Università degli Studi di Ferrara

Università degli studi di Ferrara

Blaise Pascal

Sulle orme di Desargues

Studente:
Sebastiano Gavasso

Anno 2020 – 2021

Indice

1 **Introduzione** 1

2 **Chi era Blaise Pascal?** 2

3 **Le sezioni coniche ai tempi di Pascal** 3

4 **Il "Brouillon project" di Desargues** 5

5 **L'Essay pour les coniques** 7

6 **Un trattato mai pubblicato** 14
6.1 La "Generatio conisectionum" 15

7 **La descrizione di Leibnitz delle parti II-VI** 18

8 **L'"Hexagrammum Mysticum"** 20
8.1 Una possibile dimostrazione del teorema 21

9 **Applicazioni dell'Hexagrammum Mysticum** 24
9.1 Costruzione di una conica passante per 5 punti 24

1 Introduzione

La geometria, ed in particolare la teoria delle sezioni coniche, svolse un ruolo centrale nella vita scientifica di Blaise Pascal. Purtroppo di tutti i suoi scritti ci rimane ben poco: l'*Essay pour les coniques* del 1640, che scrisse all'età di soli sedici anni sotto l'influenza di Desargues, alcuni estratti dei suoi trattati mai pubblicati sulle sezioni coniche. Il celeberrimo *Conicorum opus completum* sul quale Pascal lavorò fu perduto alcuni decenni dopo la sua morte.[1].
E' proprio lo stesso Pascal a darci alcune indicazioni sul contenuto del suo trattato sulle sezioni coniche nel suo discorso al *Celeberrima Matheseos Academia Parisiensis* nel 1654. Altre informazioni, riguardo questo trattato, provengono da Leibniz che, nel 1676, ebbe l'opportunità di leggere il manoscritto di Pascal. Oltre a una nuova e più dettagliata descrizione del suo contenuto, Leibniz ha lasciato anche una copia della prima parte del trattato, nota come la *Generatio conisectionum*

[1]Sfortunatamente fu perduto alcuni decenni dopo la sua morte.

(che analizzeremo nel dettaglio), oltre ad alcune note esplicative, che si sono rivelate molto utili per una comprensione della natura reale del teorema principale su cui Pascal ha sviluppato la teoria delle coniche, ossia l'*Hexagrammum Mysticum*.

2 Chi era Blaise Pascal?

Blaise Pascal nacque a Clermont nella regione francese dell'Alvernia, il 19 giugno 1623. Era il terzo di quattro figli di Étienne Pascal, vice presidente del tribunale tributario locale, membro della *petit noblesse*, con un grande interesse per la scienza e la matematica, e Antoinette Pascal che tuttavia morì nel 1626, quando Pascal aveva soli tre anni. [2]
Cinque anni dopo la morte della moglie, il padre di Pascal lasciò Clermont per stabilirsi a Parigi, dove i profitti dei suoi investimenti gli garantirono una vita confortevole. A Parigi, Étienne entrò nell'Accademia fondata da Mersenne, e all'età di quattordici anni, Blaise iniziò ad accompagnare suo padre alle riunioni settimanali. Qui, oltre a Mersenne, il giovane Pascal incontrò alcuni tra i più importanti scienziati parigini, come Gassendi, Roberval, Carcavi, Mydorge e Desargues, da cui imparò molto.
Nel 1639, quando Desargues pubblicò il *Brouillon project*, Blaise ne assimilò rapidamente il contenuto e l'anno successivo presentò il suo *Essay pour les coniques* all'Accademia di Mersenne. Molto probabilmente fu proprio lo stesso Desargues ad incoraggiare il giovane Pascal a pubblicarlo nel 1640. Nel suo saggio, Pascal delineò brevemente il programma che intendeva sviluppare per un nuovo e più completo trattato sulle sezioni coniche, a cui si riferiva con il nome di *Conicorum opus completum*.
Nello stesso anno, il padre di Blaise fu nominato esattore delle tasse del re per l'Alta Normandia, così la famiglia Pascal lasciò Parigi e si stabilì a Rouen dove Blaise continuò a lavorare sul suo trattato sulle sezioni coniche. Occasionalmente tornò a Parigi con suo padre e durante i suoi brevi soggiorni nella capitale fu in grado di presentare le sue scoperte all'accademia di Mersenne.
Nel 1642, Desargues era desideroso di vedere la dimostrazione di un importante teorema, che chiamò *"la Pascale"*, da cui, secondo il suo parere, "i quattro libri di Apollonio erano una conseguenza immediata". Due anni più tardi, nella prefazione della sua *Cogitata physico-mathemaica*, Mersenne concentrò l'attenzione su "una singola proposizione molto generale con la quale Pascal poteva stabilire quattrocento corollari che coprivano ogni campo del trattato di Apollonio". Il 17 marzo 1648, Mersenne annunciò a Constantijn Huygens che Pascal aveva finito di scrivere un importante trattato sulle sezioni coniche dicendo:

[2] per la precisione morì pochi mesi dopo aver dato alla luce la sorella Jaqueline.

Se il vostro Archimede verrà con voi, gli mostreremo uno dei migliori trattati geometrici che abbia mai visto, che è stato completato dal giovane Pascal. È la soluzione al locus delle 3 e 4 rette di Pappo, che qui si dice non sia stato risolto in tutta la sua generalità da Cartesio. Ci sono volute rette rosse, verdi, nere, ecc. per distinguere la varietà di considerazioni...

Tra il 1653 e il 1654 Pascal lavorò ancora al *Conicorum opus completum* per poi presentare, nello stesso anno, un riassunto delle sue opere all'accademia di Mersenne.
Sfortunatamente nel 1659 Pascal si ammalò gravemente, e quando nel 1661 sua sorella Jacqueline morì, la sua condizione emotiva peggiorò notevolmente. Lo stile di vita di Pascal divenne sempre più ascetico, convinto del fatto, che la sofferenza e la malattia fossero lo stato naturale per tutti i cristiani. Il mattino del 19 agosto del 1662, a causa di gravi convulsioni, si spense alla giovane età di 39 anni.

3 Le sezioni coniche ai tempi di Pascal

Il progetto di Pascal per un trattato completo sulle sezioni coniche richiedeva una buona, se non eccellente, conoscenza di ciò che era già noto a quel tempo sull'argomento. Proprio per questa ragione possiamo tranquillamente affermare che Pascal doveva avere una certa familiarità con i primi quattro libri delle Coniche di Apollonio (gli unici noti a quel tempo), e della collezione di Pappo. Possiamo inoltre supporre che avesse letto l'*Apollonii Pergaei conicorum et Sereni de sectione Coni et cylindri Libri* di Apollonio, incluso nell'opera di Mersenne *Synopsi Mathematica* del 1626, libro che era quasi certamente a disposizione di Pascal quando iniziò a partecipare alla riunione dell'Accademia di Mersenne.
Gli anni trenta di quel secolo, furono senza dubbio di fondamentale importanza per la matematica francese. Proprio in quel decennio, precisamente nel 1636, Mersenne pubblicò la sua opera più influente ossia l'*Harmonie universelle*, all'interno della quale discusse le proprietà ottiche e acustiche delle sezioni coniche e, in questo contesto, ricorse al sistema piano delle sezioni coniche di Keplero, illustrato nel *De Coni sectionibus* del 1604, per spiegare "alcune analogie comuni a tutte le sezioni coniche". In questo lavoro Johannes Kepler introdusse due concetti che cambiarono profondamente la geometria: quello di *analogia* e quello di *punto all'infinito* di una retta. Keplero introdusse una sorta di "visione cinematica" nello studio delle sezioni coniche, variando, in modo continuo, una curva in un'altra (eventualmente degenerata) e sottolineando l'idea di sezioni coniche come immagini proiettive del cerchio. Per dimostrare ciò Keplero costruì un sistema piano continuo di sezioni coniche in cui appaiono tutti i tipi di tali curve. A tal proposito, mise la parabola

nel "mezzo", tra ellisse e l'iperbole, introducendo quello che battezzò con il nome di *fuoco cieco*,[3] che appare quando un fuoco di un'ellisse, o di un'iperbole, si allontana infinitamente dall'altro, all'*infinito*, lungo l'asse maggiore. L'importanza di questo aspetto è davvero fondamentale poichè, fu proprio questa concezione del secondo fuoco della parabola a condurlo all'"invenzione" del punto all'infinito di una retta. Con questo concetto, le rette parallele diventano convergenti nel loro punto all'infinito.
Nel 1639, Mydorge pubblicò *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicarum Operis ...Libri Quartus Priores* [4], nei quali il contenuto delle Coniche di Apollonio era presentato sotto una nuova luce con dimostrazioni più semplici. Nel quarto libro, Mydorge riportò alla luce quello che oggi è conosciuto come *teorema delle corde* per le sezioni coniche, che equivale alle proposizioni 16-23 del terzo libro delle Coniche di Apollonio. In questo modo, Mydorge dissotterrò il lungo e dimenticato problema della costruzione dell'ellisse, discusso nell'ottavo libro della collezione matematica di Pappo che Apollonio non aveva trattato in *Conics*. Il problema richiedeva di determinare, dati cinque punti, la sezione di una colonna circolare di diametro sconosciuto. Usando il teorema delle corde, Pappo fornì la costruzione per i punti dell'ellisse cercata, e mostrò come determinare un diametro e il relativo *latus rectum*[5]. Mydorge nel 1639, estese poi questi risultati a qualsiasi sezione conica.
Nel 1637 apparve anche *La Géométrie* ossia l'opera che Cartesio aggiunse ai suoi *Discours de la méthode.* In questo lavoro epocale, Cartesio presentò una soluzione al problema di Pappo *delle tre e quattro rette*[6]. Secondo Cartesio infatti:

> *Se x e y sono le coordinate di un punto P nel piano delle rette date, allora le distanze, in direzioni assegnate, di P dalle rette date sono funzioni lineari delle coordinate. In questo modo la relazione che deve sussistere tra esse è sempre espressa da un'equazione di secondo grado in x e y. Allora il luogo dei punti cercato deve essere una sezione conica.*

Tuttavia, la sua soluzione non era completa, infatti riconobbe di aver fallito nella trattazione del caso nel quale il coefficiente di $y^2 = 0$.
Cinquant'anni dopo, nel 1687, Isaac Newton fornì una soluzione geometrica a questo problema, ricorrendo semplicemente al teorema delle corde (libro I, sez. 5).

[3] Ossia il secondo fuoco della parabola.

[4] I primi due libri dell'opera erano già apparsi nel 1631.

[5] ossia il lato retto

[6] Il problema in questione richiedeva di determinare il luogo dei punti, distanti d_1, d_2, d_3, d_4 (ciascuna presa in una direzione arbitraria ma fissa) da tre o quattro, rette complanari date, tali che siano soddisfatte le condizioni: $d_1 d_2 = k d_3^2$ o $d_! d_2 = k d_3 d_4$ con k costante fissa.

Nonostante tutto, Desargues svolse un ruolo fondamentale nello sviluppo delle idee geometriche del giovane Pascal, e infatti nell' *Essay pour les coniques* riconobbe il merito di Desargues:

> *Dimostreremo anche questa proprietà [la quarta proposizione] di cui l'inventore originale è M. Desargues di Lione che è una delle grandi menti di questo tempo e uno dei più esperti in matematica, in particolare sulle coniche. I suoi scritti su questo argomento, hanno dato ampia testimonianza della sua capacità a coloro che hanno voluto diventarne consapevoli. Io stesso ammetto che devo, il poco che ho trovato su questo argomento, ai suoi scritti e che ho cercato, per quanto possibile, di imitare il suo metodo su questo argomento.*

Pascal si riferiva al *Brouillon project* di Desargues del 1639 e al metodo proiettivo adottato per trattare le sezioni coniche. Nel suo lavoro, Desargues fece anche proprie le idee di Keplero sui punti all'infinito e sull'analogia in se. Per capire la genesi delle idee geometriche di Pascal è utile presentare alcune delle definizioni di Desargues e dei suoi principali risultati ma, prima di tutto, è bene ricordare un teorema che Desargues e Pascal utilizzarono più volte nelle loro dimostrazioni, ossia il teorema di Menelao:

Teorema 3.1. ***(Menelao)*** *Se AB, AG sono due rette e BE, GD sono altre due rette che si intersecano in F e intersecano AB, AG in D ed E, rispettivamente, allora:*

$$\frac{GE}{EA} = \frac{GF}{DF} \times \frac{BD}{BA}.$$

Chiaramente se si scambiano E con A, e F con D o A con D, ed E con F, si ottengono relazioni simili ancora vere.
Sottolineiamo infine che:

$$\frac{AE}{EG} \times \frac{GF}{FD} \times \frac{DB}{BA} = 1$$

esprime la condizione di *collinearità* per E, F, B.

4 Il "Brouillon project" di Desargues

Il *Brouillon project* di Desargues può essere suddiviso in quattro parti principali:

1. La prima, tiene conto della posizione reciproca di linee rette e piani ed è principalmente dedicata all'introduzione del concetto di punti all'infinito di una linea retta,

2. La seconda, tratta l'"involuzione di sei punti", ossia lo strumento principale introdotto da Desargues nello studio delle sezioni coniche,

3. La terza, riguarda il teorema di Menelao e altri risultati della geometria piana,

4. Infine la quarta, è dedicata alla teoria delle sezioni coniche.

Desargues definì un' "*ordonnance*" di rette come qualsiasi insieme di rette convergenti o parallele. Le rette in un'"*ordonnance*" hanno lo stesso "*but*"[7]. Tutti i punti a distanza infinita in un piano appartengono alla stessa retta, ossia la retta all'infinito di quel piano, che è comune a tutti i piani paralleli tra loro ed al piano stesso.
A questo punto possiamo dare la seguente:

Definizione 4.1. *Sei punti, o meglio tre coppie di punti B e H, C e G, D e F, su di una retta si dicono in involuzione se vale la seguente relazione:*

$$\frac{GB}{CB} \times \frac{GH}{CH} = \frac{DG}{CF} \times \frac{GF}{CD} \tag{1}$$

o qualsiasi altra relazione simile ottenuta da essa permutando le varie coppie.

Desargues definì inoltre il concetto di cono e cilindro come superfici generate da una retta in movimento. Per ottenere questa definizione, considerò un cerchio C ed un punto P su di esso e prese poi un punto V a distanza finita o infinita. La superficie ottenuta dalle rette VP quando P scorre su C, è un cono di base C e vertice V (un cilindro se V è all'infinito). Sezionando il cono con un piano ottenne i vari tipi di coniche: una coppia di linee rette (eventualmente coincidenti) se il piano passa attraverso il vertice, oppure un'ellisse, una parabola o un iperbole.
Successivamente Desargues introdusse i due importantissimi concetti di *trasversale*[8] e di *retta trasversale*, per poi passare a dimostrare il teorema noto come *Teorema di involuzione di Desargues*:

Teorema 4.2. *Siano B, C, D, E i vertici di un quadrilatero inscritto in una sezione conica, i cui lati opposti BC e ED si intersecano in N; BE e CD si intersecano in F mentre BD e CE in R. Allora queste coppie di rette incontrano qualsiasi retta l nel piano della sezione conica in tre coppie di punti in involuzione. Inoltre, ogni altra sezione conica che passa per i punti B, C, D, E, interseca l in un paio di punti appartenenti alla stessa involuzione.*

In altre parole, la prima parte del teorema ci dice che è vera la relazione:

$$\frac{IQ}{IP} \times \frac{KQ}{KP} = \frac{GQ}{GP} \times \frac{QH}{PH}.$$

[7]Cioè il punto a distanza finita o infinita che hanno in comune

[8]Data una sezione conica Γ e un "*ordonnance*" di "*but*" F, il concetto di trasversale risulta del tutto equivalente a quello moderno di *polare* di F rispetto a Γ.

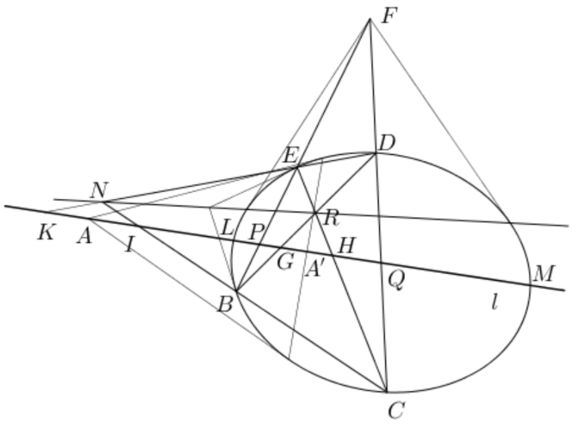


Figura 1: Illustrazione del Teorema di involuzione

In seguito, Desargues dimostrò che se B, C, D, E, sono quattro punti su una sezione conica, la retta NR è la trasversale (o polare) del punto F rispetto alla sezione conica (vedi Figura (1)). Dimostrò inoltre quello che noi oggi chiamiamo il *risultato duale*, cioè che:

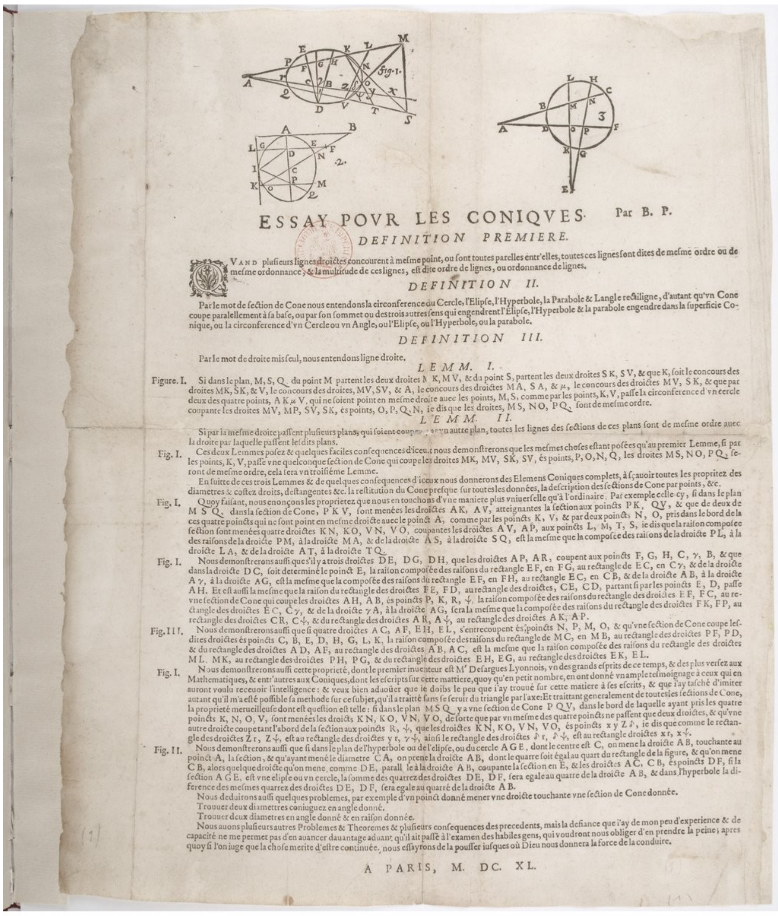
Teorema 4.3. *Le trasversali dei punti che si trovano su una linea retta NR, passano tutte attraverso lo stesso punto F.*

Per prima cosa dimostrò il risultato per il caso del cerchio e poi estese il ragionamento per proiezione a qualsiasi sezione conica. Questa proposizione gli fornì un modo per tracciare le tangenti ad una sezione conica da qualsiasi punto P.
Infine Desargues concepì anche il concetto di involuzione definito su una linea retta l da una sezione conica Γ. Per qualsiasi punto A su l (vedi Fig (1)), Desargues associò il punto A' su l in cui la retta che unisce i punti di contatto delle tangenti a Γ uscenti da A incontrano l. Trovò così tre tipi di involuzione a seconda che l non intersechi la sezione conica, sia tangente ad essa, o la intersechi. Nel primo caso l'involuzione (come corrispondenza tra i punti di l) non ha punti fissi (cioè punti che corrispondono a se stessi), nel secondo ne ha uno, infine nel terzo ne ha due.

5 L'Essay pour les coniques

L' *Essay pour les coniques* apparve sotto forma di piccolo manifesto $35 \times 43cm$ (vedi figura (2)), le cui cinquanta copie furono diffuse tra i membri dell'accademia di Mersenne oltre che tra i loro corrispondenti e amici. Oggi ne esistono solo due

copie, una delle quali è conservata presso la Biblioteca Nazionale di Parigi mentre l'altra si trova nella Biblioteca G. W. Leibniz di Hannover. Al suo interno possiamo trovare tre definizioni, tre lemmi, cinque proposizioni (tutte senza dimostrazioni) e tre figure.
La prima definizione è quella di *ordonnance* delle rette, ossia, secondo Pascal, qualsiasi insieme di rette aventi la stessa "*but*". Successivamente troviamo la definizione di sezioni coniche, esattamente nello stesso modo in cui le definì Desargues ed infine nella terza viene semplicemente specificato che avrebbe usato il termine "droit" invece di "ligne droite".



ESSAY POVR LES CONIQVES. Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.

QVAND plusieurs lignes droictes concourent à meſme point, ou ſont toutes parelles entr'elles, toutes ces lignes ſont dites de meſme ordre ou de meſme ordonnance, & la multitude de ces lignes, eſt dite ordre de lignes, ou ordonnance de lignes.

DEFINITION II.

Par le mot de ſection de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Elipſe, l'Hyperbole, la Parabole & Langle rectiligne, d'autant qu'vn Cone coupe paralellement à ſa baſe, ou par ſon ſommet ou des trois autres ſens qui engendrent l'Elipſe, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la ſuperficie Conique, ou la circonference d'vn Cercle ou vn Angle, ou l'Elipſe, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

DEFINITION III.

Par le mot de droite mis ſeul, nous entendons ligne droite.

LEMM. I.

Figure. I. Si dans le plan, M, S, Q, du point M partent les deux droites MK, MV, & du point S, partent les deux droites SK, SV, & que K, ſoit le concours des droites MK, SK, & V, le concours des droites, MV, SV, & A, le concours des droictes MA, SA, & μ, le concours des droictes MV, SK, & que par deux des quatre points, A K μ V, qui ne ſoient point en meſme droite auec les points, M, S, comme par les points, K, V, paſſe la circonference d'vn cercle coupante les droites MV, MP, SV, SK, és points, O, P, Q, N, ie dis que les droites, MS, NO, PQ, ſont de meſme ordre.

LEMM. II.

Si par la meſme droite paſſent pluſieurs plans, qui ſoient coupez par vn autre plan, toutes les lignes des ſections de ces plans ſont de meſme ordre auec la droite par laquelle paſſent leſdits plans.

Fig. I. Ces deux Lemmes poſez & quelques faciles conſequences d'iceux nous demonſtrerons que les meſmes choſes eſtant poſées qu'au premier Lemme, ſi par les points, K, V, paſſe vne quelconque ſection de Cone qui coupe les droites MK, MV, SK, SV, és points, P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ, ſeront de meſme ordre, cela ſera vn troiſiéme Lemme.

En ſuitte de ces trois Lemmes & de quelques conſequences d'iceux nous donnerons des Elemens Coniques complets, à ſçauoir toutes les proprietez des diametres & coſtez droits, des tangentes &c. la reſtitution du Cone preſque ſur toutes les données, la deſcription des ſections de Cone par points, &c.

Fig. I. Quoy faiſant, nous enonçons les proprietez que nous en touchons d'vne maniere plus vniuerſelle qu'à l'ordinaire. Par exemple celle-cy, ſi dans le plan MSQ, dans la ſection de Cone, PKV, ſont menées les droictes AK, AV, atteignantes la ſection aux poincts PK, QV, & que de deux de ces quatre poincts qui ne ſont point en meſme droicte auec le poinct A, comme par les poincts K, V, & par deux poincts N, O, pris dans le bord de la ſection ſont menées quatre droictes KN, KO, VN, VO, coupantes les droictes AV, AP, aux poincts L, M, T, S, ie dis que la raiſon compoſée des raiſons de la droicte PM, à la droicte MA, & de la droicte AS, à la droicte SQ, eſt la meſme que la compoſée des raiſons de la droicte PL, à la droicte LA, & de la droicte AT, à la droicte TQ.

Fig. I. Nous demonſtrerons auſſi que s'il y a trois droictes DE, DG, DH, que les droictes AP, AR, coupent aux poincts F, G, H, C, γ, B, & que dans la droicte DC, ſoit determiné le poinct E, la raiſon compoſée des raiſons du rectangle EF, en FG, au rectangle de EC, en Cγ, & de la droicte AB, à la droicte Aγ, à la droicte AG, eſt la meſme que la compoſée des raiſons du rectangle EF, en FH, au rectangle EC, en CB, & de la droicte AB, à la droicte AH. Et eſt auſſi la meſme que la raiſon du rectangle des droictes FE, FD, au rectangle des droictes, CE, CD, partant ſi par les poincts E, D, paſſe vne ſection de Cone qui coupe les droictes AH, AB, és poincts P, K, R, ψ, la raiſon compoſée des raiſons du rectangle des droictes EF, FC, au rectangle des droictes EC, Cγ, & de la droicte γA, à la droicte AG, ſera la meſme que la compoſée des raiſons du rectangle des droictes FK, FP, au rectangle des droictes CR, Cψ, & du rectangle des droictes AR, Aψ, au rectangle des droictes AK, AP.

Fig. III. Nous demonſtrerons auſſi que ſi quatre droictes AC, AF, EH, EL, s'entrecoupent és poincts N, P, M, O, & qu'vne ſection de Cone coupe leſdites droictes és poincts C, B, E, D, H, G, L, K, la raiſon compoſée des raiſons du rectangle de MC, en MB, au rectangle des droictes PF, PD, & du rectangle des droictes AD, AF, au rectangle des droictes AB, AC, eſt la meſme que la raiſon compoſée des raiſons du rectangle des droictes ML, MK, au rectangle des droictes PH, PG, & du rectangle des droictes EH, EG, au rectangle des droictes EK, EL.

Fig. I. Nous demonſtrerons auſſi cette proprieté, dont le premier inuenteur eſt Mʳ Deſargues Lyonnois, vn des grands eſprits de ce temps, & des plus verſez aux Mathematiques, & entr'autres aux Coniques, dont les eſcripts ſur cette mattiere, quoy qu'en petit nombre, en ont donné vn ample teſmoignage à ceux qui en auront voulu receuoir l'intelligence : & veux bien adouër que ie doibs le peu que i'ay trouué ſur cette matiere à ſes eſcrits, & que i'ay taſché d'imiter autant qu'il m'a eſté poſſible ſa methode ſur ce ſubjet, qu'il a traitté ſans ſe ſeruir du triangle par l'axe: Et traittant generalement de toutes les ſections de Cone, la proprieté merueilleuſe dont eſt queſtion eſt telle : ſi dans le plan MSQ y a vne ſection de Cone PQV, dans le bord de laquelle ayant pris les quatre poincts K, N, O, V, ſont menées les droicts KN, KO, VN, VO, de ſorte que par vn meſme des quatre poincts ne paſſent que deux droictes, & qu'vne autre droicte coupe tant l'abord de la ſection aux poincts R, ψ, que les droictes KN, KO, VN, VO, és poincts x y Z δ, ie dis que comme le rectangle des droictes Zr, Zψ, eſt au rectangle des droictes γr, γψ, ainſi le rectangle des droictes δr, δψ, eſt au rectangle droictes xr, xψ.

Fig. II. Nous demonſtrerons auſſi que ſi dans le plan de l'hyperbole ou de l'elipſe, ou du cercle AGE, dont le centre eſt C, on mene la droicte AB, touchante au poinct A, la ſection, & qu'ayant mené le diametre CA, on prene la droicte AB, dont le quarre ſoit égal au quart du rectangle de la figure, & qu'on mene CB, alors quelque droicte qu'on mene, comme DE, parallele à la droicte AB, coupante la ſection en E, & les droictes AC, CB, és poincts DF, ſi la ſection AGE, eſt vne elipſe ou vn cercle, la ſomme des quarrez des droictes DE, DF, ſera egale au quarre de la droicte AB, & dans l'hyperbole la difference des meſmes quarrez des droictes DE, DF, ſera egale au quarré de la droicte AB.

Nous deduirons auſſi quelques problemes, par exemple d'vn poinct donné mener vne droicte touchante vne ſection de Cone donnée.

Trouuer deux diamettres coniuguez en angle donné.

Trouuer deux diametres en angle donné & en raiſon donnée.

Nous auons pluſieurs autres Problemes & Theoremes & pluſieurs conſequences des precedents, mais la defiance que i'ay de mon peu d'experience & de capacité ne me permet pas d'en auancer dauantage aduant qu'il ait paſſé à l'examen des habiles gens, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine; apres quoy ſi l'on iuge que la choſe merite d'eſtre continuée, nous eſſayrons de la pouſſer iuſques où Dieu nous donnera la force de la conduire.

A PARIS, M. DC. XL.

Figura 2: *Essay pour les coniques*, LH XXXV, XV, I,Bl. 10r. Courtesy of the G.W.Leibnitz Bibliothek-Niedersächsische Landesbibliothek, Hannover.

Successivamente Pascal introdusse tre lemmi che riportiamo qui sotto (vedi figura (3)):

Lemma 1. *Nel piano M, S, Q, tracciamo due rette MK, MV dal punto M e due rette SK, SV da S. Sia K l'intersezione delle rette MK e SK, V l'intersezione delle rette MV e SV, A l'intersezione delle linee rette MK e SV ed infine μ l'intersezione delle linee rette MV, SK. Se attraverso due dei 4 punti AKμV non giacenti sulla stessa retta con il punto M o il punto S, (come accade per i punti K, V) si prende una circonferenza che interseca le rette MV, MK, SV, SK, nei punti O, P, Q, N, allora le rette MS, NO, PQ appartengono allo stesso ordine.*

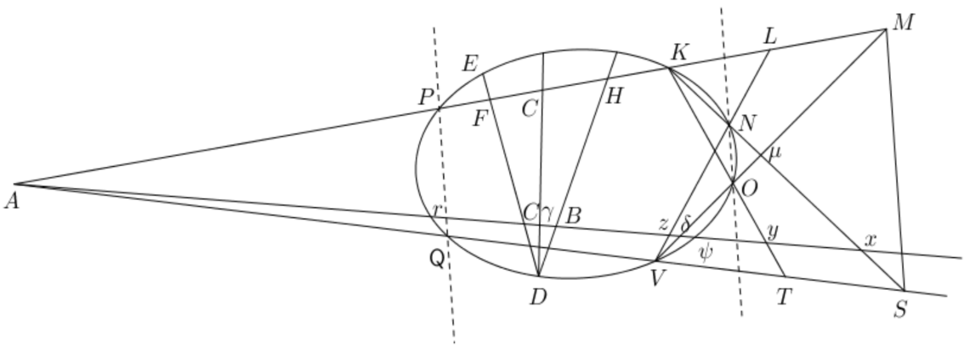


Figura 3: Versione migliorata della figura 1 del testo di Pascal. Le due linee tratteggiate PQ, NO (non presenti nella figura originale) e la linea MS sono parallele, quindi il loro punto di intersezione R è all'infinito.

È utile sottolineare che nell'insieme A, K, μ, V ci sono solo due coppie di punti non collinari con M o con S ossia K, V e A, μ (tuttavia per quest'ultima coppia il lemma non regge (vedere anche figura (4) a sinistra)).
Possiamo inoltre notare come questo primo lemma sia equivalente al teorema esagonale nel caso particolare di un cerchio, infatti ricordiamo che il lemma può essere espresso nella forma:

> *Se in un piano uniamo due punti M, S ad altri due punti K, V su di una cerconferenza, giacenti nel piano ma non passanti per uno qualsiasi di M, S, e la circonferenza interseca le linee rette MV, MK, SV, SK, nei punti O, P, Q, N, rispettivamente, le due rette NO e PQ si incontrano in un punto situato sulla linea retta MS.*

In altre parole questo significa che: *I lati opposti dell'esagono KPQVONK inscritto nella circonferenza si intersecano in tre punti collinari, precisamente M, S, R. (vedi figura* (4) *a destra)*
Tuttavia come Pascal sia giunto a scoprire e dimostrare un tale lemma è ancora oggi un mistero. Sappiamo infatti che a quel tempo Apollonio non era nemmeno giunto a dimostrare che cinque punti generano una conica. Come già detto anche

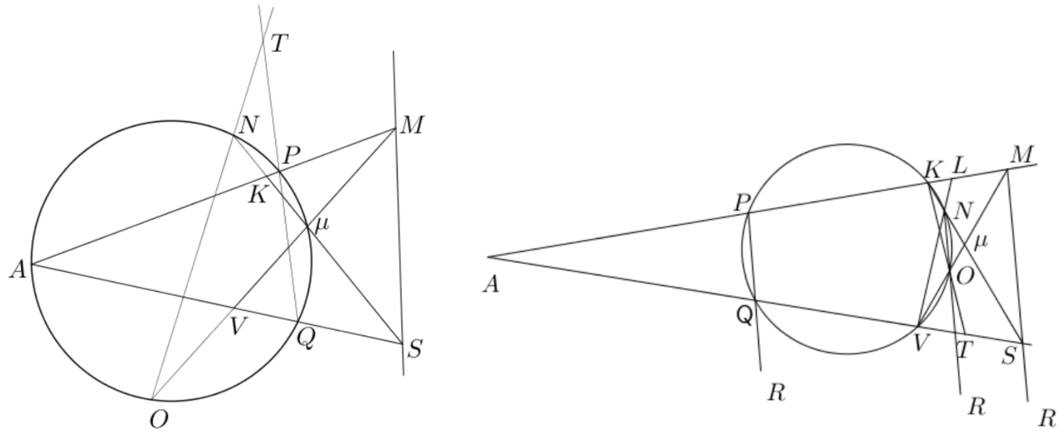


Figura 4: La figura a sinistra mostra che il primo lemma non regge per un cerchio che passa per A, μ invece di passare per K, V. La figuara a destra illustra il teorema dell'esagono per il caso del cerchio: i lati opposti dell'esagono KPQVONK si incontrano ai tre punti collinari M, S, R.

la dimostrazione che fornì lo stesso Pascal è sconosciuta poiche non ci è pervenuta ma, molto probabilmente, utilizzò il teorema di Menelao che gli doveva essere certamente noto.
Il secondo lemma, introdotto da Pascal, ha un carattere prettamente proiettivo:

Lemma 2. *Se più piani, che passano tutti per la stessa retta (asse), sono tagliati da un piano che non passa per l'asse, allora le rette delle sezioni appartengono tutte allo stesso ordine con l'asse. Cioè o tutte incontrano l'asse nello stesso punto, o sono tutte paralleli all'asse.*

Infine il terzo, ed ultimo lemma, è una netta conseguenza dei due precedenti, infatti asserisce che:

Lemma 3. *Sia data una configurazione di rette come nel primo lemma, se una sezione conica che passa attraverso i punti K, V taglia le linee rette MK, MV, SV, SK, nei punti P, O, N, Q, rispettivamente, allora le rette MS, NO, PQ, appartengono allo stesso ordine.*

Con questi lemmi Pascal ampliò con successo il teorema esagonale dal cerchio ad ogni conica.
In seguito Pascal affermò che dai lemmi da lui introdotti e da alcune conseguenze facilmente deducibili da essi, derivano gli "elementi completi"[9] delle sezioni coniche. In altre parole questi sarebbero tutte le proprietà dei diametri e dei loro

[9]Per "elementi completi" si intendeva il "contenuto dei primi quattro libri di *Conics* di Apollonio".

parametri, delle tangenti (e così via), oltre che, come sottolineò lui stesso, la "restituzione" di quasi tutti i dati del cono, la "descrizione" delle sezioni coniche per punti, ecc. Questo termine "restituzione" fu probabilmente utilizzato da Pascal per indicare la determinazione dei vertici dei coni che passano attraverso una sezione conica definita da determinate condizioni, e per "descrizione" intendeva la costruzione per punti delle sezioni coniche che passano attraverso $5 - n$ punti e tangente a n linee rette in posizione.

A questo punto Pascal introdusse la prima proposizione:

Proposizione 1. *Siano nel piano MSQ, della sezione conica PKV, le rette AK, AV che intersecano la sezione conica rispettivamente nei punti P, K e Q, V. Se per due di questi quattro punti, non sulla stessa retta con A (come avviene per K, V) e per i due punti N, O, sulla conica, vengono tracciate quattro rette KN, KO, VN, VO, che tagliano le rette AV, AP nei punti S, T, L, M, allora il birapporto di PM a MA, e di AS a SQ, è uguale al birapporto di PL a LA, e di AT a TQ (vedi figura* (3)*).*

Per renderla a noi più comprensibile utilizzando le notazioni contemporanee:

$$\frac{PM}{MA} \times \frac{AS}{SQ} = \frac{PL}{LA} \times \frac{AT}{TQ}. \tag{2}$$

Quest'ultima relazione equivale ad affermare che i due *birapporti*[10] (PAML) e (AQTS) sono equivalenti, anche se, questa nozione era completamente estranea a Pascal.

Per brevità introduciaomo le altre proposizioni in formato moderno:

Proposizione 2. *Se le tre rette complanari DE, DG, DH sono tagliate dalle rette AP e AR rispettivamente nei punti F, G, H e C, γ, B, e sulla retta DC è fissato un punto E, allora:*

$$\frac{EF \times FG}{EC \times C\gamma} \times \frac{A\gamma}{AG} = \frac{EF \times FH}{EC \times CB} \times \frac{AB}{HB} = \frac{EF \times FD}{CE \times CD} \tag{4}$$

Inoltre, se una sezione conica che passa attraverso i punti E, D interseca le linee rette AH, AB, rispettivamente nei punti P, K, R, ψ, allora si ha:

$$\frac{EF \times FG}{EC \times C\gamma} \times \frac{A\gamma}{AG} = \frac{FK \times FP}{CR \times C\psi} \times \frac{AR \times A\psi}{AK \times AP} \tag{5}$$

[10]Dove ricordiamo che per birapporto di una generica quaterna A,B, C, D si intende quella quantità:

$$b(aA, B, C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}. \tag{3}$$

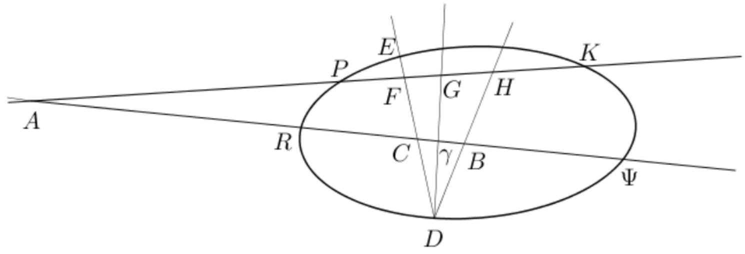


Figura 5: Prima figura estratta integralmente dal testo di Pascal come illustrazione della seconda proposizione.

Si può osservare che nella (4) l'uguaglianza tra il primo e il terzo membro segue in maniera naturale applicando il teorema di Menelao al triangolo AFC intersecato dalla trasversale GγD, mentre l'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro segue applicando lo stesso teorema allo stesso triangolo tagliato dalla trasversale HBD. Vediamo più nel dettaglio la:

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che:

$$\frac{EF \times FG}{EC \times C\gamma} \times \frac{A\gamma}{AG} = \frac{EF \times FH}{EC \times CB} \times \frac{AB}{HB} = \frac{EF \times FD}{CE \times CD}. \tag{6}$$

In effetti la quaterna di punti $AFGH$ ed $AC\gamma B$ hanno lo stesso birapporto, quindi vale:

$$\frac{FH \times AG}{FG \times AH} = \frac{CB \times A\gamma}{C\gamma \times AB}$$

e moltiplicando ambo i membri per $\frac{EF}{EC}$ ed ordinando otteniamo la prima parte della tesi. La seconda parte si deduce in modo immediato applicando il teorema di Menelao. Ad esempio se lo applichiamo alle coppie dirette AH, DH e AC, DC otteniamo:

$$\frac{AH}{AF} = \frac{AB}{BC} \times \frac{CD}{DF}$$

infine, moltiplicando ambo i membri per $\frac{EF}{EC}$ e riordinando si ottiene:

$$\frac{EF \times HF}{EC \times BC} \times \frac{AB}{AH} = \frac{DF}{CD} \times \frac{EF}{EC}.$$

□

Proposizione 3. *Se le quattro rette AC, AF, EH, EL, si intersecano nei punti N, P, M, O e una sezione conica interseca le stesse rette nei punti C, B, F, D, H, G, L, K, allora (fig* (6) *a sinistra):*

$$\frac{MC \times MB}{PF \times PD} \times \frac{AD \times AF}{AB \times AC} = \frac{ML \times MK}{PH \times PG} \times \frac{EH \times EG}{EK \times EL}$$

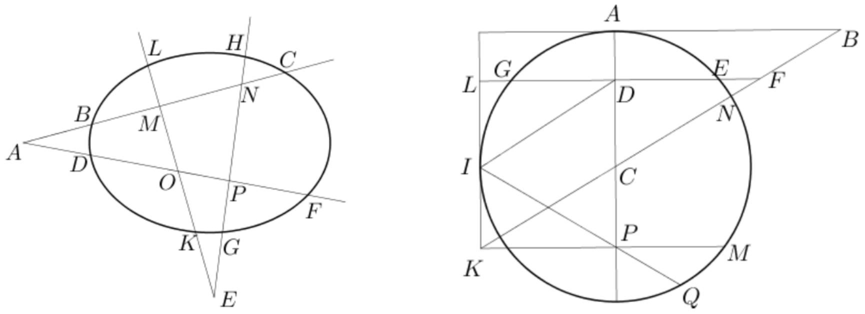


Figura 6: Rispettivamente figura 3 in alto a destra e figura 2 in basso a sinistra del testo di Pascal

Proposizione 4. *Consideriamo nel piano MSQ una sezione conica PQV. Presi quattro punti K, N, O, V su di essa, e tracciate le rette KN, KO, VN, VO, in modo tale che attraverso ciascuno dei quattro punti ci passino solo due di queste rette, e se un'altra retta interseca la sezione conica nei punti R, ψ, e le quattro rette nei punti x, y, Z, δ, rispettivamente, allora(vedi figura* (3)*):*[11]*:*

$$\frac{ZR \times yR}{Z\psi \times y\psi} = \frac{\delta R \times xR}{\delta\psi \times x\psi}. \tag{7}$$

Pascal chiamò questa proposizione *proprietà meravigliosa* atttribuendone il merito a Desargues. In un certo senso infatti, possiamo notare come la relazione precedente esprima la condizione per i sei punti R, ψ, x, y, Z, δ di essere in *involuzione* tra loro.

Proposizione 5. *Se nel piano di un'iperbole, o di un'ellisse, o di un cerchio, AGE, il cui centro è C, si traccia il segmento AB, tangente alla sezione conica in A il cui quadrato è uguale ad un quarto del rettangolo della figura*[12] *e sono tracciati i diametri AC, BC, allora per qualsiasi retta parallela ad AB, come DE, che taglia sezione conica in E e taglia le rette AC, CB nei punti D, F rispettivamente, la somma, o la differenza, dei quadrati di DE, DF sarà uguale al quadrato di AB, a seconda che la sezione conica sia un'ellisse o un cerchio o un'iperbole (vedi figura* (6) *a destra).*[13]

Infine, Pascal concluse la sua opera dicendo:

---

[11] Nel testo originale in realtà si trova la forma scorretta: $\frac{ZR\times Z\psi}{yR\times y\psi} = \frac{\delta R\times \delta\psi}{xR\times x\psi}$.

[12] Per Pascal, come era consuetudine a quel tempo, "rettangolo di figura" significava "rettangolo i cui lati sono un diametro e il lato retto è relativo ad esso"

[13] Assumendo per unità di misura il segmento AB, questo si traduce nelle equazioni cartesiane dell'ellissi e dell'iperbole riferite agli assi principali.

Nous avons plusieurs autres Problèmes et Theoremes et plusieurs consequences des precedents, mais la defiance que i'ay de mon peu d'experience et de capacité ne me permet pas d'en avancer davantage advant qu'il ait passé à l'examen des habiles gens, qui voudront nous obliger d'en prendre la peine; apres quoy si l'on iuge que la chose merite d'estre continuée, nous essayrons de la pousser jusques où Dieu nous donnera la force de la conduire

Questa conclusione, ci fa capire come, secondo Pascal, molti degli svariati problemi potevano essere semplicemente risolti utilizzando le preposizioni da lui introdotte. Per esempio si potevano utilizzare per tracciare le tangenti ad una conica da un dato punto, oppure per trovare due diametri coniugati che formano un dato angolo, etc.

6 Un trattato mai pubblicato

Nel 1673, Henry Oldenburg, segretario della Royal Society di Londra, fu informato dell'esistenza di un manoscritto di Pascal. Il 6 aprile, Oldenburg, sempre desideroso di seguire gli sviluppi della matematica francese, scrisse a Gottfried Wilhelm Leibniz, che si trovava allora a Parigi, chiedendogli di indagare su quel manoscritto, in modo che potesse essere riportato alla luce:

Siamo venuti a conoscenza di questo trattato finora inedito [di Pascal], sulla base del metodo di Desargues (che il discepolo di quell'uomo accidentalmente concepito) e siamo stati informati dal libraio parigino de Prex, che il manoscritto è nelle mani di un suo fratello in Alvernia. Prego il cielo che sia riportato alla luce!

Intervenne allora Leibniz che riuscì ad ottenere il permesso dagli eredi, di vedere i manoscritti geometrici di Pascal, che gli furono tuttavia consegnati in due momenti differenti. Tuttavia il manoscritto del trattato sulle sezioni coniche non fu nelle mani di Leibniz fino alla fine del 1675. A quel tempo, anche E. Walther von Tschirnhaus era a Parigi ed essendo in contatto con Leibniz, anche lui ebbe accesso agli scritti di Pascal. Leibniz esaminò con cura il trattato di Pascal, prendendo alcune note su fogli separati, copiandone solo la prima parte. Il 30 agosto 1676, restituendo i manoscritti agli eredi, scrisse una lettera a Florin Périer, marito della sorella maggiore di Pascal. Dalle sue parole si evince che non aveva letto il manoscritto molto approfonditamente, infatti scrisse:

Mi sarebbe comunque piaciuto poterli leggere con un po' più di attenzione ma, le tante distrazioni che non mi hanno permesso di disporre *completamente del mio tempo, non lo hanno permesso. Tuttavia, credo di averle lette abbastanza per essere in grado di soddisfare la vostra richiesta, e per dirvi che ritengo il lavoro finito e pronto per la pubblicazione.*

Successivamente, Leibniz descrisse brevemente le sei parti, in cui pensò che il manoscritto avrebbe potuto essere organizzato per la stampa. Seguiremo la sua descizione nella sezione 7.

6.1 La "Generatio conisectionum"

La *Generatio conisectionum*, ovvero la copia che Leibnitz trasse dalla lettura della prima parte del trattato di Pascal, inizia con le definizioni di superficie conica, a base circolare, e dei suoi elementi *vertice, pendenza e generatrice* ossia le stesse definizioni che Desargues diede nel *Brouillon project* nel 1639.
Subito dopo, troviamo quattro corollari, che possiamo sintetizzare come segue:

1. Qualsiasi linea retta che unisce il vertice con qualsiasi punto di un cono è una generatrice.

2. Qualsiasi retta che congiunga due punti di un cono è o una generatrice, nel caso in cui passa per il vertice, oppure se non passa per il vertice, non contiene altri punti del cono;

3. Tre generatrici di un cono non possono appartenere allo stesso piano.

4. Un cono è necessariamente intersecato da qualsiasi piano.

Nel secondo frammento dell'opera, Pascal introdusse i sei tipi di sezioni coniche. Se una sezione di piano passa attraverso il vertice del cono ci sono tre casi possibili:

- La sezione si riduce ad un punto, coincidente con il vertice,

- La sezione si riduce ad una linea retta (doppia), se il piano è tangente al cono,

- La sezione si riduce ad una coppia di linee rette che si intersecano nel vertice, una figura che chiamò *angolus rectilineus* (angolo rettilineo).

Se il piano di sezione non passa attraverso il vertice del cono, abbiamo altri tre casi:

- Se il piano di sezione non è parallelo a nessuna generatrice, la sezione conica è chiamata *Antobola* (ellisse).

- Se il piano di sezione è parallelo ad una sola generatrice, la sezione conica è chiamata *Parabola.*
- Se il piano di sezione è parallelo a due generatrici, la sezione conica è detta *Hyperbola.*

A questo punto Pascal ci presenta le seguenti:

1. Una retta può incontrarsi in punto con un'altra retta a distanza finita o infinita e in quest'ultimo caso le due rette sono parallele.
2. Due rette nello stesso piano si intersecano sempre, a distanza finita o infinita e in quest'ultimo caso le due rette sono parallele.
3. Una retta che interseca una sezione conica solo in un punto è detta *monosecante*[14], mentre una retta nel piano di una sezione conica che interseca la sezione conica solo a distanza infinita, ed è parallela a certi monosecanti, è chiamata *Asymptote.*
4. Una retta in un piano di un cerchio che tocca, o interseca, il cerchio è detta "al cerchio".

Proseguendo troviamo diversi corollari. Come è già stato fatto in precedenza, per comprendere lo stile di Pascal, esporremo il primo di essi in maniera integrale, mentre i successivi saranno sintetizzati ed espressi in maniera più elementare:

Corollario 6.1. *È evidente che, se l'occhio è posto nel vertice di un cono, avente una circonferenza di cerchio come base e uno schermo o un piano intersecano la superficie conica, allora la sezione conica prodotta sulla superficie, sia che sia un punto, una retta, un angolo, un Antobola (ellisse), una parabola, un iperbole, sarà l'immagine della circonferenza di cerchio.*

In altre parole ciò significa che, poiché l'osservatore (come il vertice del cono) può essere posizionato a piacimento, ogni sezione conica è proiezione della circonferenza.

Corollario 6.2. *Se il piano della sezione π non passa attraverso il vertice del cono e non è parallelo a nessuna generatrice, la sezione conica Γ è un'ellisse che ha tutti i suoi punti a distanza finita.*

Corollario 6.3. *Se π è parallelo ad una sola generatrice, la sezione è una parabola e tutti i punti del cerchio di base C hanno le loro immagini a distanza finita su Γ tranne una, cioè quella in cui la generatrice, a cui π è parallelo, incontra C, che è a distanza infinita.*

[14] L'odierna tangente.

Corollario 6.4. *Se π è parallelo a due generatrici, tutti i punti di C hanno la loro immagine a distanza finita, tranne due che, per il parallelismo, hanno le loro immagini all'infinito.*

Pascal chiamò i punti di C, la cui immagine è infinitamente lontana nel piano di sezione, *punti senza immagine* mentre chiamò *punti mancanti* della sezione conica i punti all'infinito corrispondenti ai punti senza immagine.
Nei tre frammenti dell'opera successivi Pascal notò che:

a) L'ellisse è chiusa in se stessa e circonda uno spazio finito.

b) La parabola è infinitamente estesa, e sebbene sia l'immagine di un cerchio, che circonda uno spazio finito, circonda uno spazio infinito.

c) L'iperbole, estesa all'infinito, è composta da due parti (semiiperboli), ciascuna delle quali circonda uno spazio infinito, ed è l'immagine di uno dei due archi in cui i due punti senza immagine dividono il cerchio di base.

A questo punto Pascal forisce altri tre corollari sulle immagini delle secanti di C nel piano di sezione. Possiamo riassumerli in modo più semplice come segue:

Corollario 6.5. *Se Γ è un'ellisse, ogni secante s di C ha per immagine una secante σ di Γ.*

Corollario 6.6. *Se Γ è una parabola, ogni secante s di C ha la sua immagine σ nel piano della sezione π, e se s non passa attraverso il punto di C senza immagine, allora σ è una secante di Γ, altrimenti σ è parallelo ad una generatrice e incontra Γ in un solo punto.*

Corollario 6.7. *Se Γ è un'iperbole, ogni secante s di C, che non passa attraverso uno qualsiasi dei punti di C senza immagine, ha per immagine una retta che è una secante di Γ. Se s passa attraverso un solo punto senza immagine, σ taglia l'iperbole in un solo punto (i.e. è una monosecante) mentre se s passa attraverso entrambi i punti senza immagine, la sua immagine σ non è a distanza finita nel piano di sezione.*

Ovviamente Pascal esaminò anche i casi delle tangenti al cerchio di base, ottenendo i risultati che possiamo riassumere come segue:

- Nel caso dell'ellisse Γ, ogni tangente t a C ha come immagine una tangente da τ a Γ.

- Nel caso in cui Γ sia una parabola, ogni tangente t a C ha come immagine una tangente da τ a Γ, tranne quando t è tangente a C nel punto senza immagine.

Inoltre nel frammento successivo aggiunse:

> *Est ergo in parabola recta deficiens, quae quidem vice fungitur tangentis, eum tangentis sit apparentia.*[15]

- Nel caso di un'iperbole, ogni tangente t a C ha la sua immagine τ su π e se il punto di contatto non è un punto senza immagine allora τ è tangente a Γ in un punto a distanza finita, altrimenti non toccano l'iperbole fino a una distanza infinita, e ciascuno di essi è parallelo all'una o all'altra delle due generatrici ai quali il piano di sezione è parallelo.

Per concludere, possiamo sbilanciarci col dire che il *pensiero proiettivo* di Pascal emerge chiaramente attraverso la lettura della *Generatio conisectionum.*

7 La descrizione di Leibnitz delle parti II-VI

Leibnitz diede il titolo: *De hexagrammo Mystico et Conico* alla seconda parte del trattato di Pascal.
Dopo aver discusso la generazione ottica di sezioni coniche come proiezione di un cerchio in un piano (il piano di sezione del cono), Pascal introdusse, in questa parte, la figura composta da sei rette ossia una particolare configurazione che chiamò *Hexagrammum Mysticum.*
Secondo Leibniz, fu usando le proiezioni che Pascal mostrò che ogni esagramma mistico "appartiene" ad una sezione conica, e che, viceversa, ogni sezione conica dà luogo ad un esagramma mistico. Inoltre Leibniz osservò che, la mancanza di figure in questa parte era compensata dalle figure inserite nella sesta parte.
Leibniz pensò che la terza parte si sarebbe dovuta chiamare *De quatuor tangentibus, et rectis puncta tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur*[16]. Leibniz osservò che fu qui che Pascal spiegò l'uso dell'*esagramma mistico* per trovare le proprietà dei centri e dei diametri delle sezioni coniche sottolineando che non sembrava mancare nulla.
In questa parte, molto probabilmente Pascal aveva esposto i teoremi che costituiscono la teoria dei poli e delle polari. La ragione di ciò può essere trovata nel teorema dell'esagono, infatti quando due lati opposti si riducono ad un punto, il teorema diventa:

[15]Ossia: *Quindi nella parabola c'è una retta mancante, che in realtà svolge il ruolo di una tangente, essendo infatti l'immagine di una tangente*

[16]Delle quattro tangenti e delle rette che congiungono i punti di contatto da cui si deducono armonicamente le proprietà della curva e dei diametri.

Teorema 7.1. *Le tangenti ad una sezione conica ai vertici opposti di un quadrilatero inscritto, si incontrano sulla retta che unisce i punti di intersezione dei lati opposti. (vedi figura (7))*

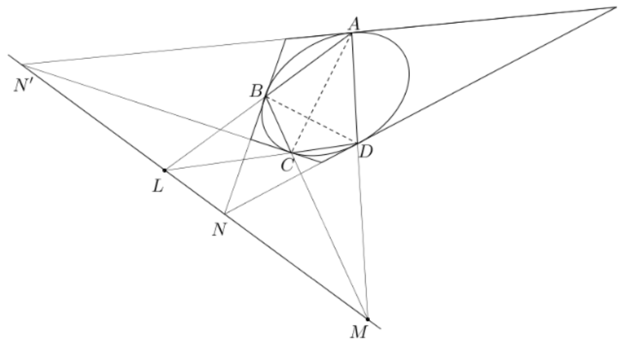


Figura 7: Illustrazione per il Teorema(7.1)

Ora, poiché quest'ultimo risultato implica l'intera teoria dei poli e delle polari, si ritiene che tale teoria fosse contenuta tra le applicazioni che Pascal fece dell'esagramma mistico. D'altra parte, nel *Brouillon project*, di cui Pascal aveva una conoscenza approfondita, Desargues aveva già delineato una teoria completa di poli, polari, centri e diametri, attraverso il suo teorema sul quadrilatero inscritto. Osserviamo che questo risultato (Teorema (7.1)) suggerisce l'uso del principio di continuità geometrica, ossia:

> *Quando i due lati opposti diventano infinitesimi, i loro prolungamenti si incontrano ancora sulla retta che unisce i punti di intersezione delle altre due coppie di lati opposti.*

Proseguendo, secondo Leibniz, la quarta parte avrebbe dovuto essere intitolata *De propositionibus segmentorum secantium et tangentium* e avrebbe dovuto trattare di ordinate, e rapporti di segmenti intercettati su una retta da una sezione conica. Di questa parte Leibnitz disse solo che diverse figure erano incluse nella trattazione e che non sembrava mancare nulla.
La quinta parte, secondo Leibnitz, avrebbe dovuto essere intitolata *De tactionibus conicis*, cioè, come spiegò, "sui punti di contatto e e sulle tangenti ad una sezione conica". Si ritiene che questa quinta parte trattasse i sei problemi classici riguardanti la costruzione di coniche che passano attraverso $5 - n$ punti e tangenti a n rette date in posizione, per $0 \leq n \leq 5$. È altamente probabile che Pascal affrontò questi problemi, anche perché la costruzione della sezione conica che passa attraverso cinque punti specifici era già stata trattata da Mydorge nel 1637.
Alla sesta parte, che Pascal lasciò senza titolo, Leibniz diede il nome di *De loco*

Solido, sottolineando che si trattava dello stesso soggetto su cui Cartesio e Fermat avevano già lavorato, cioè il problema di Pappo delle tre e quattro rette. Leibniz osservò che quest'ultima parte includeva molte definizioni e risultati, già spiegata nella seconda parte, in particolare, conteneva la definizione e le proprietà dell'*Hexagrammum conicum mysticum*, illustrato da diverse grandi figure colorate. Leibniz pensava che le prime quattro, o cinque, parti costituissero l'intero trattato di Pascal sulle sezioni coniche e che la sesta parte fosse un trattato autonomo, dedicato principalmente all'esagramma mistico e al problema delle quattro rette, per mostrare l'eccellenza e la potenza di questo strumento, che doveva essere diffuso tra gli amici di Pascal.
Leibniz terminò la sua lettera a Périer confermando che il lavoro di Pascal era pronto per essere pubblicato e che non sarebbe stato opportuno ritardare la stampa per paura che il trattato potesse perdere la sua carica innovativa.

8 L'"Hexagrammum Mysticum"

Nell' *Essay pour les coniques*, Pascal aveva già a lungo discusso del ruolo prominente che il *teorema dell' esagono* avrebbe svolto nella formulazione del suo trattato sulle sezioni coniche. Vogliamo allora cercare di capire quale strada lo abbia portato al suo famoso teorema e come sia arrivato all'*hexagrammum mysticum*, perché sia sempre *conico* ed infine del perché lo abbia chiamato *mistico.*
Fu forse il lemma XIII del settimo libro della Collezione di Pappo, noto come *Teorema di Pappo* a dare qualche suggerimento a Pascal: (vedi figura (8) a sinistra):

Lemma XIII. *Se A, E, B sono tre punti collinari e C, F, D sono altri tre punti collinari, allora i punti di intersezione G, M, K, delle coppie di rette AF e EC, AD e BC, ED e BF sono collinari.*

La posizione delle rette che collegano le due triplette di punti sulle rette AB e CD coincide con l'esagono AFBCEDA inscritto nella sezione conica degenerata costituita da quella coppia di rette. Quindi il lemma si può formulare dicendo che i lati opposti dell'esagono si incontrano in tre punti collinari.
La collinarità dei punti G, M, K non dipende dall'esagono iscritto che ha i suoi vertici nei punti A, B, C, D, E, F (vedi figura (8) a destra). Inoltre la collinearità di G, M, K è una condizione necessaria e sufficiente affinchè A, E, B, e C, F, D, siano due triplette di punti collinari.

Inoltre se sei punti A, B, C, D, E, F sono presi su di una circonferenza, l'esagono inscritto gode ancora della stessa proprietà, cioè i punti L, M, N, intersezioni dei lati opposti, sono collinari (vedi figura (9) sinistra e destra).

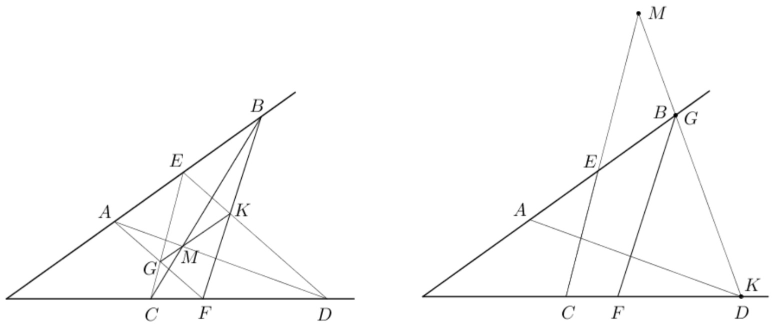


Figura 8: A sinistra abbiamo l'illustrazione del lemma $XIII$ del libro VII di Pappo, mentre a destra la figura mostra che lo stesso risultato vale anche se i sei punti sono uniti in modo differente.

Fu forse un'analisi approfondita del *Brouillon project* di Desargues a convincere Pascal che uno studio diretto delle sezioni coniche potesse essere fondato sulla semplice idea che cinque punti in posizione generale in un piano, determinassero un'unica conica e che la condizione che un sesto punto si trovasse su quella curva desse una relazione che poteva essere usata come definizione comune per tutti i tipi di sezione conica. Questo fu il caso del *teorema delle corde* di Mydorge (1637) oltre che del teorema di involuzione di Desargues. Ma, poiché la relazione legata a quest'ultimo risultato era troppo difficile da applicare, Pascal cercò una relazione più semplice che potreva essere espressa anche graficamente, con l'obiettivo di applicare il metodo della proiezione. Cercando una tale condizione, Pascal prese un cerchio e sei punti posti regolarmente su di esso e si rese conto che le tre coppie di lati opposti si intersecavano in altri tre punti collinari. Pascal applicò nuovamente la costruzione per altri esagoni inscritti nel cerchio e i disegni confermarono l'intuizione.

8.1 Una possibile dimostrazione del teorema

Nell'articolo di del Andrea Centina in bibiografia è riportata una possibile dimostrazione del teorema di Pascal dell'*Hxagrammum Mysticum*. Senza dubbio Pascal dimostrò prima il teorema per un esagono inscritto in una circonferenza per poi poi estenderlo a una qualsiasi sezione conica per proiezione, fermamente convinto del carattere proiettivo di quel risultato. A questo proposito è significativo che la prima proposizione nel *Essay pour les coniques*, che vale per il cerchio, fu estesa a qualsiasi sezione conica per proiezione. Quindi seguendo le orme del suo mentore Desargues, Pascal utilizzò il teorema di Menelao per dimostrare il teorema esagonale nel caso del cerchio:

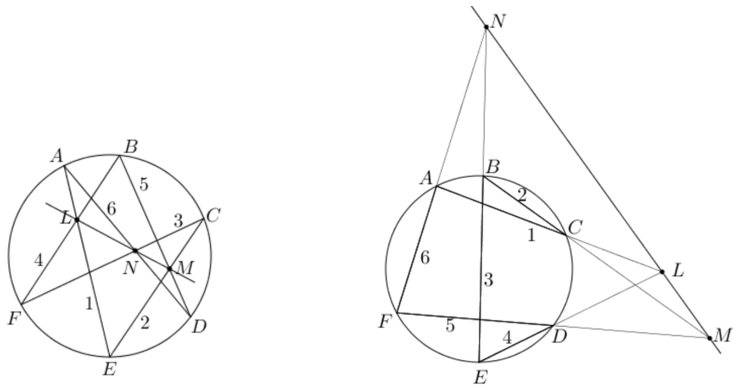


Figura 9: A sinistra troviamo un diagramma per il teorema di tipo Pappus nel cerchio. I punti di intersezione dei lati opposti 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6 dell'esagono inscritto AECFBD, L, M, N, sono collinari. Il diagramma a destra mostra che unendo in modo diverso gli stessi punti, si ottengono sempre altri esagoni, come ACBEDF, i cui lati opposti 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6 si intersecano ancora una volta in tre punti collinari.

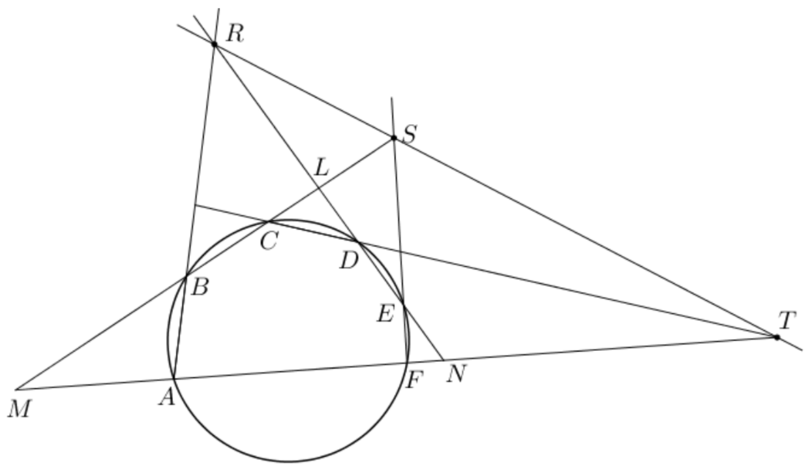


Figura 10: Illustrazione utile per la dimostrazione del teorema con l'ausilio del teorema di Menelao.

Dimostrazione. Se ABCDEF è un esagono inscritto in un cerchio, come in figura (10), applicando il teorema di Menelao al triangolo LMN tagliato dalle trasversali

ABR, FES e CDT, abbiamo rispettivamente:

$$\frac{NA}{AM} \times \frac{MB}{BL} \times \frac{LR}{RN} = 1,$$
$$\frac{NF}{FM} \times \frac{MS}{SL} \times \frac{LE}{EN} = 1,$$
$$\frac{MC}{CL} \times \frac{LD}{DN} \times \frac{NT}{TM} = 1.$$

Unendo queste relazioni otteniamo:

$$\frac{MS}{SL} \times \frac{LR}{RN} \times \frac{NT}{TM} \times (\frac{NA}{AM} \times \frac{NF}{FM} \times \frac{MC}{CL} \times \frac{MB}{BL} \times \frac{LD}{DN} \times \frac{LE}{EN}) = 1.$$

D'altro canto per il teorema delle secanti:

$$NA \times NF = ND \times NE, \;\; MC \times MB = MA \times MF, \;\; LD \times LE = LC \times LB.$$

Pertanto otteniamo:

$$\frac{MS}{SL} \times \frac{LR}{RN} \times \frac{NT}{TM} = 1. \tag{8}$$

Ora, per l'inverso del teorema di Menelao otteniamo che R, S e T sono collineari.
Per concludere la dimostrazione, ovvero dimostrare il teorema per una sezione conica qualunque, Pascal passò nello spazio:
Dato un esagono inscritto nella sezione conica Γ (figura (11)), proiettandolo dal vertice V del cono nel piano della base, si ottiene un esagono inscritto nel cerchio di base C. In accordo con quanto mostrato sopra, i lati opposti dell'esagono proiettato si intersecano nei tre punti R, S, T che appartengono alla retta d. Inoltre i lati opposti dell'esagono dato, si intersecano in altri tre punti R', S', T', che sono collinari, perché appartengono alla retta lungo la quale il piano di sezione taglia il piano attraverso la retta d e il vertice V. □

Possiamo infine notare che vale anche l'inverso del teorema esagonale, ossia:

Teorema 8.1. *Se i lati opposti di un esagono si incontrano in punti che si trovano su una stessa retta, allora i vertici dell'esagono si trovano su una sezione conica.*

E' molto probabile che per dimostrare questo risultato Pascal abbia ragionato per *reductio ad absurdum*, ossia con quella che oggi è conosciuta come dimostrazione per assurdo.
Riportiamo qui la dimostrazione:

Dimostrazione. Supponiamo che i lati opposti, AB e DE, BC e EF, CD e AF, dell'esagono ABCDEF si incontrino nei tre punti collinari L, M, N e che i sei vertici non si trovino su una sezione conica. In questo caso, F non appartiene alla

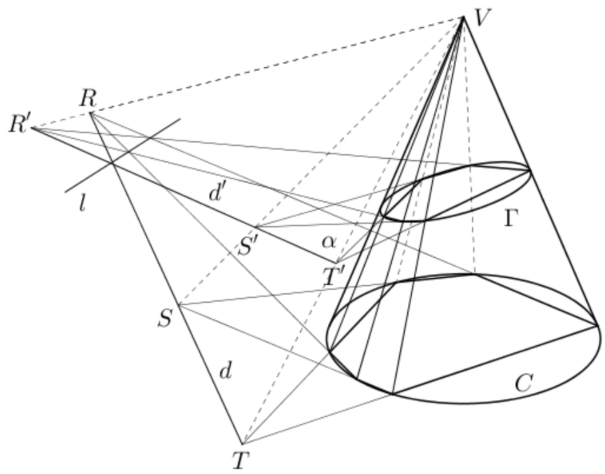


Figura 11: Illustrazione di come Pascal estese il suo teorema dal cerchio alla sezione conica. La retta l è l'intersezione tra il piano α e il piano del cerchio di base C.

sezione conica γ che passa attraverso gli altri cinque vertici. Allora F', intersezione di NA con γ, non può coincidere con F. Dall'altro lato, F' giace su di ME, poiché ABCDEF' è inscritto in γ, quindi F e F' sono entrambi intersezione di NA e ME e devono quindi coincidere. Abbiamo dunque raggiunto una contraddizione e così F deve trovarsi sulla sezione conica che passa attraverso A, B, C, D, E. □

9 Applicazioni dell'Hexagrammum Mysticum

Seguendo la trattazione di Del Centina nell'articolo citato in bibiografia, riportiamo le seguenti costruzioni di una conica soggetta a passare per un certo numero di punti e di essere tangente ad un certo numero di rette date.

9.1 Costruzione di una conica passante per 5 punti

La sezione conica passante per 5 punti.

Dati i punti A, B, C, D, E, tre dei quali non sulla stessa retta, si disegnano le rette AB, BC, CD, DE, poi dal punto M generato dall'intersezione di AB e DE, si traccia una retta g che interseca le rette CD e BC rispettivamente in L e N. Infine si tracciano le rette LA e NE. Il punto F, intersezione di LA e NE appartiene necessariamente all' unica sezione conica che passa attraverso i cinque punti indicati. Ecco che in questo modo abbiamo ottenuto una costruzione della

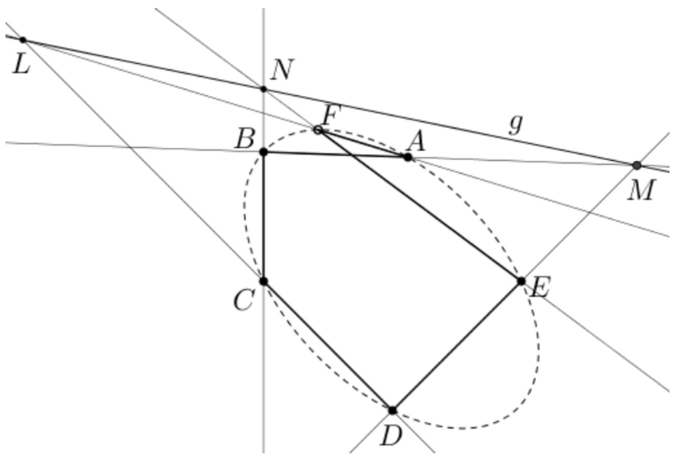


Figura 12: Illustrazione della costruzione di una sezione conica dati 5 punti applicando il teorema di Pascal.

conica passante per cinque punti. Questa costruzione è nota anche con il nome di: *Teorema di Braikenridge e Maclaurin.*

Il caso di 4 punti ed una tangente.

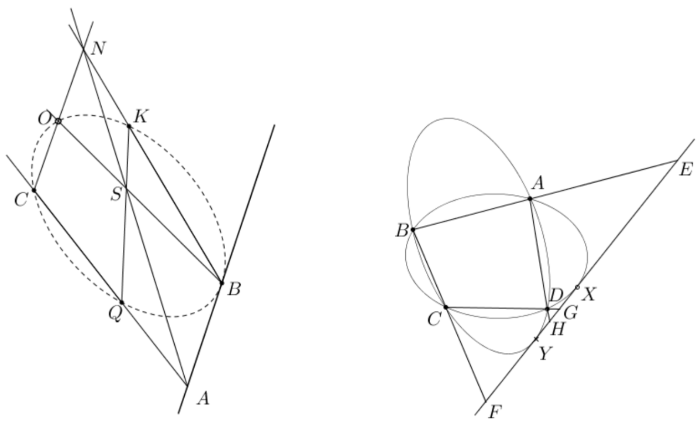


Figura 13: A sinistra abbiamo la figura per la costruzione della conica passante per tre punti e tangente ad una retta data in un punto dato; a destra la figura mostra il caso della sezione conica passante per 4 punti dati e tangente ad una retta data.

Per trovare la sezione conica che passa attraverso tre punti K, C e Q, tangente ad una retta data passante per un punto B, Pascal applicò sicuramente un caso

particolare del teorema dell'esagono, facendo collassare un lato dell'esagono inscritto in un punto e sostituendo il "lato" con la tangente alla sezione conica in quel punto (figura (13) a sinistra). Considerata la retta passante per C e Q, che incontra la tangente data in A, unì K con Q e infine tracciò da A una retta AN che interseca KQ in S e BK in N. Ora, le rette BS e CN si intersecano in un punto O che appartiene necessariamente alla sezione conica cercata. Ruotando la retta AN attorno ad A, il punto O descrive la curva.
Possiamo notare che nel caso in cui il quarto punto B non si trovi sulla tangente, il problema non è risolvibile ricorrendo direttamente al teorema dell'esagono. E' molto probabile che Pascal si sia quindi aiutato con il teorema di involuzione di Desargues (che egli dedusse dal teorema dell'esagono). In questo caso, se A, B, C e D sono i punti dati (figura (13) a destra), producendo le linee rette AB, BC, CD e DA, fino a quando intersecano la tangente data t nei punti E, F, G e H rispettivamente, si nota che il punto X, dove una sezione conica passante per A, B, C e D è tangente alla retta t, è in involuzione con le coppie di punti E, G e H, F. Ragion per cui la relazione (1) deve essere soddisfatta, ossia:

$$\left(\frac{GX}{EX}\right)^2 = \frac{HG}{HE} \times \frac{GF}{EF}.$$

Quest'ultima relazione ci permette di determinare la posizione del punto X (si noti che ci sono due soluzioni per questo problema).
Nei casi tre punti e due tangenti ed un punto e quattro tangenti, Pascal ragionò probabilmente in maniera del tutto analoga.

Possiamo infine esaminare il caso:

La sezione conica tangente a 5 rette in posizione.

In questo caso è sufficiente trovare i cinque punti di contatto e Pascal sicuramente ricorse al "esagono circoscritto", di cui conosceva bene le proprietà.
Quindi se a, b, c, d, e sono le rette date (figura (14) a sinistra), per trovare il punto H in cui a interseca la sezione conica che stiamo cercando, è sufficiente determinare il punto T, intersezione di AD con BE, e intersecare CT con a. In modo del tutto analogo possiamo determinare tutti gli altri punti di contatto.

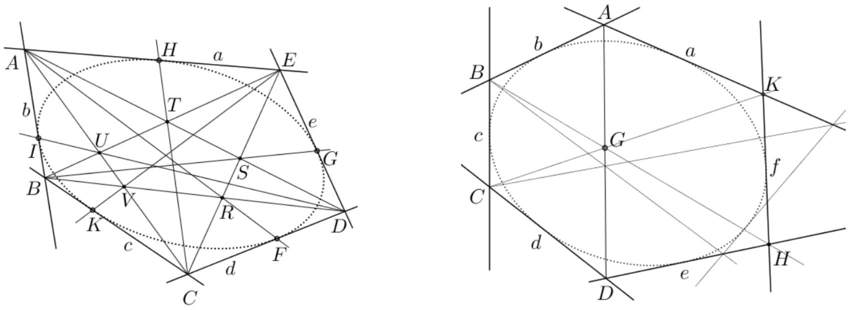


Figura 14: La figura a sinistra mostra la costruzione della sezione conica tangente a cinque rette date a, b, c, d, e dalla determinazione dei punti di contatto; la figura a destra mostra le rette date a, b, c, d, e ed A punto di intersezione di a e b, B punto di intersezione di b e c, e così via. Sulla retta AD prendiamo un punto G, e tracciamo le linee rette BG e CG, che intersecano rispettivamente a ed e nei punti K e N. Quando il punto G si sposta su AD, la linea retta KN avvolge la sezione conica tangente a, b, c, d, e.

Riferimenti bibliografici

[1] Andrea Del Centina *Pascal's hexagrammum mysticum, and a conjectural restoration of his lost treatise on conic sections* Archive for history of exact sciences, vol 74 (5) pp. 469-521.

[2] *Essay pour les coniques*, LH XXXV, XV, I,Bl. 10r. Courtesy of the G.W.Leibnitz Bibliothek-Niedersächsische Landesbibliothek, Hannover. *https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262279/f5.image*