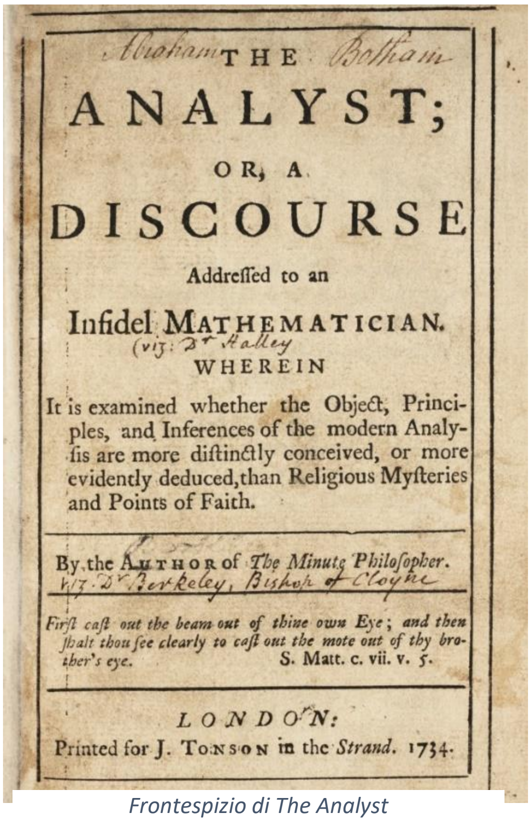
LA CRITICA DI GEORGE BERKELEY AL CALCOLO INFINITESIMALE

Introduzione

Né nel calcolo differenziale di Leibniz né nel metodo delle flussioni di Newton era esplicitamente illustrato il principio secondo il quale una quantità infinitesima, sommata a una quantità finita, può essere trascurata. Tale mancanza determinò una criticità nella struttura del calcolo, evidenziando una abissale differenza rispetto ai passaggi logici tradizionali. Alcuni eruditi del Settecento si posero un interrogativo circa la nuova scoperta matematica: i fondamenti del calcolo infinitesimale e la robustezza delle sue procedure erano stati ben definiti?
Molti scienziati furono ammaliati dalla potenza dei metodi infinitesimali, trascurando completamente il rigore dei nuovi procedimenti. Sicuramente la nuova branca della matematica si distanziava notevolmente dalla sistematicità tradizionale, cioè dai ragionamenti prettamente deduttivi, geometrici oppure induttivi.
A mettere in evidenza la questione fu il filosofo George Berkeley, il quale sostenne che il successo del calcolo newtoniano fu soltanto frutto del caso, ossia il metodo delle flussioni risolveva certi problemi e trovava numerose applicazioni nel mondo reale esclusivamente grazie a una compensazione casuale di errori.
Ovviamente, tutto ciò suscitò scalpore e polemiche che invasero il panorama erudito inglese.

The Analyst: a Discourse addressed to an Infidel Mathematician


Abraham THE Botham
ANALYST;
OR, A
DISCOURSE
Addressed to an
Infidel MATHEMATICIAN.
(viz: Dr Halley
WHEREIN
It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.

By the AUTHOR of *The Minute Philosopher*.
viz: Dr Berkeley, Bishop of Cloyne

First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye. S. Matt. c. vii. v. 5.

LONDON:
Printed for J. TONSON in the *Strand*. 1734.

Frontespizio di The Analyst

Quest'opera venne pubblicata da George Berkeley nel 1734, il cui sottotitolo accenna all'argomento di discussione, ossia: "Viene esaminato se l'Oggetto, i Principi e le Inferenze dell'analisi moderna siano concepiti in modo più chiaro, o più evidentemente dedotti, rispetto ai Misteri Religiosi e ai Punti di Fede".
Il matematico infedele potrebbe coincidere con la figura di Edmond Halley, anche se altri ipotizzarono che potesse essere Isaac Newton.
Unita a un taglio satirico, l'opera critica i fondamenti del calcolo infinitesimale ma non solo: Berkeley cercò infatti di smontare la matematica, affermò di scoprire numerosi vuoti nelle sue dimostrazione e nell'uso degli infinitesimi.
Il fulcro della questione non era tanto deridere la matematica o i matematici, ma piuttosto dimostrare che gli scienziati, come i cristiani, ponevano alla base del loro ragionamento incomprensibili "misteri".
Nel suo trattato, cercò di sostenere che, sebbene il calcolo portasse a risultati reali, le sue basi non erano più sicure di quelle della religione.
Le osservazioni di Berkeley erano ben fondate e importanti in quanto focalizzavano l'attenzione dei matematici sull'esigenza di un chiarimento logico del calcolo; dunque, in qualche modo, Berkeley fu d'aiuto, perché sollecitò i matematici nella giusta direzione. Egli sviluppò un'ingegnosa teoria per motivare il fatto che la correttezza di un risultato del calcolo era frutto di due errori di compensazione. Analogamente ai fedeli cristiani e ai loro "misteri", Berkeley concluse che la certezza della matematica non era maggiore della certezza della religione.

Esempi della debolezza del calcolo infinitesimale
Berkeley centrò con molta precisione il principale punto debole della costruzione newtoniana, cioè la definizione di flussione, così come quella degli incrementi infinitesimi, data invece dai "matematici stranieri", ossia dai collaboratori di Leibniz.
La seguente critica è contenuta nella XVI sezione del trattato ed è una delle più rilevanti; come si può notare, il tono e il registro della scrittura sono adatti e rivolti al "matematico infedele" (la traduzione è nostra).

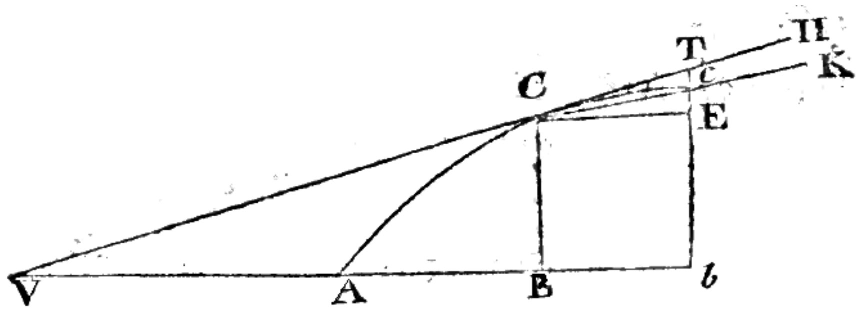
> "Se tu inizialmente assumi che una quantità sia aumentata di un valore nullo e, nell'espressione $x + o$, o non rappresenta nulla, in questa supposizione poiché non vi è incremento della radice, non ci sarà neppure incremento della potenza e di conseguenza, non comparirà nessuno dei termini della serie binomiale tranne il primo. Pertanto tu non arriverai mai legittimamente alla tua espressione di flussione con tale metodo.
> Quindi tu sei portato a procedere e a supporre in modo fallace un incremento (non nullo), modificando immediatamente dopo la tua supposizione in quella di incremento nullo.
> Può sembrare una grande abilità fare quest'ultima supposizione ad un certo momento, poiché se fosse stata fatta prima della divisione per o, tutto sarebbe svanito in una volta e non avresti ottenuto nulla. Con l'artificio di eseguire prima la divisione per o e poi cambiare l'ipotesi (cioè porre $o = 0$) si conservano i termini 1 e nx^{n-1}, ma nonostante questo passaggio per coprire l'errore, questo resta. Infatti sia che si ipotizzi prima sia che si ipotizzi dopo, quando si pone $o\ = 0$ in quello stesso istante la precedente ipotesi e tutto quello che si era ottenuto si elide.
> Questo è vero universalmente, qualunque sia il soggetto, in tutti i rami della conoscenza umana, in ciascuno dei quali io credo. L'uomo difficilmente ammetterebbe un ragionamento come questo che invece in matematica è accettato come dimostrazione."

In poche parole, per calcolare la flussione di una funzione $f(x)$ si deve infatti calcolare il rapporto incrementale $\frac{f(x+e\dot{x})-f(x)}{e}$ e porre $e = 0$, ma, dividendo per e, si fa tacitamente l'ipotesi che e non sia nullo e una volta effettuata la divisione non è lecito dunque, osservò Berkeley, porre $e = 0$. Ciò era dovuto alla mancanza di una precisa teoria dei limiti che rese difficile il superamento del paradosso.

L'altra definizione newtoniana, basata sulle prime e ultime ragioni, prevede invece la considerazione del rapporto non quando è uguale a zero, né quando è diverso da zero, ma nel momento stesso in cui si annulla e il triangolo caratteristico si contrae in un punto. Di questa formulazione ancora più oscura Berkeley si fa facilmente gioco nella XXXIV sezione:

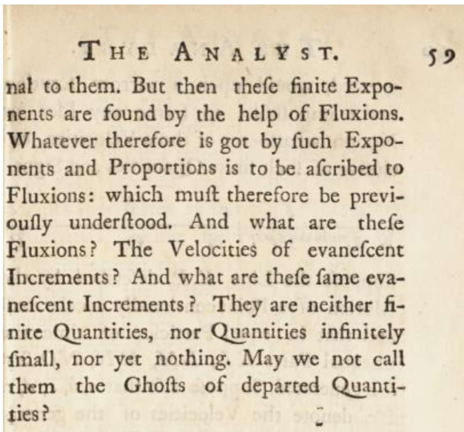
> "Si assume che le flussioni possono essere esposte o espresse da linee finite proporzionali ad esse: quali linee finite possono essere chiaramente concepite, conosciute e ragionate, in modo che possano essere sostituite con le flussioni e tali che le loro relazioni o proporzioni reciproche possano essere considerate come proporzioni di flussioni: con ciò la dottrina diventa chiara e utile.
> Io rispondo che se per arrivare a queste linee finite proporzionali alle Flussioni, si percorrono alcuni passaggi oscuri e inconcepibili, allora quelle stesse linee finite così

chiaramente concepite, riconoscono che il tuo procedimento non è chiaro e che il tuo metodo non è scientifico.
Ad esempio, si suppone che AB sia l'Ascissa, BC l'ordinata e VCH la tangente alla curva AC; sia Bb o CE l'incremento dell'ascissa, sia Ec l'incremento dell'ordinata che interseca VH nel punto T e sia Cc l'incremento della curva.
La linea retta Cc prolungata fino a K, contiene tre piccoli triangoli: CEc rettangolo, CEc mistilineo e CET rettangolo. È evidente che questi tre triangoli sono diversi l'uno dall'altro, il CEc rettangolo è minore del CEc mistilineo, i cui lati sono i tre incrementi menzionati precedentemente, e questo è minore del triangolo CET. Si suppone che l'ordinata bc trasli verso BC, in modo che il punto c coincida con il punto C; la linea retta CK, e di conseguenza la curva Cc, coincide con la tangente CH. Nel caso in cui il triangolo evanescente mistilineo CEc sarà, nella sua ultima forma, simile al triangolo CET: i suoi lati evanescenti CE, Ec e Cc saranno proporzionali a CE, ET e CT, i lati del triangolo CET. Quindi si conclude che le flussioni delle linee AB, BC e AC, essendo nell'ultimo rapporto dei loro incrementi evanescenti, sono proporzionali ai lati del triangolo CET o, che è tutt'uno, del triangolo VBC simile. È stato in particolare sottolineato e insistito dal grande autore, che i punti C e c non devono essere distanti tra loro, con il minimo intervallo di tempo: ma questo, al fine di trovare le proporzioni definitive delle linee CE, Ec e Cc (cioè le proporzioni delle flussioni o velocità) espresse in termini dei lati finiti del triangolo VBC, i punti C e c devono essere coincidenti. Questo è assolutamente inconcepibile. Eppure vi sono alcuni i quali mentre esprimono disappunto all'enunciazione di qualsiasi mistero, per quanto li concerne non fanno alcuna difficoltà, capaci di scolare un moscerino e di inghiottire un cammello.



Costruzione della sezione XXXIV

… E che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente. E allora non dobbiamo forse chiamarli spettri di quantità defunte?"

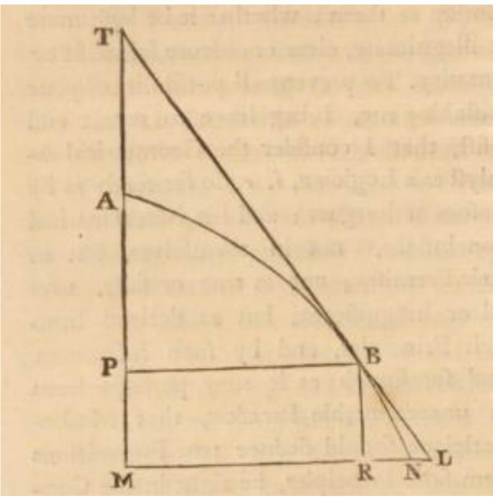

THE ANALYST. 59

nal to them. But then theſe finite Exponents are found by the help of Fluxions. Whatever therefore is got by ſuch Exponents and Proportions is to be aſcribed to Fluxions: which muſt therefore be previouſly underſtood. And what are theſe Fluxions? The Velocities of evaneſcent Increments? And what are theſe ſame evaneſcent Increments? They are neither finite Quantities, nor Quantities infinitely ſmall, nor yet nothing. May we not call them the Ghoſts of departed Quantities?

Estratto della sezione XXXV di The Analyst

Risultati sorprendenti da principi precari

Il filosofo irlandese non criticò sterilmente le fondamenta del calcolo infinitesimale, ma discusse e approfondì le motivazioni del successo di questa nuova branca della matematica. Moltissimi problemi infatti avevano trovato soluzione e, soprattutto, il corretto procedimento di risoluzione, grazie agli strumenti potenti del calcolo. Berkeley cercò di spiegare come da definizioni poco rigorose potessero discendere risultati tanto eccezionali, nascondendo una compensazione di errori.



Tangente a una parabola ottenuta tramite differenze infinitesimali (pagina 32, The Analyst)

> "Si supponga ad esempio di voler determinare la tangente a una parabola e sia AB la curva. Siano $AP = x$ l'ascissa, $PB = y$ l'ordinata, $PM = dx$ la differenza delle ascisse e $RN = dy$ la differenza delle ordinate.
> Ora si supponga che la curva sia poligonale.
> Di conseguenza, sia l'incremento o la differenza della curva BN una linea retta coincidente con la tangente e sia BRN il triangolo differenziale simile al triangolo TPB, allora la sottotangente PT è quarto proporzionale a RN: RB: PB, ossia dy: dx: y. Quindi la sottotangente diventa $\frac{ydx}{dy}$.
> Ora, secondo Berkeley, si commette un primo errore: il valore di PT risulta maggiore rispetto alla realtà: effettivamente, non è il triangolo RNB che è simile a PTB, ma è RLB; quindi (invece di RN) RL avrebbe dovuto essere il primo termine della proporzione, cioè $RN + NL$, cioè $dy + z$, da cui la vera espressione della sottotangente sarebbe stata $\frac{ydx}{dy+z}$. Si è quindi verificato un errore per difetto nel rendere dy il divisore il cui errore era pari a z, ossia il segmento NL compreso tra la curva e la tangente.
> Ora per la natura della curva $yy = px$, supponendo che p sia il parametro, da cui la regola delle differenze $2ydy = pdx$ e $dy = \frac{pdx}{2y}$. Ma se si moltiplica $y + dy$ per se stesso e se si conserva l'intero prodotto senza trascurare il quadrato della differenza, sostituendo le quantità aumentate nell'equazione della curva si ha: $dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dydy}{2y}$. Si è verificato un errore per eccesso nel rendere $dy = \frac{pdx}{dy}$che è seguito dall'errata regola delle differenze; la misura di questo errore è $\frac{dydy}{2y} = z$.
> Quindi i due errori essendo uguali e contrari si elidono: il primo errore per difetto è corretto dal secondo errore per eccesso."

La mutua cancellazione dei due errori porta dunque a risultati esatti e si arriva "se non alla scienza, almeno alla verità".

L'opera si chiude con un elenco di 67 domande relative agli argomenti citati e discussi in precedenza.