Il contributo al calcolo infinitesimale di Bolzano

Nell'opuscolo *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* del 1817 Bolzano dà una definizione di funzione continua in un intervallo, che differisce poco da quella usata nella matematica contemporanea:

> Dato un intervallo $I = [a, b]$ e x un punto interno ad I, f è continua se la differenza $f(x + \omega) - f(x)$ può essere resa inferiore a qualsiasi valore dato prendendo ω sufficientemente piccolo.

Inoltre definisce quella che oggi viene chiamata successione di Cauchy e dimostra che converge:

> Se in una successione di grandezze $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots, F_n(x), \dots$, la differenza tra il termine ennesimo $F_n(x)$ e ogni termine successivo $F_{n+1}(x)$, lontano quanto si vuole dall'ennesimo, si mantiene più piccola di ogni grandezza data, prendendo n sufficientemente grande, allora esiste sempre una certa grandezza costante ed una sola a cui si avvicinano sempre più i termini di questa successione e a cui si possono avvicinare tanto quanto si vuole prolungando la serie sufficientemente lontano.

Il Teorema degli zeri, o Teorema di Bolzano, garantisce l'esistenza di almeno una radice nelle funzioni continue di variabile reale che assumono segni opposti ai due estremi di un intervallo.

> Una funzione continua di variabile x che è positiva per qualche valore di x e negativa per qualche altro valore di x in un intervallo chiuso $a \leq x \leq b$ di continuità deve assumere il valore zero per un valore intermedio di x.

cioè

se f è una funzione continua per x che varia da a a b, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un valore c tale che $a < c < b$ e $f(c) = 0$.