Maclaurin e Lagrange: due approcci al calcolo fra geometria e algebra

Il calcolo differenziale di Maclaurin

Colin Maclaurin sviluppa il calcolo differenziale nel suo *Treatise of fluxions* del 1742. Egli appartiene alla scuola matematica inglese e pertanto segue il modello newtoniano; l'unica sostanziale differenza è l'esclusione del concetto di infinitesimo che era stato saltuariamente usato da Newton stesso come nel caso della dimostrazione del lemma 2 del secondo libro dei *Principia*. La trattazione di Maclaurin è puramente geometrica e intuitiva e fa uso nella sua opera di 350 disegni che permettono una trattazione descrittiva degli oggetti matematici. Egli come il suo maestro concepisce la derivata, che analogamente indica col termine di *flussione*, come una velocità. Maclaurin stesso scrive,

> *La velocità secondo cui una quantità scorre...è chiamata flussione che è pertanto misurata dall'incremento [positivo o negativo] che sarebbe generato in un dato tempo da questo moto, se fosse uniformemente continuato da quello stesso istante senza accelerazione o decelerazione.*

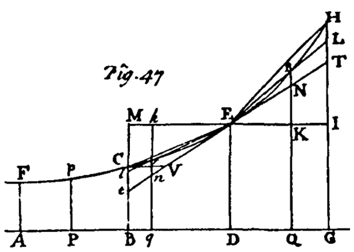

Figura 1: Fig. 47 del *Treatise of fluxions* di Maclaurin.

Osservando il disegno in figura 1 la flussione della curva in E viene misurata tramite la lunghezza del segmento TI. Vedremo ora come Maclaurin ha formalizzato l'uso delle *flussioni* nella ricerca dei punti di massimo e di minimo.

Era noto che nei punti di massimo di una curva regolare la tangente fosse orizzontale. In tempi antichi i Greci non trattarono solo le tangenti ma diedero anche le nozioni di convessità e concavità di una curva; i matematici del '700 vollero studiare più curve includendo anche quelle con punti di flesso. Maclaurin definisce a questo punto i punti di massimo in modo puramente descrittivo e senza usare disuguaglianze. Scrive infatti

> *Quando ad un certo istante la quantità variabile all'inizio cresce fino ad un momento assegnato e poi decresce...la sua grandezza è considerata un massimo...In problemi di questo tipo...la quantità variabile è rappresentata come l'ordinata della curva...L'ordinata di un punto della curva è un massimo...quando è più grande...delle ordinate che possono essere disegnate dalle parti di entrambi i rami della curva adiacenti a quel punto... .*

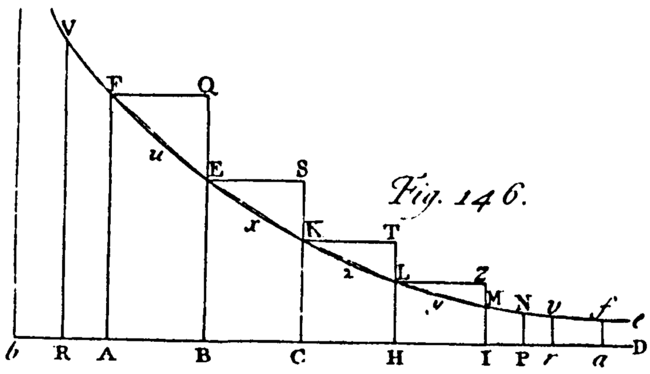

Figura 2: Fig. 146 del *Treatise of fluxions* di Maclaurin.

Ricordiamo pertanto la famosa serie di Eulero-Maclaurin che venne scoperta indipendentemente da entrambi ma pubblicata prima da Maclaurin. Supponendo di avere una curva-funzione $F(x)$ e un punto a in un linguaggio moderno abbiamo:

$$\sum_{h=0}^{+\infty} F(a+h) = \int_a^{+\infty} F(x)\,dx + \frac{1}{2}F(a) + \frac{1}{12}F'(a) - \frac{1}{720}F'''(a) + \frac{1}{30240}F^{(v)}(a) + \dots \,. \tag{1}$$

Questa formula stabilisce un legame fra serie e integrali. Infatti Maclaurin approssima così l'area sottesa sotto la curva con l'area di un opportuno plurirettangolo, in cui le basi dei rettangoli sono tali che $1 = AB = BC = CH = ...$, rappresentata dalla serie al primo membro dell'equazione 1 (si veda la figura 2). Maclaurin lavorò anche allo studio degli integrali ellittici. Egli osserva che ci sono delle curve la cui quadratura non può essere ricondotta a funzioni razionali e che, in casi particolari, alcuni di questi sono legati alla determinazione della lunghezza di archi circolari o logaritmi.

In maniera analoga, egli pertanto dimostra che $\int \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{1+x^2}}}$ determina la lunghezza di un arco di ellisse. Questo lavoro influenzò i lavori di d'Alambert, Eulero e Legendre nella ricerca di una forma canonica per integrali ellittici.

Il calcolo differenziale di Lagrange

Il calcolo differenziale di Lagrange, sviluppato nel trattato *Théorie des fonctions analytiques* del 1797, rappresenta un punto di svolta nello sviluppo dello stesso in Europa. Egli conosceva sia il lavoro di Newton sia quello di Leibniz ma nel suo lavoro seguirà l'impostazione di quest'ultimo. Tuttavia si discosta anche dalla teoria leibniziana poiché il calcolo, secondo lo stesso Lagrange non deve essere soggetto né ad alcuna intuizione di *moto* o *velocità* né tantomeno ad un concetto intuitivo di infinitesimo o limite. Tutto ciò viene definito tramite processi da lui considerati puramente algebrici e agli argomenti dei suoi predecessori sostituisce *"l'analisi algebrica di quantità finite"*. Egli basa la sua nuova teoria sull'assunto che lo sviluppo di una funzione in serie di potenze sia un'operazione prettamente algebrica come gli appare quando ottiene

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \qquad . \tag{2}$$

Tale convinzione nasce dalla lettura dell'*Introductio in analysin infinitorum* pubblicata da Eulero nel 1748 poiché lo stesso Eulero ricava gli sviluppi in serie di potenze con procedimenti giudicati da Lagrange puramente algebrici. Lagrange pertanto si sente legittimato a definire la derivata di una funzione come il coefficiente del termine lineare del suo sviluppo in serie di potenze. Supponiamo infatti di avere

$$f(x+h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + ... \qquad , \tag{3}$$

allora la derivata di f nel punto x è $p(x)$ e la notiamo con $f'(x)$. Analogamente definisce la derivata seconda come il termine lineare dello sviluppo di $f'(x)$ e, ricorsivamente, le derivate di ordine superiore. Pertanto con questa manipolazione algebrica Lagrange ottiene la serie oggi nota come serie di Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + ... \qquad . \tag{4}$$

Il prossimo step della trattazione di Lagrange è provare che una funzione con derivata positiva in un intervallo è crescente nel medesimo intervallo. Questo risultato viene usato per provare la disuguaglianza

$$f(x) + f'(p)h < f(x+h) < f(x) + f'(q)h, \tag{5}$$

dove $f'(p)$ e $f'(q)$ sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione $f'(x)$ nell'intervallo considerato. A questo punto il teorema dei valori intermedi garantisce l'esistenza di un punto $\xi \in (x, x+h)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + f'(\xi)h \tag{6}$$

e Lagrange così ottiene il teorema oggi noto come Teorema del valor medio o di Lagrange. Ragionando analogamente ma con derivate di ordine più alto ottiene:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n, \tag{7}$$

che risulta essere la celebre formula di Taylor con resto di Lagrange.

Conclusione

È singolare vedere come gli approcci di Maclaurin e Lagrange siano diversi ma funzionali alla formalizzazione di risultati molto simili. Singolare è anche osservare come concepiscono gli oggetti fondamentali del calcolo: le funzioni.
Il termine funzione comparirà per la prima volta nel lavoro del 1684 *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus* di Leibniz e Lagrange nella *Théorie des fonctions analytique* scrive:

> *Si chiama funzione di una o più quantità, ogni espressione del calcolo nella quale queste quantità entrano in maniera qualunque, insieme o no con altre quantità che si considerano aventi dei valori dati e costanti, mentre le quantità delle funzioni possono assumere ogni valore possibile.*

Maclaurin invece segue l'impostazione dello stesso Newton il quale, nel suo saggio *Come tracciare tangenti a linee meccaniche* ragiona in termini di moto.

> *Nella descrizione di qualsivoglia linea meccanica si possono trovare due momenti del genere che combinano o compongono i movimenti del punto che la descrive, e grazie a quei due movimenti si può trovare il movimento [risultante] di quel punto, la cui determinazione è in una tangente alla linea curva.*

Pertanto è evidente che la definizione di Lagrange si avvicini a quella odierna. La definizione di Newton invece fa riferimento ai concetti di linea meccanica e di curva poiché suo interesse è rivolto a studi cinematici. In un linguaggio moderno potremmo vedere le equazioni parametriche della traiettoria di un punto materiale che si muove nel piano $(x(t), y(t))$, dove $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, le *flussioni* delle variabili x e y (*fluenti* nel linguaggio newtoniano) coincidono con i differenziali rispetto al tempo delle funzioni x e y e vengono rispettivamente notate con $\dot{x}$ e $\dot{y}$. In maniera tuttavia analoga le funzioni di Lagrange e le curve di Newton e Maclaurin erano oggetti puramente polinomiali o frazioni di polinomi; alla luce di ciò in entrambe le teorie l'uso delle serie di potenze viene utilizzato per estendere questi concetti alle funzioni trascendenti. Da notare è la difficoltà, evidenziata dallo stesso Castelnuovo, di Newton nell'integrare funzioni razionali il cui denominatore possiede zeri reali con molteplicità semplice. Infatti l'integrazione di queste frazioni richiede l'uso dei logaritmi e pertanto, non potendo esprimere la primitiva tramite funzioni algebriche, Newton definisce nel *De quadratura curvarum* (1704) questa tipologia di frazioni *inquadrabili.*
La critica fu piuttosto dura con l'approccio inglese. Fra i maggiori oppositori troviamo George Berkeley che nel 1734 scrive *The Analyst* sotto forma di lettera a un *matematico infedele* comunemente ritenuto essere Edmond

Halley. Berkeley critica Newton proponendo in primis tesi di matrice greca. Infatti trova difficile pensare sia le *"velocità astratte di tali imperfette quantità nascenti"* sia quantità infinitamente piccole. La critica di Berkeley sottolineava l'oscurità degli oggetti così definiti e scrive:

> *E cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti. E cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente. Ed allora dobbiamo chiamarli spettri di quantità morte?*

Il *Treatise of fluxions* di Maclaurin nasce anche a seguito del lavoro di Berkeley e si offre di dare solidità alla teoria di Newton. Maclaurin altresì riconosce il fondamento delle tesi di Berkeley e rivendica l'uso nel suo trattato del rigore dei geometrici greci. Evita inoltre l'uso del concetto di infinitesimo usando nella sua trattazione solo i concetti di moto e velocità assunti come evidenti. Nella prefazione scrive:

> *L'autore di quel lavoro [Berkeley] aveva presentato il metodo delle flussioni come fondato su un falso ragionamento e pieno di misteri. Le sue motivazioni sembrano essere state motivate in gran parte dalla maniera concisa in cui gli elementi di questo metodo sono stati di solito descritti; e l'essere stato frainteso da una persona delle sue capacità mi è sembrata una prova sufficiente che si richiedesse una trattazione più completa dei loro fondamenti.*

Maclaurin tuttavia non riuscirà nel suo intento e non convincerà i matematici del continente. Riportiamo le considerazioni di Lagrange che, poiché segue una trattazione algebrica del calcolo, non approva l'introduzione di una idea ad esso *estranea*: la velocità. Pertanto nella *Théorie des fonctions analytique* scrive:

> *Ma, da un lato, introdurre il movimento in un calcolo che non ha che quantità algebriche per oggetto è introdurre una idea estranea, che costringe a considerare queste quantità come linee percorse da un mobile; d'altro lato bisogna riconosce che non si abbia affatto una idea ben chiara di cosa sia la velocità istantanea di un punto, quando questa velocità è variabile; e si può vedere nel dotto "Trattato delle flussioni" di Maclaurin come sia difficile dimostrare rigorosamente il metodo delle flussioni, e quanti artifici particolari occorra impiegare per dimostrare le diverse parti di questo metodo.*

Osserviamo infine come anche l'impostazione algebrica dello stesso Lagrange verrà anch'essa criticata. Infatti nel suo *Cours d'analyse* (1821) Cauchy si interroga sulla questione dei metodi dell'analisi ed afferma che abbia cercato di ricorrere a tutto il rigore che si esige in geometria con la finalità di non ricorrere mai ai "*ragionamenti tratti dalla generalità dell'algebra*". Egli continua asserendo che:

> *... [i ragionamenti tratti dalla generalità dell'algebra] non possono essere considerati, mi sembra, che come delle intuizioni adatte a far talvolta presentire la verità, ma che poco si accordino con l'esattezza tanto vantata delle scienze matematiche.*