

Cauchy: il calcolo diventa analisi

L'approccio di un matematico al calcolo infinitesimale prima della fine del XVIII secolo è pragmatico: mira a risolvere problemi soprattutto sperimentali, ispirati a situazioni reali suggerite dai campi della fisica e dell'economia. Lagrange è uno dei primi ad ammonire la comunità internazionale che la mancanza di rigorose basi per il calcolo è una grande sfida per i matematici contemporanei. Dopo Cauchy, i fondamenti del calcolo diventano una parte essenziale dell'analisi, passando da un calcolo del XVIII secolo orientato ai risultati e un calcolo del XIX secolo basato sul rigore dei risultati.

Il calcolo di Cauchy

Per il suo *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. 1^{re} partie: analyse algébrique* (d'ora in avanti *Cours d'analyse*) del 1821 Cauchy adottò come sottotitolo la frase di Lagrange “*analyse algébrique*”. La vera innovazione è che, contrariamente a Lagrange, Cauchy comprese che fossero le disuguaglianze, invece delle uguaglianze, a poter essere la giusta base per il calcolo.

Prima di Cauchy, le approssimazioni erano viste come un metodo per avvicinarsi sempre di più a un numero reale la cui esistenza era data per scontata. Dopo Cauchy, i numeri reali vennero definiti come limiti di processi approssimanti, e la loro esistenza venne dimostrata dalla convergenza dell'approssimazione¹.

Quest'ultimo punto ci consente di osservare tre caratteristiche che le dimostrazioni di Cauchy avevano in comune.

- Viene supposta implicitamente una forma dell'assioma di completezza dei numeri reali: l'esistenza di un limite finito per una successione monotona e limitata (questo è uno dei punti deboli del *Cours d'analyse*).
- Vengono lasciati dei dettagli come esercizio per il lettore.
- La dimostrazione si distingue per la sua notazione e la sua chiarezza.

Limiti

Il concetto di limite che propone Cauchy è:

Quando i valori successivamente attribuiti alla stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore costante, in modo che alla fine differiscano da questo di una quantità piccola a piacere, allora esso è chiamato il *limite* di tutti gli altri.

¹Definendo $\mathbb{R}$ come il completamento di $\mathbb{Q}$ è sufficiente dimostrare che una certa quantità sia il limite di una successione di Cauchy di numeri reali per essere anch'esso un numero reale.

Non compaiono concetti geometrici nè fisici. Nonostante la formulazione sia puramente verbale, la forte componente d'innovazione è che questa definizione si può convertire in termini di disuguaglianze e Cauchy sfrutterà questo fatto nelle dimostrazioni dei teoremi. Tra l'altro, Cauchy è il primo che introduce la possibilità che il rapporto tra due quantità che vanno a zero *possa* convergere a un limite, mentre i matematici prima di lui davano per scontato che ciò accedesse, occupandosi direttamente di studiare i metodi per calcolare tale limite. Questo si apprezza notevolmente con la buona definizione di derivata, che si utilizza tuttora: la derivata è definita come il limite del rapporto $\Delta y/\Delta x$, *quando esso esiste*.

Continuità

Fino alla prima metà del Settecento, i matematici trattavano quasi esclusivamente funzioni polinomiali, razionali, trigonometriche ed esponenziali; ciò faceva sì che non si avvertisse la necessità di una nozione rigorosa di continuità. Questo cambiò quando si cominciò a studiare equazione differenziali, che potevano avere come soluzioni anche delle funzioni che non fossero esprimibili in termini di funzioni elementari.

All'inizio del 1800 sia Cauchy (1821) che Bolzano² (*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey [sic] Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*, 1817) diedero la prima definizione rigorosa di funzione continua. Quella di Cauchy è composta da due parti: nella prima il linguaggio è quello dell'algebra delle disuguaglianze, fondamentale per il rigore dell'impostazione. Nella seconda il linguaggio è quello degli infinitesimali, per dare al lettore un'idea intuitiva della continuità:

La funzione $f(x)$ è una funzione continua della variabile x tra due limiti [dove limiti sta per estremi di un intervallo] se, per ogni valore di x tra quei limiti, la differenza [in modulo] $f(x+\alpha) - f(x)$ decresce indefinitamente con α . In altre, parole, la funzione $f(x)$ è continua rispetto a x tra gli estremi dati se, tra questi limiti, un incremento infinitamente piccolo nella variabile produce sempre un incremento infinitamente piccolo nella funzione stessa.

Il risultato più significativo sulle funzioni continue dimostrato per la prima volta da Cauchy nel *Cours d'analyse* è senza dubbio il teorema dei valori intermedi (o degli zeri).

Teorema: Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile x , continua rispetto a tale variabile tra $x = x_0$, $x = X$. Se le due quantità $f(x_0)$, $f(X)$ hanno segno opposto, l'equazione

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

²La definizione di Bolzano è leggermente diversa ma coglie la stessa essenza.

può essere soddisfatta da uno o più valori reali di x [compresi] tra x_0 e X .

Convergenza

Lungo il corso del Settecento, la nozione di convergenza di una serie non era univoca. Spesso, infatti, una serie era definita convergente se il suo termine n -esimo tendeva a zero, altre volte la definizione di convergenza era analoga a quella contemporanea.

Nel 1821 Cauchy diede la definizione moderna di convergenza e di somma di una serie con termini $u_0, u_1, u_2, \dots$:

Sia $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ la somma dei primi n termini, con n qualunque intero. Se, per crescenti valori di n la somma s_n tende a un certo limite s , la serie sarà chiamata convergente e il limite in questione sarà chiamato la somma della serie.

Inoltre Cauchy espose il criterio omonimo per la convergenza delle serie nel *Cours d'analyse*, ma Bolzano lo anticipò nel 1817, dando una sua versione del criterio, anche se non si può concludere che la definizione di Cauchy debba necessariamente essere dipesa da quella di Bolzano. Il criterio di Cauchy afferma che la serie di termine generale u_n converge (secondo la definizione precedente) se e solo se, per ogni K reale, le differenze tra la prima e le successive somme parziali sono inferiori a K per n abbastanza grande:

$$\begin{aligned} (2) \quad & s_{n+1} - s_n = u_n \\ & s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1} \\ & s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \\ & \vdots \end{aligned}$$

È importante osservare che era noto che fosse necessario che (2), cioè u_n tendesse a 0, ma era anche noto che non fosse sufficiente. Se invece tutte le differenze sopracitate tendono a 0 da un certo n in poi allora quest'ultima condizione è anche sufficiente.

Vale la pena aggiungere che il concetto di convergenza introdotto da Cauchy e Bolzano mancava di alcune sfumature moderne, in particolare Cauchy non faceva distinzione tra convergenza puntuale e convergenza *uniforme*: spesso sottintendendo quest'ultima in dimostrazioni che, in effetti, richiedevano l'uniformità. È famoso ad esempio il risultato, errato, che il limite di una successione di funzioni continue sia continuo, pubblicato da Cauchy nel 1821 e contestato nel 1826 da Abel, con un controesempio costruito nel contesto delle serie di Fourier. Questo fatto contribuì a porre l'attenzione sulla necessità di distinguere i diversi tipi di convergenza nell'ambito dell'analisi reale e funzionale.

Derivate

Mentre i protagonisti del *Cours d'analyse* sono i limiti, la continuità e la teoria della convergenza delle serie, le basi del moderno calcolo differenziale e integrali vengono gettate due anni dopo. Cauchy, nel *Calcul infinitésimal* del 1823 definì per la prima volta la derivata di una funzione in termini moderni, come limite del rapporto incrementale (quindi di un quoziente di differenze):

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Una definizione analoga, in realtà, era già stata proposta nel secolo precedente, ma ora può essere resa rigorosa grazie al nuovo concetto di limite introdotto da Cauchy stesso nel *Cours d'analyse*. Inoltre:

Questo limite, quando esiste, ha un valore definito per ogni particolare valore di x ; ma varia con x ... [Sarà] una nuova funzione della variabile x ... Per indicare questa dipendenza, diamo alla nuova funzione il nome di funzione derivata³, e la denotiamo con l'aiuto di un accento, con la notazione y' o $f'(x)$.

Cauchy è il primo matematico a dimostrare teoremi usando una definizione rigorosa di derivata, per esempio il teorema del valor medio per funzioni differenziabili, che è una conseguenza della proprietà (espressa in termini moderni)

$$\min_{[x_0, X]} f'(x) \leq \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \leq \max_{[x_0, X]} f'(x)$$

dove f è differenziabile in (x_0, X) e continua in $[x_0, X]$. Questo è anche il primo teorema in cui compare la notazione epsilon-delta che si è affermata fino ai giorni nostri.

Integrali

L'idea di Cauchy fu quella di considerare una funzione $f(x)$ continua su un intervallo (x_0, X) e di suddividere l'intervallo in n sotto-intervalli (x_i, x_{i+1}) , non necessariamente uguali tra loro. A questo punto l'integrale poteva essere approssimato semplicemente sommando gli n prodotti $(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$. Il problema di questo approccio è che il valore dell'approssimazione dipende dalla suddivisione dell'intervallo, quindi, affinché la definizione fosse ben posta, era necessario dimostrare che in ultima analisi il valore del limite di tale approssimazione fosse indipendente dalla suddivisione. Cauchy riuscì nell'intento usando una versione di continuità della funzione $f(x)$ più forte di quella puntuale, che ora chiamiamo continuità uniforme.

³*Fonction dérivée*, la nostra derivata.

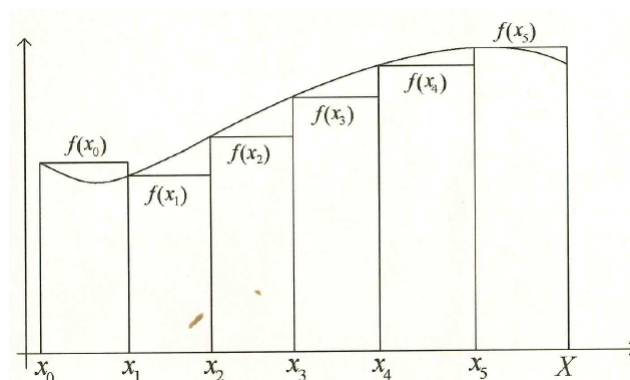


Figura 1: Rappresentazione dell'approssimazione dell'integrale definito.

Il risultato più importante sugli integrali definiti è certamente quello che ora è conosciuto come il *teorema fondamentale del calcolo integrale*, che Cauchy dimostrò ispirandosi nuovamente a Lagrange, che, anche senza una teoria consistente sull'integrale come quella di Cauchy, era riuscito a provare—di nuovo considerando espansioni in serie di Taylor—che se si considera una funzione $F(x)$ definita come l'area sotto il grafico della curva $y = f(t)$ nell'intervallo (x_0, x) , allora vale che $f(x) = F'(x)$.

Conclusione

Dunque perché il lavoro di Cauchy è importante? Prima, l'analisi era una branca in forte espansione, vitale, che ben si adattava alle esigenze anche pragmatiche della nuova classe protagonista in Europa, la medio-borghesia. I passi che si muovevano in questo nuovo territorio erano veloci, certo, ma anche incerti: abbiamo ricordato all'inizio l'imbarazzo dei matematici della seconda metà del Settecento nel giustificare le proprie procedure. Le fondamenta che potessero sorreggere questo nuovo edificio erano senz'altro intuitive, ma senza di esse i risultati che il calcolo produceva erano mattoni isolati. Cauchy non ha solamente proposto definizioni nuove o dimostrato nuovi teoremi: Cauchy ha costruito un'impalcatura.

Cauchy infatti non ha certo completato l'opera di rigorizzazione del calcolo—tanto meno l'ha iniziata—però ha dato gli strumenti per costruire risultati ben più generali di quelli considerati fino ad allora. Le successioni di Cauchy furono adottate per esempio come punto di partenza per una definizione rigorosa dei numeri reali prima di Dedekind, e sono uno strumento fondamentale dell'analisi in spazi di dimensione infinita; la definizione di integrale proposta da Riemann è una conseguenza quasi naturale della proposta di Cauchy di integrale come somma di aree di rettangoli. Sono solo due degli esempi di ciò che il lavoro di Cauchy ha permesso di raggiungere.

Cauchy ha anche avuto il grande merito di riconoscere che l'algebra potesse essere il punto di partenza giusto per il calcolo, così come aveva fatto Lagrange prima di lui, ma a differenza di questi Cauchy ha saputo indicarne i limiti, ovvero dare delle condizioni secondo le quali certi procedimenti erano permessi. Riuscire a dotare l'algebra del calcolo, così comoda e operativa, dello stesso rigore, e dunque degna dello stesso rispetto della geometria degli antichi Greci, ha certamente dato un'enorme spinta a questa giovane branca della matematica.

I metodi che Cauchy ha proposto sono essenzialmente quelli che vengono tuttora usati e insegnati nelle scuole e nelle università, anche perché sono scevri da speculazioni filosofiche o da intuizioni fisiche: sono pratici, asciutti, vanno all'essenza del problema che devono studiare proprio perché chi li ha introdotti ha colto quali fossero i punti essenziali attorno cui costruire tutto il resto. Insomma, Cauchy è stato la tessera fondamentale nel passaggio dal calcolo di Newton e Leibniz alla moderna analisi matematica.