L'importanza del Teorema delle Corde per le coniche finalmente riconosciuta:
l'Hôpital e Le Poivre

a cura di Eletta Finco

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio delle sezioni coniche trova contributi fin dal periodo ellenistico, quando geometri e matematici greci come Eudosso, Menecmo, Aristeo, Euclide e Archimede hanno definito la curva conica come sezione di un cono. Sembra infatti che le sezioni coniche furono introdotte tra il 360-350 a. C. da Menecmo.
Apollonio di Perga, verso la fine del terzo secolo a. C., scrisse il trattato "*Le Coniche*". Prima di Apollonio ellisse, parabola e iperbole venivano costruite come sezioni di tre tipi nettamente distinti di coni circolari retti, a seconda che l'angolo al vertice fosse acuto, retto o ottuso. Apollonio dimostrò che, semplicemente variando l'inclinazione del piano di intersezione, era possibile ottenere tutte e tre le varietà di sezioni coniche da un unico cono, senza necessariamente considerare sezioni perpendicolari ad una generatrice di quest'ultimo. Egli dimostrò inoltre che non era necessario che il cono fosse retto, ma che poteva essere anche circolare, obliquo o scaleno.

Nei secoli successivi, diversi studiosi trattarono questi argomenti. A cavallo del diciottesimo secolo, in particolare, il Teorema delle Corde per le Sezioni Coniche iniziò ad attirare l'attenzione di grandi matematici del tempo.
In questa tesina vengono introdotte due figure del 1700 che, attratte dalla teoria delle sezioni coniche, diedero importanti dimostrazioni di tale teorema: l'Hôpital e Le Poivre.
Nel Capitolo 2 si introducono inizialmente notizie sulla vita e sulle opere di l'Hôpital grazie a informazioni raccolte da diversi autori suoi contemporanei. L'Hôpital è importante per i suoi contributi al calcolo infinitesimale, anche se è ormai dimostrato il debito che la sua opera deve al suo maestro Johann Bernoulli. La seconda parte del capitolo riporta una sua dimostrazione analitica del Teorema delle Corde.
Nel Capitolo 3 si introduce Le Poivre, un matematico collegato a l'Hôpital per aver collaborato alla pubblicazione, dopo la morte, della sua ultima opera. Anche di lui si daranno notizie sulla vita e sulle sue opere, ma, essendo una figura minore, queste ultime non saranno altrettanto ricche. Nella seconda parte del capitolo si presenta una dimostrazione di Le Poivre del Teorema delle Corde nello spazio.

Capitolo 2

L'H$\hat{o}$pital

Per comprendere meglio la trattazione delle coniche di l'Hôpital, nella prima sezione si introducono informazioni sulla sua vita e sulle sue opere, per poi procedere alla sua dimostrazione analitica del Teorema delle Corde, nella seconda.

Figura 2.1: Ritratto di Guillaume de l'H$\hat{o}$pital

2.1 Introduzione bibliografica

VITA

L'H$\hat{o}$pital nacque a Parigi nel 1661 in una famiglia che per diverse generazioni, a partire dal dodicesimo secolo, fu molto importante in Francia. Ciò si può evincere anche dalla lunghezza del suo nome completo: *Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont and Seigneur d'Ouques-la-Chaise.* Al giorno d'oggi vi sono diversi modi per indicare il suo nome tra cui Lhospital e l'Hospital oltre a l'H$\hat{o}$pital.
Il padre Anne-Alexandre l'H$\hat{o}$pital era un tenente generale dell'esercito del Re, conte di Sainte-Mesme e duca di Orléans, la madre Elisabeth Gobelin era figlia di un intendente dell'esercito del Re e Consigliere di Stato. Si racconta che i rapporti che Ann-Alexandre aveva con la casa d'Orléans e la fiducia che Gaston d'Orléans riponeva in lui, davano una grande luce alla reputazione di l'H$\hat{o}$pital, tanto da garantirgli una protezione seconda solo a quella del Re stesso.

L'Hôpital, quando era bambino, non aveva alcun talento per materie umanistiche, ma sviluppò fin da subito grandi capacità matematiche e una vera passione per la materia. Si racconta che quando l'Hôpital aveva quindici anni, durante una discussione di matematica con il duca di Roannès e un certo signor Arnaud, l'Hôpital si scontrò con un problema molto difficile sulla cicloide che Blaise Pascal aveva proposto: in un paio di gironi il giovane lo aveva risolto.
Nonostante questa sua passione fortissima e questo interesse che mai abbandonò, l'Hôpital seguì le orme del padre e intraprese la carriera militare servendo l'esercito come capitano in un reggimento di cavalleria. Tuttavia, a causa di una grave miopia, egli dovette rinunciare presto a tale incarico, anche se, forse, l'amore per la matematica piuttosto che l'imperfezione della vista fu all'origine della decisione.
L'Hôpital iniziò così la sua carriera scientifica, concentrando tutte le sue attenzioni sulla matematica e iniziando a far parte del circolo di Nicolas Malebranche alla Congregazione dell'Oratorio, la quale ospitava i principali matematici e scienziati di Parigi. L'incontro con Johann Bernoulli verso la fine del 1691 rappresentò un momento fondamentale per la carriera accademica di l'Hôpital. Bernoulli a quel tempo aveva 24 anni ed era appena arrivato a Parigi dopo aver tenuto lezioni sugli ultimi sviluppi della matematica, cioè sul calcolo differenziale di Leibniz. Egli incontrò l'Hôpital al circolo di Malebranche e notò il suo entusiasmo. L'Hôpital, dal suo canto, era affascinato da Bernoulli perchè si rese conto che era molto più informato sui nuovi sviluppi nei metodi infinitesimali di chiunque altro a Parigi. Per sei mesi Bernoulli tenne quattro lezioni alla settimana al circolo di Malebranche. Quando l'Hôpital si trasferì nella sua tenuta di Ouques, Bernoulli lo seguì e iniziò a impartirgli lezioni private, mantenendo successivamente una corrispondenza quando si spostò a Basilea nel novembre 1692.
Bernoulli, durante il periodo parigino, aveva risolto un problema posto da Florimond de Beaune, consistente nel determinare la curva avente sottotangente costante. L'Hôpital, a cui Bernoulli aveva esposto la dimostrazione, inviò a Huygens la suddetta soluzione, senza specificare chi l'avesse trovata. Huygens quindi pensò fosse di l'Hôpital. Inoltre, poco dopo l'Hôpital pubblicò tale soluzione sotto pseudonimo e a causa di questo Bernoulli interruppe la corrispondenza con l'Hôpital per circa sei mesi. I contatti ripresero quando l'Hôpital, nel marzo 1694, scrisse a Bernoulli offrendogli un compenso di 300 sterline per aiutarlo nella risoluzione di alcuni problemi. L'Hôpital chiedeva inoltre a Bernoulli di non farne parola con nessuno.
Nel settembre 1695, Bernoulli ottenne la cattedra di professore di matematica a Groningen e nel 1696 venne pubblicato il libro di l'Hôpital "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*", primo libro di testo sul calcolo differenziale. Nell'introduzione l'Hôpital riconosce il suo debito verso Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli e Newton, ma considera le basi da lui fornite come idee proprie. Tale libro fu un contributo estremamente importante e fu un modello per la successiva generazione di libri sul calcolo. Dopo la morte di l'Hôpital, Bernoulli sostenne che il libro fosse essenzialmente opera sua, ma le sue rivendicazioni non furono prese sul serio, anche per la "personalità modesta e generosa" che Robinson, un collega di l'Hôpital, assegnò a quest'ultimo. Solo nel 1922 venne alla luce un manoscritto del corso tenuto da Bernoulli a l'Hôpital ed emerse quanto il libro seguisse da vicino gli appunti del corso e questo portò ad avvalorare la rivelazione del presunto accordo fatta da Bernoulli.
Bisogna riconoscere tuttavia a l'Hôpital di aver compreso rapidamente la nuova matematica che gli veniva presentata: era un matematico estremamente competente, in grado di scrivere con grande chiarezza. Nonostante questo, il giudizio della storia è che l'Hôpital abbia fatto poche (o forse nessuna) scoperte matematiche proprie.
Per quanto riguarda le onorificenze attribuite a l'Hôpital, si potrebbe pensare che il

suo status da nobile lo avrebbe portato ad essere facilmente eletto all'Académie des Sciences, invece la sua nobiltà rese impossibile l'elezione secondo processi normali, ma dopo la riorganizzazione dell'Accademia nel 1699 gli fu dato lo status onorario.
L'Hôpital voleva pubblicare un'opera sull'integrazione ma, quando scoprì che anche Leibniz stava per pubblicare sull'argomento, abbandonò l'idea.
L'Hôpital sposò Marie-Charlotte de Romilley de La Chesnelaye ed ebbero un figlio e tre figlie. Morì a Parigi nel 1704.
Dopo la morte di l'Hôpital, fu pubblicato "*Traité anlytique des sections coniques*", nel 1707, di cui una seconda edizione apparve nel 1720.

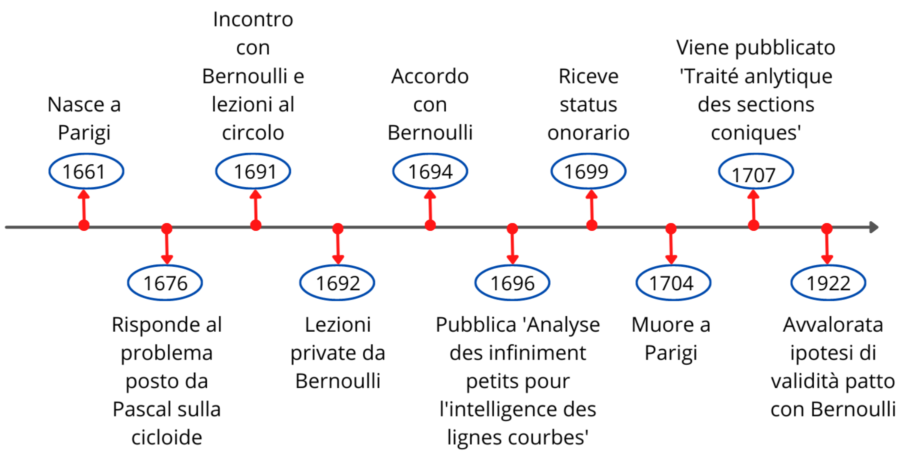
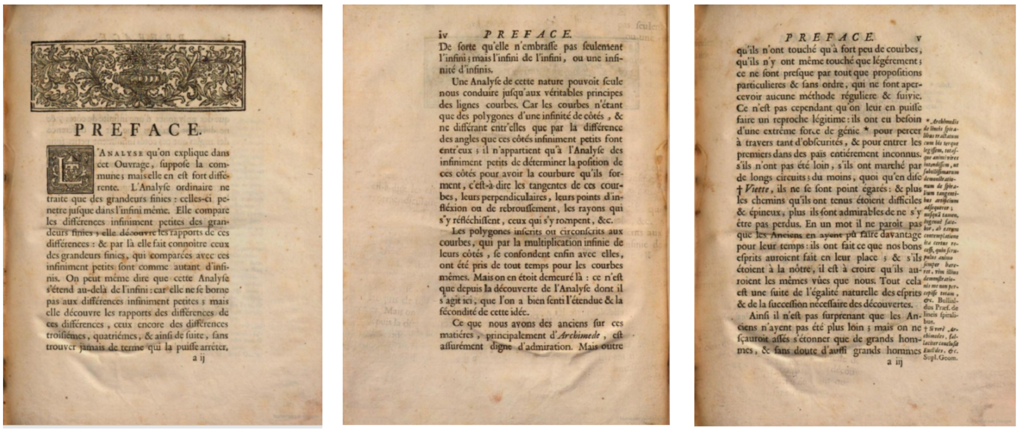


Figura 2.2: Linea del tempo di l'Hôpital

OPERE

Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes

È il primo libro di testo pubblicato sul calcolo infinitesimale di Leibniz. La prima edizione del libro francese fu pubblicata nel 1696, poi altre edizioni sono apparse postume dal 1716 al 1781.
Nella prefazione, l'Hôpital sottolinea che si sarebbe concentrato solo sul calcolo differenziale, in quanto Leibniz stava già scrivendo un libro (che non fu mai finito) sul calcolo integrale. Come già precedentemente esplicitato, c'è qualche dubbio su quanto del materiale sia dovuto a l'Hôpital e quanto a Bernoulli.



PREFACE.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, ſuppoſe la commune; mais elle en eſt fort différente. L'Analyſe ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celles-ci penetre juſque dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : & par là elle fait connoitre ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits ſont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyſe s'étend au-delà de l'infini : car elle ne ſe borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troiſiémes, quatriémes, & ainſi de ſuite, ſans trouver jamais de terme qui la puiſſe arrêter,

a ij

iv PREFACE.

De ſorte qu'elle n'embraſſe pas ſeulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.

Une Analyſe de cette nature pouvoit ſeule nous conduire juſqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyſe des infiniment petits de déterminer la poſition de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'eſt-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'infléxion ou de rebrouſſement, les rayons qui s'y réfléchiſſent, ceux qui s'y rompent, &c.

Les polygones inſcrits ou circonſcrits aux courbes, qui par la multiplication infinie de leurs côtés, ſe confondent enfin avec elles, ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'eſt que depuis la découverte de l'Analyſe dont il s'agit ici, que l'on a bien ſenti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des anciens ſur ces matiéres, principalement d'*Archimede*, eſt aſſurément digne d'admiration. Mais outre

PREFACE. v

qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légérement ; ce ne ſont preſque par tout que propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font apercevoir aucune méthode réguliere & ſuivie. Ce n'eſt pas cependant qu'on leur en puiſſe faire un reproche légitime : ils ont eu beſoin d'une extrême force de génie * pour percer à travers tant d'obſcurités, & pour entrer les premiers dans des païs entiérement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits ; du moins, quoi qu'en diſe † *Viette*, ils ne ſe ſont point égarés : & plus les chemins qu'ils ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils ſont admirables de ne s'y être pas perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pû faire davantage pour leur temps : ils ont fait ce que nos bons eſprits auroient fait en leur place ; & s'ils étoient à la nôtre, il eſt à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela eſt une ſuite de l'égalité naturelle des eſprits & de la ſucceſſion néceſſaire des découvertes.

Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin ; mais on ne ſçauroit aſſés s'étonner que de grands hommes, & ſans doute d'auſſi grands hommes

** Archimedis de lineis ſpiralibus tractatum cum bis terque legiſſem, totaſque animi vires intendiſſem, ut ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralium tangentibus artificium aſſequerer ; nuſquam tamen, ingenuè fateor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper hæreret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam, &c.* Bullialdus Præf. de lineis ſpiralibus.

† Si verè Archimedes, fallaciter concluſit Euclides, &c. Supl. Geom.

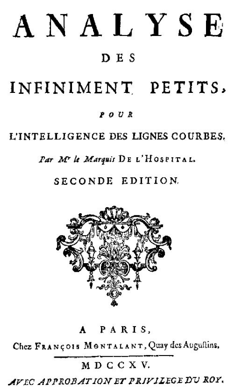
a iij

Figura 2.3: Prefazione dell'opera

L'opera è divisa in 10 sezioni:

- SEZIONE I. Ou l'on donne les Regles du calcul des Différences
- SEZIONE II. Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes
- SEZIONE III. Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes et les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis et minimis
- SEZIONE IV. Usage du calcul des différences pour trouver les points d'infléxion et de rebroussement
- SEZIONE V. Usage du calcul des différences pour trouver les Dévelopées
- SEZIONE VI. Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfléxions
- SEZIONE VII. Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfraction
- SEZIONE VIII. Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courdes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes

- SEZIONE IX. Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes
- SEZIONE X. Nouvelle maniére de se servir du calcul des différences dans les courbes geométriques, d'où l'on déduit la Méthode de Mrs Descartes et Hudde


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins.
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

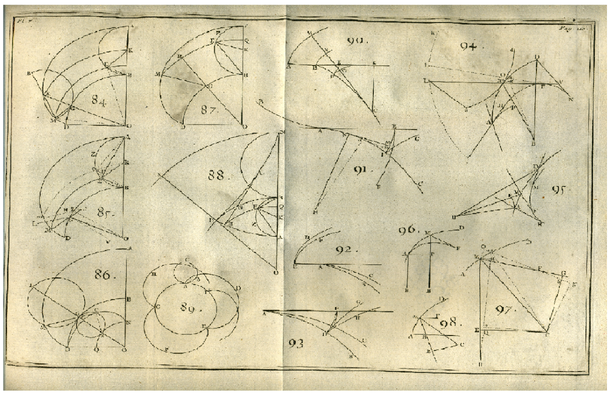


Figura 2.4: Frontespizio e alcune figure dell'opera

Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problemes tant déterminez qu'indéterminez

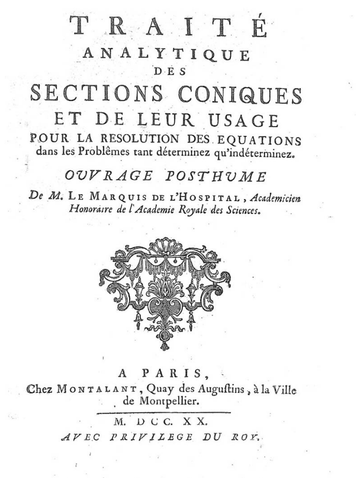

TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.
OUVRAGE POSTHUME
De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez MONTALANT, Quay des Auguſtins, à la Ville de Montpellier.
M. DCC. XX.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Figura 2.5: Frontespizio dell'opera

È un'opera di l'Hôpital rimasta inedita e senza prefazione, fu pubblicata nel 1707, dopo la sua morte, in lingua francese.
L'opera è suddivisa in 10 libri:

- LIVRE PREMIER. De la Parabole
- LIVRE SECOND. De l'Ellipse
- LIVRE TROISIÈME. De l'Hyperbole
- LIVRE QUATRIÈME. Des trois Sections Coniques
- LIVRE CINQUIÈME. De la Comparasion des Sections Coniques entr'elles, de leurs Segmens
- LIVRE SIXIÈME.Des Sections Coniques considérées dans le Solide
- LIVRE SEPTIÈME. Des Lieux Geometriques
- LIVRE HUITIÈME. Des Problèmes indéterminés
- LIVRE NEUVIÈME. De la construction des Égalités
- LIVRE DIXIÈME. Des Problèmes déterminés

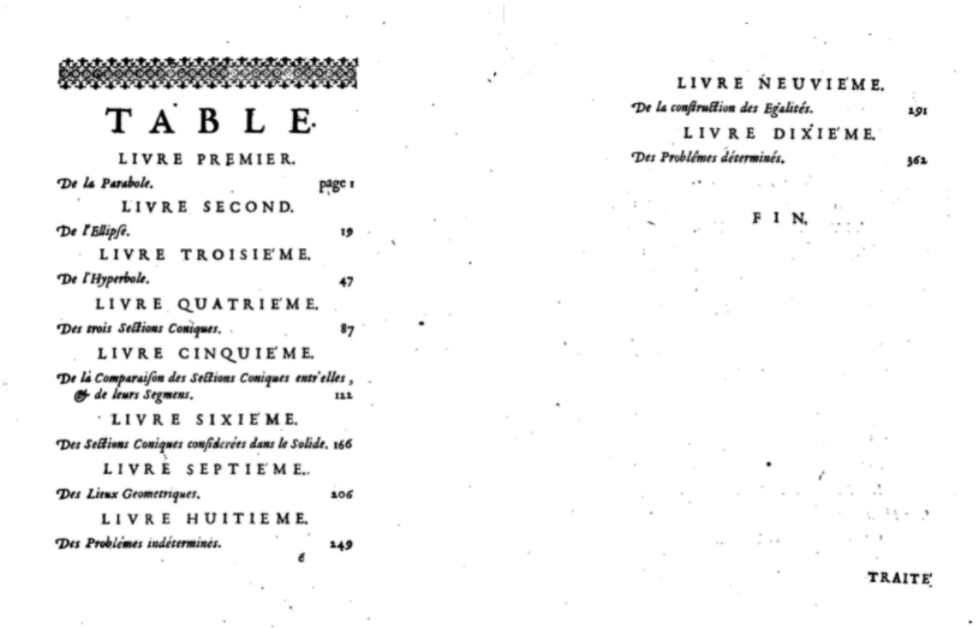


TABLE.

FIN.

TRAITE'

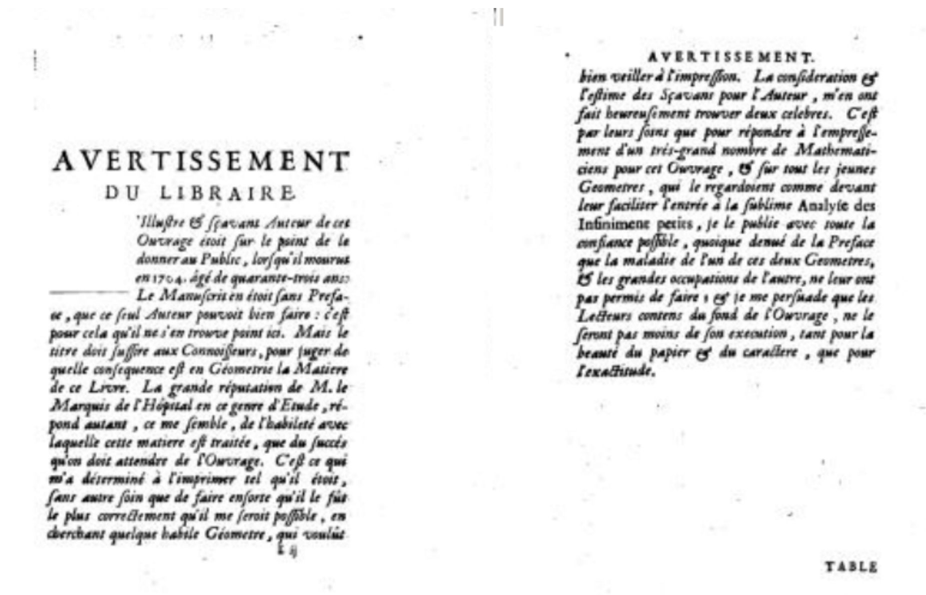
Figura 2.6: Indice dell'opera

All'interno di quest'opera viene sviluppata l'intera teoria delle sezioni coniche, contenuta nei primi quattro libri di "*Le Coniche*"* di Apollonio, e viene applicata alla risoluzione di problemi determinati e indeterminati.
L'opera inizia definendo le sezioni coniche nel piano, come le definiamo noi oggi (quindi abbandonando il sistema del cono):

*Opera scritta intorno alla fine del III secolo a.C. che si compone di 8 libri contenenti proposizioni su: sezioni coniche di triangolo, cerchio, ellisse, parabola e iperboli, tangenti alle coniche, luoghi solidi, tangenti e normali alle sezioni coniche, coniche e segmenti di coniche uguali e disuguali e molto altro.

- definisce la parabola per la proprietà fuoco-direttrice;
- definisce l'ellisse tramite i suoi fuochi F, f cioè come luogo dei punti P per i quali è costante la somma delle distanze dai due fuochi: $PF + Pf = cost$;
- definisce l'iperbole tramite i suoi fuochi F, f cioè come luogo dei punti P per i quali è costante la differenza delle distanze dai due fuochi: $PF - Pf = cost$

Quasi interamente in tutti i 10 libri di quest'opera l'Hôpital applicò il metodo delle coordinate, e si può parlare di opera di geometria analitica, tranne che nel sesto libro, intitolato "*Des sections coniques considerées dans le solide*", in cui le sezioni coniche furono studiate con il metodo sintetico nel "solido", cioè con il metodo delle proiezioni. Alla fine di questo libro, l'Hôpital sottolinea di aver omesso le altre proprietà delle sezioni coniche, in quanto il suo intento era mostrare che può essere utile passare nello spazio per provare, in una sola volta e senza alcun calcolo, le prime proprietà delle coniche da cui dipendono tutte le altre. Inoltre, scrive l'Hôpital, egli crede di averlo fatto in un modo semplice e completamente nuovo: infatti, non ha usato la divisione armonica, come hanno fatto invece i moderni geometri (Pascal, Desargues e La Hire), operazione che li ha costretti a ricorrere a molti lemmi, le cui dimostrazioni, secondo l'Hôpital, avrebbero occupato tanto spazio quanto l'intero libro.



AVERTISSEMENT
DU LIBRAIRE

L'Illustre & sçavans Auteur de cet Ouvrage étoit sur le point de le donner au Public, lorsqu'il mourut en 1704. âgé de quarante-trois ans. Le Manuscrit en étoit sans Preface, que ce seul Auteur pouvoit bien faire : c'est pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre doit suffire aux Connoisseurs, pour juger de quelle consequence est en Géometrie la Matiere de ce Livre. La grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre d'Etude, répond autant, ce me semble, de l'habileté avec laquelle cette matiere est traitée, que du succés qu'on doit attendre de l'Ouvrage. C'est ce qui m'a déterminé à l'imprimer tel qu'il étoit, sans autre soin que de faire ensorte qu'il le fût le plus correctement qu'il me seroit possible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût

ẽ ij

AVERTISSEMENT.

bien veiller à l'impression. La consideration & l'estime des Sçavans pour l'Auteur, m'en ont fait heureusement trouver deux celebres. C'est par leurs soins que pour répondre à l'empressement d'un très-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, & sur tout les jeunes Geometres, qui le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime Analyse des Infiniment petits, je le publie avec toute la confiance possible, quoique denué de la Preface que la maladie de l'un de ces deux Geometres, & les grandes occupations de l'autre, ne leur ont pas permis de faire ; & je me persuade que les Lecteurs contens du fond de l'Ouvrage, ne le seront pas moins de son execution, tant pour la beauté du papier & du caractere, que pour l'exactitude.

TABLE

Figura 2.7: "Advertissement du libraire"

L'opera presenta un "Advertissement du libraire" in cui è scritto che l'Hôpital, vicino alla pubblicazione di tale libro privo di prefazione, morì il 2 febbraio 1704 dopo una lunga malattia. In questa sezione è riportato anche che il tipografo, sollecitato da molti matematici a pubblicare l'opera, fu aiutato nel lavoro di stampa del manoscritto da due famosi geometri che avrebbero dovuto scrivere anche una prefazione all'opera, ma per diversi motivi non riuscirono a farlo.

2.2 L'Hôpital e una dimostrazione analitica del Teorema delle Corde

Nonostante le conquiste geometriche di Newton attirarono l'attenzione di molti matematici, e alcuni di loro diedero importanti contributi, essi non riuscirono a vedere nel Teorema delle Corde uno strumento fondamentale per lo sviluppo della teoria delle sezioni coniche. L'Hôpital fu il primo matematico a comprendere il valore fondante di questo teorema. In particolare, egli ritiene il Teorema delle Corde un risultato fondamentale per sviluppare, geometricamente e senza prerequisiti, la Teoria delle Sezioni Coniche.

L'Hôpital enuncia il Teorema delle Corde per la prima volta nel quarto libro [Proposizione 13, pagina 104] del "Traité analytique des sections coniques", intitolato "Des trois sections coniques". La formulazione è la seguente:

Teorema 2.2.1 (Teorema delle Corde)**.** *Sono date due corde MN e AR di una sezione conica, che si incontrano in P e sono parallele a due rette date in posizione. Allora il rettangolo $PM \times PN$ sta sempre al rettangolo $AP \times PR$ in un dato rapporto, qualunque sia la loro posizione rispetto alla sezione conica.*

L'Hôpital ha dato dimostrazioni analitiche separate distinguendo il caso della parabola da quello delle coniche con centro (ellisse e iperbole).
Si riporta il procedimento che ha effettuato nel caso della parabola, essendo gli altri casi trattati in modo molto simile.

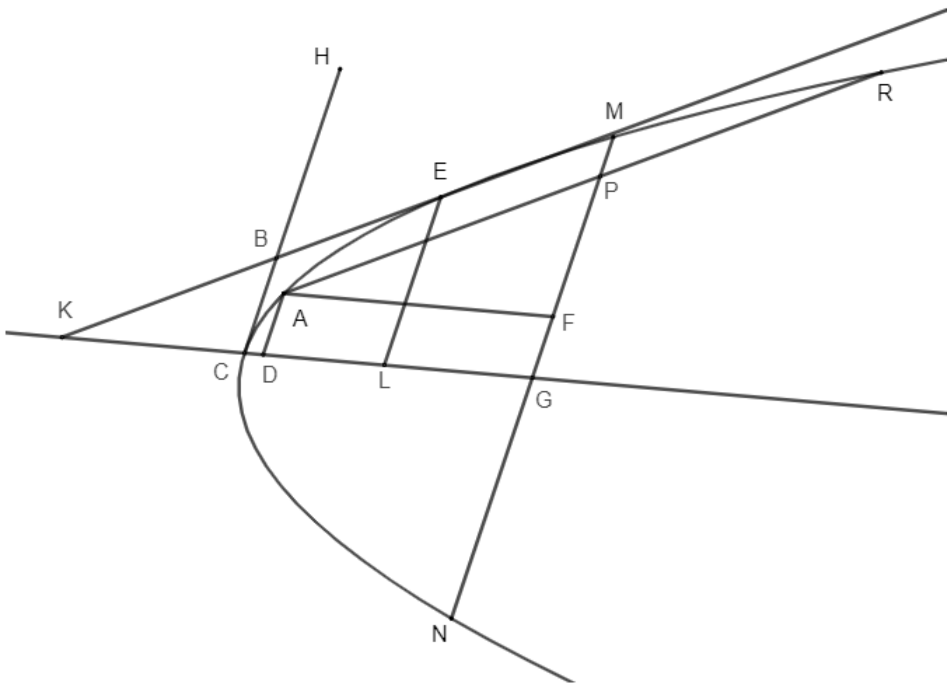


Figura 2.8: Costruzione del Teorema delle Corde nel caso della parabola

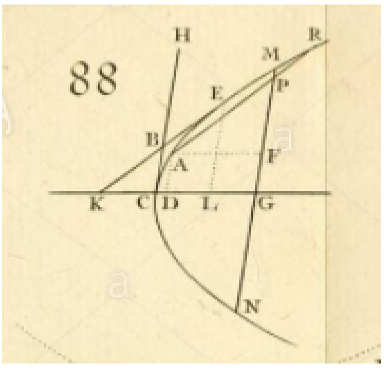


Figura 2.9: Figura del teorema dal "Traité analytique"

Siano AR e MN due corde della parabola, che si intersecano in P. Siano BE e BC, due rette parallele rispettivamente alle corde e tangenti in E e C rispettivamente alla conica. Se G è il punto medio della corda MN, la retta CG è un diametro.
Sia K l'intersezione del prolungamento di BE con il prolungamento di CG. Da A sia tracciata la parallela a CG, e sia F il punto di intersezione di questa con la corda MN.
Si ponga ora:

$$KB = BE = m \qquad BC = n \qquad CK = e$$
$$AP = x \qquad PM = y \qquad AD = r \qquad CD = s$$

Si noti la similitudine dei triangoli KBC e APF

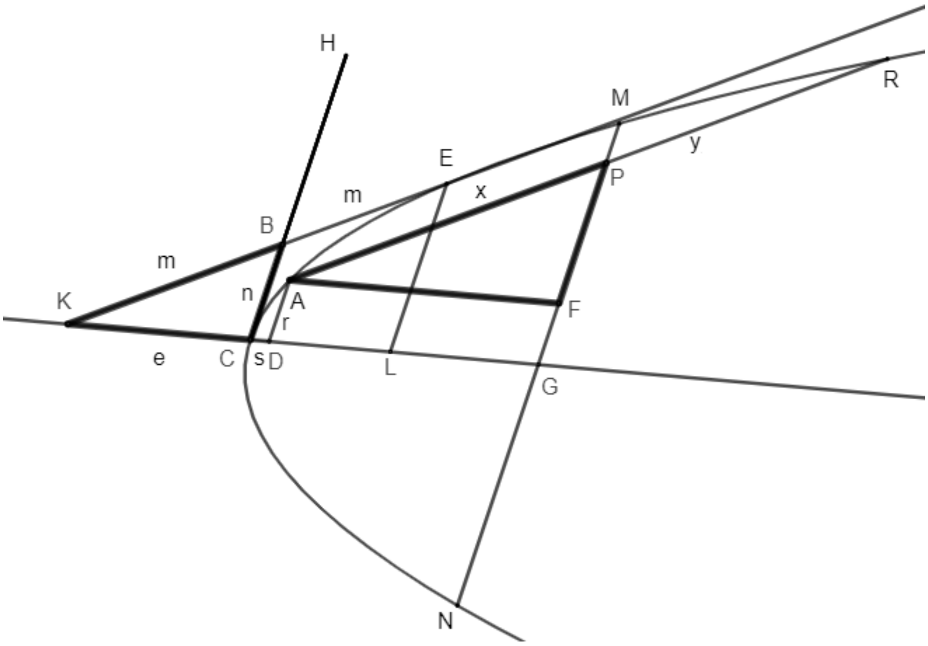


Figura 2.10: I triangoli simili KBC e APF

Da queste somiglianze segue:

$$
\begin{aligned}
CK : KB = FA : AP \qquad &\Rightarrow \qquad FA = \frac{CK \cdot AP}{KB} = \frac{ex}{m} \\
KB : BC = AP : PF \qquad &\Rightarrow \qquad PF = \frac{BC \cdot AP}{KB} = \frac{nx}{m}
\end{aligned}
$$

E quindi

$$
\begin{aligned}
CG &= GD + DC = FA + DC = \frac{ex}{m} + s \\
GM &= GN = MP + PF + FG = y + \frac{nx}{m} + r \\
PN &= GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r
\end{aligned}
$$

Così si ottiene

$$PM \times PN = y \times \Big(y + \frac{2nx}{m} + 2r\Big) = y^2 + \frac{2nx}{m}y + 2ry$$

E

$$GM^2 = \Big(y + \frac{nx}{m} + r\Big)^2 = y^2 + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{n^2}{m^2}x^2 + \frac{2nr}{m}x + r^2$$

D'altra parte, si denoti con p il parametro CH relativo al diametro CG, allora si ottiene

$$GM^2 = p \times CG = p \times \Big(\frac{ex}{m} + s\Big) = \frac{ep}{m}x + ps = \frac{ep}{m}x + r^2$$

Confrontando le due espressioni per GM^2, si ottiene infine l'equazione cartesiana della parabola

$$
\begin{aligned}
& y^2 + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{n^2}{m^2}x^2 + \frac{2nr}{m}x + \cancel{r}^2 = \frac{ep}{m}x + \cancel{r}^2 \\
\Rightarrow \quad & y^2 + \Big(\frac{2nx}{m} + 2r\Big)y + \frac{n^2}{m^2}x^2 + \Big(\frac{2nr}{m} - \frac{ep}{m}\Big)x = 0
\end{aligned}
$$

Ponendo $y = 0$ si ottengono le radici

$$
\begin{aligned}
x\Big[\frac{n^2}{m^2}x + \Big(\frac{2nr}{m} - \frac{ep}{m}\Big)\Big] = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x_1 = 0 \\
&\Rightarrow \qquad x_2 = \frac{epm}{n^2} - \frac{2rm}{n}
\end{aligned}
$$

dove x_1 corrisponde al punto A, e x_2 corrisponde al punto R. Allora

$$AP \times PR = x \times \Big[\Big(\frac{ep}{n^2} - \frac{2rm}{n}\Big) - x\Big] = \frac{epm}{n^2}x - \frac{2rm}{n}x - x^2$$

Tornando all'equazione della parabola

$$
\begin{aligned}
& y^2 + \left(\frac{2nx}{m} + 2r\right)y = -\frac{n^2}{m^2}x^2 - \left(\frac{2nr}{m} - \frac{ep}{m}\right)x \\
\Rightarrow \quad & y^2 + \left(\frac{2nx}{m} + 2r\right)y = \frac{ep}{m}x - \frac{2nr}{m}x - \frac{n^2}{m^2}x^2 \\
\Rightarrow \quad & y^2 + \frac{2nx}{m}y + 2ry = \left(\frac{epm}{n^2}x - \frac{2rm}{n}x - x^2\right) \cdot \frac{n^2}{m^2}
\end{aligned}
$$

A questo punto è evidente la relazione

$$MP \times PN = AP \times PR \cdot \frac{CB^2}{EB^2}$$

Da cui si ottiene

$$MP \times PN : AP \times PR = CB^2 : EB^2$$

In conclusione, la tesi era dimostrare che il rapporto tra $MP \times PN$ e $AP \times PR$ rimane costante indipendentemente dal variare della posizione delle corde MN e AR, scegliendo corde a loro parallele. L'Hôpital ha dimostrato inoltre che tale rapporto vale $CB^2 : EB^2$.
Infatti le tangenti CB ed EB sono legate strettamente alle direzioni delle corde MN e AR, e per la loro costruzione, cambiando le corde MN e AR, con delle corde a loro parallele, CB e EB non cambiano.

Passando al caso delle coniche centrali, l'Hôpital dedusse i seguenti risultati direttamente dal Teorema delle Corde:

Teorema 2.2.2. *1. Se MN e AR sono due corde di una sezione conica che si intersecano in P, e FG e BD sono altre due corde parallele rispettivamente alle due precedenti, e si incontrano in Q, allora si ha $MP \times PN : AP \times PR = FQ \times QG : BQ \times QD$;*

2. Se sono date due corde parallele AR e BD di una sezione conica, che intersecano nei punti E e Q un'altra corda FG della sezione conica parallela alla corda MN, allora $FE \times EG : AE \times ER = FQ \times QG : BQ \times QD$.

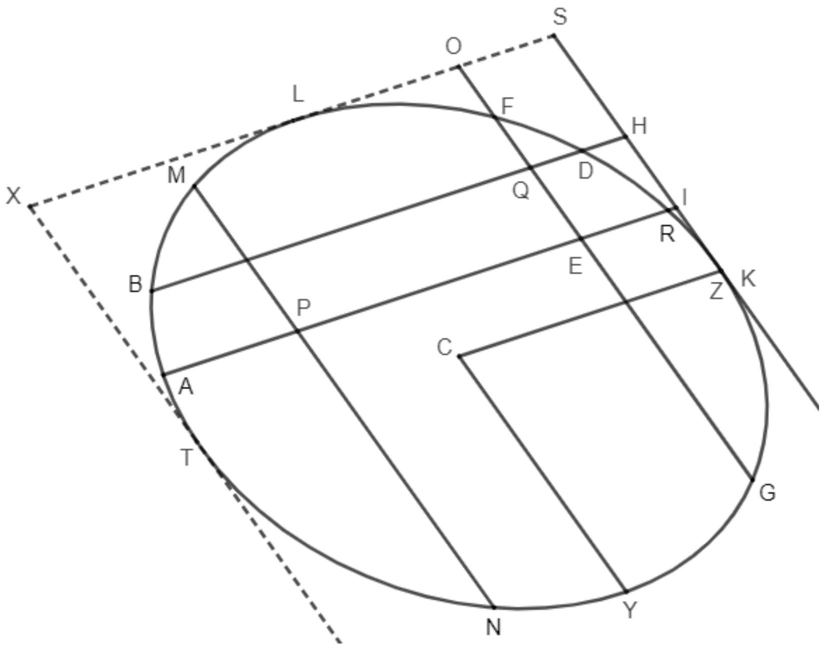


Figura 2.11: Costruzione del Teorema delle Corde nel caso di coniche centrali, ellisse

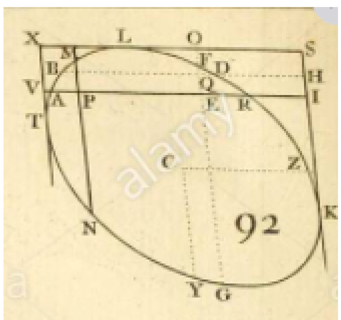


Figura 2.12: Figura del teorema dal "Traité analytique"

Capitolo 3

Le Poivre

Le Poivre fu quasi certamente uno dei due geometri che collaborò alla stampa dell'opera di l'Hôpital "Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution desequations dans les problemes tant déterminez qu'indéterminez".

Nella prima sezione si introducono inizialmente informazioni sulla vita e sulle opere di Le Poivre, per poi procedere, nella seconda, alla trattazione effettiva dei suoi risultati sul Teorema delle Corde.

3.1 Introduzione bibliografica

VITA

Le Poivre Jacques-François nacque a Mons, in Belgio nel 1652. Questa regione fu teatro di molti conflitti all'epoca e fu occupata dalla Francia dal 1691 al 1698. Non si hanno molte notizie sulla sua famiglia o sulla sua infanzia. Egli studiò la gnomonica,* un argomento sul quale progettò di scrivere un trattato, e si interessò alla geometria di Cartesio.
Dopo tre anni di lavoro, nel 1704 Le Poivre pubblica "*Traité des sections du cylindre et du cône, considérées dans le Solide dans le Plan, avec des Démonstrations simples et nouvelles*", con l'obiettivo sia di presentare le sezioni coniche in una forma facilmente comprensibile al novizio, sia di offrire nuovi risultati agli specialisti.
Dopo la pubblicazione, fu accusato di aver plagiato i metodi di La Hire. In risposta, Le Poivre pubblica nel 1708 il "*Traité des Sections du Cône considérées dans le Solide, Avec des démonstrations simples nouvelles*", un'opera concisa in cui enfatizza i suoi metodi già precedentemente sviluppati. Questa accusa di plagio sarà confutata un secolo dopo da Chasles e Quételet. Il lavoro di Le Poivre è rimasto in gran parte

*GNOMONICA, Enciclopedia Treccani, "È l'arte di costruire gli orologi solari, più generalmente, l'arte di rappresentare la sfera celeste, o parti di essa, allo scopo di studiare nelle proiezioni così ottenute le posizioni e i movimenti degli astri rispetto all'osservatore. È un ramo dell'astronomia che costituisce il fondamento geometrico universale della pratica di ogni misura angolare sul cielo, e quindi è parte essenziale della teoria degli strumenti. In senso più ristretto, la gnomonica si dedica specie a dedurre le leggi del moto apparente del Sole dalle lunghezze e dalle direzioni variabili delle ombre proiettate da uno stilo o gnomone che sia percosso dai raggi solari. Tali leggi si applicano alla determinazione degli elementi che definiscono l'orbita solaie apparente, e alla misura del tempo: potendo pure servire a stabilire le costanti geografiche generali e speciali (dimensioni del globo terrestre, coordinate del luogo di osservazione)."

sconosciuto.
Nel 1706 Le Poivre è a Mons come sovrintendente civico all'edilizia, e in quegli anni avrebbe anche scritto un trattato di gnomonica e degli "Éléments de géométrie démontrés sans le secours des propositions", che sono andati però perduti.
Le Poivre morì nel 1710.

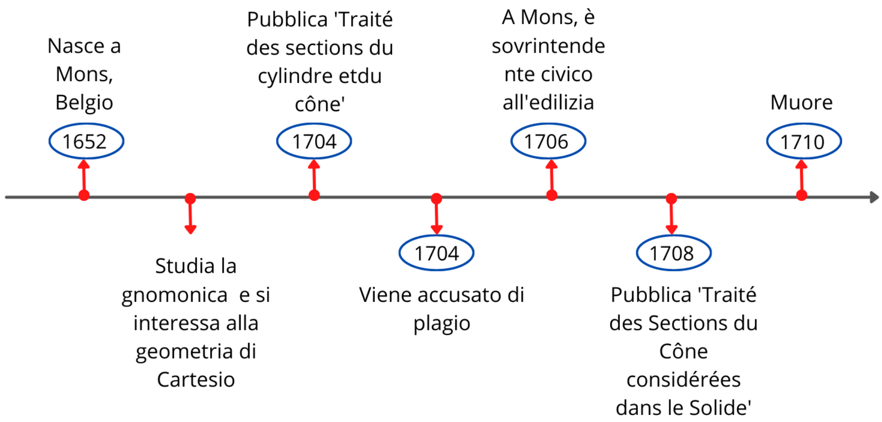


Figura 3.1: Linea del tempo di Le Poivre

OPERE

Traité des sections du cylindre et du cône, considérées dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simple et nouvelle

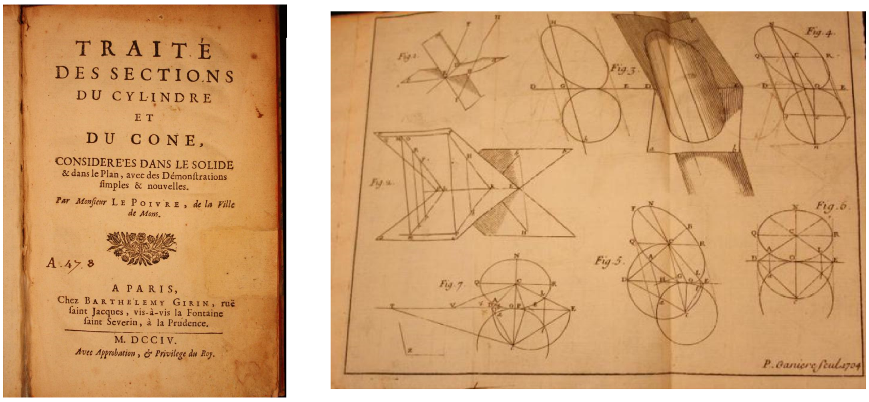

TRAITÉ
DES SECTIONS
DU CYLINDRE
ET
DU CONE,
CONSIDERÉES DANS LE SOLIDE
& dans le Plan, avec des Démonstrations
simples & nouvelles.
Par Monsieur LE POIVRE, de la Ville de Mons.
A PARIS,
Chez BARTHELEMY GIRIN, ruë
saint Jacques, vis-à-vis la Fontaine
saint Severin, à la Prudence.
M. DCCIV.
Avec Approbation, & Privilege du Roy.

Figura 3.2: Frontespizio e alcune figure dell'opera

Le Poivre ottenne il permesso di stampare quest'opera il 13 gennaio 1704. È un'opera concisa, di 61 pagine, in cui egli presenta uno studio delle sezioni coniche attraverso il metodo delle proiezioni, e in particolare, passando nello spazio, diede una prova geometrica semplice e diretta del Teorema delle Corde.

L'opera è divisa in due parti. La prima esamina l'ellisse per mezzo della proiezione parallela di un cerchio da un piano a un altro, tramite il cilindro. Nonostante Le Poivre in questa parte fosse interessato principalmente alle proprietà delle tangenti alla curva, dimostrò anche diversi teoremi riguardanti gli assi coniugati in modo più semplice di quello che era stato raggiunto in precedenza. La seconda parte è più interessante per la sua generalità. Qui Le Poivre genera le sezioni coniche per mezzo della proiezione centrale di un cerchio, tramite il cono.

L'opera di Le Poivre fu recensita sul "*Journal des Savants*",† il recensore fece notare che non c'era nulla di nuovo nel metodo descritto dall'autore, il quale, a suo parere, sembrava semplicemente aver attinto dalla lettura della "*Nouvelle méthode*" di La Hire. In effetti, c'è una grande somiglianza tra il metodo di La Hire e quello di Le Poivre, ma ci sono anche delle differenze, e Chasles‡ attribuisce a Le Poivre il merito di aver scoperto il suo metodo indipendentemente da quello di La Hire.

L'anonimo recensore, tuttavia, fece notare che tra le varie proposizioni dimostrate da Le Poivre, la più notevole, è quella del Teorema delle Corde. L'Hôpital, in precedenza, aveva suggerito a Le Poivre che tutte le proprietà delle sezioni coniche dipendevano da questo teorema e che lui stesso stava cercando di dimostrarlo in una maniera semplice e geometrica.

Anche per questo suggerimento, Le Poivre cercò una dimostrazione geometrica del Teorema delle Corde più diretta e semplice possibile.

†Fu fondato da Denis de Sallo e fu il primo giornale scientifico pubblicato in Europa. Il primo numero reca la data lunedì 5 gennaio 1665. Dopo la Rivoluzione francese, tuttavia, il giornale divenne più letterario e perse l'orientamento scientifico che aveva inizialmente.

‡Matematico francese, fu un importante storico della matematica della prima metà dell'Ottocento

Traité des Sections du Cône considérées dans le Solide, Avec des démonstrations simples & nouvelles

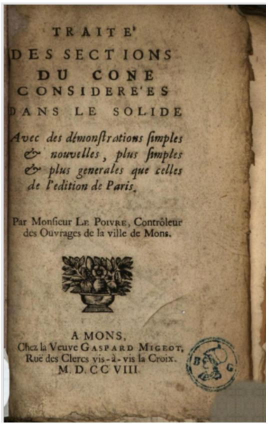
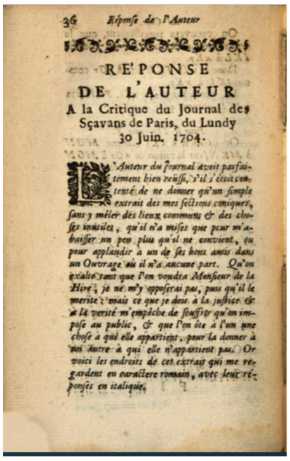

TRAITE'
DES SECTIONS
DU CONE
CONSIDERE'ES
DANS LE SOLIDE
Avec des démonstrations simples & nouvelles, plus simples & plus generales que celles de l'edition de Paris.
Par Monsieur LE POIVRE, Contrôleur des Ouvrages de la ville de Mons.
A MONS,
Chez la Veuve GASPARD MIGEOT, Ruë des Clercs vis-à-vis la Croix.
M. DCC VIII.

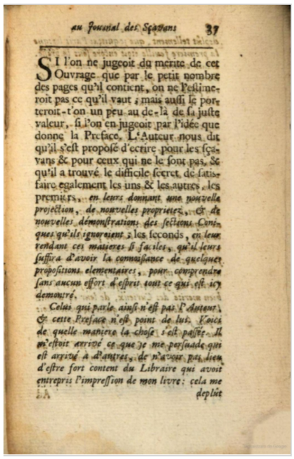
Figura 3.3: Frontespizio dell'opera

Nella nuova edizione del 1708, Le Poivre considerò solo le sezioni del cono, concentrando la sua esposizione in venticinque pagine e dodici teoremi. Le restanti venti pagine sono state dedicate alla sua lunga risposta all'autore della recensione pubblicata sul Journal des Sçavants, in cui, controbattendo meticolosamente alle osservazioni, si difese strenuamente dall'accusa di plagio.


36 *Réponse de l'Auteur*

RE'PONSE
DE L'AUTEUR
A la Critique du Journal des Sçavans de Paris, du Lundy 30 Juin. 1704.

L'Auteur du Journal avoit parfaitement bien reüssi, s'il s'étoit contenté de ne donner qu'un simple extrait des mes sections coniques, sans y mêler des lieux communs & des choses inutiles, qu'il n'a mises que pour m'abaisser un peu plus qu'il ne convient, ou pour applaudir à un de ses bons amis dans un Ouvrage où il n'a aucune part. Qu'on exalte tant que l'on voudra Monsieur de la Hire, je ne m'y opposerai pas, puis qu'il le merite : mais ce que je dois à la justice & à la verité m'empêche de souffrir qu'on impose au public, & que l'on ôte à l'un une chose à qui elle appartient, pour la donner à un autre à qui elle n'appartient pas. Or voici les endroits de cet extrait qui me regardent en caractere romain, avec leur réponses en italique.


au Journal des Sçavans 37

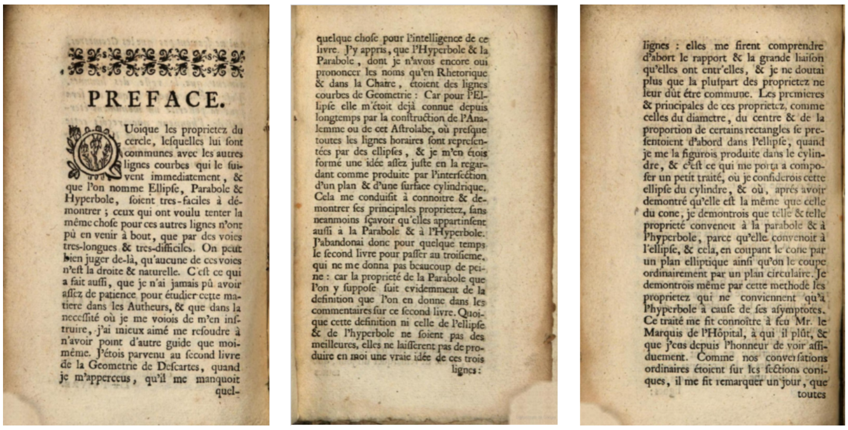
SI l'on ne jugeoit du merite de cet Ouvrage que par le petit nombre des pages qu'il contient, on ne l'estimeroit pas ce qu'il vaut ; mais aussi le porteroit-t'on un peu au de-là de sa juste valeur, si l'on en jugeoit par l'idée que donne la Preface. L'Auteur nous dit qu'il s'est proposé d'ecrire pour les sçavans & pour ceux qui ne le sont pas, & qu'il a trouvé le difficile secret de satisfaire egalement les uns & les autres, les premiers, *en leurs donnant une nouvelle projection, de nouvelles proprietez, & de nouvelles démonstrations des sections Coniques qu'ils ignoroient* ; les seconds, *en leur rendant ces matieres si faciles, qu'il leurs suffira d'avoir la connoissance de quelques propositions elementaires, pour comprendre sans aucun effort d'esprit tout ce qui est icy demontré.*

Celui qui parle ainsi n'est pas l'Auteur, & cette Preface n'est point de lui. Voici de quelle maniere la chose s'est passée. Il m'estoit arrivé ce que je me persuade qui est arrivé à d'autres, de n'avoir pas lieu d'estre fort content du Libraire qui avoit entrepris l'impression de mon livre : cela me
deplût

Figura 3.4: Risposta all'autore

Da questa risposta si apprende anche che quando egli andò a Parigi portò con sè un opuscolo su un nuovo metodo per trattare le sezioni del cilindro e che questo lavoro fu molto ammirato da l'Hôpital.
Nella Prefazione dell'opera, Le Poivre racconta il legame che aveva con l'Hôpital, e come si sono influenzati a vicenda rispetto al Teorema delle Corde. Infatti, non solo nel sesto libro del trattato di l'Hôpital le coniche sono analizzate come sezioni del cono in modo molto simile a quello di Le Poivre, ma anche le figure spaziali di questo libro sono molto simili a quelle della prima edizione del trattato del 1704, per questo si è

arrivati alla conclusione che Le Poivre sia effettivamente uno dei due geometri che ha aiutato il tipografo nella stampa del libro di l'Hôpital.



PREFACE.

Quoique les proprietez du cercle, leſquelles lui ſont communes avec les autres lignes courbes qui le ſuivent immediatement, & que l'on nomme Ellipſe, Parabole & Hyperbole, ſoient tres-faciles à démontrer ; ceux qui ont voulu tenter la même choſe pour ces autres lignes n'ont pû en venir à bout, que par des voies tres-longues & tres-difficiles. On peut bien juger de-là, qu'aucune de ces voies n'eſt la droite & naturelle. C'eſt ce qui a fait auſſi, que je n'ai jamais pû avoir aſſez de patience pour étudier cette matiere dans les Autheurs, & que dans la neceſſité où je me voiois de m'en inſtruire, j'ai mieux aimé me reſoudre à n'avoir point d'autre guide que moi-même. J'étois parvenu au ſecond livre de la Geometrie de Deſcartes, quand je m'apperceus, qu'il me manquoit quel-

quelque choſe pour l'intelligence de ce livre. J'y appris, que l'Hyperbole & la Parabole, dont je n'avois encore oui prononcer les noms qu'en Rhetorique & dans la Chaire, étoient des lignes courbes de Geometrie : Car pour l'Ellipſe elle m'étoit dejà connue depuis longtemps par la conſtruction de l'Analemme ou de cet Aſtrolabe, où preſque toutes les lignes horaires ſont repreſentées par des ellipſes, & je m'en étois formé une idée aſſez juſte en la regardant comme produite par l'interſection d'un plan & d'une ſurface cylindrique. Cela me conduiſit à connoitre & demontrer ſes principales proprietez, ſans neanmoins ſçavoir qu'elles appartinſent auſſi à la Parabole & à l'Hyperbole. J'abandonai donc pour quelque temps le ſecond livre pour paſſer au troiſieme, qui ne me donna pas beaucoup de peine : car la proprieté de la Parabole que l'on y ſuppoſe ſuit evidemment de la definition que l'on en donne dans les commentaires ſur ce ſecond livre. Quoique cette definition ni celle de l'ellipſe & de l'hyperbole ne ſoient pas des meilleures, elles ne laiſſerent pas de produire en moi une vraie idée de ces trois lignes :

lignes : elles me firent comprendre d'abort le rapport & la grande liaiſon qu'elles ont entr'elles, & je ne doutai plus que la pluſpart des proprietez ne leur dût étre commune. Les premieres & principales de ces proprietez, comme celles du diametre, du centre & de la proportion de certains rectangles ſe preſentoient d'abord dans l'ellipſe, quand je me la figurois produite dans le cylindre, & c'eſt ce qui me porta a compoſer un petit traité, où je conſiderois cette ellipſe du cylindre, & où, aprés avoir demontré qu'elle eſt la même que celle du cone, je demontrois que telle & telle proprieté convenoit à la parabole & à l'hyperbole, parce qu'elle convenoit à l'ellipſe, & cela, en coupant le cone par un plan elliptique ainſi qu'on le coupe ordinairement par un plan circulaire. Je demontrois même par cette methode les proprietez qui ne conviennent qu'à l'hyperbole à cauſe de ſes aſymptotes. Ce traité me fit connoître à feu Mr. le Marquis de l'Hôpital, à qui il plût, & que j'eus depuis l'honneur de voir aſſiduement. Comme nos converſations ordinaires étoient ſur les ſections coniques, il me fit remarquer un jour, que toutes

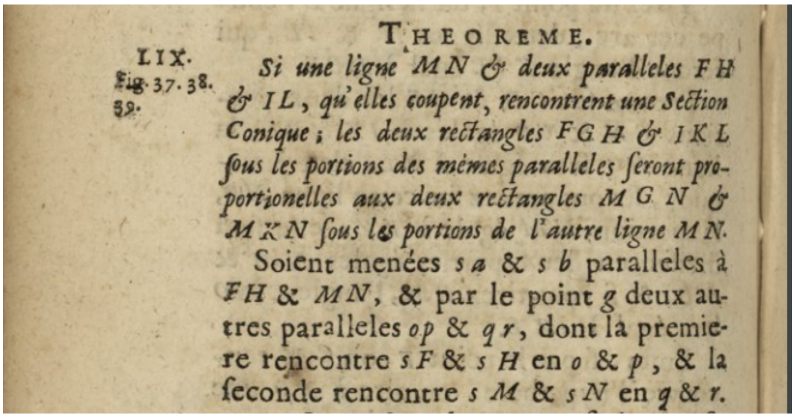
Figura 3.5: Prefazione dell'opera

Nella prefazione, inoltre, Le Poivre ha voluto attirare l'attenzione sulla sua dimostrazione del Teorema delle Corde, descrivendola come "semplice e naturale". In particolare, egli ritiene sia una dimostrazione che non richiede altre conoscenze se non gli elementi più semplici della geometria.
Chasles, inoltre, sottolinea il merito dell'opera di Le Poivre, che non si trova in quella di La Hire e che il recensore non ha notato: essa infatti contiene un secondo modo di descrivere le curve (sezioni coniche) basato su relazioni metriche (il Teorema delle Corde), di cui l'autore avrebbe potuto trarre vantaggio se avesse approfondito ulteriormente questa idea. Con le sue parole, Chasles sembra addirittura attribuire a Le Poivre l'origine del sesto libro del trattato di l'Hôpital.

3.2 La dimostrazione di Le Piovre del Teorema delle Corde nello spazio

In questo capitolo troviamo una dimostrazione nello spazio del Teorema delle Corde sviluppata secondo il metodo di proiezione, e una serie di risultati dedotti da essa. Tale dimostrazione non richiede alcuna nozione o conoscenza delle proprietà dei diametri delle sezioni coniche, ed è la stessa che appare nel sesto libro del trattato di l'Hôpital.

Le Poivre enunciò il Teorema delle Corde la prima volta nel 1704.



THEOREME.

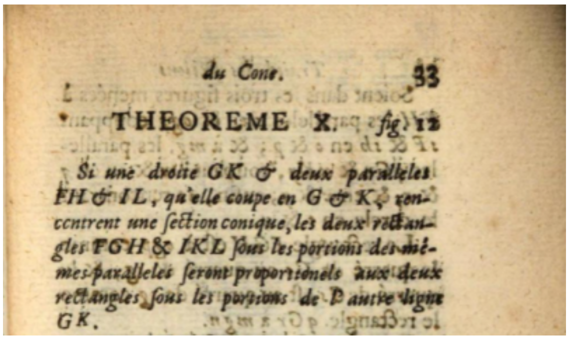
LIX. Fig. 37. 38. 39.

Si une ligne MN & deux paralleles FH & IL, qu'elles coupent, rencontrent une Section Conique; les deux rectangles FGH & IKL sous les portions des mêmes paralleles seront proportionelles aux deux rectangles MGN & MKN sous les portions de l'autre ligne MN.

Soient menées *sa* & *sb* paralleles à *FH* & *MN*, & par le point *g* deux autres paralleles *op* & *qr*, dont la premiere rencontre *sF* & *sH* en *o* & *p*, & la seconde rencontre *sM* & *sN* en *q* & *r*.

Figura 3.6: Teorema delle Corde, Trattato del 1704

Questo venne poi inserito come "teorema 10" nell'opuscolo del 1708.



du Cone. 33

THEOREME X. fig. 12

Si une droite GK & deux paralleles FH & IL, qu'elle coupe en G & K, rencontrent une section conique, les deux rectangles FGH & IKL sous les portions des mêmes paralleles seront proportionels aux deux rectangles sous les portions de l'autre ligne GK.

Figura 3.7: Teorema 10, Trattato del 1708

L'enunciato è il seguente:

Teorema 3.2.1 (Teorema delle Corde)**.** *Se una retta MN e due paralleli FH e IL, che sono intersecate da MN rispettivamente in G e K, intersecano una sezione conica, i rettangoli FGH e IKL, sottostanti le porzioni delle stesse parallele sono proporzionali ai due rettangoli MGN e MKN, sottostanti le porzioni dell'altra retta.*

Per dimostrarlo, Le Poivre procedette come segue.

Si consideri una sezione $FINLHM$ di un cono circolare di vertice S, e siano F', H', M', N', G', le proiezioni di F, H, M, N, G, da S nel piano di base del cono. Poi, da S vengano tracciate le parallele a FH e MN, che intersecano il piano di base rispettivamente in A e B. Da G' vengano tracciate le parallele a SB e SA, che incontrano le rette SM', SN' in Q, R rispettivamente, e che incontrano le rette SF', SH' in O, P.

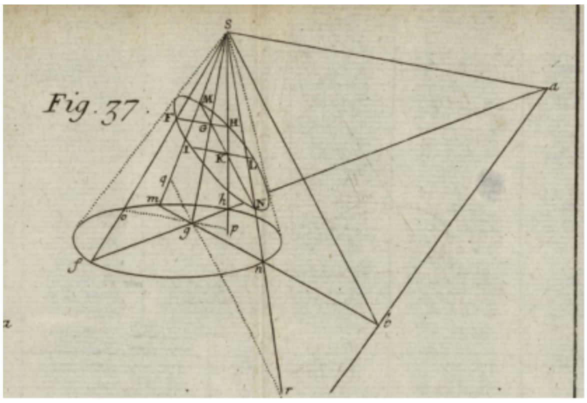


Figura 3.8: Rappresentazione grafica del teorema dal Trattato del 1704

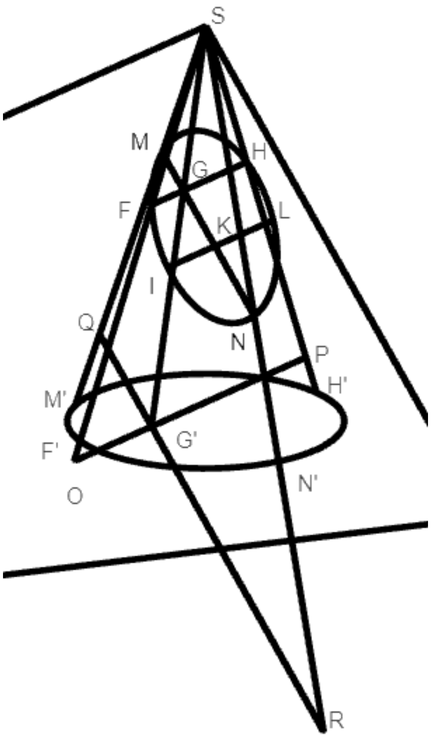


Figura 3.9: Rappresentazione grafica del teorema

Dalla similitudine dei triangoli SMG, SQG', SGN, $SG'R$ e $SG'P$, SOG', SGH, SFG:

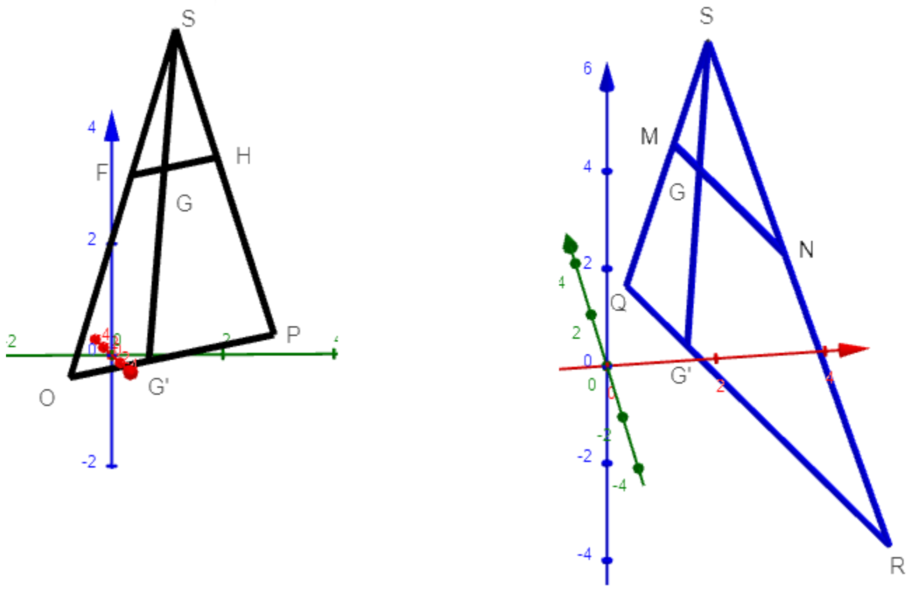


Figura 3.10: Triangoli $SG'P$, SOG', SGH, SFG e separantamente SMG, SQG', SGN, $SG'R$

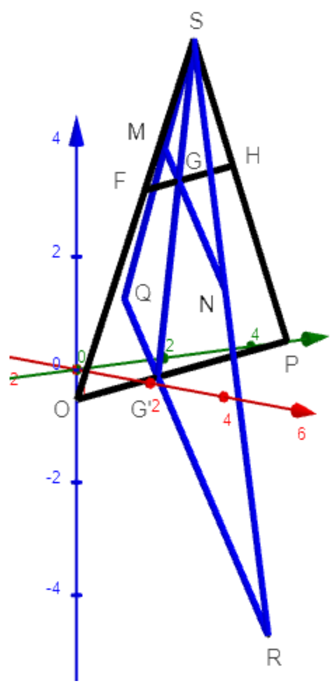


Figura 3.11: Triangoli $SG'P$, SOG', SGH, SFG e SMG, SQG', SGN, $SG'R$ insieme

Si ottiene

$$FG \times GH : MG \times GN = OG' \times G'P : QG' \times G'R \tag{3.1}$$

Dalla similitudine dei triangoli $F'SA$, $F'OG'$ e $G'H'P$, $SH'A$:

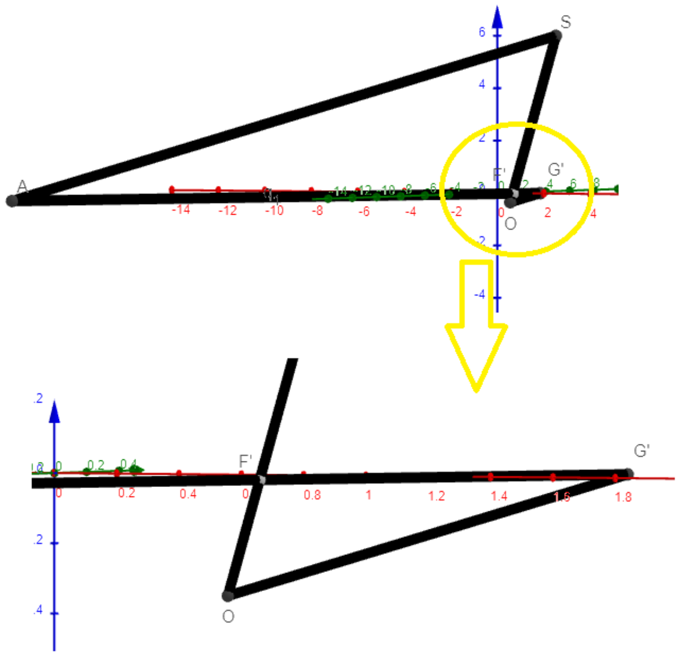


Figura 3.12: Triangoli $F'SA$, $F'OG'$

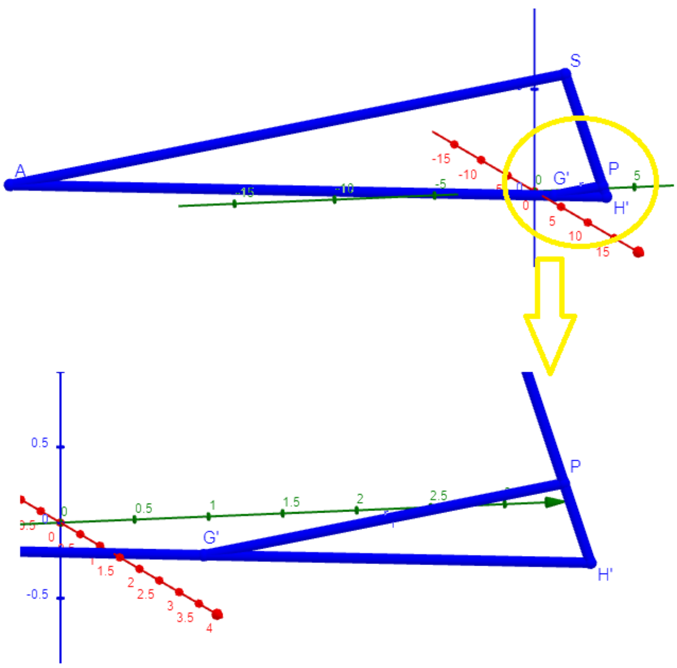


Figura 3.13: Triangoli $G'H'P$ e $SH'A$

Si ottiene

$$OG' : F'G' = SA : AF' \qquad\qquad G'P : G'H' = SA : AH' \tag{3.2}$$

Da 3.2 si ottiene

$$OG' \times G'P : F'G' \times G'H = (SA)^2 : AF' \times AH'$$

Si noti che $AF' \times AH'$ è la potenza di A rispetto al cerchio di base.
Allo stesso modo si deduce

$$QG' \times G'R : M'G' \times G'N' = (SB)^2 : BM' \times BN'$$

Pertanto, poichè $F'G' \times G'H' = M'G' \times G'N'$ per una nota proprietà del cerchio, si ottiene

$$FG \times GH : MG \times GN = OG' \times G'P : QG' \times G'R = [(SA)^2 : P(A)] \times [P(B) : (SB)^2]$$

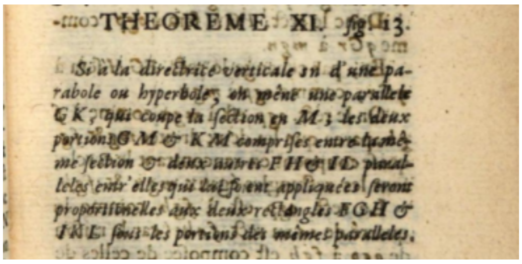
dove con $P(\cdot)$ si indica la potenza del punto tra parentesi.[§]

Infine osservando che l'ultimo membro dipende soltanto da A e B, cioè dalla direzione delle rette FH e MN, Le Poivre completa la dimostrazione.

La somiglianza tra questa dimostrazione e quella di Guarini è solo nell'uso del cono per ridurre il caso generale a quello del cerchio. Infatti, la dimostrazione di Le Poivre non richiede alcuna conoscenza delle proprietà dei diametri delle sezioni coniche. Questa dimostrazione dei teoremi delle corde è la stessa che appare nel sesto libro del trattato di l'Hôpital.

[§]POTENZA DI UN PUNTO rispetto a una circonferenza: Se da un punto E esterno a una circonferenza conduciamo una qualunque secante e indichiamo con A e B i punti in cui essa taglia la circonferenza diremo potenza del punto E rispetto alla circonferenza data il prodotto costante della lunghezza dell'intera secante e della sua parte esterna: $P(E) = EA \cdot EB$.

Le Poivre concluse il suo libro dimostrando altri tre teoremi.
Negli ultimi due teoremi, chiarisce i concetti sul Teorema delle Corde nel caso della parabola e dell'iperbole (teoremi 11 e 12), quando entrano in gioco elementi all'infinito.



THEOREME XI. fig. 13.

Si à la directrice verticale 3n d'une parabole ou hyperbole, on mène une parallele GK, qui coupe la section en M; les deux portions GM & KM comprises entre la même section & deux autres FH & IL paralleles entr'elles, qui leur soient appliquées, seront proportionnelles aux deux rectangles FGH & IKL sous les portions des mêmes paralleles.

Figura 3.14: Teorema 11, dal Trattato del 1708

Nel Trattato del 1704, applicando il Teorema delle Corde, dimostra quanto segue:

Teorema 3.2.2. *Dai punti M e N, dove una retta MN interseca una sezione conica, si tracciano le rette MF e NH che intersecano la sezione conica negli estremi della corda FH. Indicando con O, K e P i punti in cui una retta parallela a FH incontra rispettivamente le rette MF, MN e NH, e indicando con I e L i punti in cui la stessa parallela incontra la conica, allora risulta $OK \times KP = IK \times KL$.*

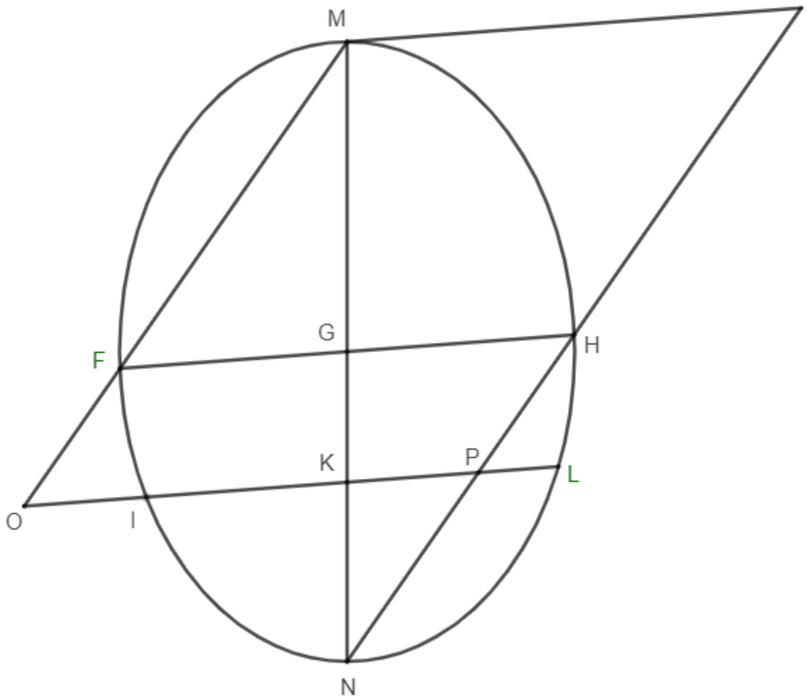


Figura 3.15: Rappresentazione grafica del teorema

Chiaramente questo è il caso particolare del teorema di Desargues per un quadrilatero inscritto in una sezione conica,[¶] quando la trasversale è parallela a un lato del quadrilatero.
Come Le Poivre fece notare in un'osservazione, dei dodici teoremi di cui si compone la sua opera del 1708, i primi nove erano basati su "l'ègalitè des tangentes du cercle", mentre gli ultimi tre erano basati sull'uguaglianza dei rettangoli sottostanti i segmenti di secanti. In particolare il decimo era il Teorema delle Corde, e negli ultimi due specificò la situazione nel caso della parabola e dell'iperbole.

Né L'Hôpital, né Le Poivre portarono a termine il progetto che forse avevano in mente: un trattato sulle sezioni coniche fondato sul Teorema delle Corde. Il primo non aveva tempo, il secondo probabilmente non ne aveva le capacità.

[¶] Il teorema di Desargues afferma in un quadrilatero inscritto in una conica, una retta non passante per nessuno dei vertici, interseca la conica e le tre coppie di lati opposti del quadrilatero completo, in coppie di punti che appartengono a un'involuzione

Sitografia

Per l'introduzione è stato utilizzato:

- http://dm.unife.it/storia/Apolloni.htm

In rete si possono trovare le seguenti bibliografie di l'Hôpital:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Guillaume_de_l%27H%C3%B4pital
- https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_LHopital/

In rete si possono trovare le seguenti bibliografie di Le Poivre:

- https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures\-and-press-releases/le-poivre-jacques-francois
- https://publimath.univ-irem.fr/glossaire/LE021.htm

Riferimenti Bibliografici

Per sviluppare le dimostrazioni del Teorema delle Corde, è stato utilizzato:

- Alessandra Fiocca, Andrea Del Centina, *The chords theorem recalled to life at the turn of the eighteenth century*, in corso di pubblicazione