

Girard Desargues

L'incompreso genio moderno

Nascita: 21 febbraio 1591, Lione, Francia

Morte: Ottobre 1661, Lione, Francia



Biografia:

La famiglia di Girard Desargues era stata molto ricca per diverse generazioni e aveva fornito avvocati e giudici al Parlamento di Parigi e a quello di Lione (allora la seconda città più importante della Francia). Il padre sposò Jeanne Croppet a Condrieu, una piccola città del dipartimento del Rodano nella Francia orientale. Si trasferirono a Lione, ma certamente conservarono la proprietà a Condrieu, dato che Girard trascorse del tempo lì verso la fine della sua vita. A Lione il padre lavorò come investigatore per l'ufficiale giudiziario, poi come esattore delle tasse e notaio reale, che era la sua occupazione quando nacque suo figlio Girard. Sembra che Girard fosse il più giovane degli otto figli, il che è piuttosto sorprendente dato che prese il nome del padre. Girard fu battezzato nella chiesa parrocchiale di Sainte-Croix il 2 marzo 1591 quando aveva nove giorni. In realtà la data di nascita di Desargues era sconosciuta fino al lavoro dello storico francese René Taton, pubblicato nel 1951. Prima della ricerca di Taton si credeva erroneamente che Desargues fosse nato nel 1593 perché, nella biografia di Cartesio di Adrien Baillet del 1691, si afferma che Desargues aveva tre anni più di Cartesio. Taton ha scoperto un oroscopo di Desargues che segna la sua nascita alle 6:30 del 21 febbraio 1591. Non ci sono informazioni sulla sua educazione e sulla sua vita prima dei trent'anni. Aveva tutte le opportunità di acquisire una buona istruzione, poteva permettersi di comprare i libri che voleva e aveva tempo libero per prendere parte in qualsiasi attività che gli piacesse. Nei suoi ultimi anni, progettò un'elaborata scala a spirale e una nuova forma ingegnosa di pompa, ma il più importante degli interessi di Desargues era la geometria. Inventò un nuovo modo, non greco, di fare geometria, ciò che poi venne chiamato geometria "proiettiva" o "moderna". Come matematico era molto originale e completamente rigoroso. Baillet, biografo francese, afferma che Desargues era un ingegnere coinvolto nell'assedio di La Rochelle nel 1628 e fu lì che incontrò per la prima volta Descartes. Non c'è nessuna prova aggiuntiva a sostegno di questa affermazione, anche se, date le competenze di Desargues, appare certamente plausibile. Per chiarezza, l'assedio fu una conseguenza dell'ostilità cattolico-protestante dell'epoca. Gli ugonotti, protestanti, avevano la loro roccaforte a La Rochelle ed erano sostenuti dagli inglesi. La parte cattolica, che consisteva nelle truppe reali di Luigi XIII, voleva prendere La Rochelle e impedire alle navi inglesi di sbarcare in appoggio. Le fortificazioni furono costruite dalla parte reale, guidata dal Re, e dal cardinale Richelieu, per prendere la città e anche massicce difese marittime furono realizzate per impedire che l'appoggio inglese raggiungesse gli ugonotti.

Quando era a Parigi, Desargues prese parte al circolo matematico che si riuniva presso il padre Marin Mersenne (1588-1648). Questo includeva René Descartes (1597-1650), Étienne Pascal (1588-1651) e suo figlio Blaise Pascal (1623-1662). Fu essenzialmente per questo limitato gruppo di amici che Desargues preparò le sue opere matematiche e le fece stampare. Alcune di esse furono poi ampliate e adattate alla pubblicazione da Abraham Bosse (1602-1676), che ora è meglio ricordato come incisore, ma fu anche un insegnante di prospettiva. Bosse afferma che Desargues ricevette una licenza reale per pubblicare molti dei suoi scritti nel 1630. Questo aggiunge un po' di valenza al fatto che Desargues assistette il cardinale Richelieu nell'assedio e, probabilmente, fu coinvolto in altri lavori su commissione reale. Desargues scrisse riguardo argomenti pratici come la prospettiva in *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage* (1636), il taglio delle pietre per l'uso nella costruzione in *Brouillon project d'exemple d'une manière universelle du S.G.D.L. touchant la pratique du trait a preuves pour la coupe des pierres en l'architecture* (1640) e gli orologi solari in *Manière universelle de poser le style aux rayons du soleil en quelconque endroit possible, avec la règle, le compas, l'esquerre et le plomb* (1640). I suoi scritti sono comunque densi di contenuti teorici nell'approccio ai temi trattati. Non c'è nessuna delle spiegazioni verbose ed elementari passo dopo passo che si trovano nei testi indirizzati agli artigiani. Il titolo dell'opera sulla prospettiva si traduce come Esempio di uno dei metodi generali di S.G.D.L. per disegnare in prospettiva senza usare un terzo punto, un punto di distanza o qualsiasi altro tipo, che si trova al di fuori del campo dell'immagine. Ci si chiede immediatamente chi o cosa sia "S.G.D.L.", ma si tratta semplicemente dell'autore stesso, dalle iniziali di "Sieur Girard Desargues Lyonnais". Questo lavoro sulla prospettiva deve aver portato Desargues a sviluppare un nuovo approccio alla geometria. Riguardo al suo lavoro sul taglio della pietra è stato scritto:

Il metodo di Desargues per tagliare la pietra funziona ed è davvero un'invenzione brillante, ma, allo stesso tempo, bisogna notare che senza il tutoraggio personale dell'autore nessun muratore dell'epoca sarebbe stato in grado di capirlo.

Bosse descrive il lavoro di Desargues sulle meridiane e, poiché la pubblicazione originale di Desargues non è sopravvissuta, questa è l'unica informazione su questo testo. Nel 1640 Blaise Pascal, che all'epoca aveva sedici anni, produsse il suo "esagramma mistico". In esso si riferiva a Desargues:

Dimostreremo anche questa proprietà di cui l'inventore originale è M. Desargues di Lione che è una delle grandi menti di questo tempo e uno dei più versati nella matematica, in particolare tra gli altri nelle coniche, i cui scritti su questo argomento, sebbene in numero ridotto, hanno dato ampia testimonianza della sua abilità a coloro che hanno voluto prenderne conoscenza: e ammetterò che devo il poco che ho trovato su questo argomento ai suoi scritti, e che ho cercato di imitare quanto mi è possibile il suo metodo su questo argomento.

Pascal deve riferirsi qui all'opera più importante di Desargues, quella in cui inventò la sua nuova forma di geometria, la quale ha per titolo *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un Plan*. Un piccolo numero di copie fu stampato a Parigi nel 1639. Solo una è tuttora disponibile, e fino a quando questa fu riscoperta, nel 1951, l'opera di Desargues era conosciuta solo attraverso una copia manoscritta fatta da Philippe de la Hire (1640-1718). Il famoso "Teorema della prospettiva" di Desargues, il quale enunciato afferma che quando due triangoli sono in prospettiva gli incontri dei lati corrispondenti sono collineari, fu pubblicato per la prima volta nel 1648, in un lavoro sulla prospettiva di Abraham Bosse. È chiaro che, nonostante la sua determinazione a spiegare i concetti in lingua volgare, e senza riferimento

diretto ai teoremi o al vocabolario dei matematici antichi, Desargues era ben consapevole del lavoro dei geometri antichi, per esempio Apollonio e Pappo. La sua scelta di spiegarsi in maniera differente può forse essere dovuta al riconoscimento che anche il suo lavoro era profondamente debitore della tradizione pratica, in particolare dello studio della prospettiva, nella forma di una proiezione conica. Il lavoro di Desargues sulla prospettiva portò ad una discussione molto spiacevole. Nel 1642 un'opera anonima intitolata *La Perspective pratique nécessaire à tous peintres, graveurs, sculpteurs, architectes, orfèvres, bordeurs, tapissiers & autres se servant du Dessein* fu pubblicata dagli editori Melchior Tavernier e Francois l'Anglois. L'opera fu in realtà scritta da Jean Du Breuil (1602-1670), figlio del libraio Claude Du Breuil, che fu soprattutto un architetto. Fu il primo di tre volumi pubblicati tra il 1642 e il 1647. La prefazione del libro dette credito a Desargues, ma lui fu molto turbato nel vedere le sue idee presentate con molti errori e la sua reazione fu di mettere cartelli in tutta Parigi. Uno lo intitolò "Incredibile errore" e un altro "Enormi difetti e duplicazioni". Un cartello dichiarava che Du Breuil avesse inserito, in questo libro sulla prospettiva pratica, un diagramma di Desargues, sostenendo fosse un suo esempio originale, in realtà alterando e falsificando con *gli artigli meschini dell'invidia*. Questa sembrò una reazione eccessiva da parte di Desargues e provocò una risposta altrettanto feroce da parte di Du Breuil, il quale contrattacò con un pamphlet sostenendo che lo scritto di Desargues del 1636 sulla prospettiva presentava idee già precedentemente pubblicate. Desargues continuò la discussione pubblicando *Six erreurs des pages 87, 118, 124, 128, 132 et 134 du livre intitulé 'La Perspective pratique nécessaire à tous peintres ...'*, nel 1642, in cui dettagliò gli errori nel lavoro di Du Breuil. Gli editori attaccarono poi Desargues pubblicando una raccolta di articoli che criticavano il suo lavoro in *Advis charitables sur les diverses oeuvres et feuilles volantes du Sieur Girard Desargues, Lyonnois* (1642). Quest'opera includeva una lettera scritta da Jean Beaugrand, segretario del Re e scienziato, in cui veniva criticato lo studio proiettivo delle coniche di Desargues. A questo punto Desargues sembrò essersi rivolto ad Abraham Bosse per pubblicare chiarimenti sul suo lavoro e per difendersi da questi attacchi. Un nuovo attacco arrivò nel 1644 da parte di Jacques Curabelle, con il libro di ottantuno pagine *Examen des oeuvres de Sieur Desargues, Lyonnois*. Curabelle attaccò tutta l'opera di Desargues, comprese le due pubblicazioni di Bosse del 1643, dicendo:

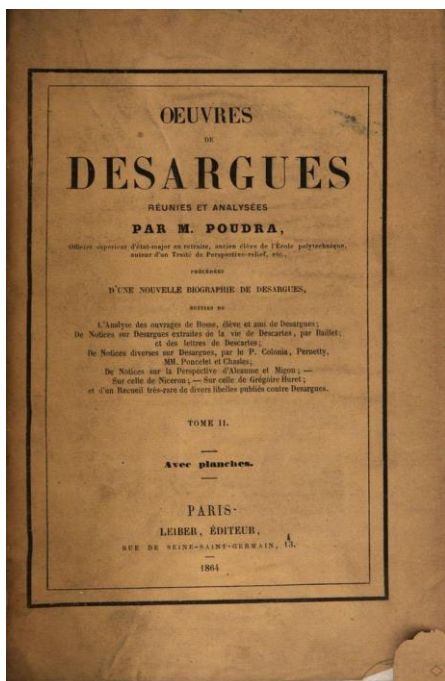
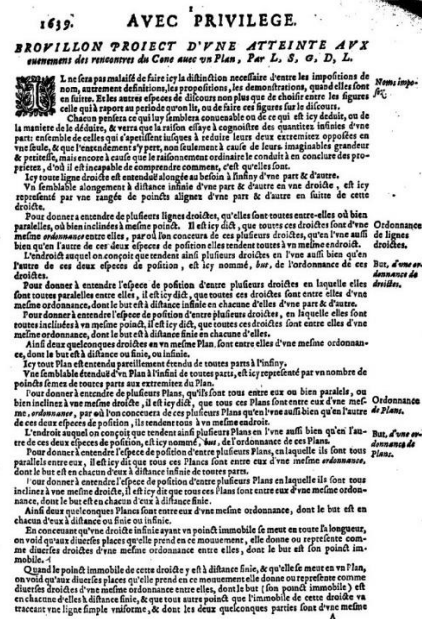
... non trovarvi altro che mediocrità, errori, plagie e informazioni di nessun interesse pratico.

Curabelle sostenne che la mancanza di esperienza pratica di Desargues rendesse il suo lavoro inutile. Egli scrisse:

Se il detto Sieur avesse capito e praticato le cose di cui voleva parlare, probabilmente non sarebbe caduto in tali errori, essendo la pratica necessaria per aiutare a rafforzare i nostri sensi; essa confermerà o smentirà ciò che la speculazione delle nostre menti avrebbe prodotto.

Seguì una feroce discussione tra Curabelle e Desargues con vari opuscoli nei quali si attaccarono a vicenda e con Desargues che minacciò di citare Curabelle se non avesse ritrattato. I due, durante una serie di aspri scambi, istituirono un dibattito con regole, regolamenti e giudici nominati per decidere il vincitore che avrebbe ricevuto una grande somma dal perdente. Non ci sono prove, tuttavia, che questo abbia mai avuto luogo. Desargues sembra essersi stancato delle continue battaglie in cui era implicato e, dal 1645, si dedicò all'architettura. Nel 1648 tornò a Lione dove sembra essere stato più coinvolto nella progettazione architettonica e pubblicò poco. C'è da chiedersi quale altro brillante lavoro avrebbe potuto realizzare questo eccezionale matematico se non fosse stato sottoposto a critiche così diffuse.

Nello stesso anno in cui Claude Mydorge completava la sua opera, *Prodromi catoptricornum et dioptricornum sive Conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria praeij et facem praeferentis*, Girard Desargues pubblicava il suo breve trattato sulle sezioni coniche dal titolo: *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du Cone avec un Plan*, traducibile come Bozza di un saggio su quello che si ottiene sezionando un cono con un piano.

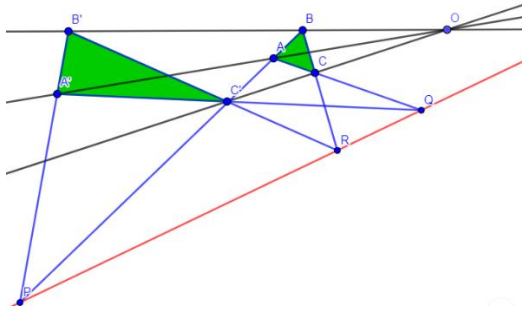


Il trattato occupa centoventotto pagine del primo volume delle opere ristampate da Poudra nel 1864 (pag. 103-230).

Firma dell'autore

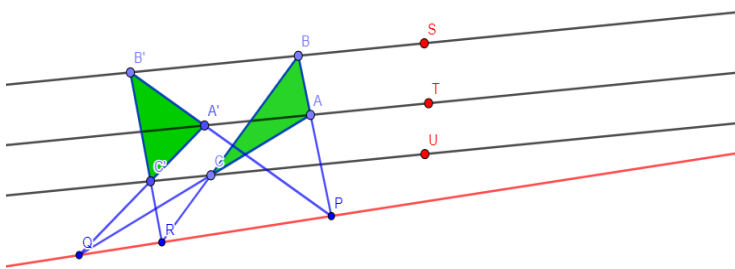
Soltanto un caso fortunato ha salvato tale opera dall'oblio nel quale era rimasta per due secoli. Non è sufficiente essere un grande uomo o scrivere opere importanti per essere tenuto in considerazione dai propri contemporanei. Nella scienza vi è la medesima sorte che si ha nella vita sociale. Spesso vi sono uomini che raccolgono soltanto contrarietà, persecuzioni e dolori, i quali si allontanano dal mondo prevedendo il giorno della propria riabilitazione. Uno di questi uomini fu proprio Girard Desargues. All'età di quarantasei anni aveva già posto le basi per la moderna geometria proiettiva enunciando il Teorema dei triangoli omologici.

Enunciato: *Se in due triangoli ABC e $A'B'C'$, i vertici omologhi concorrono in un punto O (proprio o all'infinito) le rette dei lati omologhi si incontrano in punti allineati, e viceversa.*



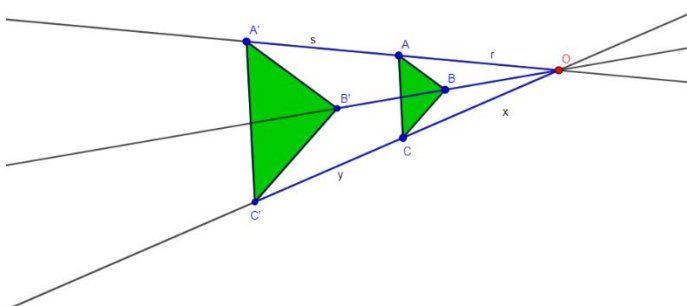
Configurazione di Desargues nel piano con centro in un punto proprio.

<https://www.geogebra.org/m/eu4t83g5>



Configurazione di Desargues nel piano con centro all'infinito.

<https://www.geogebra.org/m/mqj3cuxn>



Configurazione di Desargues nel piano con lati paralleli (retta all'infinito).

<https://www.geogebra.org/m/pcyhxr6p>

Ingegnere, dal 1626 si trovava a Parigi, dove si distingueva per le proprie capacità e conoscenze matematiche volte in particolare ad agevolare il lavoro degli artisti. Lui stesso diceva di non amare lo studio o le ricerche se non per la loro applicazione nella pratica di qualche arte. Pubblicò semplici memorie, concise, piene di vocaboli di sua invenzione, dando a tutte il nome di *Brouillon project*, tradotto in abbozzo di un'opera, in cui non occorre indagare ogni dettaglio, ma soltanto comprendere il suo pensiero. Credeva che la base della pratica delle arti fosse la geometria, applicata al taglio delle pietre in architettura, alla costruzione degli orologi solari, alla prospettiva. Si era accorto che la maggior parte degli artisti, siano essi pittori o operai,

lavoravano senza una guida ragionata, procedevano a tentoni, servendosi di regole che producevano una sorta di imbarazzo alle loro intelligenze, causando anche ingenti perdite di tempo. Dunque ricercava regole semplici in ciascuna delle arti, per facilitarne la comprensione e renderne più rapida la messa in opera. Questi artisti, tuttavia, non lo compresero e lo attaccarono. In effetti Desargues enunciò numerosi teoremi utili agli artigiani e li divulgò tramite conferenze e fogli volanti. Sembra che, nella sua missione didattica, attribuisse grande importanza alle parole tecniche in uso nelle sue opere, dal momento che si impegnò costantemente per una loro definizione accurata, arrivando a coniarne di nuove. Nel suo stesso scritto sulla prospettiva, per esempio, dedica molto spazio alla rassegna di tutte le parole interessate, dando le definizioni e i sinonimi dei nomi, nuovi o consueti, in uso nella pratica della disciplina. Emerge da questo fatto che una parte di quella confusione a cui accennava Desargues parlando del lavoro degli artigiani, dipendeva proprio dall'uso di termini diversi, in contesti differenti, per indicare la stessa cosa, o di significati dei termini non ben definiti. Ecco allora la giusta preoccupazione di rimuovere ogni ambiguità e ogni possibile confusione in questo campo e di unificare il più possibile i termini usati. Nella sua opera principale, il *Brouillon*, questa attenzione alle parole sembra diventare addirittura una stranezza incomprensibile nel suo intento, generalmente di ostacolo alla lettura del testo. Egli usa termini botanici come “nodo”, “tronco”, “ramo”, “ramoscello”, per designare comuni oggetti geometrici quali rispettivamente punto su una retta, retta, retta incidente, segmento. Jean de Beaugrand scriveva, nel 1640, a un anno dalla pubblicazione del *Brouillon*:

...voi scuserete la libertà che mi prendo di non scusare affatto quella dell'Amico che nei Brogliacci che ha messo in circolazione, non si è accontentato solamente di sostituire con termini barbari quelli tramandati dai sapienti, ma ha voluto anche introdurre alcuni assolutamente ridicoli. [...] Ma se non si tratta che di cogliere ciò che accade intersecando un cono con un piano, non è questo indice di uno spirito insolente? O tanto privo della lettura di buoni libri da voler rifiutare il modo di parlare di Euclide, di Apollonio e di Archimede, per applicare male quello di carpentieri e muratori a un oggetto la cui delicatezza ed eccellenza è infinitamente al di sopra di ciò che si chiede alle loro opere: da parte mia, avendo letto con attenzione le prime dieci pagine del suddetto accenno, che sono esattamente un terzo di tutta l'opera, e avendo constatato che non contenevano altro che una proposizione che è tra i lemmi di Pappo, non vi posso nascondere che mi è venuto da pensare che Desargues abbia adottato questo modo di mal parlare in matematica, non solo perché non conosce quello giusto, ma anche perché, nel momento in cui vengano riportate cose già esistenti altrove, si faccia più fatica a riconoscerle.[...] In verità non mi sembra che sia riuscito in alcuno dei nomi che ha imposto, tranne che in quello di "brogliaccio", che ha scelto come titolo del suo libro. Potrei giurare in tutta coscienza di non aver mai letto niente in cui vi sia meno ordine e più confusione, e che meritasse di più quel nome.

Desargues si affidò ai propri allievi, tra cui Abraham Bosse, incisore, e de la Hire, padre dell'omonimo matematico, ai quali spiegava le proprie concezioni ed affidava il compito di sviluppare e pubblicare i propri *Brouillons projects*. A nulla servirono la stima, i giudizi favorevoli e le lusinghiere dichiarazioni di uomini dal calibro di Descartes, Fermat, Leibniz e Pascal. Egli preferì vivere modestamente nella propria città natale, distraendosi dalle sue meditazioni matematiche tramite l'insegnamento sul metodo del taglio delle pietre in una scuola di operai e coltivando il proprio giardino. Le sue opere andarono perdute, il suo nome dimenticato, e soltanto molti anni dopo, tra le righe di chi si scagliò contro di lui, si cominciò a capire quale fosse l'uomo che era stato atrocemente attaccato. Occorrerà attendere il 1822, quando Poncelet, nella critica ostile di Beaugrand, riconobbe in Desargues il Monge del proprio secolo, rimproverando i biografi di non averlo conosciuto abbastanza e dunque compreso appieno.

Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un Plan:

Nel 1679, quarant'anni dopo la prima pubblicazione del trattato, non esistevano più copie di esso. Si può dedurre da una dichiarazione di Philippe de la Hire, figlio del pittore allievo di Desargues, il quale lesse in quell'anno per la prima volta il trattato, trascrivendolo per averne una totale conoscenza. Tale copia fu ignorata per centosessantaquattro anni, e probabilmente sarebbe andata perduta, se lo storico e matematico Michel Chasles non l'avesse scovata in uno scartafaccio da un antiquario di Parigi nel 1845. La lettura del trattato non è semplice a causa dell'elevato numero di termini nuovi che l'autore introduce, ma non è impossibile, in quanto è ricca di concetti della più moderna geometria. L'opera inizia con il considerare le rette estese all'infinito dall'una e dall'altra parte, il piano esteso all'infinito da tutte le parti, come fece Keplero. Desargues chiama "ordinanza di rette" il fascio e la stella di rette, siano esse concorrenti in un punto o parallele, "ordinanza di piani" il fascio di piani. Dichiarò che la retta si possa pensare come una circonferenza di raggio infinito. Considera le rette come composte da punti e distingue le coppie di punti a seconda che si separino o no. Poi introduce il quadrangolo, con coppie di lati opposti e i punti diagonali. Passa quindi a parlare delle coppie di punti di una retta, tali che le distanze da un punto fisso O abbiano un prodotto costante, e siano situate sempre da una parte di O o sempre da parte opposta. Chiama questa figura "involuzione" ed O il centro (*souche*). Effettua uno studio preciso e completo giungendo ad affermare che la *souche* è la coniugata del punto all'infinito della retta. Egli non chiama armonico il gruppo formato da due punti doppi e da una coppia di punti coniugati, ma involuzione di quattro punti; tuttavia osserva che ad una involuzione di quattro punti ne è legata un'altra, dove i punti doppi sono scambiati rispetto ai punti coniugati della prima. Dimostra il Teorema di Menelao, provando quindi che le proprietà delle coppie in involuzione non cambiano attraverso proiezioni e sezioni. Conclude questa prima parte con una frase: *Ciò può bastare per aprire la miniera di quel che segue*. Passa poi a parlare delle superficie coniche e delle loro sezioni piane. Definisce la superficie del *rouleau*, cono e cilindro insieme. Considera che il punto intorno a cui si muove la retta che descrive il cono può stare nel piano del cerchio e fuori di esso, al finito o all'infinito. Non trascurava la possibilità che le sezioni piane della superficie conica siano effettuate da un piano all'infinito, aggiunge che: *l'intelletto è incapace di comprendere come gli avvenimenti che il ragionamento gli fa concludere possono essere*. Quando la sezione piana non è formata da linee rette o da un solo punto, egli la chiama ovale, ellisse o *defailement*, parabola o *egalation*, iperbole o *excedement*. Dice che una retta che incontra una sezione conica può avere i due punti d'incontro uniti, nel qual caso essa tocca la curva. Incomincia a parlare di poli e polari rispetto alla conica, non usa questi nomi, ma la teoria è completamente sviluppata, fino a dire che sopra ogni trasversale le coppie di punti reciproci, rispetto alla conica, formano una involuzione di cui il centro è il coniugato del punto all'infinito. Tutte le rette che passano per il polo di una retta le chiama "ordinate rispetto alla polare", la quale egli chiama semplicemente "trasversale", denominando "ordinanza" l'insieme di tutte le rette che passano per un punto. Non tenne segreto il proprio metodo e affermò: *Chi vorrà procurarsi il divertimento di fare una sola dimostrazione in un piano generale di tutte queste specie di casi, sopravvanzerà il forbimento di questo abbozzo, di cui la più parte delle cose è stata dapprima dimostrata col rilievo*. Mancava soltanto il teorema il quale afferma che esistono infiniti triangoli inscritti in una conica e circoscritti ad un dato triangolo auto reciproco rispetto ad essa, enunciato da G. Scorza di Napoli all'inizio del XIX secolo. Enuncia e dimostra il suo celebre Teorema del quadrangolo inscritto in una conica. Ha intuito e trasformato in proprietà di posizione il valore del parametro, chiamato "coadiutore", e non ha trascurato la teoria dei fuochi dei quali sapeva benissimo essere i punti doppi dell'involuzione determinata sugli assi dalle coppie di rette reciproche ortogonali.

L'unico geometra che lesse e studiò il trattato fu Blaise Pascal, il quale sentì nominare Desargues alle riunioni di scienziati che si tenevano in casa del padre. In un opuscolo di sei pagine affermò:

Desargues era uno dei grandi ingegni di quel tempo e dei più versati in Matematiche e fra l'altro sulle coniche, di cui gli scritti su questa materia ne hanno dato testimonianza a quelli che ne hanno voluto prendere conoscenza[...] Io voglio ben confessare che io devo il poco che ho trovato su questa materia ai suoi scritti, e che ho cercato d'imitare, fin dove mi è stato possibile, il suo metodo su questo soggetto, che egli ha trattato senza servirsi del triangolo per l'asse, e trattando generalmente di tutte le sezioni del cono.

Le strane definizioni coniate da Desargues avevano lo scopo di creare un nuovo ambiente concettuale, nuove immagini mentali capaci di suggerire all'intuizione uno spazio nel quale far convivere il finito e l'infinito, al fine di rimuovere gli ostacoli epistemologici derivanti dalla classica visione euclidea del piano e dello spazio. In questo nuovo spazio la mente può imparare ad orientarsi immaginando le figure dinamicamente nel loro processo di degenerazione quando una loro parte va all'infinito. All'inizio del *Brouillon*, per presentare la materia del suo lavoro, afferma:

Ciascuno penserà quello che gli sembrerà più opportuno di ciò che qua deduciamo e della maniera di dedurlo e vedrà come la ragione cerchi di comprendere sia le grandezze infinite che quelle così piccole da avere le opposte estremità unite tra loro e vedrà come il pensiero si perda anche perché sarà portato, attraverso il ragionamento ordinario, ad accettare delle proprietà delle quali è incapace di capire come possano essere. [...] Non sarà qui difficile fare la necessaria distinzione tra le assegnazioni di un nome, cioè le definizioni, le proposizioni, le dimostrazioni, là dove seguono, dalle altre parti del discorso, e neanche [fare distinzione] tra lo scegliere fra le figure, quella appropriata al testo che si sta leggendo, oppure il costruire le figure sulle indicazioni delle frasi scritte.

Dalla biografia di Desargues si deduce che era proprietario di una casa di campagna a Condrieu nella quale andava spesso, e che amava curare personalmente il suo giardino. Non si può sapere ovviamente se l'inclinazione per questo ambiente naturale lo abbia influenzato nella scelta delle parole usate nella sua opera, ma molte di esse hanno certamente un carattere metaforico indovinato, che induce ad opportune analogie e a trasferire su una nuova costruzione, in via di definizione, caratteristiche e configurazioni appartenenti a strutture conosciute, appositamente scelte. Fin dall'inizio, nel considerare gli elementi primi della geometria, la retta e il punto, si trova in Desargues un atteggiamento nuovo:

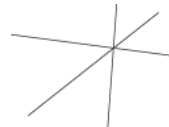
Qua ogni linea retta è pensata allungata al bisogno all'infinito da una parte e dall'altra.

La retta è di fatto *allungata* all'infinito e non potenzialmente *allungabile*. Questo oggetto, con l'invito ad andare con il pensiero all'infinito, si presenta fin dall'inizio diverso dalla retta quale segmento euclideo. La differenza diventa ancora più chiara subito dopo, quando Desargues introduce i fasci di rette (*ordonnance des lignes droictes*), e chiama *but* la “meta”, il “punto” che le rette del fascio hanno in comune. Questo termine conferisce a quel particolare “punto” un significato profondo, che lo circonda di possibili associazioni di pensiero: questo “punto” diventa meta comune cui le rette tendono, una caratteristica che le lega insieme in un unico destino, una sorta di comune inclinazione verso un “dove” che può essere a distanza finita o infinita.

L'immagine mentale che il termine *but* suggerisce potrebbe essere:



Ben diversa dall'immagine che si avrebbe se Desargues avesse dato una definizione formale di fascio di rette, in termini di “punto comune a tutte le rette del fascio”. Il termine “punto”, infatti, richiama il classico concetto geometrico e l'immagine che ne risulta appare come:

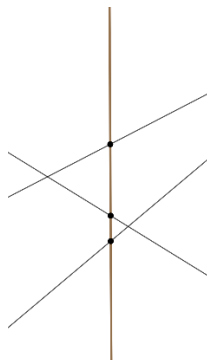


Terminologia:

Vengono ora presentate le nuove definizioni introdotte all'inizio del *Brouillon*, nel tentativo di creare nuove immagini mentali capaci di sviluppare un'intuizione dinamica.

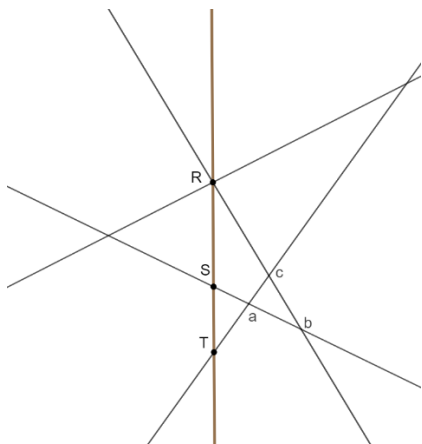
- *Tronc* (tronco): una retta quando per un certo numero dei suoi punti passano altre rette;
- *Neud* (nodo): ogni punto del tronco per il quale passa una retta;
- *Rameau* (ramo): la retta che passa per un nodo del tronco;
- *Rameau déployé au tronc* (ramo dispiegato dal tronco): è una retta che interseca il tronco senza coincidere con esso;
- *Rameau plié au tronc* (ramo piegato sul tronco): è un qualunque segmento del tronco racchiuso tra due nodi;
- *Brin de rameau* (ramoscello): è un qualunque segmento di ramo contenuto tra il suo nodo e un altro ramo.

Seguendo queste indicazioni, si assiste alla costruzione di un mondo matematico al centro del quale vive un tronco. La definizione di tronco è prettamente matematica: si chiama tronco una retta per qualche punto della quale passano altre rette. Ma l'uso della parola non tecnica guida immediatamente la costruzione dell'immagine associata: il tronco diventa la struttura principale, portante, i cui rami si intrecciano tra loro partendo dai nodi su di esso. In questa struttura gli elementi principali della figura sono costituiti dal tronco, dai nodi e dal movimento dei rami rispetto al tronco immobile: il loro piegarsi e dispiegarsi da esso.



Altro elemento importante è il ramoscello: una qualunque porzione di ramo che sia compresa tra il suo nodo e l'intersezione con un altro ramo. I segmenti, in questa rappresentazione, sono degni di nota solo se hanno almeno un estremo su un nodo del tronco.

Per esempio, nel caso seguente:



R, S, T sono nodi. Sa, Ta, Rc sono ramoscelli. Le rette estese all'infinito per R, S, T sono i rami. I segmenti SR, TS, TR sono rami piegati sul tronco. I segmenti ab, bc, ac , non hanno un nome che li definisca tramite la loro relazione con il tronco, e quindi non hanno neanche dignità di oggetti, e con essi neanche il triangolo abc . L'occhio del matematico, veloce nell'individuare tutte le possibili forme euclidee contenute in una raffigurazione, anche le più nascoste, deve abituarsi a ragionare visivamente basandosi principalmente sui nodi, sui rami e sui ramoscelli, con la loro possibilità di chiudersi o di aprirsi sul tronco.

L'immagine del tronco perde la propria generalità e diventa il caso particolare di albero quando nel tronco si individua una origine: "il ceppo" e una particolare configurazione di rami e di nodi. Un *arbre* (albero) è un tronco con *une souche* (un ceppo) O e varie *branches couplées* (getti accoppiati o coniugati) tra loro che nascono dal ceppo e si sovrappongono al tronco.



Se OA e OA' sono due tali getti accoppiati, si richiede che il prodotto $(OA) \cdot (OA')$, con il giusto segno, abbia un valore costante non nullo. La struttura ad albero permette di stabilire una corrispondenza biunivoca (ed involutoria) tra i nodi del suo tronco, nel senso che al nodo A resta associato in modo unico un nodo A' , a B un nodo B' e così via; viceversa, ad A' è associato A , a B' è associato B e così via. Gli accoppiamenti sono fatti in modo tale che l'area del rettangolo che ha per lati due ramificazioni accoppiate non cambi:

$$(OA) \cdot (OA') = (OB) \cdot (OB') = \text{costante}.$$

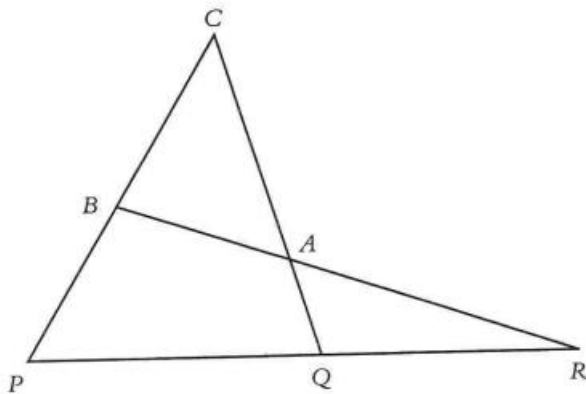
Un albero sarà dunque definito da un tronco, un ceppo e una costante (positiva o negativa) con la quale accoppiare i getti. Il primo risultato importante di Desargues è quello di rendere la struttura involutoria di tali nodi indipendenti dal ceppo, dandone una caratterizzazione intrinseca. Relazione quest'ultima che non coinvolge il ceppo O .

Involuzione:

La speciale configurazione data da tre coppie di punti disposte su un tronco in modo da appartenere ad uno stesso albero come coppie coniugate, viene chiamata da Desargues “involuzione” e la relazione

$$\frac{(AB) \cdot (B'A)}{(A'B) \cdot (B'A')} = \frac{(AC) \cdot (C'A)}{(A'C) \cdot (C'A')}$$

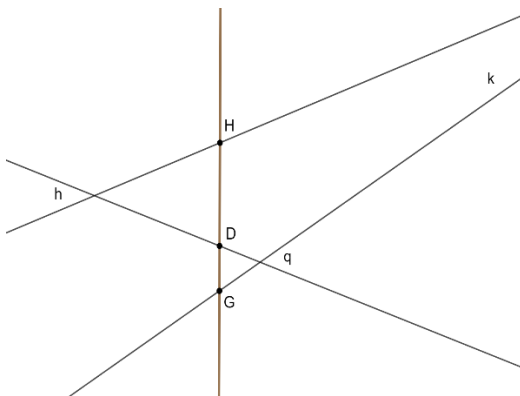
ne fornisce una caratterizzazione quantitativa. È un concetto invariante per trasformazioni proiettive, strumento centrale nel metodo di Desargues. Le involuzioni, in questo modo, si legano ad elementi grafici, formati cioè da configurazioni di rette e punti, che, come tali, sono invarianti per proiezioni centrali. Nasce così la geometria proiettiva. Desargues cita il Teorema di Menelao il cui enunciato è il seguente:



Dato il triangolo ABC e la trasversale PQR esiste una relazione tra le lunghezze dei lati tagliati dalla trasversale, ossia

$$\frac{QC}{QA} = \frac{PC \cdot RB}{PB \cdot RA}$$

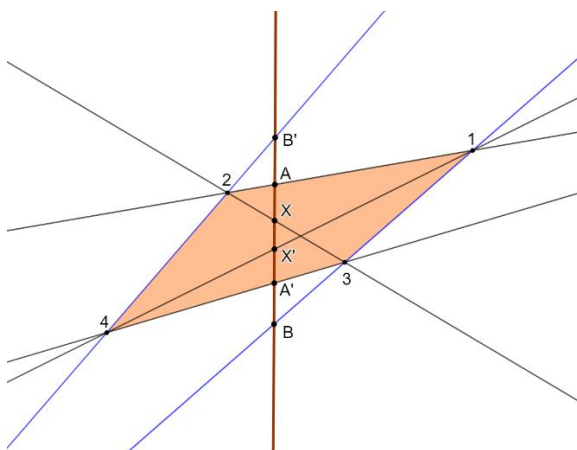
Desargues ne varia la forma, inserendosi nel nuovo sfondo da lui immaginato.



Quando su una retta, pensata come tronco, per tre punti H, D, G, pensati come nodi, passano tre rette come rami dispiegati Hkh, Dqh, Gqk, qualunque getto Dh di qualunque di questi rami Dqh, che esce dal suo nodo D e arriva al ramo Hkh, sta al suo getto accoppiato Dq che esce dallo stesso nodo D arrivando al terzo ramo Gqk, nello stesso rapporto del rapporto composto tra i getti su ciascuno degli altri due rami convenientemente ordinati...

$$\frac{Dh}{Dq} = \frac{Hh}{Hk} \cdot \frac{Gk}{Gq}$$

L'involuzione può essere definita, oltre che dalle due coppie di punti A, A' e B, B' , anche da una coppia di punti e una coppia di rette indicate in blu nell'immagine seguente. In questo caso la costruzione viene fatta a partire dai punti B e B' nei quali le rette date incontrano il tronco. La coppia di rette è pensata come una “curva di ordine due”, cioè come una configurazione che interseca una qualunque retta in due punti ed è solo questa la proprietà che viene usata per costruire l'involuzione.



Quadrangolo:

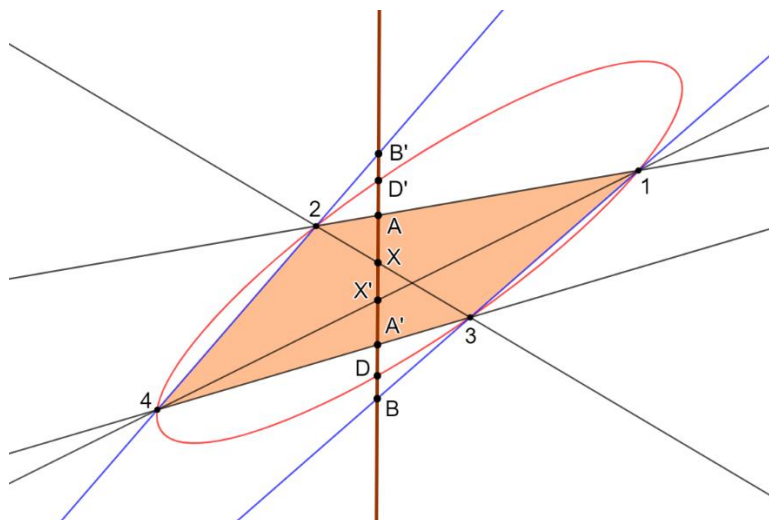
<https://www.geogebra.org/classic/yka5fpyp>

Si comincia con il dispiegare un qualunque ramo per A , che incontra la coppia di rette nei punti 1 e 2. Si congiunge 2 con X e si trova il punto 3, si congiunge 3 con A' e si trova il punto 4, si congiunge 4 con 1 e si trova il punto X' cercato, trasformato di X mediante l'involuzione definita dalle coppie A, A' e B, B' o dalla coppia di punti A, A' e dalla coppia di rette fissate. Il punto X' costruito non dipende dai modi con cui si è dispiegato il ramo da A o, equivalentemente, dalla posizione del punto 1 sulla coppia di rette. Si ha una involuzione definita dalle due rette e dai due punti A, A' indipendente da come è stato inscritto il quadrangolo 1,2,3,4 nelle rette stesse.

Desargues afferma che quando in un piano quattro punti non giacciono tutti sulla stessa linea retta, si ha che ognuno di questi punti è un punto di riferimento (*borne*) rispetto agli altri. Ogni linea retta che passa attraverso due qualsiasi dei quattro punti di riferimento si chiama una linea di riferimento (*bornale droite*) rispetto a questi punti. Le due rette di cui una passa per due dei punti di riferimento e l'altra per gli altri due, costituiscono una coppia e sono chiamate una coppia di linee di riferimento. Questi termini sembrano essere stati presi in prestito dall'agrimensura, la parte della topografia che riguarda la misura planimetrica di superfici agrarie, e sarebbero stati familiari non solo all'agrimensore, ma anche al proprio proprietario terriero.

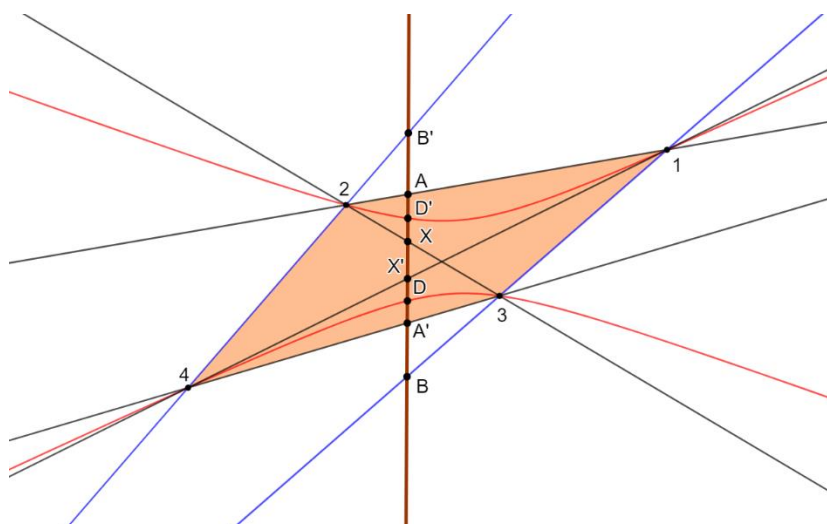
Coniche:

Questa immagine porta in una direzione nuova molto importante. Una coppia di rette può essere pensata, infatti, come fa Desargues, al pari di una conica degenera ottenuta sezionando il cono con un piano che passa per il suo vertice. Tutte queste figure si ottengono l'una dall'altra, muovendo con continuità il piano sezione. Sembrerebbe dunque naturale estendere la costruzione precedente, che è invariante per proiezioni, anche al caso di una qualunque conica.



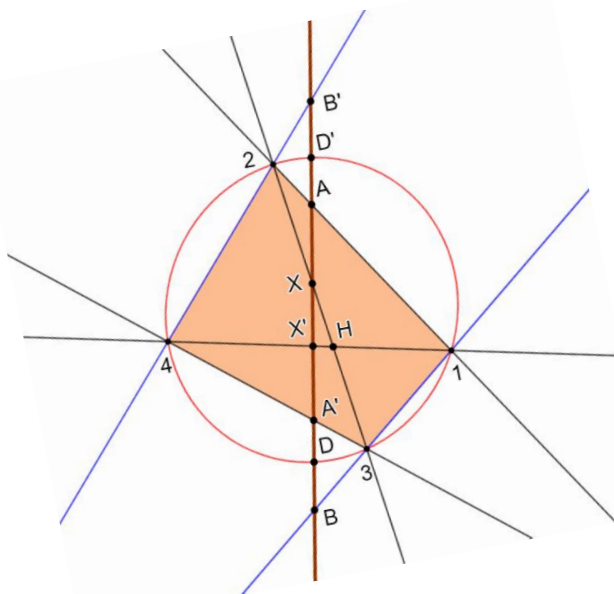
Ellisse: <https://www.geogebra.org/classic/wvuavrud>

Desargues riesce di fatto a dimostrare che una qualunque conica, che passi per i quattro punti 1,2,3,4, interseca il tronco in una ulteriore coppia D, D' , che insieme ad A, A', B, B', X, X' , appartiene alla stessa involuzione, legando in questo modo, con una geniale intuizione, le involuzioni alle coniche. Questo risultato è quello che Pascal chiamerà poi *propriété merveilleuse*.



Iperbole: <https://www.geogebra.org/classic/hmsxkh7v>

Lo stesso Poncelet, che non conosceva Desargues, parlerà di questo teorema come *un des plus féconds qui existent sur les coniques* per le numerosissime conseguenze che esso comporta. Si può vedere anche come, fissata una conica degenera o non degenera e due nodi A, A' su un tronco, resta individuata univocamente una involuzione, ottenuta sia che la conica intersechi in D, D' il tronco, sia che non lo incontri, la quale involuzione, con la stessa costruzione di prima, permette di trovare il coniugato X' di un qualunque nodo X , comunque si voglia dispiegare da A il ramo $A1$. Segue un cenno della dimostrazione di Desargues di questo fatto e della *propriété merveilleuse*, poiché essa introduce per la prima volta nella storia della matematica un metodo dimostrativo molto fecondo che consiste nel trasformare una figura in un'altra più semplice, per la quale sia possibile dimostrare la proprietà che interessa, la quale, se invariante rispetto alla trasformazione effettuata, resterà valida anche per la figura più complessa iniziale. In questo caso la trasformazione è una trasformazione proiettiva che permette di trasferire su una qualunque conica proprietà valide per una circonferenza ed invarianti per proiezione.



Circonferenza: <https://www.geogebra.org/classic/q3tsfuce>

Nel caso che la conica sia una circonferenza, si applica il Teorema di Menelao al triangolo AHA' tagliato dalla trasversale $X'1$ e dalla trasversale $X2$ e si utilizza il fatto che $3H \cdot 2H = 4H \cdot 1H$ (Euclide, *Elementi*, Libro III, proposizione 35). Con questo si vede che il rapporto tra i rettangoli $\frac{AX' \cdot AX}{A'X' \cdot A'X}$ coincide con il rapporto $\frac{A1 \cdot A2}{A'3 \cdot A'4}$ e quindi non dipende dalla scelta del punto 1 sulla circonferenza (Euclide, *Elementi*, Libro III, proposizione 37). Ne segue che ogni quadrangolo 1,2,3,4 inscritto nella circonferenza che abbia due lati opposti passanti per A e A' definisce sulla retta AA' la stessa involuzione. Se poi la retta AA' incontra la circonferenza nei punti D, D' allora si ha $AD \cdot AD' = A1 \cdot A2$ e $A'D \cdot A'D' = A'3 \cdot A'4$ (Euclide, *Elementi*, Libro III, proposizione 35) e quindi il rapporto tra i rettangoli $\frac{AX' \cdot AX}{A'X' \cdot A'X}$ coincide con il rapporto tra $\frac{AB \cdot AB'}{A'D \cdot A'D'}$.

Dunque le coppie AA', XX', DD' fanno parte di una stessa involuzione. Poiché queste proprietà sono invarianti per proiezione, si ha che le stesse affermazioni restano valide se la circonferenza è sostituita da una qualunque conica che di questa è una proiezione.

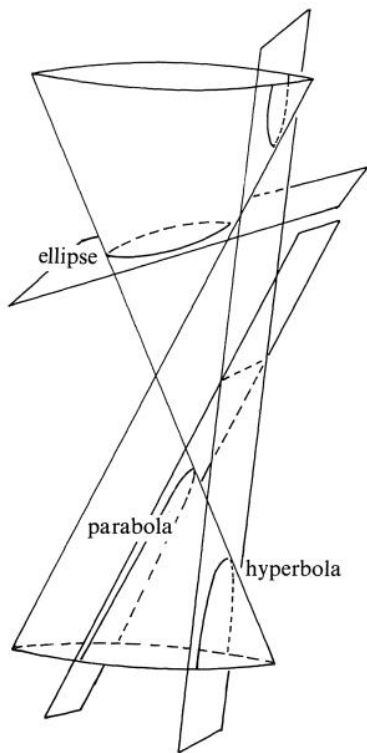
Rotolo:

Quando una linea retta contenente un punto fisso si muove intorno al bordo, o circonferenza, di un cerchio, si possono presentare due casi: il punto fisso si trova nel piano del cerchio oppure no.

- Quando il punto fisso della retta si trova nel piano del cerchio, è a distanza finita o infinita, e la retta, mentre si muove, rimane in tale piano. Le varie posizioni che occupa definiscono un'ordinanza di rette che incontrano la circonferenza, il cui punto comune, (*but*), è a distanza finita o infinita.
- Quando il punto fisso della retta si trova fuori dal piano del cerchio, è a distanza finita o infinita, e la retta, mentre si muove, rimane sempre fuori da tale piano, e muovendosi circonda, racchiude e descrive una figura solida, che Desargues chiama rotolo, (*rouleau*), essendo il nome di un genere che contiene due sottogeneri. Il punto fisso della retta si chiama il vertice del rotolo. Il cerchio attorno al cui bordo si muove la retta è chiamato la base o base piana del rotolo. Lo spazio attraverso il quale la retta passa mentre si muove è chiamato involuppo, o superficie del rotolo. Quando il punto fisso della retta è a distanza infinita, fuori dal piano del cerchio intorno al cui bordo si muove la retta, essa descrive un rotolo di dimensioni uguali lungo la sua lunghezza a qualsiasi distanza finita, e si chiama colonna, o cilindro, che può essere di diverse specie. Quando il punto fisso della retta è a distanza finita, fuori dal piano del cerchio intorno al cui bordo si muove, il rotolo che la retta descrive durante i suoi spostamenti, si restringe nel suo punto fisso, dove la sua dimensione è solo quella di un singolo punto, e su entrambi i lati di questo si allarga all'infinito a formare due cornetti posti uno di fronte all'altro rispetto al punto fisso. Per questo Desargues lo chiama cornetto, o cono, che può essere di diverse specie. Così la colonna o cilindro e il cornetto o cono sono due sottogeneri di un genere che è stato chiamato rotolo, che egli tratta principalmente in generale, nel senso che considera la parte del cornetto o cono che si trova solo su un lato del suo vertice, una parte che altrove è presa come un cono intero, ma viene trattata come se passasse per solo metà di un cornetto o cono, e non per uno intero. Quindi la parola cornetto o cono viene usata per indicare le due parti prese insieme, allo stesso tempo, opposte al loro vertice, altrimenti il cono non è completo. Quando un piano diverso da quello del cerchio, che è la base o base del rotolo, interseca il rotolo, chiama questo piano un piano di sezione del rotolo.

Un tale piano di sezione taglia il rotolo nel suo vertice oppure no:

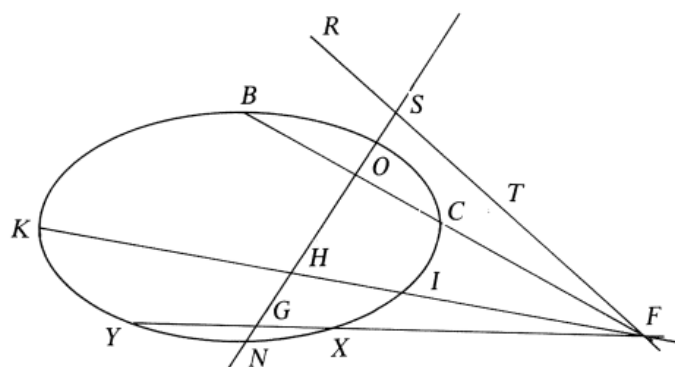
- In modo tale che il moto della retta che descrive il rotolo non la porta mai ad essere parallela al piano di sezione. Se il vertice del rotolo è a distanza infinita, il risultato è impossibile da immaginare, e *la comprensione è incapace di comprendere come i risultati, che il ragionamento gli fa dedurre, siano possibili*. Se il vertice del rotolo è a distanza finita la retta fornisce solo un punto nel piano di sezione.
- In modo tale che il moto della retta che descrive il rotolo a volte la rende parallela al piano di sezione. Se il vertice del rotolo è a distanza infinita, il moto della retta che descrive il rotolo lo mantiene sempre parallelo al piano della sezione. Se il vertice del rotolo è a distanza finita, il moto della retta che descrive il rotolo non lo mantiene sempre parallelo al piano di sezione. In entrambi i casi, il moto della retta che lo descrive la conduce nel piano di sezione una o due volte distinte. Quando la retta si trova solo una volta nel piano di sezione, forma una retta nel piano, unita al rotolo per tutta la sua lunghezza, o, per dirla diversamente, il piano tocca il rotolo in una retta. Quando la retta si trova due volte distinte nel piano di sezione, essa fornisce due rette nel piano, dividendo così il rotolo lungo la sua lunghezza attraverso il vertice. Quando un tale piano di sezione taglia un rotolo in un punto diverso dal vertice, in modo tale che il moto della retta che descrive il rotolo non lo porta mai ad essere parallelo al piano della sezione, si presentano due casi: se si incontrano a distanza infinita il risultato è impossibile da immaginare, e *la comprensione è troppo debole per comprendere come i risultati, che il ragionamento fa dedurre, siano possibili*. Se si incontrano a distanza finita, il movimento della retta che descrive il rotolo fa sì che essa tracci nel piano della sezione una linea curva che, a distanza finita, raddoppia e si congiunge con se stessa, è il caso dell'ellisse. Le linee curve sono di vario tipo. Quando un tale piano di sezione incontra un rotolo in un punto diverso dal suo vertice, in modo tale che la retta che descrive il rotolo è talvolta parallela al piano di sezione, il risultato in questo caso è abbastanza impossibile da immaginare per quanto riguarda il tipo di rotolo chiamato cilindro, e anche per il tipo chiamato cono quando il piano lo incontra a distanza infinita. Quando un tale piano di sezione incontra un cono da qualche parte diversa dal suo vertice, in modo tale che la retta che descrive il cono è talvolta parallela al piano di sezione, la retta è parallela al piano una volta o due volte distinte. Quando è parallela solo una volta traccia nel piano una linea curva che, a distanza infinita, raddoppia e si congiunge con la curva, è il caso della parabola. Quando la retta è parallela al piano due volte distinte, traccia nel piano una linea curva, che a distanza infinita si divide in due metà uguali e simili, rivolte l'una all'altra, è il caso dell'iperbole. Così un piano di sezione e un rotolo, se si trascura la sua base, si incontrano o in un solo punto, o in una sola retta, o in due rette distinte, nello stesso piano, o in una linea curva. Se si tralasciano i tipi di incontro che risultano o in un singolo punto o in una sola linea retta, e si discute solo riguardo gli altri tipi, la parte del corpo del rotolo occupata dal piano, in questi altri tipi di incontro, si chiama sezione del rotolo. L'insieme delle linee rette o curve descritte dalla retta mentre si muove viene chiamato il bordo della sezione del rotolo. Quando è costituito da due linee rette, il punto comune della loro ordinanza è a distanza finita o infinita.



Quando il bordo di una sezione di un rotolo è una curva che a distanza finita raddoppia e si unisce a se stessa, la figura è chiamata un cerchio, o un ovale, altrimenti una ellisse (*defailllement*). Quando il bordo di una sezione di un rotolo è una curva che a distanza infinita raddoppia e si congiunge con se stessa, la figura è chiamata una parabola (*egalation*). Quando il bordo di una sezione di un rotolo è una curva che a distanza infinita si divide in due metà, rivolte all'indietro, la figura è chiamata una iperbole (*excedement*). Quando in un piano una retta incontra una qualsiasi figura, l'incontro è considerato solo in relazione al bordo della figura, e in un piano una retta incontra il bordo di una figura in due punti, che a volte si identificano l'uno con l'altro, nel qual caso la retta tocca la figura.

Trasversale:

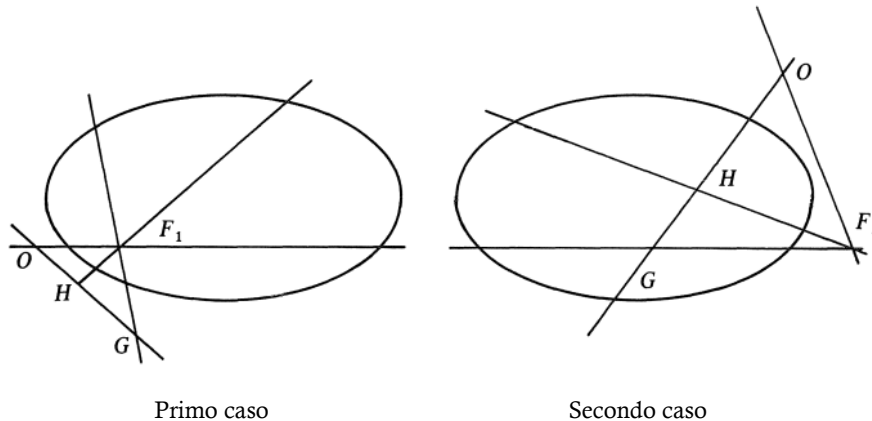
Quando in un piano una figura NB, NC è incontrata da più rette FCB, FIK, FXY appartenenti alla stessa ordinanza, e se qualche linea $NGHO$ taglia le rette dell'ordinanza nei punti G, H, O , che con F , il punto comune dell'ordinanza, formano rispettivamente involuzioni con gli insiemi di due punti come XY, IK, CB , in cui la linea è intersecata dalla figura, allora tale linea retta NGH si chiama una trasversale alle rette dell'ordinanza con punto comune F , rispetto alla figura. Le rette dell'ordinanza con punto comune F sono di conseguenza chiamate ordinate delle trasversali N, G, H , rispetto alla stessa figura.



Il punto in cui una trasversale interseca la sua ordinata è chiamato punto trasversale. Qualsiasi retta appartenente all'insieme delle ordinate di una trasversale e che non incontra, o solo tocca, la figura, si chiama ordinale rispetto alla trasversale, distinta dalle sue ordinate, che attraversano la figura.

Ogni retta che biseca una figura è chiamata diametrale della figura, e una diatrasversale rispetto alle sue ordinate. Per ciascuna di queste ordinate si considerano sia le due parti o segmenti come OC, OB contenuti tra la trasversale e ciascuno dei punti in cui questa retta incontra il bordo della figura, che le due parti o segmenti come FC, FB contenuti tra F e ciascuno dei punti in cui la retta incontra il bordo della figura. Così, se in un piano le linee rette FB, FK, FY , appartenenti ad una ordinanza con punto comune F , incontrano una figura NB, NC , ci sono quattro tipi di maggiori e minori parti da considerare per le linee rette che appartengono all'ordinanza con punto comune F . La maggiore e la minore delle parti che sono contenute tra il loro punto comune F e i punti in cui incontrano il bordo della figura in un punto, esemplificato da B . La più grande e la più piccola delle parti contenute tra il loro punto comune F e i punti in cui incontrano il bordo della figura in un punto esemplificato da C . E quello per cui la parte o il segmento come CB , che è contenuto all'interno della figura, è il maggiore o il minore; oppure quello per cui la somma o la differenza delle due parti come FC, FB e OB, OC , contenute tra il loro punto comune F e la loro trasversale ON , e ciascuno dei punti in cui essa incontra il bordo della figura, è il maggiore o il minore. Di conseguenza le parole trasversali e ordinate sono scelte per indicare che le linee rette in esame hanno questi nomi in relazione a una sezione di un rotolo che si trova nello stesso piano con le linee rette. Quando, in un piano, nessuno dei punti di una retta è a distanza finita, allora questa retta è a distanza infinita. Poiché in un piano il punto chiamato centro di una sezione di un rotolo è solo un caso tra gli innumerevoli punti comuni di ordinate di rette, non è opportuno parlare del centro di una sezione di un rotolo. Poiché ogni linea retta che passa per il vertice di un rotolo e per qualsiasi punto, che è il punto comune di un'ordinanza di linee rette nel piano della sua base, cioè la base del rotolo, condivide la proprietà della retta che passa per l'estremità dei diametri della base del rotolo, non bisogna citare l'asse di un rotolo. Le linee rette che sono parallele l'una all'altra sono identificate dalla stessa lettera ad ogni estremità, la lettera che rappresenta il punto comune della loro ordinata, a distanza infinita. Il risultato, che coinvolge una trasversale e delle ordinate, spesso si verifica quando si prendono sezioni piane di un rotolo generale. Il bordo della figura insieme al punto comune delle ordinate e la loro trasversale, danno sempre quattro punti in involuzione su ciascuna delle ordinate di questi punti, i due dati dal bordo della figura si corrispondono tra loro, ossia il punto dato dal punto comune dell'ordinanza e il punto dato dalla trasversale. Può accadere anche che, in ciascuna delle ordinate, il punto comune della loro ordinanza è accoppiato al punto dato dalla loro trasversale in involuzione con i due punti dati dal bordo della figura, e viceversa; oppure in ciascuna delle ordinate i due punti dati dal bordo della figura sono accoppiati in involuzione con questi altri due punti, cioè il punto comune della loro ordinanza e il punto dato dalla loro trasversale. In una involuzione di quattro punti, i due che formano la coppia estrema si trovano talvolta a distanza l'uno dall'altro in modo tale che uno si identifica con il ceppo e l'altro è a distanza infinita. D'altra parte, gli stessi due nodi o punti che formano la coppia estrema sono a volte talmente vicini da essere identificati l'uno con l'altro e anche con una delle altre coppie di nodi che corrispondono l'uno all'altro, nel qual caso i quattro punti dell'involuzione si riducono a due soli punti, uno dei quali si pensa a tre punti uniti in uno. Desargues afferma che ci sia molto da dire sull'argomento dei quattro punti in involuzione formati da un'ordinanza di linee rette con la loro trasversale e il bordo della figura, ma in questo *Brouillon* è sufficiente far notare qualcosa sui tipi di risultati più generali, i quali rendono chiaro ciò che accadrà in un caso particolare. Nel piano di una qualsiasi sezione di un rotolo, il punto comune di un'ordinanza di linee rette, o di un insieme di ordinate, si trova sul bordo della figura oppure no, e in entrambi i casi si trova a distanza finita o infinita.

Nel piano di una qualsiasi sezione di un rotolo la trasversale di un'ordinanza di linee rette, o di un insieme di ordinate, incontra o non incontra il bordo della figura, e in entrambi i casi si trova a distanza finita o infinita. Quando l'estremità di un insieme di ordinate giace sul bordo della figura, a distanza finita o infinita, la trasversale dell'ordinanza stessa appartiene all'insieme delle ordinate, e passa attraverso l'estremità dell'ordinanza, nel quale punto tocca la figura. Quando il punto comune delle ordinate non giace sul bordo della figura, a distanza finita o infinita, e tutte le ordinate incontrano il bordo della figura, la trasversale non la incontra, e se tutte le ordinate non incontrano il bordo della figura, la trasversale invece sì.

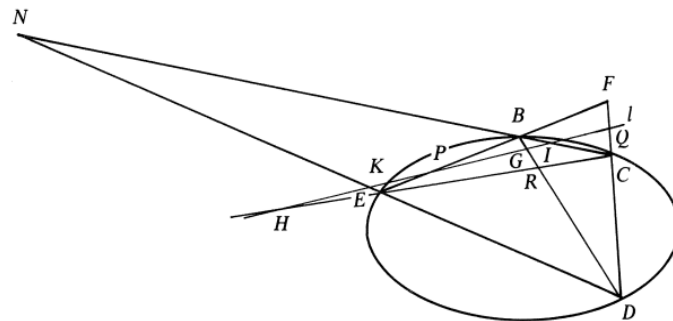


Inoltre le due parti di ciascuna delle ordinate contenute tra il loro punto comune e ciascuno dei due punti dati sull'ordinata dal bordo della figura, sono o uguali o diverse. Quando sono uguali tra loro, le due parti di ciascuna di queste stesse ordinate contenute tra la loro trasversale e ciascuno dei due punti sull'ordinata data dal bordo della figura, sono uguali l'una all'altra, e viceversa. Quando la trasversale di un insieme di ordinate, a distanza finita o infinita, non incontra il bordo della figura, tutte le ordinate la incontrano. Quando la trasversale di un insieme di ordinate, a distanza finita o infinita incontra il bordo della figura, lo incontra o in uno o in due punti. Quando lo incontra in un punto, esso è il punto comune delle sue ordinate. Quando lo incontra in due punti, tutte le sue ordinate non lo incontrano. Inoltre, le due parti di ciascuna delle ordinate contenute tra la loro trasversale e ciascuna delle loro due intersezioni con il bordo della figura, sono o uguali o diverse.

Teorema dell'involuzione di Desargues:

Quando in un piano si hanno quattro punti di riferimento B, C, D, E , accoppiati tre volte tra loro, attraverso i quali passano tre coppie di linee di riferimento $BCN, EDN, BEF, DCF, BDR, ECR$, ognuna di queste tre coppie e il bordo curvo di qualsiasi sezione di un rotolo che passa per i quattro punti B, C, D, E , fornisce su qualsiasi altra linea retta nel medesimo piano, come un tronco I, G, K , una delle coppie di nodi di una involuzione IK, PQ, GH . Se inoltre le due linee di riferimento di una delle coppie BCN, EDN sono parallele tra loro, i rapporti tra i rettangoli delle loro coppie correlate di germogli che nascono dal tronco sono gli stessi di quelli tra i loro rettangoli gemelli, ovvero i rettangoli dei germogli piegati al tronco presi nello stesso ordine.

Enunciato: Siano B, C, D, E i quattro vertici di un quadrangolo le cui coppie di lati opposti BC e ED si incontrano in N , BE e CD in F , BD e CE in R . Allora le coppie di linee incontrano qualsiasi altra linea, l , in sei punti che sono in involuzione. Inoltre, qualsiasi conica passante per B, C, D, E , e qualsiasi coppia di lati del quadrangolo, incontra anche la retta l in sei punti in involuzione.



Dimostrazione:

Supponiamo che NB, NE, FC, FB, RC, RB incontrino l in I, K, Q, P, H, G rispettivamente. Proviamo che IK, PQ, GH sono coppie in involuzione. Si ha:

$$\frac{IQ}{IP} = \frac{CQ \cdot BF}{CF \cdot BP} \text{ dal Teorema di Menelao applicato al triangolo } QPF \text{ e alla trasversale } ICB$$

$$\frac{KQ}{KP} = \frac{DQ \cdot EF}{DF \cdot EP} \text{ dal Teorema di Menelao applicato al triangolo } QPF \text{ e alla trasversale } KDE$$

Allora $\frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK} = \frac{CQ \cdot BF \cdot DQ \cdot EF}{CF \cdot BP \cdot DF \cdot EP}$. Quest'ultima espressione è anche uguale a $\frac{QG \cdot QH}{PG \cdot PH}$ dal Teorema di Menelao applicato al triangolo PQF e alla trasversale BGD e al triangolo PQF e alla trasversale CHE . Dunque si ha $\frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK} = \frac{QG \cdot QH}{PG \cdot PH}$ e le coppie IK, PQ, GH sono in involuzione.

Supponiamo poi che la conica passante per B, C, D, E sia un cerchio e che l lo incontri in LM . Allora dal Teorema della secante si ha $QL \cdot QM = QC \cdot QD$ e $PL \cdot PM = PB \cdot PE$. Dunque risulta $\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PE} \cdot \left(\frac{FC \cdot FD}{FC \cdot FD} \right)$ e $FC \cdot FD = BF \cdot EF$ dal Teorema della secante. Allora si ha una catena di uguaglianze $\frac{QL \cdot QM}{PL \cdot PM} = \frac{QI \cdot QK}{PI \cdot PK} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PE}$, la quale stabilisce che QP, LM, IK sono coppie in involuzione. Infine supponiamo che la conica che passa per B, C, D, E sia arbitraria. Essa può essere rappresentata da una sezione piana di un cono, mappata per proiezione dal vertice, su un secondo piano in cui la conica è una circonferenza. Poiché l'involuzione è un invariante proiettivo, il teorema risulta ancora vero. Dunque questa dimostrazione è applicabile in numerose occasioni, unifica e semplifica allo stesso tempo la teoria delle sezioni coniche.

□

Bibliografia e sitografia:

- F. Amodeo, *I trattati delle sezioni coniche: Da Apollonio a Simson*, Tipografia F. Giannini, 1906
- R. Taton, *L'Oeuvre mathématique de G. Desargues*, Presses universitaires de France, 1951
- J. V. Field, J. J. Gray, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987
- J. V. Field, *The Invention of Infinity: Mathematics and Art in the Renaissance*, OUP Oxford, 1997
- <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Desargues/>
- <http://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/mep/Articoli/Desar/DesarI.html>
- <http://dm.unife.it/matematicainsieme/dopoeu/desarg.htm>