo dei punti P, al variare del punto A sulla circonferenza.
Il luogo geometrico costruito ha il nome di Cardioide ed è un caso particolare della situazione descritta nel paragrafo 1)
5) Esistono particolari simmetrie? Rispetto a che cosa?
....

Scheda n. 5 - Soluzioni

2) La posizione di P varia, al variare del punto A sulla circonferenza descrivendo un luogo geometrico che prende il nome di Podaria.
Definizione di Podaria
Nel piano euclideo, data una curva C ed un punto O si dice podaria di C rispetto O il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da O alle tangenti di C.
Se C è una circonferenza, la podaria è una curva detta Lumaca di Pascal, in quanto si ritiene che sia stata considerata per la prima volta dal padre di Blaise Pascal, S. Pascal.
3) La Lumaca di Pascal ammette un asse di simmetria.
4) Se O appartiene alla curva C, la podaria è una curva detta Cardioide.
5) La cardioide ammette un asse di simmetria.
Nell'appendice finale vengono fornite informazioni generali (equazione cartesiana e parametrica) e notizie storiche sui luoghi.
La seconda parte dell'unità didattica presenta la costruzione di luoghi geometrici più usati come la parabola e l'iperbole, di cui si analizzano le simmetrie e si esaminano i casi in cui sono funzioni. Gli studenti nel biennio studiano queste curve solo come funzioni in una variabile ed è quindi necessario che verifichino che la loro definizione come luogo gometrico consente di rappresentare l'insieme delle parabole e delle iperboli e non solo alcuni casi particolari.



I risultati ottenuti sono soddisfacenti e il lavoro, revisionato alla luce dell'esperienza, verrà riproposto anche quest'anno.

Bibliografia

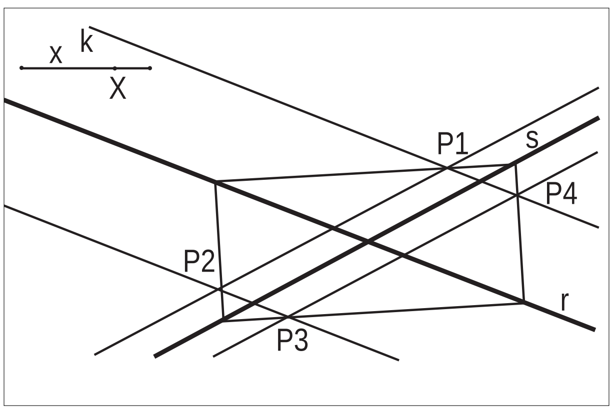
CARRUCCIO *"Matematiche elementari da un punto di vista superiore"* 1972 Pitagora - Bologna
AA.VV. *"Dizionario di Matematica"* 1989 Rizzoli Editore
GELLERT, KÜSTNER, HELLWICH, CÄSTNER *"The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics"* 1977 Van Nostrand Reinohold Company
CAVALIERI, SEGHEZZA, SIMONETTI, *Algebra, geometria, informatica,* vol. 2°, Edizioni Bulgarini, Firenze
VILLA. M., *Lezioni di geometria*, vol. 1°, CEDAM, Padova
ABRACADABRI n.°1 gen-feb 94, bimestrale
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Problemi di primo e secondo grado risolti col metodo dei luoghi con attenzione ai casi limite

del gruppo Landini, Magnani, Rabbi, Ragagni, Ricci
Gruppo Scuole Superiori Bologna

Introduzione

Si è consolidata, nell'insegnamento attuale della matematica, in ogni ordine e grado, la tendenza ad affrontare i problemi geometrici "algebrizzandoli", cioè traducendoli in linguaggio algebrico.



Alternativamente, in modo tradizionale, un problema geometrico può essere risolto direttamente mediante i soli strumenti geometrici;
"......una soluzione completa importa di :
1. indicare la costruzione degli elementi incogniti richiesto
2. dimostrare l'esattezza
3. discutere le soluzioni, cioè stabilire i limiti e le condizioni (non contenute esplicitamente nei dati) della loro esistenza, contandone il numero nei singoli casi."
(da *A. Sabbatini, Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici, in F. Enriques, Questioni riguardanti le matematiche elementari, Zanichelli, Bologna 1912*).
Tale metodo, comunemente detto sintetico, si articola essenzialmente in quello dei luoghi geometrici e quello delle trasformazioni.
Col metodo dei luoghi, qui riproposto con l'uso di Cabri, si considera separatamente ciascuna delle condizioni imposta dal problema costruendone la figura geometrica rappresentativa: le intersezioni di tali figure forniscono l'insieme delle soluzioni del problema;
".....nella geometria elementare si considera risolubile un problema le cui soluzioni possono conseguirsi con i soli mezzi di cui si dispone, cioè la riga e il compasso"
(da *A. Sabbatini, Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici, in F.Enriques, Questioni riguardanti le matematiche elementari, Zanichelli, Bologna ed 1912*).
Una costruzione si può però realizzare anche
• col solo compasso (Mascheroni 1750-1800 mostrò che è equivalente a riga-compasso)
• mediante "piegamento della carta" (è più potente: ad esempio si può risolvere il problema classico della duplicazione del cubo, non risolubile con riga e compasso)
• con Cabri.

Presentazione del lavoro

Il gruppo di lavoro, costituito dai proff. Landini , Magnani, Rabbi, Ragagni, Ricci e coordinato da quest'ultimo, aveva orientato la propria scelta su questo tra gli argomenti inizialmente proposti in base a esigenze quali: approfondire con un nuovo strumento informatico un argomento "tradizionale", produrre materiali organicamente inseribili nei programmi almeno di un liceo nell'ambito sia della geometria sintetica sia di quella analitica, confrontarsi con un argomento che nella letteratura di Cabri è poco o niente affatto trattato.
Consapevoli dell'importanza delle costruzioni geometriche per la risoluzione di problemi geometrici, ci si è posto per obiettivo didattico specifico di ridurre le difficoltà che gli studenti incontrano sia a costruire figure sufficientemente generali, sia a individuare gli elementi variabili, sia a visualizzare le relazioni tra questi, sia, in particolare nei problemi con discussione, ad analizzare i casi limiti. Uno degli ostacoli maggiori negli studenti è la ridotta capacità di costruire una rappresentazione mentale sufficientemente dinamica della figura che rappresenta il problema, ciò che Cabri può senz'altro aiutare a sviluppare.
Il metodo dei luoghi geometrici per risolvere problemi geometrici è quello meglio schematizzabile e spesso più praticato con successo.
Frequenti problemi di I grado si possono ricondurre ai seguenti:
1. Qual è il luogo dei punti equidistanti da due punti dati?
Non approfondito perchè già comunemente assai trattato.

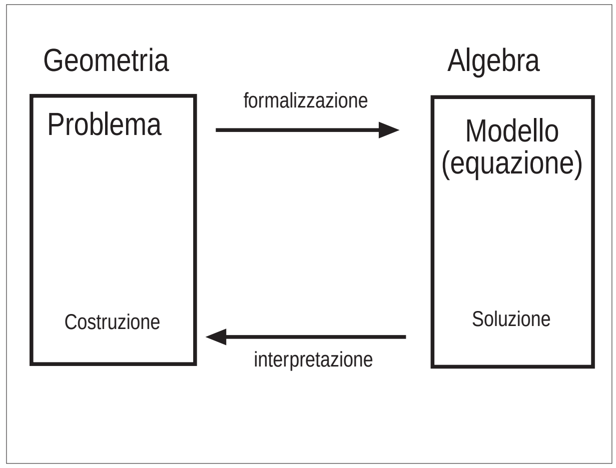
2. Qual è il luogo dei punti equidistanti da una retta data?
3. Qual è il luogo dei punti equidistanti da due rette date ?
Non approfondito perchè già comunemente assai trattato.
4. Qual è il luogo dei punti P del piano tali che d(P,r) + d(P,s) = k ?
5. Qual è il luogo dei punti P del piano tali che d(P,r) - d(P,s) = k ?
6. Qual è il luogo dei punti P del piano tali che m • d(P,r) =n • d(P,s) ?
7. Qual è il luogo dei punti P del piano tali che d(P,r)/ n = d(P,s)/m ?
8. Qual è il luogo dei punti P del piano tali che m d(P,r) + n d(P,s) = 1?
9. Qual è il luogo dei punti P tali che $PA^2 - PB^2 = k^2$*?*
Frequenti problemi di II grado si possono ridurre ai seguenti, che conducono a circonferenze:
1. Qual è il luogo dei punti P tali che PA=k?
Non approfondito perchè già comunemente assai trattato.
2. Qual è il luogo dei punti P tali che PB/PA=m/n?
3. Qual è il luogo dei punti P tali che $PA^2+PB^2=2k^2$*?*
4. Qual è il luogo dei punti P tali che APB = α?
Frequenti problemi di II grado si possono ridurre ai seguenti, che conducono ad altre coniche:
1. Qual è il luogo dei punti P tali che PB+PA=k?
2. Qual è il luogo dei punti P tali che, |PB + PA|=k?
3. Qual è il luogo dei punti P tali che PA/d(P,r)=m/n?
Questi problemi sono stati approfonditi dal gruppo col supporto determinante dell'ambiente Cabri. Il lavoro completo sarà pubblicato in un prossimo QUADERNO IRRSAE-ER.

Metodologia proposta

E' previsto che l'interazione docente/discente si articoli in tutti i casi nelle seguenti fasi: di enunciazione del problema, di lavoro all'elaboratore sulla base di una scheda con traccia per la costruzione e visualizzazione del luogo mediante l'opzione Luogo di Punti del menu Costruzioni, di analisi intuitiva del tipo di luogo e dimostrazione, di realizzazione di una macro che costruisca il luogo nel caso sia una retta o una circonferenza, di risoluzione di problemi senza e con discussione anche con eventuale aiuto ancora di Cabri.
Ad esempio esponiamo il lavoro proposto per affrontare il seguente problema:
Qual è il luogo dei punti P del piano tali che d(P,r) + d(P,s) = k ?

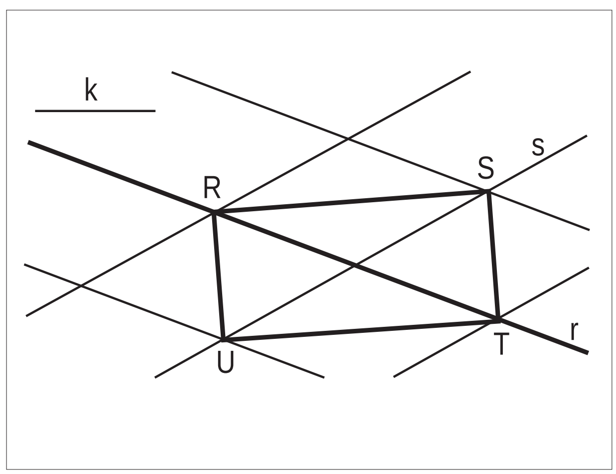
I fase:
(in laboratorio)

Scheda con traccia di lavoro
1. Costrusci un segmento AB lungo k ed un punto X su AB
2. Costruisci il luogo Lr dei punti distanti AX da *r* ed il luogo Ls dei punti distanti XB da *s* (**suggerimento**: usa la macro costruita precedentemente per *il luogo dei punti P del piano tali che d(P,r) = k)*
3. Al variare di X su AB il luogo dei punti di Lr ∩ Ls è il luogo cercato.
Sembra si tratti di un rettangolo!
Si otterrà infatti ad esempio una figura come la seguente



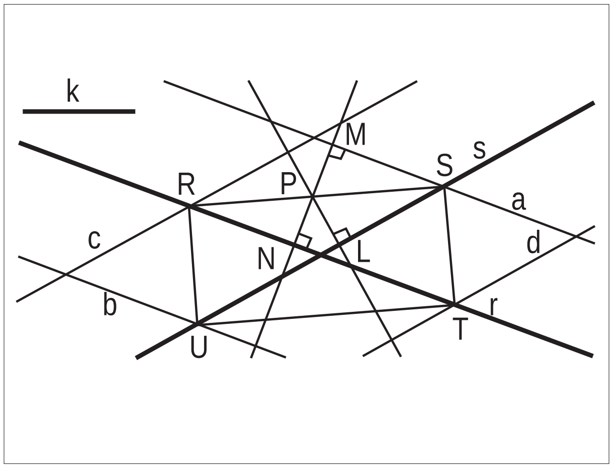
II fase
dimostrazione

Scheda con problema a risposta aperta
Prova a dimostrare che si tratta di un rettangolo trovando l'equazione del luogo in un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale.
Che sistema di riferimento hai scelto?
Quale può essere il sistema più "furbo"?
Se non l'hai gia' fatto, scegli come sistema di riferimento quello in cui l'asse delle ascisse coincide con una delle due rette e l'origine coincide con il loro punto di intersezione.
Come diventa in questo caso l'equazione del luogo?
Hai notato che ci sono due valori assoluti?
Discuti i valori assoluti distinguendo i 4 casi.
Come puoi dimostrare che i segmenti che ottieni appartengono a rette perpendicolari fra loro?
Trova poi la misura della diagonale del rettangolo in funzione del valore di k e del coefficiente angolare non nullo.
Si dimostra in modo sintetico che il luogo è costituito dai quattro lati di un rettangolo le cui diagonali appartengono alle rette *r* ed *s*.



Si costruiscano le rette *a* e *b* parallele ad *r* e distanti da essa k. Si indichi con S l'intersezione delle rette *a* ed *s*. Si costruiscano le rette *c* e *d* parallele ad *s* e distanti da essa k. Si indichi con R l'intersezione delle rette *c* ed *r*. Con analoga costruzione si tracciano i punti V e T.

Si dimostra ora che il luogo è costituito dai lati del rettangolo RSTV.



La retta RS è diagonale di un rombo con i lati su *a*,*s*,*r*,*c*; quindi RS è bisettrice delle rette *a* e *s*. Preso dunque un punto P sul segmento SR, si tracci da P le perpendicolari ad *a*, ad *r* e ad *s* e indicare con M, N e L i piedi; si ha PM=PN e quindi LP+PM=LP+PN= LM=k. Si è così dimostrato che tutti i punti del segmento SR soddisfano la condizione di appartenenza al luogo. Analogamente si può dimostrare che i punti dei segmenti ST, TV ed RV appartengono al luogo. Il quadrilatero SRVT è un rettangolo poichè le bisettrici RS e ST sono perpendicolari tra loro come per le altre coppie di lati.

III fase:
costruzione macro (in laboratorio)

Scheda a risposta aperta

Costruisci una macro che, dati un segmento lungo k e due rette r e s come oggetti iniziali, produce come oggetti finali i lati del rettangolo luogo geometrico dei punti P tali che d(P,r)+d(P,s)=k.
Ad esempio:
costruisci il luogo d(P,r)=k e le intersezioni con *s*;
costruisci il luogo d(P,s)=k e le intersezioni con *r*;
crea i segmenti congiungenti i vertici del rettangolo così ottenuti.

IV fase:
esercizi di applicazione (eventualmente anche in laboratorio)

Esercizi proposti

• Problemi senza discussione

1. Dato il triangolo equilatero ABC si prenda sul lato BC= 4u un punto P tale che
PH + PK = $2\sqrt{3}$
dove H e K sono le proiezione di P rispettivamente sui lati AB e AC.

2. Dato un triangolo isoscele ABC con gli angoli alla base di 30 ° si consideri il punto P sul lato AC = 4u in modo che PH + PK = 3 dove H e K sono le proiezione di P rispettivamente sul lato BC e sul prolungamento di AB.

3. Dato un triangolo rettangolo, a partire da un punto sull'ipotenusa e tracciando le parallele ai cateti, si costruisca un rettangolo di perimetro assegnato.

• Problemi con discussione

1. Dato il triangolo rettangolo ABC retto in A, con AB = 4u e AC = 3u, si determini sull'ipotenusa un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P sui cateti si abbia PH + PK = k, con k > 0.

Riferimenti bibliografici.

Enriques-Amaldi, *Elementi di geometria, Parte prima*, Zanichelli, 1987 Bologna
Cap. 6 Luoghi geometrici: si introduce il metodo dei luoghi per risolvere problemi
idem, Parte seconda
pag.107: Digressione sui metodi sintetici per la risoluzione dei problemi geometrici

A. Sabbatini, *Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici*, *in F. Enriques*, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna

Palatini-Faggioli, *Elementi di geometria, vol.2*, Ghisetti e Corvi, 1979 Milano
Cap.XVII Sulla risoluzione dei problemi geometrici: si introduce il metodo sintetico, di analisi e sintesi, dei luoghi geometrici ricordando alcuni luoghi geometrici - 13 luoghi - da tenere in considerazione

Vasilyev-Gutenmacher, *Straight lines and curves*, Mir, 1978 Moscow
Cap 2: si esaminano diversi luoghi, e una loro classificazione unitaria, insieme a diversi problemi nei quali sono coinvolti. ■

Errata Corrige

• Nell'articolo tradotto per la sezione Da Cabriole del bollettino N°13, pag.30, compare nella seconda parte, 1° capoverso 3a riga, la parola (costanti): il termine più appropriato è invece (vincolate).
• Nella sezione Cabrinforma del bollettino N°13, compaiono alcune inesattezze negli indirizzi segnalati; ci scusiamo e li riproponiamo:
1) Sito Web del progetto Cabri-géomètre IRRSAE-ER
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/
2) Sito Web del Convegno "Geometria: tradizione e rinnovamento"
http://arci01.bo.cnr.it/geom/
http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/www_did.html
3) Lista di discussione Cabrinews
listserver@arci01.bo.cnr.it (per iscriversi)
cabrinews@arci01.bo.cnr.it (per comunicare)
4) Sito Web di FLATlandia
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia (per consultare)
flat@arci01.bo.cnr.it (per comunicare) ■

Da AbraCAdaBRI

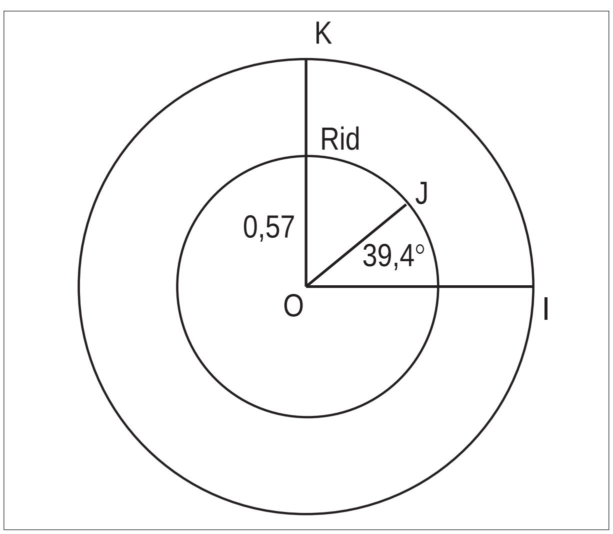
Rotazione di un triedro

di Giuliana Bettini
I.R.R.S.A.E. - E.R. Bologna

AbraCadabri era una pubblicazione in lingua francese, analoga a Cabriole, realizzata da un gruppo di insegnanti che operano nell'isola de La Réunion. Ora non è più pubblicata su carta, ma diffusa via Internet. Da questo numero si alterneranno traduzioni dalle due pubblicazioni.

Les CabriCótiers
BP 19 - 97432 Ravine des Cabris
LA REUNINON
Phone Président: 19. (262).56.14.37
Phone Sedrétaire: 19. (262).49.84.99

In questo articolo ci proponiamo di spiegare come simulare, con Cabri-géomètre, la rotazione di un triedro attorno a uno dei suoi assi.(...)

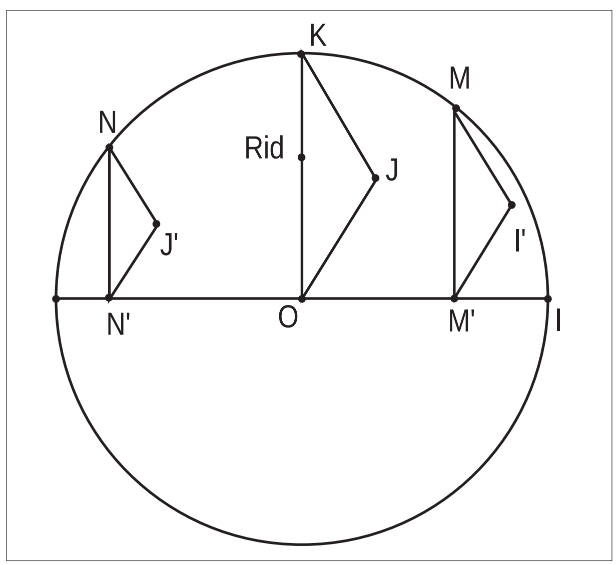


1) Disegno di un triedro di riferimento

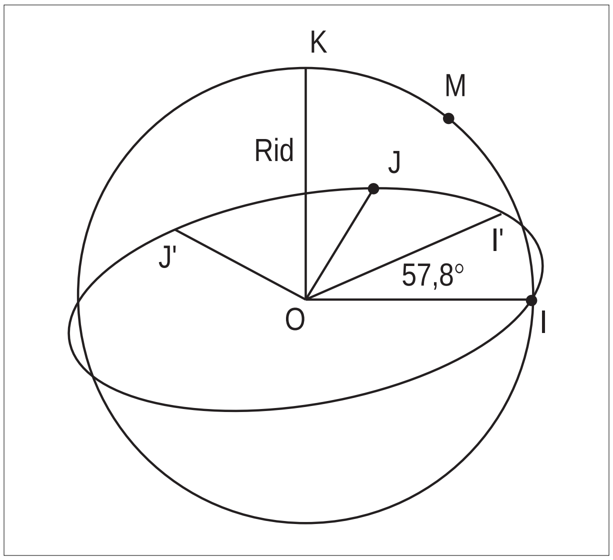
Muniamo lo spazio (che si suppone orientato) di un riferimento ortonormale diretto (O, **OI**, **OJ, OK**), che sarà rappresentato in prospettiva cavaliera (PC), in modo che il piano frontale, l'angolo di fuga e il coefficiente di riduzione siano rispettivamente il piano (OIK), l'angolo (**OI**,**OJ**)[1] e il quoziente OJ/OI.
Con l'aiuto di Cabri-géomètre, costruiamo una retta base d1 (che sceglieremo orizzontale), un punto base O, la parallela a d1 passante per O (che chiameremo d2), un punto I su d2 a destra di O. La circonferenza *c* di centro O passante per I incontra la perpendicolare condotta da O al segmento [OI] in K e K' (K sopra d2). Scegliamo, sul segmento OK, un punto che chiameremo Rid (Riduzione). Per avere la rappresentazione in PC é sufficiente scegliere un punto J sulla circonferenza *c'* di centro O passante per Rid e tracciare il segmento [OJ]. Possiamo ora scegliere l'angolo di fuga e il coefficiente di riduzione (e quindi il punto di vista) spostando rispettivamente J su *c'* e il punto Rid sul segmento [OK][2].

2) Simulazione della rotazione del triedro attorno all'asse (OK)

E' sufficiente saper disegnare le immagini in PC di I e J per una rotazione qualsiasi di asse (OK)[3].
Sia M un punto della circonferenza *c* (poniamo (**OI**,**OM**)=a)[1];
sia N l'immagine di M per la rotazione (del piano (OIK)) di centro O che porta I su K;
siano M' e N' le proiezioni ortogonali dei punti M e N sulla retta (OI),
I' e J' le immagini di I e J per la rotazione (nello spazio) di asse (OK) e angolo a[4].
E' chiaro che la rotazione di asse (OI) che trasforma J in K, porta i punti O,I, I', J', M', N' rispettivamente in O, I, M, N, M', N'. In particolare, i segmenti [I'M'] e [MM'] (rispettivamente [J'N'] e [NN']) sono ortogonali e della stessa lunghezza. Da queste osservazioni deriva il disegno di I' e J' in PC.



In effetti, sul nostro disegno in PC, scegliamo un punto M sulla circonferenza *c*. Il disegno di M', N, N' non pone problemi poiché si trovano tutti nel piano frontale dove tutto é a grandezza naturale. Per i punti I' e J' basta osservare che le rette (M'I') e (N'J') sono parallele alla retta di fuga e che i segmenti [MM'] e [NN'] sono il disegno a grandezza naturale di [M'I'] e [N'J']. In altre parole i triangoli M'MI' e N'NJ' sono omotetici al triangolo OKJ.
Nascondiamo tutte le costruzioni intermedie, lasciamo soltanto i segmenti [OI], [OJ], [OK], [OI'], [OJ'], la circonferenza *c* , il punto Rid e il punto M (che possiamo chiamare Rot per rotazione). Possiamo registrare la figura con il nome *Triedro*, la si utilizzerà ogni volta che faremo una rappresentazione in PC di un solido.
Possiamo, con l'aiuto del punto Rot, divertirci a far ruotare il triedro (O,**OI'**,**OJ'**,**OK**) attorno all'asse (OK).



Possiamo anche verificare, con l'aiuto dell'opzione *luogo di punti*, che il punto I' (o il punto J') descrive una ellisse di centro O passante per I e J[5] quando il punto Rot descrive il la circonferenza *c*.
Ciò mostra che in generale il disegno di una circonferenza in PC é un'ellisse (eventualmente un segmento).
La dimostrazione si basa sul fatto che i punti I e J come l'ellisse sono le immagini rispettivamente dei punti I e K e della circonferenza *c* per l'affinità di asse (OI) che trasforma K in J.

Note

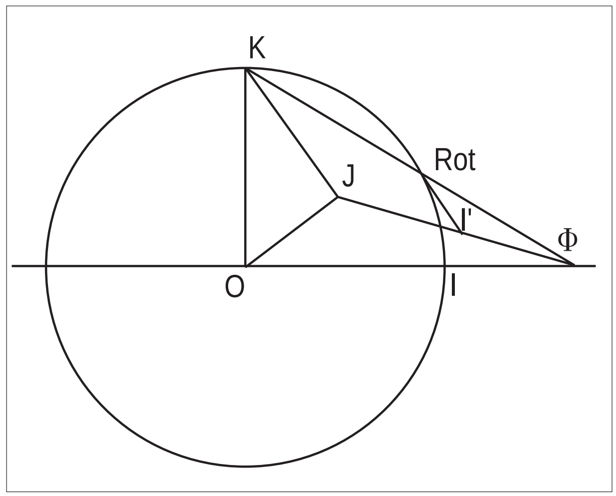
(1)- Questo angolo di vettori é definito nel piano (OIK) il quale é orientato in modo che il riferimento (O,**IO**,**OK**) sia diretto.

(2)- La lunghezza del segmento [ORid] é il coefficiente di riduzione OJ/OI

(3)- La retta (OK) é orientata dalla scelta del vettore unitario **OK.**

(4)- Regola di Ampère

(5)- Più precisamente l'ellisse di raggi coniugati [OI] e [OJ] ■



Cabri in biblioteca

Nel numero di ottobre della pubblicazione NUOVA SECONDARIA, Editrice La Scuola, è apparso un articolo sul software Cabri-géomètre: “IL PROBLEMA APERTO IN GEOMETRIA, con l'utilizzo di un software didattico”, di Ferdinando Arzarello e Ornella Robutti. In una nota si accenna al problema inerente l'uso della misura: segnaliamo che sul problema della misura col Cabri sono disponibili presso l'IRRSAE dell'Emilia Romagna una videocassetta e un Quaderno a cura di Paolo Boieri.

Cabri sul Web

Proponiamo un elenco di siti, con i corrispondenti indirizzi, in cui è possibile trovare notizie e lavori sul Cabri:

• **abraCAdaBRI** (un ottimo sito dall'isola de La Réunion)
http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/
•**Cabriole** (dall'Istituto di Ricerca sull'apprendimento della matematica di Grenoble, Francia)
http://www-cabri.imag.fr/cabriole/
• **La Cabri-Thèque** (proveniente da Quebec, Canada)
http://www.odyssee.net/~gstamand/
• **Cabri-Géomètre** (da Limoges, Francia)
http://www.ac-amiens.fr/limoges/cabri/Presentation.html
• **Cabri at collège Jules Flandrin** (da Corenc, Francia)
http://www-cabri.imag.fr/TeleCabri/PassionRecherche/
• **Cabri at collège Vincendo** (da La Réunion, Francia)
http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/convincep/Frames/F_Cabri/M_Pedago.htm
• **Cabri Geometry** (presso il Forum della Matematica da Swarthmore)
http://forum.swarthmore.edu/cabri/cabri.html
• **Cabri-Géomètre** (IRRSAE-ER, Bologna; questo è il sito del nostro bollettino))
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/
• **Cabri Geometry** II™ (sito web ufficiale della Texas Instruments)
http://www.com/calc/docs/cabri.htm

Demo di Cabri II

• Cabri II - Versione 1.1a MS-DOS
http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm#demo
• Cabri II - Versione 1.0 MS-Windows
ftp://ftp.imag.fr/pub/CABRI/CabriGeometre.PC/CABIIWIN.ZIP

In questo numero

Ritorna la sezione ***Cabridiscusso***: vengono presentati i risultati di una esperienza in cui, in una prima classe di biennio superiore, è stato programmato l'uso del laboratorio di informatica e del software Cabri come metodologia per l'insegnamento della geometria.

In ***Come fare*** presentiamo, per la scuola media inferiore, due esperienze sullo stesso argomento, inviate da insegnanti che hanno utilizzato il Cabri-Géomètre per esplorare le proprietà dei quadrilateri inscritti e circoscritti; per la scuola media superiore, due articoli che concludono la presentazione, iniziata nel N°12 del bollettino, dei lavori dei gruppi che operato coordinati dall'IRRSAE-ER: uno su luoghi geometrici significativi sia dal punto di vista storico sia per il loro aspetto grafico; l'altro presenta problemi geometrici risolti col metodo dei luoghi, sfruttando la capacità di Cabri di costruire una rappresentazione dinamica della figura che risolve il problema.

La sezione ***Da Cabriole*** è sostituita in questo numero del bollettino con ***Da AbraCadabri***: in essa troviamo la traduzione di una interessante realizzazione con il Cabri: la simulazione di una rotazione in tre dimensioni, ottenuta ricorrendo alla prospettiva cavaliera e alle proprietà dell'omologia affine.

L'immagine

L'immagine di questo numero è tratta dalla copertina del volume "Il mago dei numeri" di Hans M. Enzensberger, Einaudi, Torino 1997.
Il libro, dedicato a chi ha paura della matematica con il consiglio di leggerlo prima di addormentarsi, narra le avventure matematiche di un adolescente condotto in dodici notti a comprendere le leggi che governano sistemi numerici sempre più complessi e a scoprire che la matematica non è solo quella cosa noiosa propinatagli a scuola dal professor Mandibola.

Inviateci i vostri articoli

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*

- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore;
- indicate per ogni figura il nome con cui è registrata sul supporto magnetico;
- per i " *luoghi geometrici* " inviate la stampata con l'indicazione del punto d'inserimento.

• *SUPPORTO MAGNETICO*

- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .DOC) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte in formato Cabri (estensione .FIG) e in formato Hewlett Packard Graphics Language (estensione . HGL). Per ottenere le figure in questo formato si rimanda al capitolo 8.5 Stampa su File (pag. 70) del manuale di Cabri Géomètre;
- anche se Cabri Géomètre permette di tracciare oggetti a colori, non utilizzate questa opzione nei file che allegate;
- altri materiali (immagini, tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di CABRI*RRSAE* ". ■

CABRI*RRSAE*

COMITATO SCIENTIFICO
Giulio Cesare Barozzi (Università di Bologna)
Mario Barra (Università La Sapienza - Roma)
Paolo Boieri (Politecnico di Torino)
Colette Laborde (IMAG Grenoble)
Gianni Zanarini (Università di Bologna)

COMITATO DI REDAZIONE
Anna Maria Arpinati, Maria Elena Basile, Giuliana Bettini, Maria Grazia Masi, Valerio Mezzogori, Franca Noè, Daniele Tasso

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 Bologna

Supplemento al n.5 Settembre-Ottobre 1996, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE/ER.