Ruggero Giuseppe Boscovich
e le coniche:
dal teorema delle corde
al cerchio eccentrico

Laura Baratella

Biografia

Ruggero Giuseppe Boscovich nacque a Ragusa (Dubrovnik), in Croazia, il 18 maggio 1711, dall'agiato mercante serbo Nikola e da Pavica Betere, di origine bergamasca.

Sebbene il legame etnico fosse tenue, la maggior parte dell'attività del padre gesuita si svolse in Italia, e redasse in italiano molti dei suoi scritti: fu, del resto, un cosmopolita tipicamente settecentesco.

Compì i suoi primi studi presso il Collegium Ragusinum della sua città. Una volta conclusi gli anni di grammatica del *curriculum* gesuitico e giudicato come un alunno dal grande potenziale, fu inviato novizio al collegio di S. Andrea delle Fratte in Roma il 31 ottobre 1725, dove approfondì gli studi umanistici e di retorica. Nel 1728 passò al Collegio Romano, dove fu discepolo, in filosofia, di Carlo Noceti (1694-1759). Come era usanza, si dedicò all'insegnamento nelle classi elementari dello stesso Collegio, proseguendo contemporaneamente gli studi matematici e fisici sotto la guida di Orazio Borgondio (1675-1741), che aiutò poi nella redazione dei suoi scritti. Ammalatosi, nel 1733 e 1734 si trasferì presso il convento di Fermo, dove insegnò e compose i suoi primi *Carmina* d'argomento scientifico e politico. Rientrato al Collegio Romano, vi lesse i primi trecento versi del suo poema latino sulle eclissi, che avrebbe pubblicato a Londra venticinque anni dopo.

Ancora studente di teologia, tenne presso il Collegio Romano la cattedra di logica e matematica che era stata di Borgondio. Frutto dell'insegnamento sono le dissertazioni che compose e pubblicò a

Roma in quegli anni, relative a osservazioni e questioni matematiche, astronomiche, geodetiche, meccaniche. Furono anni d'intensa assimilazione delle teorie di Newton e dei suoi continuatori inglesi e francesi: infatti, Boscovich fu il più deciso e profondo sostenitore del newtonianismo nell'ambiente del Collegio Romano.

Nel frattempo, il nuovo papa Benedetto XIV aveva promosso un vivace rinnovamento scientifico e culturale: quando, nel 1744, Boscovich pronunciò i voti sacerdotali di padre gesuita, godeva già di un'ottima reputazione a livello europeo. Era soprattutto assiduo nella cerchia del cardinale Silvio Valenti Gonzaga (1690-1756), che può essere considerato il suo patrono. Ammesso nell'ambiente diplomatico vaticano, ebbe anche la grande opportunità di seguire il movimento dei dotti stranieri di passaggio. Eletto in Arcadia nel 1744 con il nome di Numenius Anigreus, iniziò la sua carriera di poeta mondano, in cui si dimostrò un esperto conversatore, uomo di mondo ricercato, di carattere entusiasta e collerico, di veemente e duttile ingegno e, come si può dedurre dai suoi scritti, spesso incline a qualche vanità.

Per interessamento del card. Valenti, nel 1742 fu invitato, insieme ai commentatori francesi di Newton, Thomas Le Seur (1703-1770) e François Jacquier (1711-1788), a esaminare i sintomi di crollo che presentava la cupola di S. Pietro, oggetto, in quegli anni, di dicerie e preoccupazioni. Ne risultarono il *Parere di tre matematici sopra i danni che si son trovati nella cupola di S. Pietro in sul fine del 1742* (Roma 1742) e le *Riflessioni de' pp. Tommaso Le Seur, Francesco Jacquier... e R. G. Boscovich sopra alcune difficoltà spettanti i danni,e risarcimenti della cupola di S. Pietro* (ibid. 1743), contenenti un progetto d'ingegneria. Sempre alla fabbrica di S. Pietro, è dedicato un altro saggio di Boscovich, *De Vaticani Templi apside restauranda et munienda* (ibid. 1743), redatto su diretto invito del papa.

Anche negli anni successivi, Boscovich continuò, come professore di matematica presso il Collegio Romano, a pubblicare dissertazioni d'argomento fisico e meccanico, geodetico e astronomico, in alcune delle quali delineò le tesi teoriche newtoniano-leibniziane che avrebbe poi posto alla base del suo *opus maius* di filosofia naturale. Citiamo:

- *De viribus vivis,* Romae 1745;
- *De cometis,* Romae 1746;
- *De aestu maris,* Romae 1747;
- *Dimostr. di una principale proprietà delle sezioni coniche, Dimostr. di un passo dell'Ottica di Newton, Dissert. della tenuità della luce solare, Tre osservaz. sull'eclissi del Sole* (articoli apparsi nel *Giornale de' letterati* nel 1747);
- *Dissertatio de lumine,De materiae divisibilitate et principiis corporum,* Romae 1748 (rist. in *Memorie sopra la fisica,* Lucca 1757);
- del 1749 sono infine *De determinanda orbita planetae ope catoptricae* (Romae), *Dimostrazione di un metodo dato dall'Eulero per dividere una frazione razionale in più frazioni semplici* (in *Giornale de' letterati,* pp. 78-96), e la relazione *Sopra il turbine che la notte tra gli 11 e 12 di giugno del 1749 danneggiò una gran parte di Roma* (Roma, trad. lat.: Pragae 1766).

Ma la versatilità dell'autore non si limita alla fisica e alla matematica. Nel 1745, in vacanza estiva a Frascati, si interessò a un ritrovamento archeologico e lo descrisse nei due saggi *D'un'antica villa scoperta sul dosso del Tuscolo* e *D'un antico orologio a sole e di alcune altre rarità...* (Roma 1746; anche in *Giorn. de' lett.*).

La fama di Boscovich era in costante ascesa: vari periodici esteri ripubblicavano i suoi saggi scientifici, nel 1746 fu eletto socio dell'Accademia di Bologna e, nel 1748, divenne socio corrispondente dell'Académie Française.

Il re del Portogallo Giovanni V lo invitò anche a prender parte a una spedizione scientifica in Brasile, ordinata per stendere la mappa del paese, ma Boscovich accettò l'offerta papale, patrocinata dal card. Valenti, di compiere un'opera analoga negli Stati della Chiesa.

Boscovich diede contributi originali alla soluzione del problema newtoniano della forma della Terra, implicante varie questioni geodetiche, matematiche e astronomiche, che erano ricerche intensamente coltivate in quegli anni. Per esempio, i Francesi avevano organizzato due famose spedizioni in Perù e in Lapponia per la misurazione degli archi di meridiano all'equatore e ai poli. Boscovich, nelle sue memorie, aveva sostenuto la necessità di moltiplicare e confrontare tali misurazioni sotto varie latitudini: l'offerta di stendere la carta dei domini papali gli consentì allora di misurare l'arco di meridiano tra Roma e Rimini. Realizzò i suoi scopi con l'aiuto del matematico e confratello irlandese Christopher Maire (1697 –1767): i due gesuiti percorsero buona parte dello Stato, tra il sospetto e l'ostilità della popolazione che li riteneva dei maghi, servendosi di strumenti geodetici da loro stessi approntati. I risultati ottenuti furono pubblicati nel resoconto *De litteraria expeditione per pontificiam Ditionem ad dimetiendos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam* (Romae 1755; Bononiae 1757; Vienna 1776; trad. franc. ampliata a cura, del gesuita Hugon [pseud. Hugo de Chatelain]: *Voyage astronomique,* Paris 1770).

Negli stessi anni, condusse ricerche di meccanica razionale, in particolare sulla *lex continuitatis* leibniziana. Poco prima, aveva compiuto il manuale *Elementorum matheseos ad usum studiosae iuventutis,* i cui primi due volumi (Romae 1752) sono dedicati alla geometria elementare, all'aritmetica e alla trigonometria piana e sferica; il volume terzo (ibid. 1754, con i primi due; rist. Venetiis 1758) contiene la parte più originale, ossia la trattazione delle sezioni coniche e delle trasformazioni geometriche.

Un suo biografo settecentesco (Francesco Ricca [1755-1809], *Elogio storico dell'abate Ruggiero Giuseppe Boscovich,* Milano 1789) lascia intendere che egli "cominciasse a provare qualche alienazione da Roma", sia a causa degli studi troppo ostici a quell'ambiente di letterati e antiquari, sia per alcuni attriti con i confratelli o i superiori. È difficile stabilire l'attendibilità di queste asserzioni, ma è oggettivo che fu allontanato dell'insegnamento.

All'inizio del 1757 si recò a Lucca, per condurre una perizia idraulica, poi ad aprile si spostò a Vienna.

L'opera *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium* (1758), dedicata all'arcivescovo di Vienna, è una sintesi del lavoro fisico-matematico svolto in circa tredici anni. È divisa in tre parti, dedicate all'esposizione della "legge unitaria", allo sviluppo analitico di una serie di teoremi meccanici, all'applicazione della "legge" ai fenomeni fisici. Ne risultò uno sforzo geniale, ma in sé prematuro e caduco, di interpretare, alla luce di un'unica formula, il mondo ancora inviolato delle particelle elementari.

Dopo un breve rientro a Roma, ripartì per Parigi nell'ottobre '59. Dirà egli stesso più tardi che i suoi viaggi di quegli anni furono "un piacevole giro, fatto unicamente per interrompere le mie gravissime... applicazioni" (*Giornale del viaggio in Polonia,* 1784, p. X). Sembra, in realtà, che gli fossero affidate, data la sua crescente reputazione europea, delicate mansioni diplomatiche e rappresentative, sia pure non ufficiali.

Tra il maggio e il dicembre 1760 fu in Inghilterra: visitò l'osservatorio di Greenwich, Oxford e Cambridge. A Londra incontrò i maggiori intellettuali dell'epoca ed ebbe intense relazioni con ecclesiastici, diplomatici, politici. Onorevolmente accolto dagli scienziati inglesi, fu proposto alla Royal Society nel giugno 1760 ed eletto socio nel gennaio del '61. A Londra pubblicò nel 1760 il poema didascalico *De Solis ac Lunae defectibus,* cui aveva lavorato fin dal '35.

Dedicato alla Royal Society, il poema è in cinque libri. Una sinossi astronomica e una descrizione del cielo nelle eclissi totali di Sole (lib. I) introducono alla vera e propria trattazione dei fenomeni relativi alle eclissi di Sole e di Luna (lib. II-III), dei connessi fenomeni luminosi di rifrazione e riflessione (lib. IV), donde si passa a una generale esposizione dell'ottica newtoniana (lib. V).

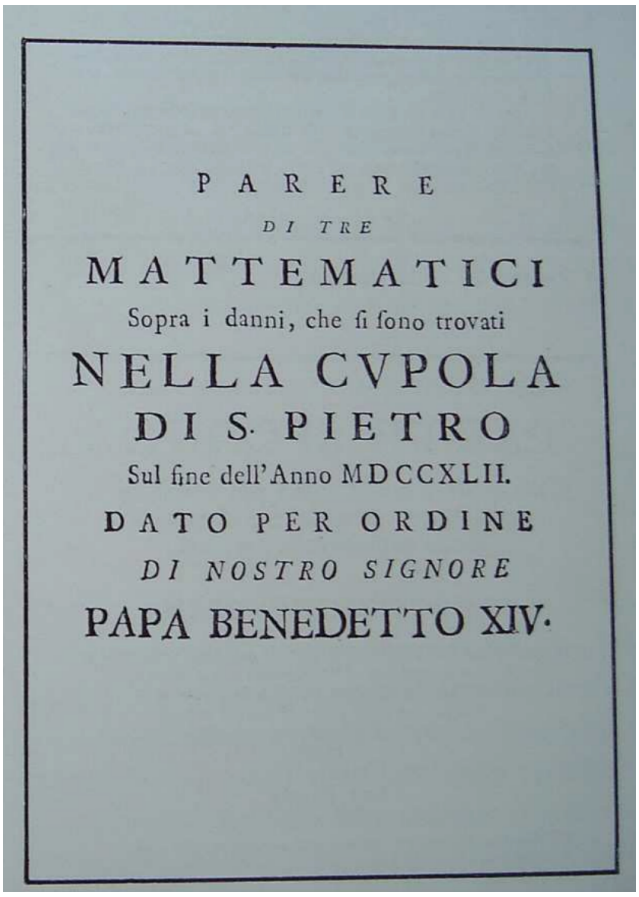
Nel dicembre del '60, lasciò Londra diretto a Costantinopoli con l'incarico di osservare, per conto della Royal Society, il transito di Venere previsto per il settembre '61. Attraversò varie città olandesi e renane e fu accolto con molti onori. Nella capitale turca, si trattenne circa sei mesi e nel maggio del '62 partì per Pietroburgo (senza però mai raggiungere tale città), attraverso i territori turchi, la Bulgaria e la Moldavia, fino a Galatz e al confine polacco. Su questa parte del viaggio, redasse un *Giornale* (trad. francese, Lausanne 1772; ed. orig. Bassano 1784; ora *Giornale di un viggio da Costantinopoli in Polonia...,* Milano 1966), ricco di concrete osservazioni sui costumi ed ordinamenti civili dei paesi slavi. Rinunciando ai nuovi incarichi, per motivi di salute e forse anche politici, tornò a Roma nel settembre '63.

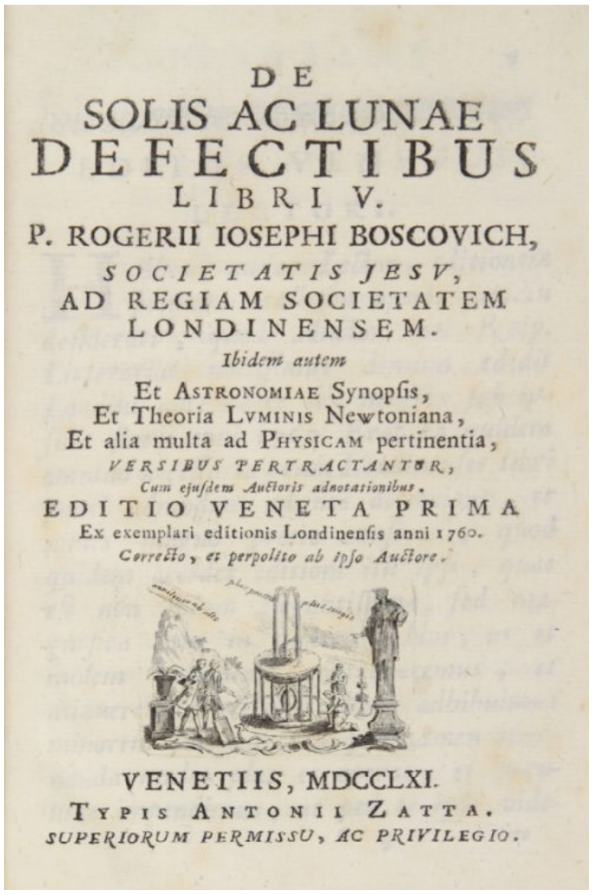
Eletto professore di matematica e astronomia nell'università di Pavia per volontà del governo imperiale, vi insegnò tra il 1764 e il 1768, quando fu trasferito alle Scuole Palatine di Milano, dove aveva intrapreso la costruzione del nuovo osservatorio di Brera. Le sue molteplici attitudini di ingegnere, matematico e astronomo gli consentirono di attrezzare uno dei più moderni istituti del genere. Ma, accusato di eccessive spese e di scarsa attitudine all'osservazione, si dimise dalla carica onorifica e dall'insegnamento (febbraio '73). Lasciò Milano per Venezia, dove passò alcuni mesi, incerto se recarsi a Ragusa o accettare una cattedra a Pisa.

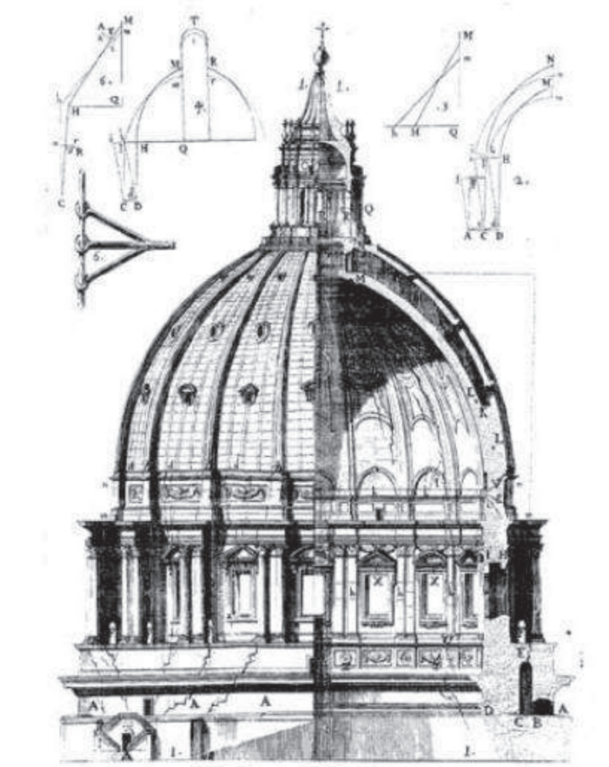
Il 1773 fu anche l'anno dell'abolizione dell'ordine dei gesuiti, così il 21 agosto si trasferì a Parigi, dove occupò la carica di direttore dell'ottica per la marina.

Nel 1782, tornò in Italia in temporaneo congedo, ma vi avrebbe trascorso i suoi ultimi anni: fu dapprima a Pescia e Firenze, poi a Bassano, ospite dei conti Remondini.

Nel 1785, dopo un'ultima visita ad amici romani, soggiornò in Toscana, ma tornò presto a Milano. Lo scarso successo di alcune sue opere, i postumi di una trombo-flebite e l'aggravamento di una psicosi depressiva lo colpirono duramente. Divenne preda di ossessioni e deliri, nei quali lamentava di essersi dedicato troppo alle scienze anziché alla cura delle anime. Dopo alcuni mesi di malattia, morì a Milano il 13 febbraio 1787 di edema polmonare e fu sepolto in S. Maria Podone.


PARERE
DI TRE
MATTEMATICI
Sopra i danni, che si sono trovati
NELLA CVPOLA
DI S. PIETRO
Sul fine dell'Anno MDCCXLII.
DATO PER ORDINE
DI NOSTRO SIGNORE
PAPA BENEDETTO XIV.


DE
SOLIS AC LUNAE
DEFECTIBUS
LIBRI V.
P. ROGERII IOSEPHI BOSCOVICH,
SOCIETATIS JESV,
AD REGIAM SOCIETATEM
LONDINENSEM.
Ibidem autem
Et Astronomiae Synopsis,
Et Theoria Lvminis Newtoniana,
Et alia multa ad Physicam pertinentia,
VERSIBVS TERTRACTANTVR,
Cum ejusdem Auctoris adnotationibus.
EDITIO VENETA PRIMA
Ex exemplari editionis Londinensis anni 1760.
Correctio, et perpolito ab ipso Auctore.
VENETIIS, MDCCLXI.
Typis Antonii Zatta.
SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.



1*Illustrazione della cupola di San Pietro a fine 1742, con evidenti danni strutturali, dalle Riflessioni de' pp. Tommaso Le Seur, Francesco Jacquier... e R. G. Boscovich sopra alcune difficoltà spettanti i danni,e risarcimenti della cupola di S. Pietro.*

RIFLESSIONI
DE' PADRI
TOMMASO LE SÈUR,
FRANCESCO JACQUIER
DEEL' ORDINE DE' MINIMI,
E
RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH
DELLA COMPAGNIA DI GESÙ
Sopra alcune difficoltà ſpettanti
i danni, e Riſarcimenti
DELLA CUPOLA
DI S. PIETRO
Propoſte nella Congregazione tenutaſi nel Quirinale
a' 20. Gennaro MDCCXLIII.
E ſopra alcune nuove Iſpezzioni fatte dopo
la medeſima Congregazione.

DE
LITTERARIA EXPEDITIONE
PER
PONTIFICIAM DITIONEM
AD DIMETIENDOS DUOS MERIDIANI GRADUS
ET CORRIGENDAM MAPPAM GEOGRAPHICAM
IUSSU, ET AUSPICIIS
BENEDICTI XIV.
PONT. MAX.
SUSCEPTA A PATRIBUS SOCIET. JESU
CHRISTOPHORO MAIRE
ET
ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH.

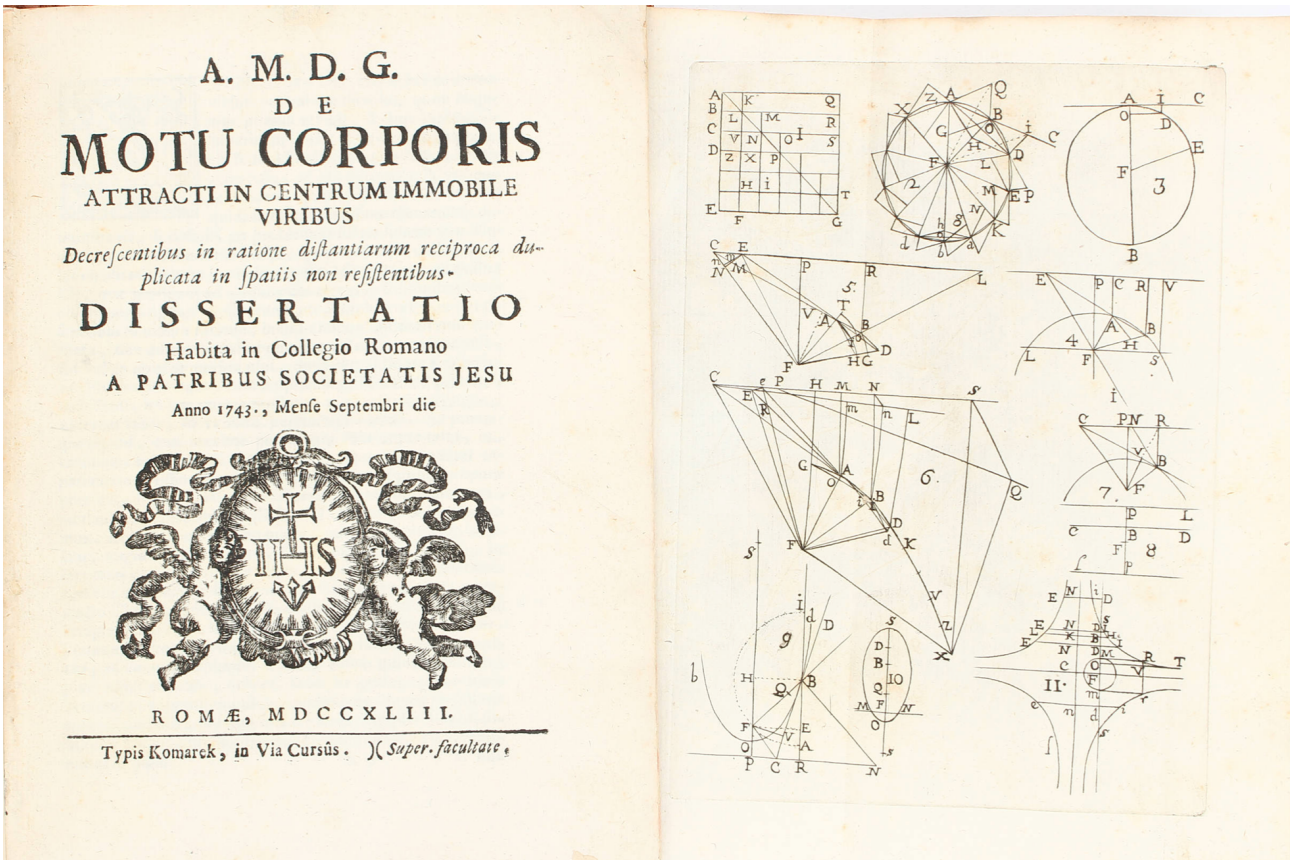
ROMÆ. MDCCLV.

IN TYPOGRAPHIO PALLADIS
EXCUDEBANT NICOLAUS, ET MARCUS PALEARINI
PRÆSIDUM PERMISSU.

Il nuovo approccio di Boscovich alle sezioni coniche

Una nuova edizione in 3 volumi dell'opera *Principia* di Newton dei due autori francesi Minims Thomas Le Seur (1703-1770) e François Jacquier (1711-1788) viene stampata tra il 1739 e il 1742. Questa edizione è rilevante per le ampie note incluse nel testo, che facilitano la lettura dei *Principia* anche ai non esperti di geometria. Alla fine degli anni '30 del 18° secolo, scrivendo quest'opera, Le Seur e Jacquier erano a Roma, presso il Collegio francese di Trinità dei Monti e Boscovich, che insegnava matematica al Collegio Romano dei Gesuiti, ha l'opportunità di parlare con loro dell'opera di Newton, e in particolare dei risultati di geometria del primo libro.

Boscovich legge accuratamente il primo volume dei *Principia* e poco dopo pubblica un opuscolo sul cerchio osculatore, un concetto fondamentale ma difficile da comprendere, e che, secondo lui, non era stato ben spiegato da Le Seur e Jacquier. La lettura certamente ispira Boscovich e in due articoli, rispettivamente del 1743 e 1744, trattò alcuni temi delle sezioni 3 e 4 del libro 1 dei *Principia*.



A. M. D. G.

D E

MOTU CORPORIS

ATTRACTI IN CENTRUM IMMOBILE VIRIBUS

Decreſcentibus in ratione diſtantiarum reciproca duplicata in ſpatiis non reſiſtentibus.

DISSERTATIO

Habita in Collegio Romano

A PATRIBUS SOCIETATIS JESU

Anno 1743., Menſe Septembri die

ROMÆ, MDCCXLIII.

Typis Komarek, in Via Cursûs.)(*Super. facultate.*

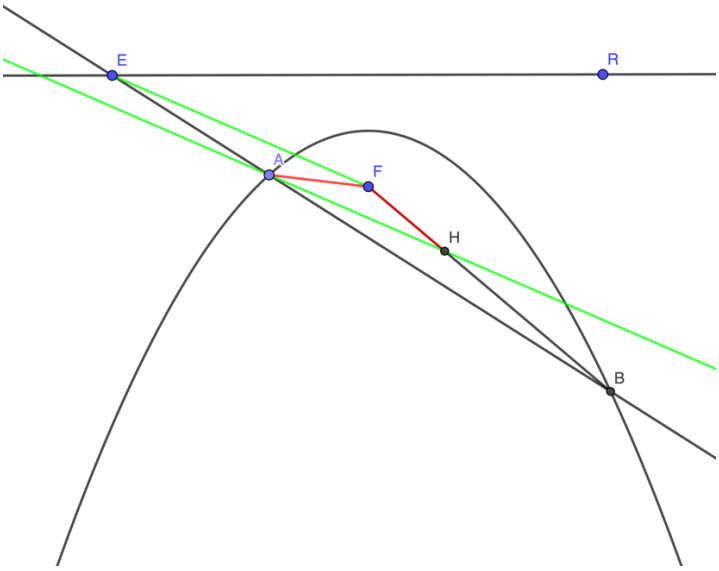
Nel trattato *De Motu Corporis attracti in centrum* (1743), Boscovich, per dimostrare il problema diretto e inverso delle forze centrali, avendo a che fare con le sezioni coniche, le definisce assegnando la direttrice, il fuoco e un rapporto dato, ovvero l'eccentricità:

Una sezione conica è il luogo dei punti le cui distanze da una retta data (la direttrice) e un punto fissato (il fuoco) sono in rapporto dato.

Adottando questa definizione, molto probabilmente Boscovich si ispira a Newton, che, nello scolio alla proposizione 21 dei *Principia*, usa implicitamente tale proprietà per determinare la sezione conica dati il fuoco S e tre suoi punti B, C, D.

Nello stesso articolo (Art. XXIV), Boscovich dimostra un corollario che sarebbe diventato importante nel suo futuro approccio alle sezioni coniche, ovvero:

Supponiamo che una corda AB incontri la direttrice ER in E. Congiungiamo E con il fuoco F e tracciamo la parallela a EF passante per A. Se H è il punto in cui tale parallela interseca il raggio focale FB, allora FA = FH.



Ripercorriamo la dimostrazione di Boscovich.
Poiché *FB : BR = FA : AC,* permutando e considerando che i triangoli *ERB* e *ECA* sono simili, segue che

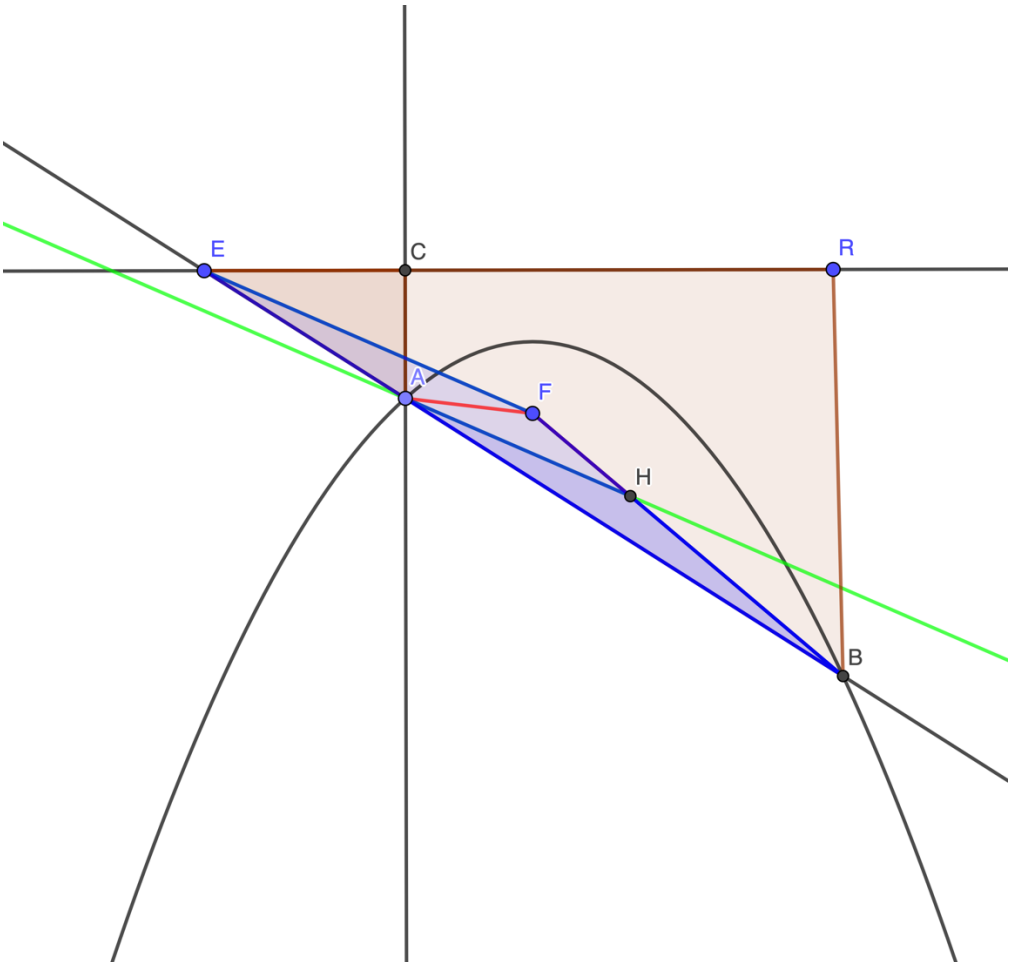
(a) FB : FA = BR : AC = BE : AE,

quindi poiché i triangoli EBF e ABH sono simili si ha *EB* : *AB = FB* : *HB.* Per la proprietà dello scomporre *(EB – AB) : EB = (FB – HB) : FB*. Questo implica che

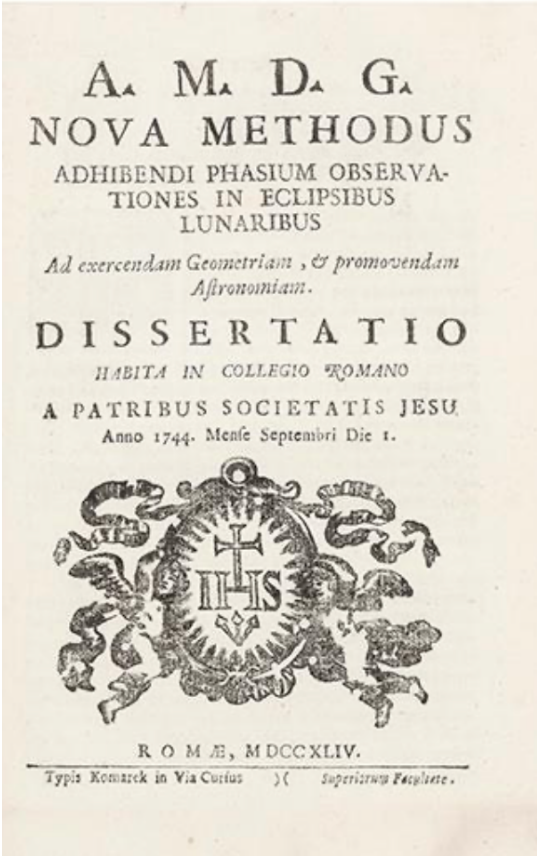
(b) AE : BE = FH : FB.

Quindi, da *(a)* e *(b)* segue che *FB : FA = BR : AC = BE : AE = FB : FH*, da cui segue la tesi.

■



In seguito a questo corollario, Boscovich dimostra vari risultati. Per esempio, determina la direttrice dati il fuoco e tre punti della curva e mostra come trovare la tangente ad un punto qualsiasi della curva.


A. M. D. G.

NOVA METHODUS

ADHIBENDI PHASIUM OBSERVATIONES IN ECLIPSIBUS LUNARIBUS

Ad exercendam Geometriam, & promovendam Astronomiam.

DISSERTATIO

HABITA IN COLLEGIO ROMANO

A PATRIBUS SOCIETATIS JESU

Anno 1744. Menſe Septembri Die 1.

ROMÆ, MDCCXLIV.

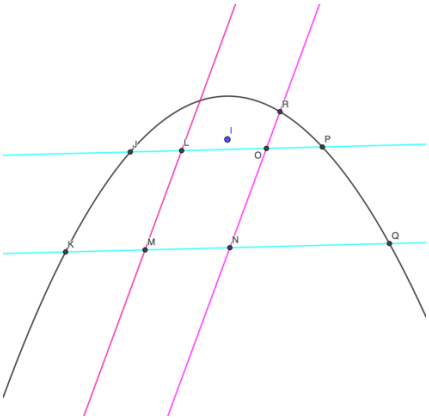
Typis Komarek in Via Curtius)(*Superiorum Facultate.*

Boscovich continua a leggere i *Principia*, con lo scopo "*di coltivare la Geometria e promuovere l'Astronomia*", come scrive nel motto che accompagna il titolo dell'opuscolo *Nova methodus adhibendi phasium observationes in eclipsibus lunaribus*, che pubblica nel 1744.

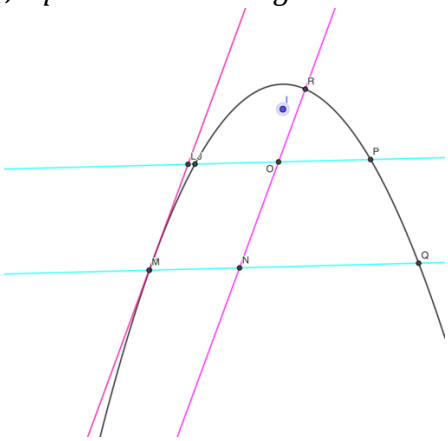
Proprio in quest'opera, Boscovich si riferisce al teorema delle corde come "*il teorema meglio conosciuto, con cui si possono risolvere agevolmente molti problemi che a prima vista sembrerebbero complicati*".

Nella sezione 16, enuncia il teorema delle corde in questa forma:

Se due rette, parallele ad altre due rette di direzione data, si intersecano tra loro e intersecano la sezione conica, i rettangoli sotto le parti tra il punto comune e le rispettive intersezioni con la conica sono in proporzione data.



Quando le due intersezioni di ciascuna retta con la conica coincidono, in modo che le secanti diventino tangenti, i quadrati delle tangenti sostituiscono i rettangoli.



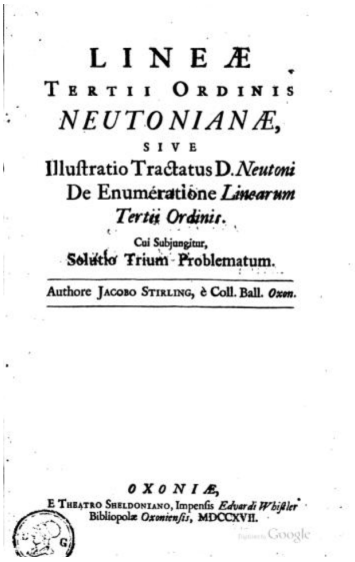
L'autore applica, poi, il teorema per ottenere una serie di risultati sull'iperbole, di cui ha bisogno per lo studio delle eclissi lunari.

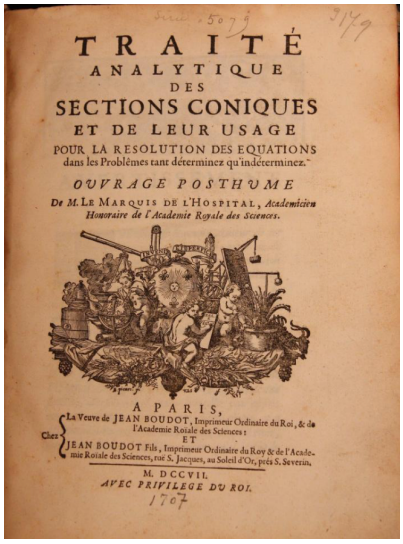
Nell'articolo 31, Boscovich esprime anche per la prima volta la sua intenzione di scrivere un trattato sulle sezioni coniche. Sulle orme di de l'Hopital, introduce queste curve direttamente nel piano, e poi dimostra che risultano sezioni di un cono. Tuttavia, non le definisce come de l'Hopital, ma assegnando i fuochi, la direttrice e il rapporto dato. Come lui stesso sottolinea, si tratta di una definizione "attraverso la quale tutto discende in modo semplice, anche il teorema" delle corde, che mette in evidenza nel trattato.

L'articolo fondamentale del 1746

Il progetto di Boscovich inizia a prendere forma nel 1746. Nell'introduzione, dichiara di essere stato indotto a svolgere queste ricerche leggendo le opere:

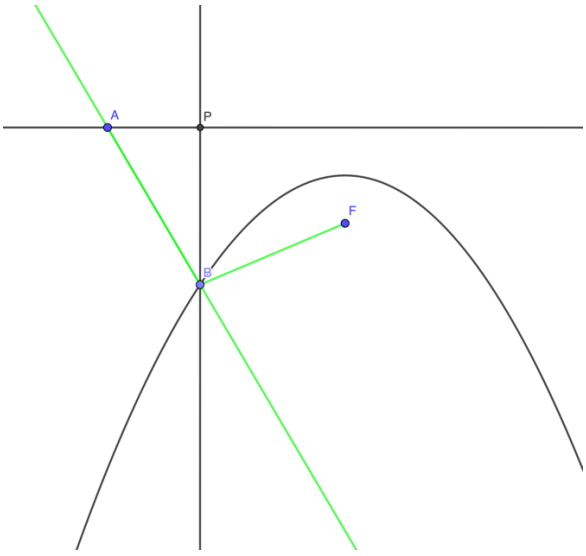
- *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae*, 1717, di James Stirling (1692-1770);
- *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problemes tant déterminez qu'indéterminez*, 1720, di Guillaume François Antoine de l'Hopital (1661-1704).


LINEÆ
TERTII ORDINIS
NEUTONIANÆ,
SIVE
Illustratio Tractatus D. Neutoni
De Enumeratione Linearum
Tertii Ordinis.
Cui Subjungitur,
Solutio Trium Problematum.
Authore JACOBO STIRLING, è Coll. Ball. Oxon.
OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, Impensis Edvardi Whistler
Bibliopolæ Oxoniensis, MDCCXVII.


TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.
OUVRAGE POSTHUME
De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, Academicien
Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez La Veuve de JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roi, & de l'Académie Royale des Sciences;
ET
JEAN BOUDOT Fils, Imprimeur Ordinaire du Roy & de l'Académie Royale des Sciences, rue S. Jacques, au Soleil d'Or, prés S. Severin.
M. DCCVII.
AVEC PRIVILEGE DU ROI.

Nell'articolo del 1746 *Dimostrazione facile d'una principale proprietà delle Sezioni Coniche, la quale non dipende da altri teoremi Conici; e disegno d'un nuovo metodo di trattare quella* dottrina, pubblicato nel *Giornale de' Letterati* (Art. XIX, giugno e luglio 1746, 189-193, 241-243, 315-316), Boscovich deduce il seguente importante corollario direttamente dalla definizione:

Sia una sezione conica definita dal fuoco F e dalla direttrice PA, e sia B un punto sulla conica. Allora il rapporto tra FB e BA, dove A è il punto dove la retta di direzione data passante per B interseca la direttrice, dipende solo dalla direzione di tale retta.



L'autore chiama P la proiezione ortogonale di B sulla direttrice e:

- poiché, per definizione di conica, il rapporto *FB : BP* è costante per ogni punto B della sezione conica;
- il rapporto *BP:BA* dipende solo dalla direzione di BA;

da

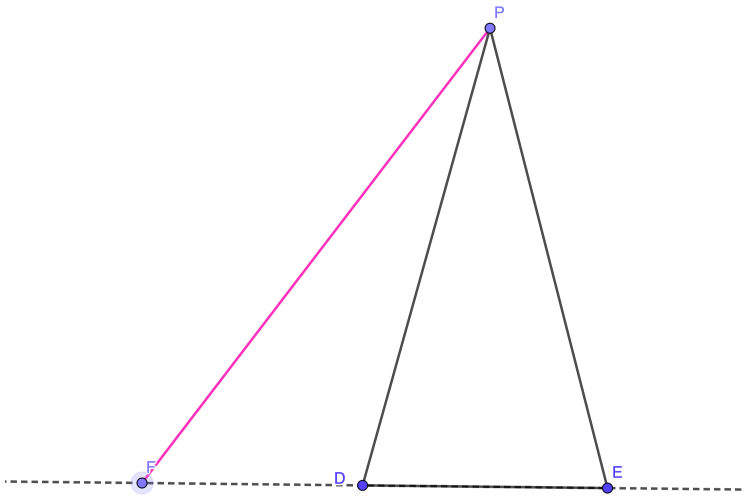
$$\frac{FB}{BA} = \frac{FB}{BP} \text{ x } \frac{BP}{BA}$$

segue che il rapporto tra FB e BA dipende solo dalla direzione di BA.

■

Boscovich dimostra anche il seguente fondamentale lemma:

Sia DPE un triangolo isoscele di base DE e sia F un punto sulla base, o sul suo prolungamento.
Allora $DF \text{ x } FE = |PE^2 - PF^2|$.



La dimostrazione segue dagli Elementi di Euclide, Proposizioni 5 e 6, Libro 2.

Da questi risultati, Boscovich ottiene il teorema delle corde, che ora enuncia nella forma seguente [Boscovich 1746, Teorema 1]:

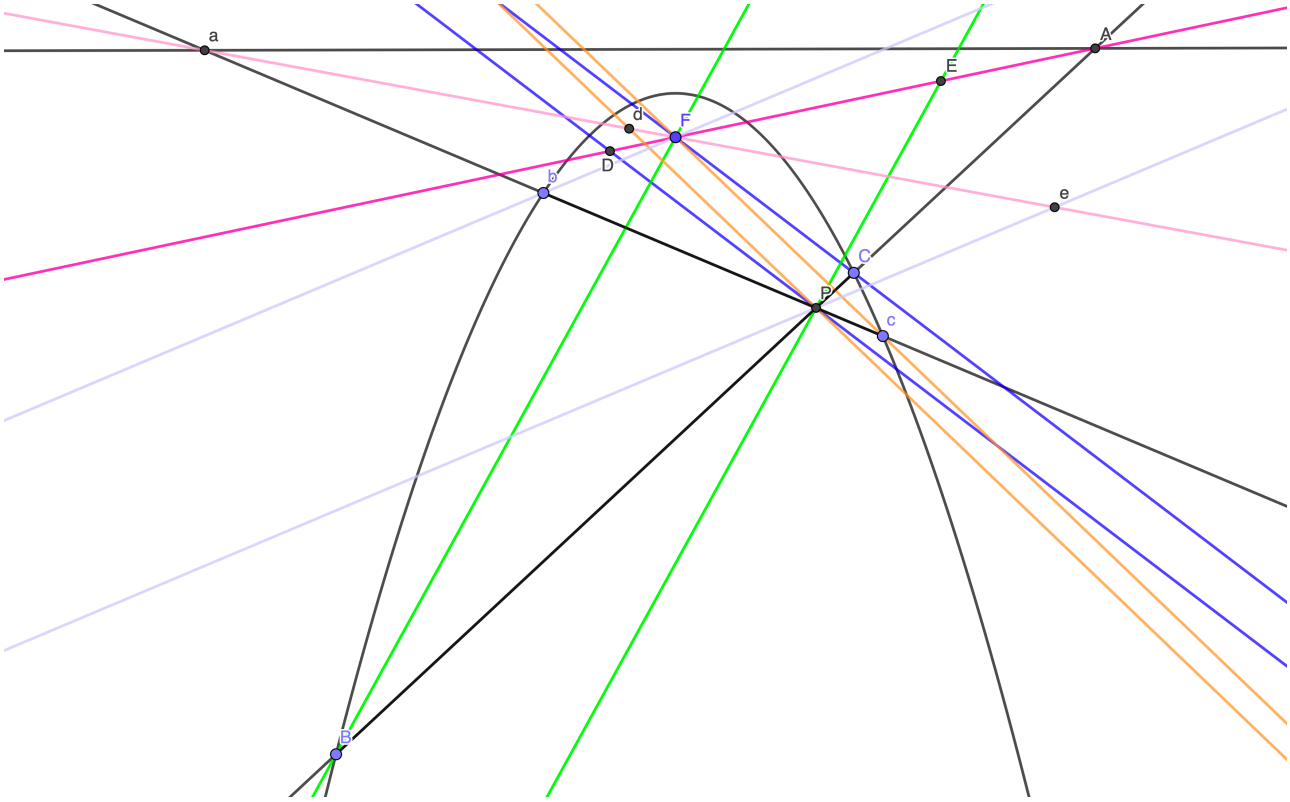
Si considerino:

- *una conica dati la direttrice, il fuoco e un rapporto dato;*
- *BC e bc due corde che si intersecano nel punto P, ciascuna di direzione fissata.*

Allora il rapporto

$$BP \text{ x } PC : bP \text{ x } Pc = costante.$$

Vediamo la dimostrazione di Boscovich.



Chiamiamo A e *a* i punti dove le rette BC e *bc*, rispettivamente, incontrano la direttrice.
Boscovich traccia

- le rette PD e PE, passanti per P e parallele, rispettivamente, alle rette FC e FB, chiamando D e E i punti in cui queste ultime parallele incontrano la retta FA.
- le rette Pd e Pe, passanti per P e parallele a Fc e Fb, dove d e e sono i punti in cui queste parallele incontrano la retta Fa.

Poiché FB è parallela a PE e FC è parallela a PD, il corollario implica che

$$PE : PA = FB : BA = FC : CA = PD : PA$$

Quindi $PE = PD$.
Applicando il lemma:

- nel triangolo DPE troviamo che $EF \times FD = PE^2 - PF^2$;
- nel triangolo PDA si ottiene $ED \times DA = PA^2 - PE^2$.

Analogamente, dimostra che $Pd = Pe$.
Inoltre, si ottiene che:

- $eF \times Fd = Pe^2 - PF^2$ applicando il lemma al triangolo dPe;
- $ed \times da = Pa^2 - Pe^2$ applicando il lemma al triangolo aPe.

Otteniamo le seguenti coppie di rette parallele:

1) EP e FB;
2) Pa e BG;
3) Fb e Pe.

Applicando il corollario alle precedenti rette, si ottiene:

1) $EP : PA = FB : BA$;
2) $PA : Pa = BA : BG$;
3) $Pa : Pe = ba : bF = BG : BF$.

Quindi $EF : Pe = FB : BF$, da cui $PE = Pe$.
Quindi $EF \times FD = eF \times Fd$. Inoltre, poiché $FB \parallel FE$ e $FC \parallel PD$, ottiene

$$PB : FE = PA : EA,\ PC : FD = PA : DA.$$

Pertanto, $PB : FE = PA : EA$ e $PC : FD = PA : DA$, da cui

$$PB \times PC : FE \times FD = PA^2 : EA \times AD = PA^2 : (PA^2 - PE^2).$$

Poiché il rapporto $\frac{PA}{PE} = \frac{BA}{FB}$ dipende solo dalla direzione di BC, dimostra che anche il primo rapporto dipende dalla direzione di BC.
Analogamente, dimostra che

$$Pb \times Pc : Fe \times Fd = Pa^2 : (Pa^2 - Pe^2).$$

Poiché $\frac{Pa}{Pe}$ dipende solo dalla direzione di bc, conclude che $BP \times PC : bP \times Pc$ dipende solo dalle direzioni di BC e bc.

■

Si tratta di una dimostrazione del teorema delle corde completamente sviluppata sul piano, come Newton avrebbe sicuramente apprezzato.

In seguito, Boscovich mostra come la maggior parte delle nozioni sulle sezioni coniche può essere dedotta dal teorema 1 che abbiamo precedentemente enunciato. In particolare, deduce le proprietà dei diametri e delle loro ordinate, dei diametri coniugati e del centro. Espone anche come disegnare le tangenti a partire da un punto dato e le tangenti alla conica in un suo punto. Illustra pure le proprietà dei fuochi e degli asintoti dell'iperbole.

Il trattato di Boscovich sulle sezioni coniche

L'articolo del 1746 suggerisce che, all'epoca, Boscovich abbia sviluppato una larga parte della trattazione sulle sezioni coniche che intendeva svolgere partendo dal teorema delle corde. Comunque, siccome negli anni seguenti è ingaggiato in varie occupazioni geografiche e astronomiche, non riesce a produrre tale trattato secondo i suoi piani.

Nel frattempo, la scoperta del cerchio eccentrico lo convince a cambiare approccio.
Essenzialmente, dalla nozione di cerchio eccentrico si possono far derivare tutti i teoremi sulle coniche, attraverso opportune costruzioni geometriche. In particolare, ragiona a partire dalla definizione di sezione conica dati la direttrice, il fuoco e il rapporto dell'eccentricità, e il lemma fondamentale che abbiamo visto poc'anzi. Inoltre, nei termini del cerchio eccentrico, deduce facilmente anche il teorema delle corde.

La scoperta di questo potente strumento e il desiderio di sviluppare una teoria sulla continuità geometrica, strettamente interconnessa con la trattazione delle coniche, sono tra le ragioni per cui il terzo volume di *Elementa Universae Matheseos* è pubblicato in ritardo.

Nel 1754, quando viene stampato, il trattato è diviso in due parti:

1. la prima si intitola *Sectionum Conicarum Elementa nova quadam methodo concinnata*. In essa, viene elaborata la teoria delle coniche nel piano, dati la direttrice, il fuoco e il rapporto di eccentricità, proseguendo con la trattazione sulle sezioni di un cono. In particolare, mostra che una curva che rispetti la definizione, data secondo il precedente punto di vista, sia realmente la sezione di un cono. In questo modo, si stabilisce l'equivalenza delle due definizioni.
2. la seconda parte è intitolata *Dissertatio de Transformatione Locorum Geometricorum*.

Con quest'opera, Boscovich termina le sue ricerche matematiche e si focalizza sulla filosofia naturale. Infatti, nel 1758 produce la sua opera maggiore, *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium,* in cui tenta di dare forma ad una teoria di filosofia naturale, riducendo tutte le forze della natura a una singola legge.

Quest'opera illustra la prima teoria matematica dell'atomismo e, per questo, non è subito ben accetta. La sua fortuna è soprattutto correlata con l'interesse che suscita in Gran Bretagna nel 19° secolo.

Come scrive Boscovich nell'introduzione a *Sectionum Conicarum Elementa*, ci sono due modi per sviluppare la teoria delle sezioni coniche:

1. attraverso il cono;
2. direttamente sul piano.

Collegii Soc. Jesu Romani 1757.

ELEMENTORUM

UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

SOCIETATIS JESU

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS III.

CONTINENS

SECTIONUM CONICARUM ELEMENTA

Nova quadam methodo concinnata

ET DISSERTATIONEM

DE TRANSFORMATIONE

LOCORUM GEOMETRICORUM

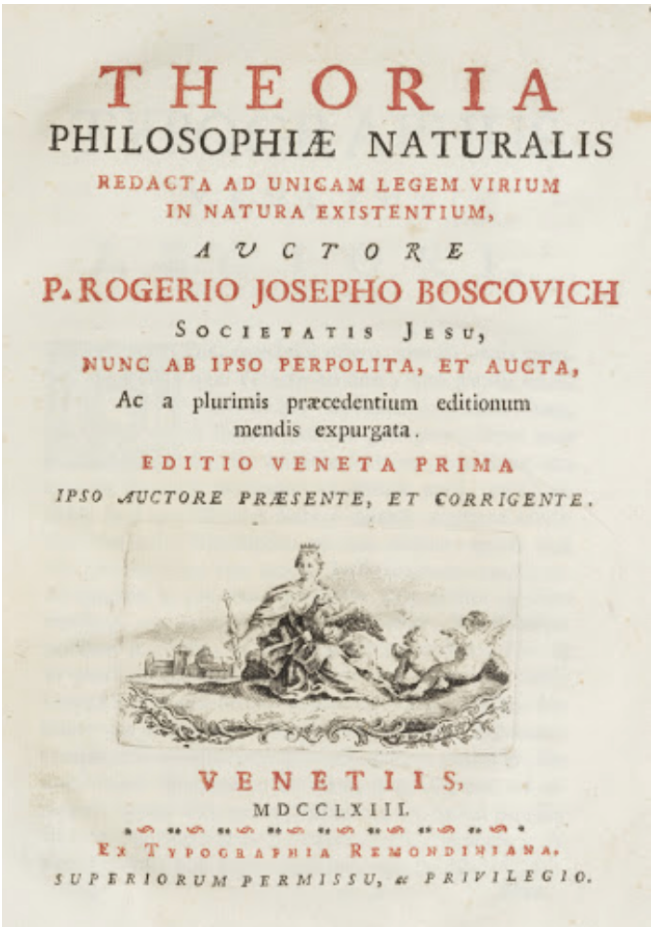
Ubi de Continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti Mysteriis.

ROMÆ MDCCLIV.

PROSTANT APUD FAUSTUM AMIDEI BIBLIOPOLAM IN VIA CURSUS.

ET IN TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI.

PRÆSIDUM FACULTATE.


THEORIA

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

REDACTA AD UNICAM LEGEM VIRIUM IN NATURA EXISTENTIUM,

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

SOCIETATIS JESU,

NUNC AB IPSO PERPOLITA, ET AUCTA,

Ac a plurimis præcedentium editionum mendis expurgata.

EDITIO VENETA PRIMA

IPSO AUCTORE PRÆSENTE, ET CORRIGENTE.

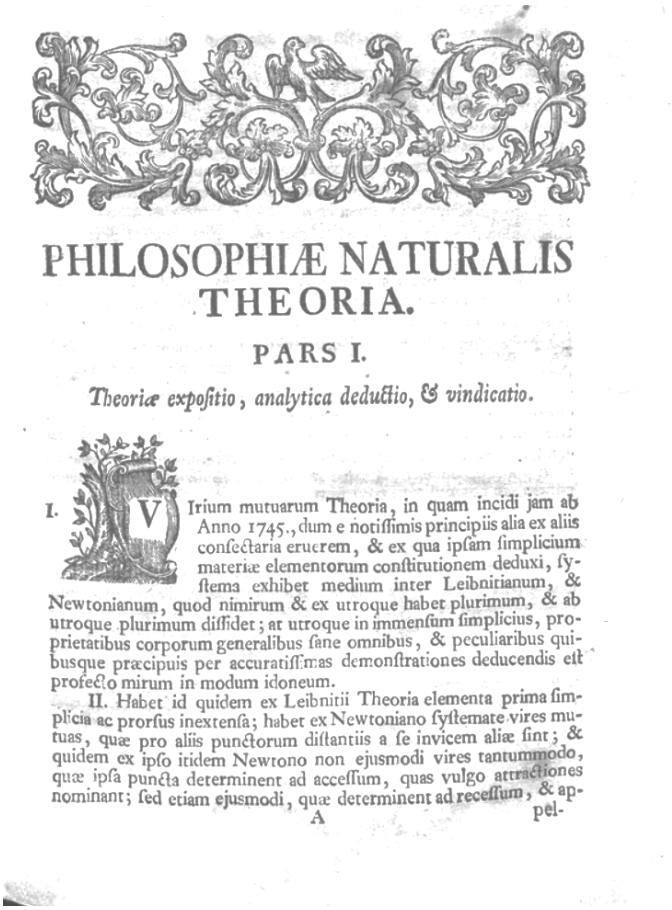
VENETIIS,

MDCCLXIII.

EX TYPOGRAPHIA REMONDINIANA,

SUPERIORUM PERMISSU, ac PRIVILEGIO.

Al primo approccio, che richiede un lungo lavoro preparatorio prima di entrare nel vivo della questione, Boscovich preferisce il secondo, in cui tutte le proprietà note di queste curve possono essere dedotte da un unico principio.



PHILOSOPHIÆ NATURALIS
THEORIA.

PARS I.

Theoriæ expoſitio, analytica deductio, & vindicatio.

I. VIrium mutuarum Theoria, in quam incidi jam ab Anno 1745., dum e notiſſimis principiis alia ex aliis conſectaria eruerem, & ex qua ipſam ſimplicium materiæ elementorum conſtitutionem deduxi, ſyſtema exhibet medium inter Leibnitianum, & Newtonianum, quod nimirum & ex utroque habet plurimum, & ab utroque plurimum diſſidet; at utroque in immenſum ſimplicius, proprietatibus corporum generalibus ſane omnibus, & peculiaribus quibusque præcipuis per accuratiſſimas demonſtrationes deducendis eſt profecto mirum in modum idoneum.

II. Habet id quidem ex Leibnitii Theoria elementa prima ſimplicia ac prorſus inextenſa; habet ex Newtoniano ſyſtemate vires mutuas, quæ pro aliis punctorum diſtantiis a ſe invicem aliæ ſint; & quidem ex ipſo itidem Newtono non ejuſmodi vires tantummodo, quæ ipſa puncta determinent ad acceſſum, quas vulgo attractiones nominant; ſed etiam ejuſmodi, quæ determinent ad receſſum, & appel-

A

I tre volumi degli *Elementa* di Boscovich incontrano largo consenso e l'opera viene ristampata nel 1757.

Tuttavia, la sua fama non è duratura, principalmente per 4 motivi:

1. l'abolizione dell'ordine dei Gesuiti nel 1773;
2. una graduale affermazione dell'italiano al posto del latino come lingua dell'insegnamento della matematica in Italia;
3. la complessità intrinseca del terzo volume, che si rivela di difficile lettura per gli studenti, così come l'appendice *Dissertatio de trasformatione locorum geometricorum*;
4. la crescente popolarità dei metodi analitici nella seconda metà del 18° secolo, a discapito del metodo sintetico.

In ogni caso, nei Paesi anglofoni, *Sectionum Conicarum Elementa* di Boscovich è vista come una buona introduzione agli aspetti più geometrici dei *Principia*, perchè il suo stile è molto simile a quello di Newton. Gode di grande fama all'inizio del 19° secolo e vari autori vi si ispirano nella composizione dei loro trattati o dei loro libri di testo sulle coniche.

Sectionum Conicarum Elementa, oltre al cerchio eccentrico, presenta varie innovazioni. Boscovich è indubbiamente in debito con Newton per la definizione di sezione conica nel piano e questo lo incita ad implementare le idee di Keplero sui punti all'infinito, sulla deformazione delle curve e sul principio di continuità, che, nella *Dissertatio de trasformatione locorum geometricorum*, definisce accuratamente attraverso 11 canoni.

Osserviamo che *Sectionum Conicarum Elementa* è probabilmente il primo trattato sulle coniche sviluppato a partire da un singolo concetto o da una singola proposizione fondamentali.

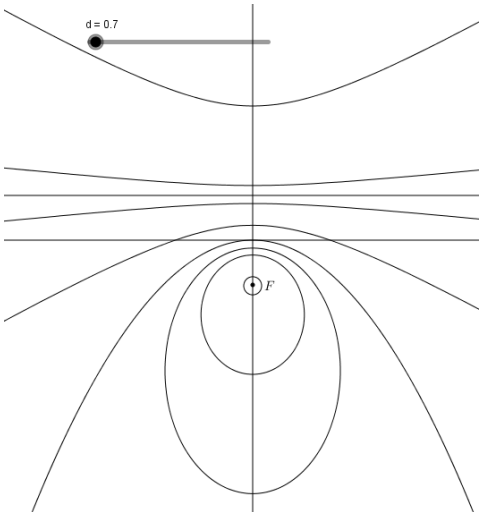
Il cerchio eccentrico

Il "cerchio eccentrico" viene introdotto nel terzo volume degli *Elementa universae matheseos* di Boscovich, stampato per la prima volta nel 1754. In realtà, Boscovich ne descrive il concetto, ma non dà nome al cerchio con cui intraprende lo studio delle sezioni coniche. Saranno autori successivi che lo appelleranno "Eccentric Circle", "Generating Circle" o "Auxiliary Circle".

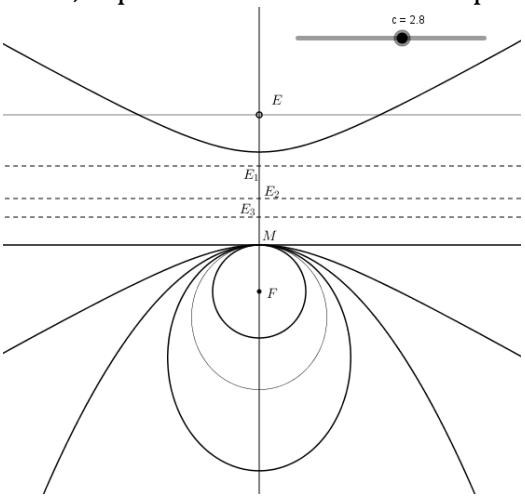
All'inizio del trattato, definisce una sezione conica assegnando direttrice AB, fuoco F (esterno ad AB) ed eccentricità:

Se da un punto P di una curva si traccia la retta PD perpendicolare alla direttrice AB, e si congiunge P con F, e se PF e PD hanno un rapporto costante, allora chiameremo ***sezione conica*** *la curva descritta dal punto, rispettivamente* ***ellisse***, ***parabola***, ***iperbole*** *a seconda che il rapporto sia minore, uguale o maggiore di uno.*

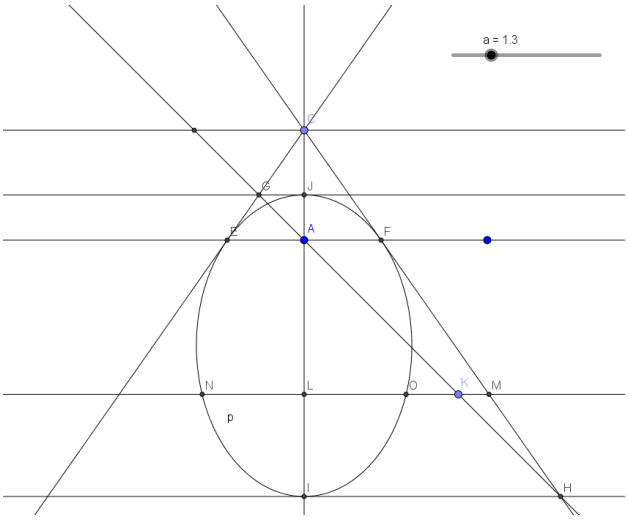
La definizione adottata permette a Boscovich di costruire un sistema piano di coniche, cioè di trasformare una conica in un'altra, facendo variare l'eccentricità, oppure muovendo il fuoco, oppure muovendo la direttrice parallelamente a sé stessa.
Per esempio, fissati il fuoco e la direttrice, si fa variare l'eccentricità:

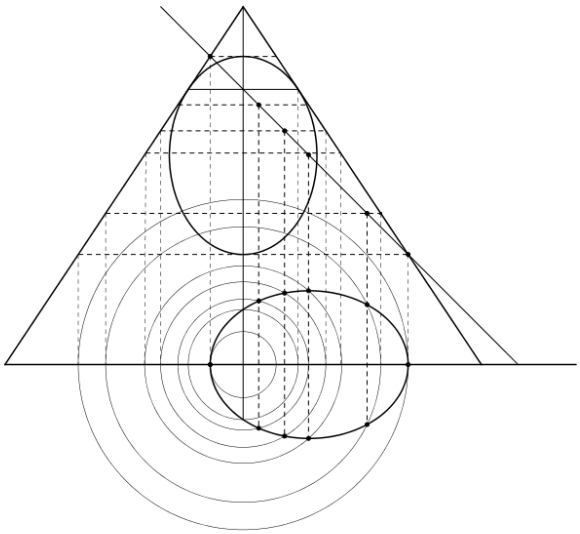


Oppure, fissati il fuoco e il vertice, si può muovere la direttrice parallelamente a sé stessa:



Proposizione I
Dati fuoco direttrice ed eccentricità trovare tutti i punti della conica.



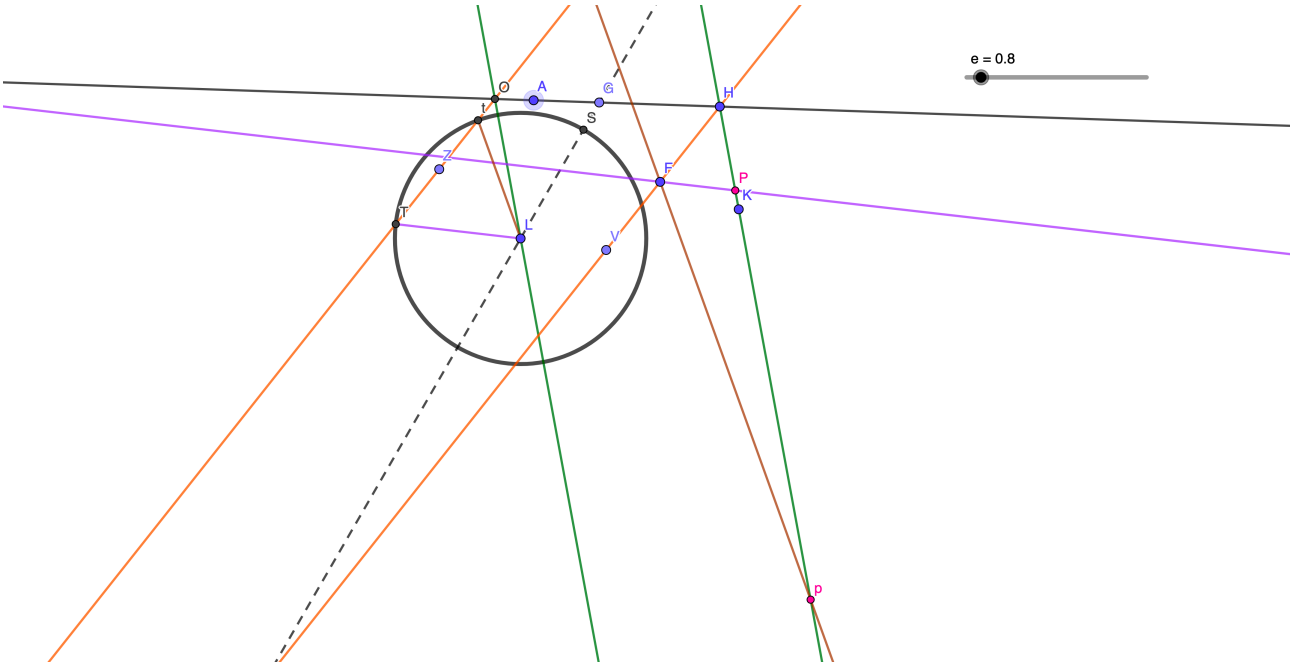


Possiamo, a questo punto, definire il cerchio eccentrico.

*Data una conica, si chiama **cerchio eccentrico**, rispetto a un dato punto, il cerchio centrato in quel punto di raggio uguale alla distanza del centro dalla direttrice della conica, moltiplicata per l'eccentricità della conica.*

<u>Problema</u>:
Trovare l'intersezione di una retta HK con una conica avente fuoco F, direttrice AB, eccentricità e.

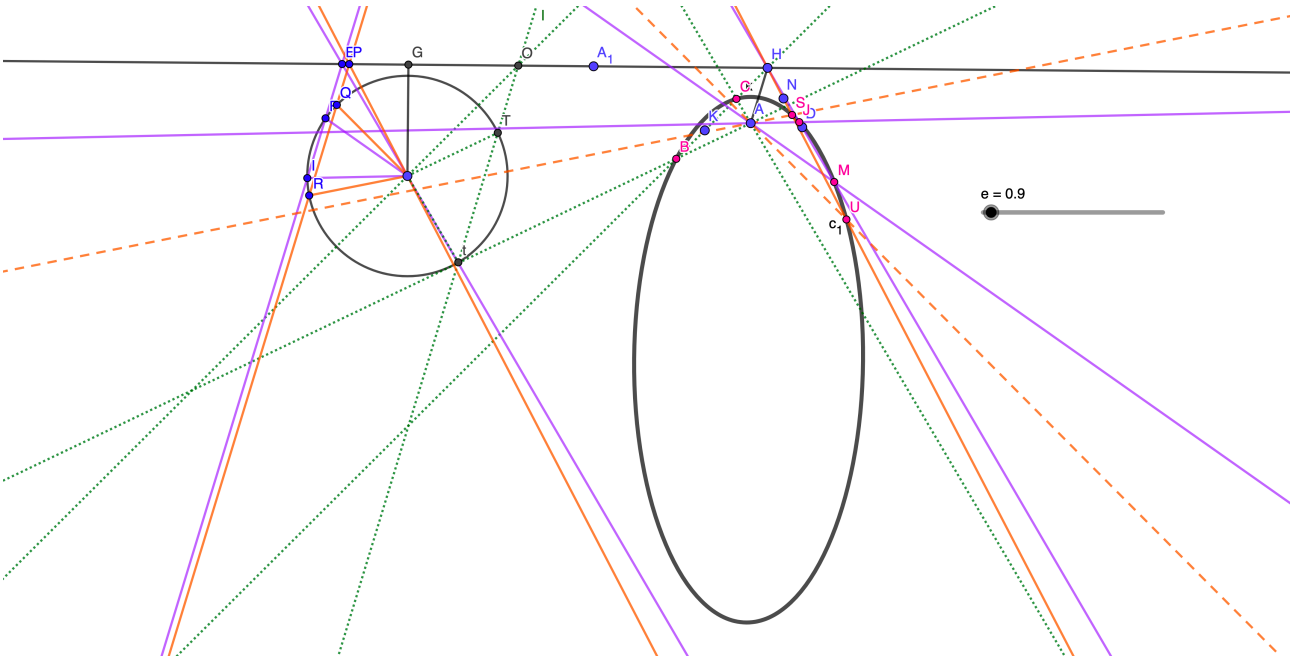
Siano *H* l'intersezione della retta data con la direttrice *AB* e *G* un punto di *AB.*
Con centro in *L*, si tracci la circonferenza di raggio *LS= e LG.*
Si traccia la retta per *L* parallela alla retta *HK* che incontra la direttrice in O. Da O si conduce la retta parallela a HFV (dove F è il fuoco della conica e V un punto di HF) che incontra la circonferenza in *T, t.*
Da *F* si conducono le parallele *FP* e *Fp* rispettivamente a *LT, Lt*, dove *P e p* sono i punti di intersezione con la retta data *HK*.
Poiché risulta *PF:PD=LT:LG=e* il punto *P* appartiene alla conica (lo stesso per *p*).



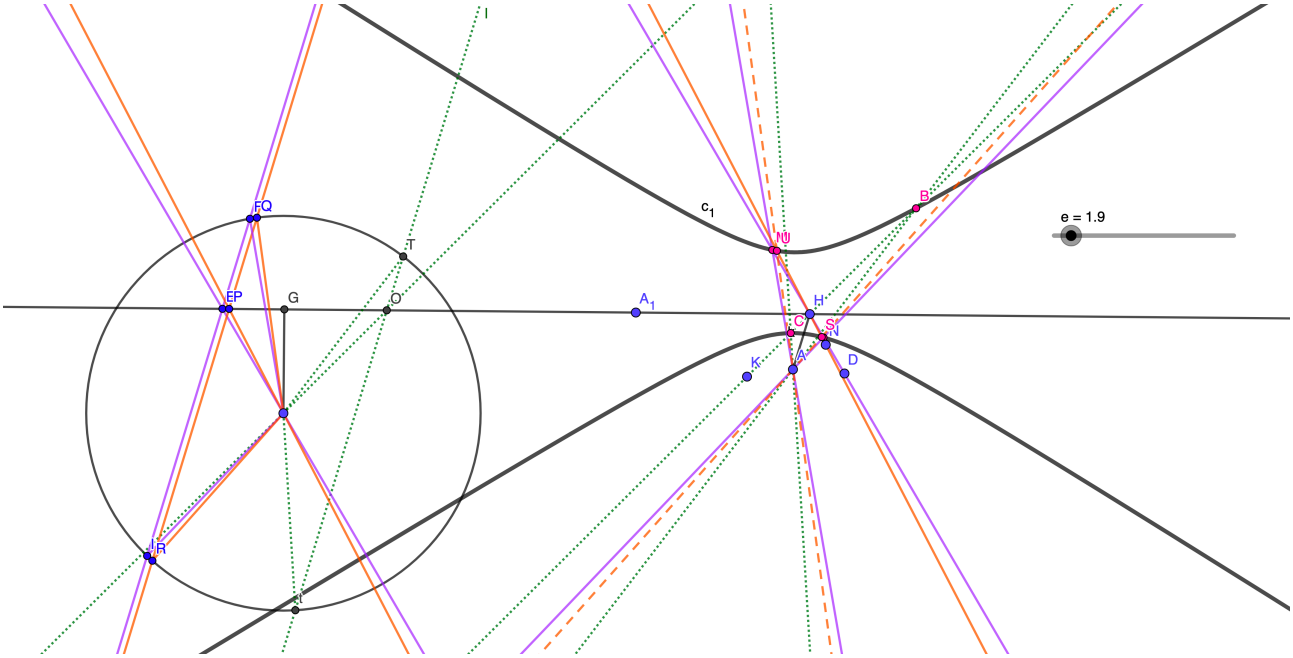
Si possono così trovare tutti i punti della conica facendo muovere la retta HK parallela a sé stessa. Il punto O resta fisso, mentre la retta OZ ruota attorno a O.

Oppure, possiamo eseguire questa costruzione con il software Geogebra, che permette di costruire una conica a partire da 5 suoi punti. Se seguendo i passaggi dati otteniamo due punti della conica (P e p), reiteriamo il procedimento per 3 volte (ad ogni step corrisponde un diverso colore delle linee di costruzione.
Al variare dell'eccentricità, possiamo ottenere:

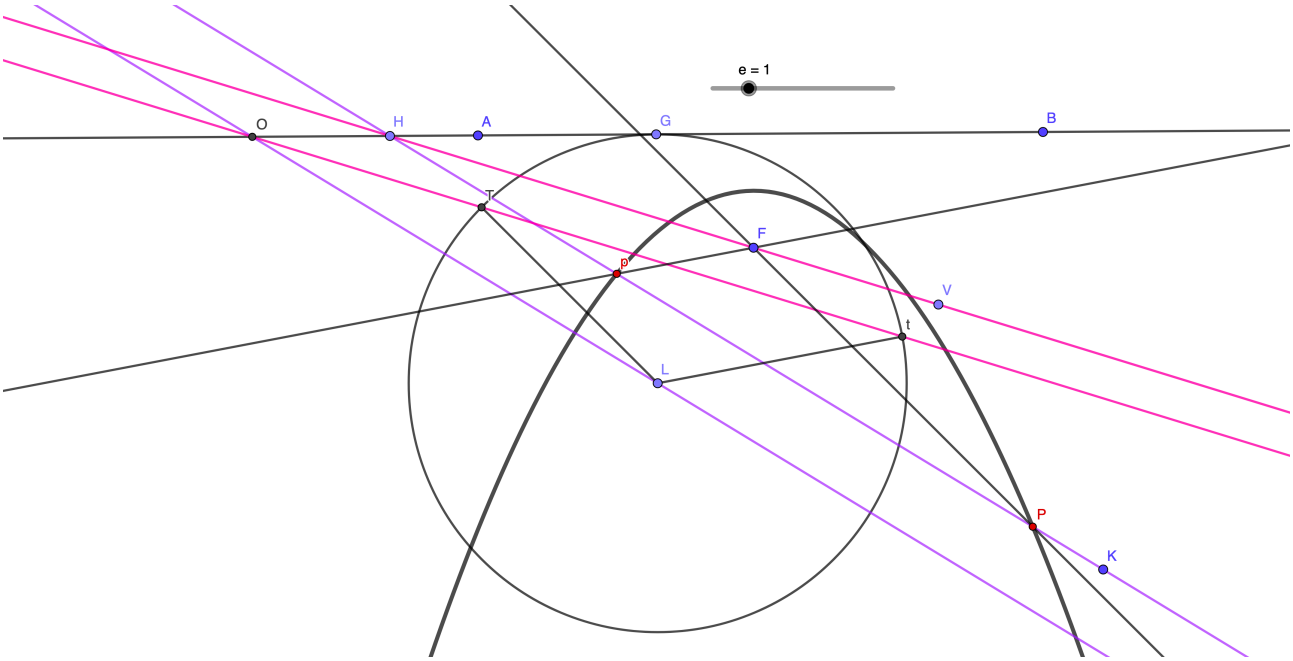
- l'ellisse:



- l'iperbole:



- la parabola:



Quello del cerchio eccentrico è un metodo elementare per mezzo del quale si possono ricavare dalle proprietà del cerchio le proprietà di una conica.

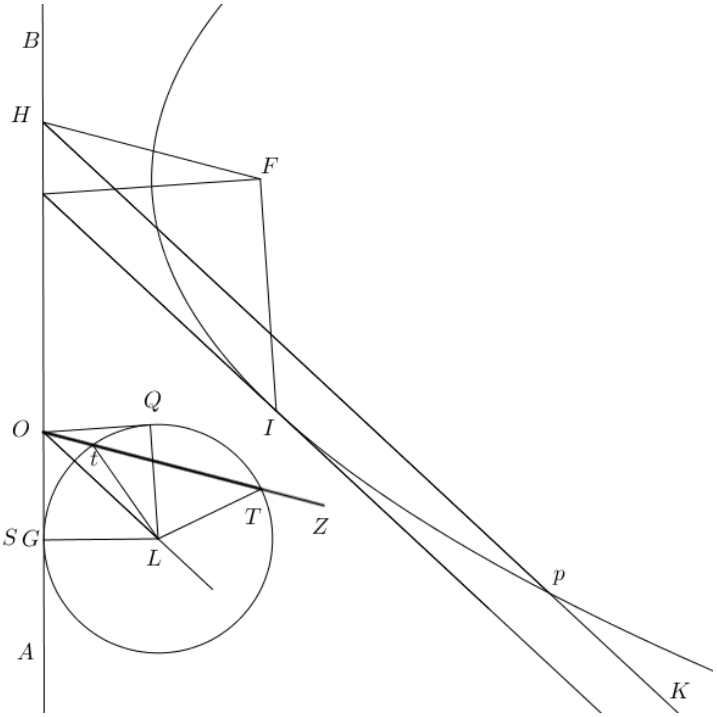
Osserviamo che secanti e tangenti al cerchio eccentrico si trasformano in secanti e tangenti alla conica. Quindi, una retta incontra una conica al più in due punti.

Inoltre:

- **Caso dell'ellisse**: di tutte le rette parallele ad una retta data:
  - solo due sono tangenti all'ellisse;
  - quelle che si trovano tra le due tangenti intersecano l'ellisse in due punti;
  - tutte le altre rette non la intersecano.

- **Caso della parabola**: preso un fascio di rette parallele non perpendicolari alla direttrice:
  - una sola è tangente alla parabola;
  - le altre o intersecano la parabola in due punti o non la intersecano, rispettivamente quando la retta si trova dalla stessa parte del fuoco rispetto alla retta che è tangente, oppure dalla parte opposta.

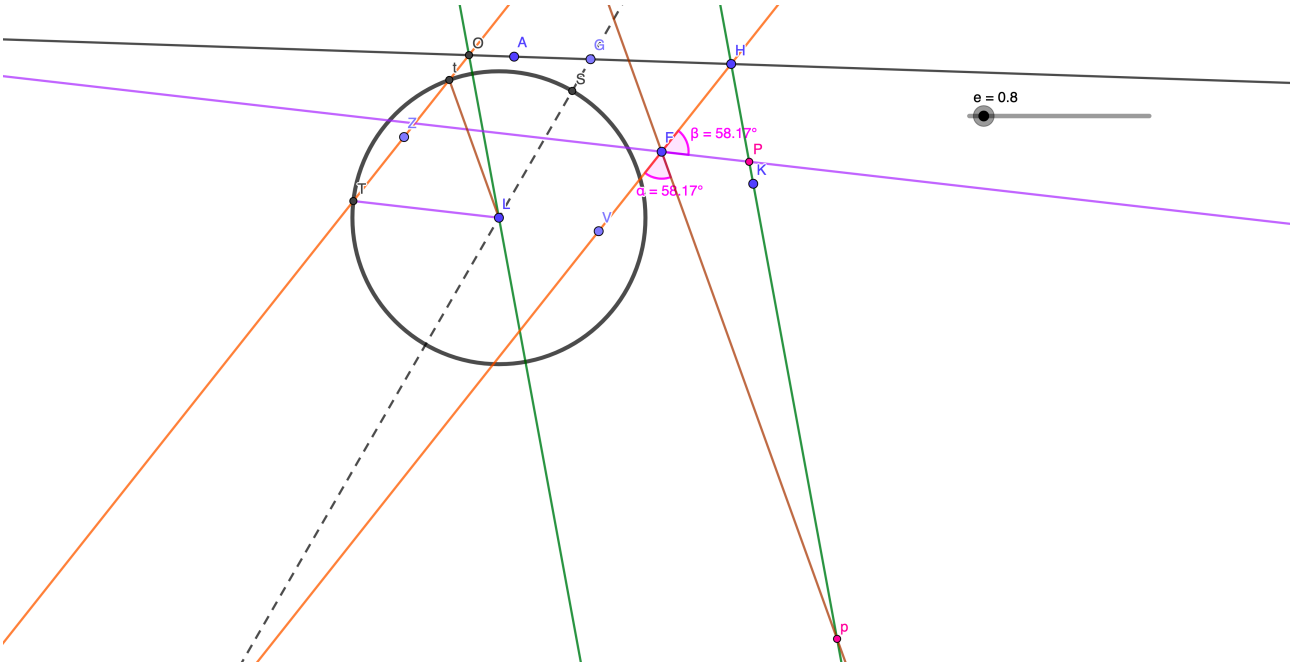
- Nell'**iperbole** ci sono tre casi, a seconda che l'angolo *AHK* sia minore, uguale o maggiore del cosiddetto "angolo di uguaglianza".



Vediamo altre Proposizioni di Boscovich che derivano dall'utilizzo del cerchio eccentrico.

1. *La retta FH (che congiunge il fuoco al punto in cui la secante incontra la direttrice) forma angoli uguali con FP e Fp.*

Questo deriva dal fatto che la retta *OZ* forma angoli uguali con *LT, Lt* nel cerchio.



Boscovich considera anche il caso in cui il centro del cerchio eccentrico *L* viene preso sulla retta di cui si cercano le eventuali intersezioni con la conica. La relativa costruzione è utilizzata per tracciare le tangenti alla conica da un punto esterno ed inoltre per dimostrare il teorema delle corde, che ricordiamo:

2. *Se due rette, passanti per uno stesso punto, intersecano una sezione conica in due punti, allora i rettangoli sottesi sotto le secanti (cioè i segmenti tra il punto comune e le intersezioni con la conica) sono in un rapporto che dipende solo dall'eccentricità della sezione conica e dalle direzioni delle due rette.*
   Se una retta è tangente alla conica, allora al rettangolo va sostituito il quadrato del segmento tangente.
   Inoltre, se si considerano altre due rette di direzioni uguali alle precedenti ma che si incontrano in un altro punto, allora il rapporto dei rettangoli, o dei quadrati, non cambia.

In altri termini, il rapporto dei rettangoli formati dai segmenti di due corde passanti per uno stesso punto è indipendente dal punto considerato, qualora sia mantenuta la direzione delle due corde.

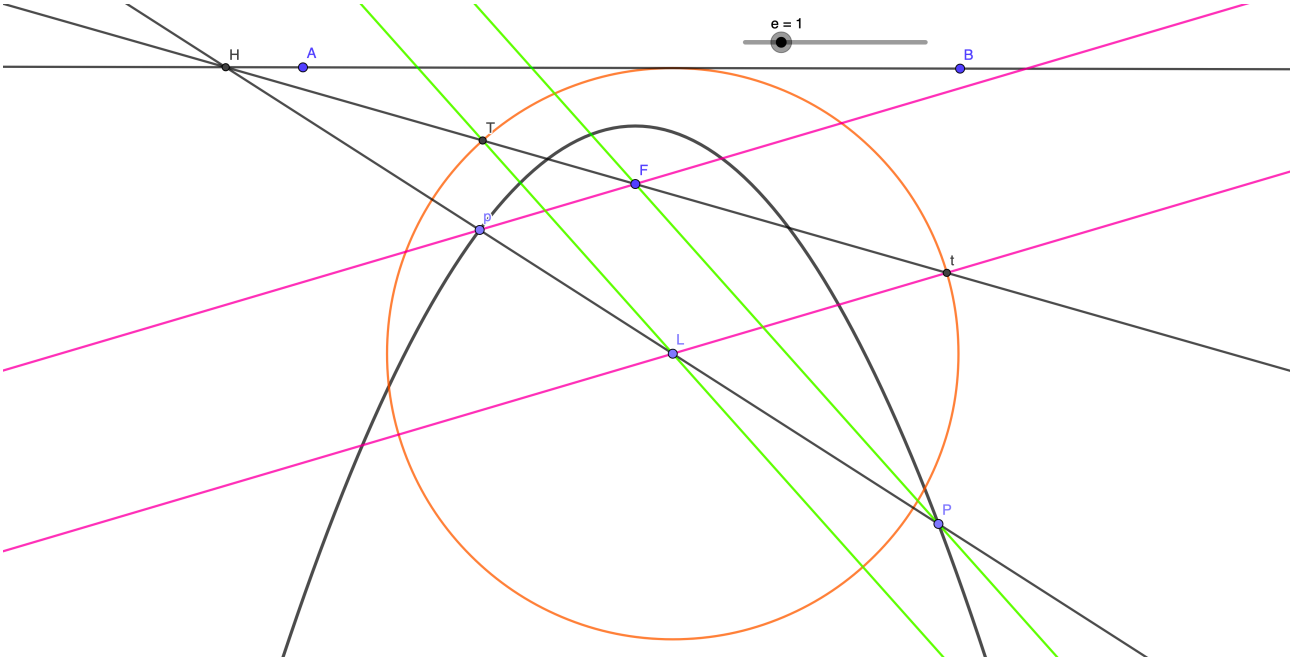
Vediamo la dimostrazione.
Consideriamo:

- la conica definita dalla sua direttrice AB, dal fuoco F e dall'eccentricità *e*;
- la corda *Pp;*
- un punto *L* su *Pp* o sul suo prolungamento (Boscovich sottintende che *L* sia il punto di intersezione delle due corde nominate nell'enunciato).

Boscovich prolunga la corda fino a quando incontra la direttrice in H. Poi, disegna il cerchio eccentrico di centro *L* e la retta *FH*, che lo interseca nei punti *T* e *t*. Così, in base ai teoremi che Boscovich ha precedentemente dimostrato, *FP//LT* e *Fp//Lt,* dunque, per similarità dei triangoli, si ottiene che *LP: TF = LH: TH* e *Lp: tF = LH: tH*. Pertanto,

$$\frac{LP \times Lp}{TF \times tF} = \frac{LP \times Lp}{DF \times Fd} = \frac{LH^2}{TH \times tH} = \frac{LH^2}{MH \times mH} = \frac{LH^2}{LH^2 - LM^2}$$

Allora osserva che l'ultimo rapporto dipende solo dalla direzione della corda *Pp* e dall'eccentricità. Lo stesso vale per il rettangolo $LP \times Lp$.



Ora, se consideriamo un'altra corda *P'p'* di direzione diversa ma passante per *L*, abbiamo di nuovo che il rettangolo $LP' \times Lp'$ dipende solo dall'inclinazione della corda e dal rapporto dato. Dunque, il rapporto tra i due rettangoli formati dalle secanti dipende solo dalle inclinazioni delle due corde e dall'eccentricità.

Dunque Boscovich afferma che se si considerano due rette passanti per un altro punto qualsiasi, ciascuna secante la conica in due punti e parallela alle precedenti, il rapporto tra i rettangoli formati con le secanti è lo stesso di prima.

Concludiamo con la seguente proposizione.

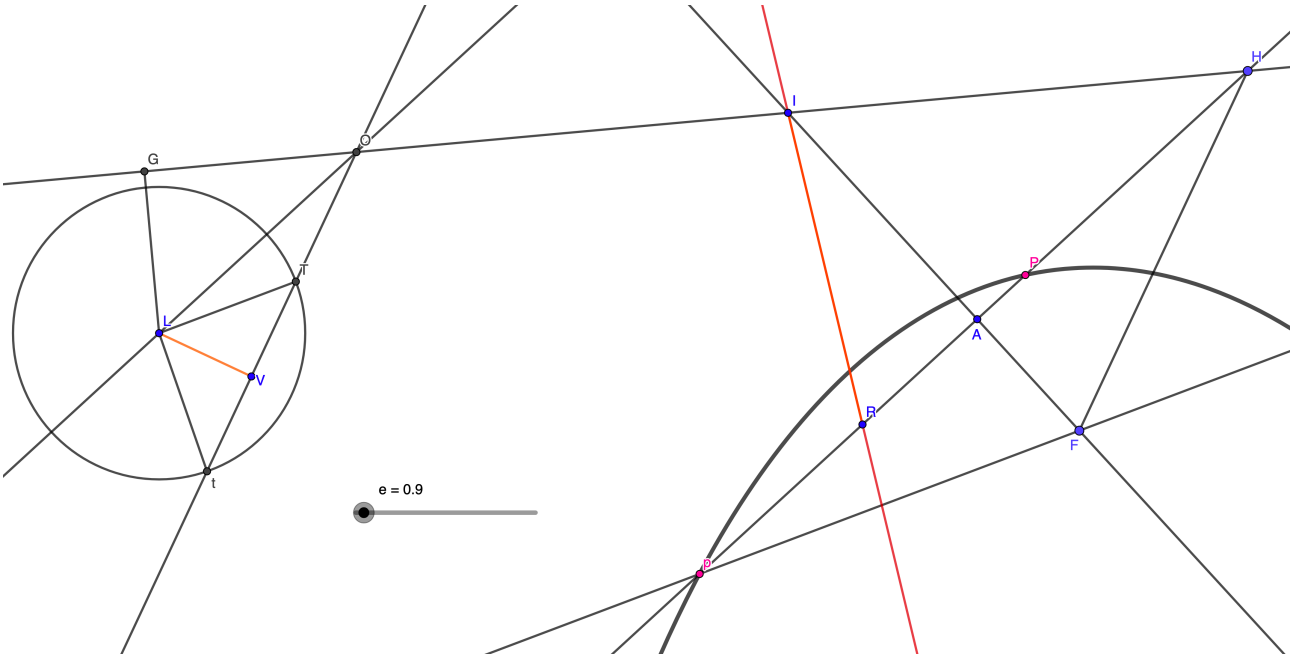
3. *Il luogo dei punti medi di un insieme di corde parallele è una retta.*

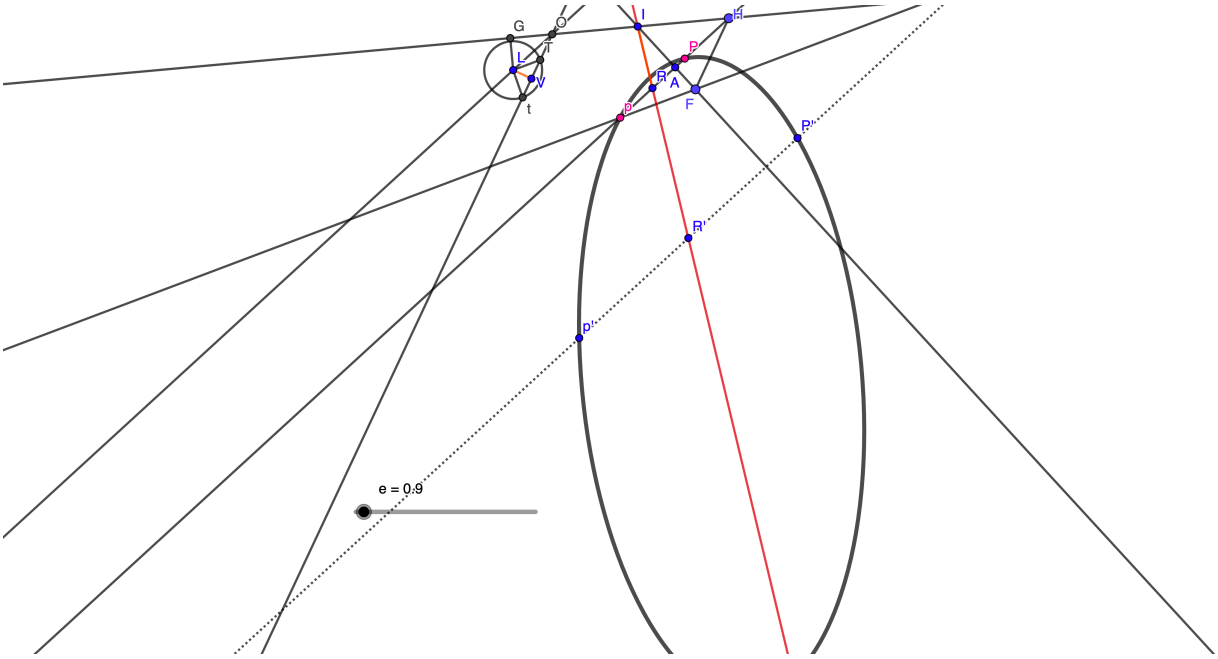
Si traccia *FA* perpendicolare a *HPp*, che incontra in *I* la direttrice. Siano *R, V* i punti medi rispettivamente di *Pp, Tt*. Si congiunga *L* con *V* e *R* con *I*. Per similitudine di triangoli risulta:

- *HP:HF=OL:OT*
- *HF:Hp=Ot:OL*
- *HP:Hp=Ot:OT*
- *HP+Hp:HP=Ot+OT:Ot*
- *HR:HP=OV:Ot*
- *HP:HF=OL:OT*
- *HF:HA=OL:OV*

- $HR:HA=OL^2:Ot \cdot OT$

Ma $Ot \cdot OT$ è costante, dunque tutti i punti medi R di tutte le corde parallele alla corda Pp sono allineati col punto I.
La seguente figura è uno zoom sul particolare della costruzione, mentre la successiva ci mostra la conica intera.





Bibliografia

- **Fonti**
  - R. G. Boscovich, De Motu Corporis attracti in centrum, Roma, 1743.
  - R. G. Boscovich, Elementa Universae Matheseos, Roma, 1757.
  - R. G. Boscovich, Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium, Venezia, 1758.
  - R. G. Boscovich, Nova methodus adhibendi phasium observationes in eclipsibus lunaribus, Roma, 1744.
  - I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Londra, 1687.
  - J. Stirling, Lineae Tertii Ordinis Neutonianae, Oxford, 1717.
  - G. F. A. de l'Hopital, Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problemes tant déterminez qu'indéterminez, Parigi, 1720.

- **Bibliografia secondaria**
  - Alessandra Fiocca, Andrea Del Centina, The chords theorem recalled to life at the turn of the eighteenth century.
  - Alessandra Fiocca, Il centro eccentrico di Ruggero Giuseppe Boscovich, Mathesis di Rovigo, presentazione per il convegno del 12 maggio 2017.
  - Paolo Casini, Dizionario Biografico degli Italiani, Volume 13, Milano, 1971.

- **Sitografia**
  - https://www.lotsearch.net/lot/boscovich-de-motu-corporis-attracti-28907381
  - https://www.abebooks.com/book-search/author/boscovich-ruggero-giuseppe/used/
  - https://www.jonathanahill.com/pages/books/6104/ruggero-giuseppe-boscovich/de-motu-corporis-attracti-in-centrum-immobile-viribus-decrescentibus-in-ratione-distantiarum
  - https://rivista.fondazioneestense.it/it/2010/2010/item/707-scienziati-e-padri
  - https://www.gonnelli.it/it/asta-0013/boscovich-ruggiero-giuseppe-de-solis-ac-lunae